

УДК 517.444, 517.957.7, 517.951.9, 51-7

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-669-678

EDN: WUYQMW

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

М. В. Половинкина

Воронежский государственный университет инженерных технологий Россия, Воронеж, Россия

Аннотация. Приводятся результаты, связанные с решением проблемы о наилучшем восстановлении решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности с оператором Бесселя по пространственной переменной по двум приближенно известным температурным профилям.

Ключевые слова: оператор Бесселя, оптимальное восстановление, экстремальная задача, преобразование Фурье—Бесселя, уравнение теплопроводности.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: М. В. Половинкина. О восстановлении решения начально-краевой задачи для сингулярного уравнения теплопроводности // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 669–678. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-669-678>

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди публикаций двух последних десятилетий можно выделить серию работ, связанных с восстановлением функций, их производных, решений начальных, краевых и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), по неполным и, возможно, неточным данным.

Работа [8] посвящена восстановлению функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. В работе [11] рассматривалась проблема восстановления функции по неточно заданному спектру. Следует отметить, что задача суммирования тригонометрического ряда Фурье с приближенно заданными коэффициентами Фурье рассматривалась в учебнике В. А. Ильина и Э. Г. Позняка [2] (издание 1967 г). В работе [1] рассматривалось восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным. Работы [13, 18] посвящены восстановлению функций и степеней оператора Лапласа от них по значениям их преобразования Фурье, заданным на компакте с погрешностью. Восстановление температурных профилей по данным измерений рассматривалось в [10, 12, 22]. Систематизированное изложение теории и методов оптимального восстановления можно найти в монографии [14].

Некоторые из установленных в этих работах результатов перенесены в работах [16, 17, 23–25] на ситуации с участием сингулярного оператора Бесселя и Лапласа—Бесселя [3, 4, 7, 19, 21].

Особенности такого типа, которыми обладают операторы типа Бесселя и Лапласа—Бесселя, возникают в моделях математической физики в таких случаях, когда характеристики сред (например, характеристики диффузии или характеристики теплопроводности) имеют вырожденные

степенные неоднородности. Кроме того, к таким уравнениям приводят ситуации, когда исследуются изотропные диффузионные процессы с осевой или сферической симметрией.

В настоящей работе мы переносим методы и результаты работы [22] на случай сингулярного уравнения теплопроводности с оператором Бесселя.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И j -ФУНКЦИЯХ БЕССЕЛЯ

Символом $C_{ev}^\infty([0, 1])$ обозначим пространство всех функций из пространства $C^\infty([0, 1])$, удовлетворяющих условию гладкости четного продолжения (четности по И. А. Киприянову)

$$\frac{d^\kappa g}{dx^\kappa}(0) = 0, \quad \kappa = 1, 3, 5, \dots$$

Пусть $L_2^\gamma(0, 1)$ означает замыкание пространства $C_{ev}^\infty([0, 1])$ по норме

$$\|g(\cdot)\|_{L_2^\gamma(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 x^\gamma |g(x)|^2 dx}.$$

Здесь и далее $\gamma > 0$.

Пусть $B_{x,\gamma}$ — оператор Бесселя, определенный формулой

$$B_{x,\gamma} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{\partial u}{\partial x} = x^{-\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (2.1)$$

Нормированная j -функция Бесселя порядка ν определяется формулой

$$j_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{z^\nu} J_\nu(z) = \Gamma(\nu + 1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m} m! \Gamma(m + \nu + 1)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера,

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(m + \nu + 1)}$$

— функция Бесселя первого рода порядка ν .

Потребность в j -функциях Бесселя возникает при решении задачи Штурма—Лиувилля следующего вида (см. [5, 6])

$$B_{x,2\nu+1} \Phi = -\lambda \Phi, \quad x \in [0, 1], \quad (2.2)$$

$$d\Phi/dx(0+) = 0, \quad \Phi(1-) = 0, \quad (2.3)$$

которая имеет собственные функции $j_\nu(\epsilon_\kappa x)$, соответствующие собственным значениям ϵ_κ^2 , где $\{\epsilon_\kappa\}$, $\kappa = 1, 2, \dots$ — последовательность всех положительных нулей функции Бесселя $j_\nu(\cdot)$, а значит, и функции $J_\nu(\cdot)$, пронумерованных в порядке возрастания. Функции $j_\nu(\epsilon_\kappa x)$, $\kappa = 1, 2, \dots$ образуют ортогональный базис в $L_2^\gamma(0, 1)$. Этот факт находит применение во многих прикладных задачах.

Объектом нашего исследования в настоящей статье является начально-краевая задача для сингулярного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Bu, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (2.4)$$

где $B = B_{x,\gamma}$ — оператор Бесселя, определяемый формулой (2.1), с начальным условием

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, 1], \quad (2.5)$$

и краевыми условиями

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0+, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2.6)$$

$$u(1-, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.7)$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(0, 1)$.

С помощью стандартной процедуры метода Фурье разделения переменных мы приходим к задаче Штурма—Лиувилля (2.2)–(2.3), после чего легко получить представление решения задачи (2.4)–(2.7) в виде

$$u(x, t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa} e^{-\epsilon_{\kappa} t} j_{\nu}(\epsilon_{\kappa} x), \quad (2.8)$$

где $\nu = (\gamma - 1)/2$,

$$A_{\kappa} = \frac{\epsilon_{\kappa}^{2\nu}}{2^{2\nu-1} \Gamma^2(\nu+1) J_{\nu+1}^2(\epsilon_{\kappa})} \int_0^1 x^{\gamma} u_0(x) j_{\nu}(\epsilon_{\kappa} x) dx, \quad \kappa = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

суть коэффициенты разложения

$$u_0(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa} j_{\nu}(\epsilon_{\kappa} x) \quad (2.10)$$

в ряд Фурье—Бесселя (см. [5, 6]) функции $u_0(x)$. От представлений (2.8), (2.9), (2.10) для дальнейшего удобства перейдем к представлениям

$$u(x, t) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} e^{-\epsilon_{\kappa} t} \Lambda_{\nu, \kappa}(x), \quad a_{\kappa} = \int_0^1 x^{\gamma} u_0(x) \Lambda_{\nu, \kappa}(x) dx, \quad (2.11)$$

$$u_0(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} a_{\kappa} \Lambda_{\nu, \kappa}(x), \quad \Lambda_{\nu, \kappa}(x) = \frac{j_{\nu}(\epsilon_{\kappa} x)}{\|j_{\nu}(\epsilon_{\kappa} x)\|_{L_2^{\gamma}(0,1)}} = \frac{\epsilon_{\kappa}^{\nu}}{2^{(2\nu-1)/2} \Gamma(\nu+1) J_{\nu+1}(\epsilon_{\kappa})} j_{\nu}(\epsilon_{\kappa} x). \quad (2.12)$$

3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поставим следующую задачу. Пусть известны функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2^{\gamma}(0, 1)$, являющиеся приближенными значениями решения $u(\cdot, t)$ начально-краевой задачи (2.4)–(2.7) в моменты t_1, t_2 , соответственно ($0 \leq t_1 < t_2$), причем

$$\|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^{\gamma}(0,1)} \leq \delta_j, \quad j = 1, 2, \quad (3.1)$$

где $\delta_j > 0$, $j = 1, 2$. Требуется каждой такой паре функций поставить в соответствие функцию из $L_2^{\gamma}(0, 1)$, которая в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала бы истинное распределение температуры в промежутке $(0, 1)$ в фиксированный момент времени $\tau \in (t_1, t_2)$.

Следуя [10, 22], любое отображение $m : L_2^{\gamma}(0, 1) \times L_2^{\gamma}(0, 1) \rightarrow L_2^{\gamma}(0, 1)$ мы называем *методом восстановления* (температуры в $(0, 1)$ в момент τ согласно этой информации). Значение

$$e(\tau, \bar{\delta}, m) = \sup_U \|u(\cdot, \tau) - m(\bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^{\gamma}(0,1)},$$

где $\bar{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), y_2(\cdot))$, $\bar{\delta} = (\delta_1, \delta_2)$,

$$U = \{(u_0(\cdot), \bar{y}(\cdot)) : u_0(\cdot) \in L_2^{\gamma}(0, 1), \bar{y}(\cdot) \in (L_2^{\gamma}(0, 1))^2, \|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^{\gamma}(0,1)} \leq \delta_j, j = 1, 2\},$$

называется *ошибкой* этого метода. Значение

$$E(\tau, \bar{\delta}) = \inf_{m: (L_2^{\gamma}(0,1))^2 \rightarrow L_2^{\gamma}(0,1)} e(\tau, \bar{\delta}, m)$$

называется *ошибкой оптимального восстановления*. Метод $\hat{m}$, для которого

$$E(\tau, \bar{\delta}) = e(\tau, \bar{\delta}, \hat{m}),$$

называется *оптимальным методом восстановления*.

4. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА И НИЖНЯЯ ОЦЕНКА ОШИБКИ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Рассмотрим вспомогательную экстремальную задачу

$$\|u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)}^2 \rightarrow \max, \quad (4.1)$$

$$\|u(\cdot, t_i)\|_{L_2^\gamma(0,1)}^2 \leq \delta_i^2, \quad i = 1, 2, \quad u_0 \in L_2^\gamma(0, 1), \quad (4.2)$$

где u — решение задачи (2.4)–(2.7). Функция, удовлетворяющая условиям (4.2), называется *допустимой функцией* задачи (4.1)–(4.2).

Лемма 4.1. Пусть S означает верхнюю границу $\|u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)}$ с условиями (4.2). Тогда

$$E(\tau, \bar{\delta}) \geq S.$$

Доказательство. Пусть $u(\cdot, \tau)$ — допустимая функция задачи (4.1)–(4.2). Тогда $-u(\cdot, \tau)$ — также допустимая функция задачи (4.1)–(4.2). Для всякого метода $m : (L_2^\gamma(0, 1))^2 \rightarrow L_2^\gamma(0, 1)$ имеем:

$$\begin{aligned} 2\|u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)} &= \|u(\cdot, \tau) - m(0)(\cdot) + m(0)(\cdot) - u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)} \leq \\ &\leq \|u(\cdot, \tau) - m(0)(\cdot)\|_{L_2^\gamma(0,1)} + \|m(0)(\cdot) - u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{u(\cdot, \tau) \in L_2^\gamma(0,1), \\ \|u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \\ j=1,2}} \|u(\cdot, \tau) - m(0)(\cdot)\|_{L_2^\gamma(0,1)} \leq 2 \sup_U \|u(\cdot, \tau) - m(\bar{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(0,1)}. \end{aligned}$$

В левой части полученного неравенства мы переходим к верхней границе допустимых функций, а в правой — к нижней границе всех методов. Этот шаг завершает доказательство леммы. $\square$

Лемма 4.2. Пусть

$$\beta_\kappa = e^{-2\epsilon_\kappa}, \quad \kappa = 1, 2, \dots, \\ \Delta_\kappa = [\beta_{\kappa+1}^{t_2-t_1}, \beta_\kappa^{t_2-t_1}], \quad \Delta_0 = [\beta_1^{t_2-t_1}, +\infty).$$

Зафиксируем $\iota = \iota(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ таким образом, чтобы выполнялось условие $\delta_2^2/\delta_1^2 \in \Delta_\iota$. Пусть

$$\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_1(\delta_1, \delta_2) = \begin{cases} \frac{\beta_{\iota+1}^{\tau-t_2} - \beta_\iota^{\tau-t_2}}{\beta_{\iota+1}^{t_1-t_2} - \beta_\iota^{t_1-t_2}}, & \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_\iota, \quad \iota \geq 1, \\ \beta_1^{\tau-t_1}, & \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_0, \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_2(\delta_1, \delta_2) = \begin{cases} \frac{\beta_\iota^{\tau-t_1} - \beta_{\iota+1}^{\tau-t_1}}{\beta_{\iota+1}^{t_2-t_1} - \beta_\iota^{t_2-t_1}}, & \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_\iota, \quad \iota \geq 1, \\ 0, & \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} \in \Delta_0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Пусть S означает верхнюю границу $\|u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)}$ с условиями (4.2). Тогда

$$S \geq \sqrt{\hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2}. \quad (4.5)$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что существует допустимая функция, норма которой в пространстве $L_2^\gamma(0, 1)$ равна (или больше) правой части неравенства (4.5). Построим такую функцию.

Введем величины $b_{1,\iota}$ и $b_{2,\iota}$ с помощью формул

$$\begin{aligned} b_{1,\iota} &= \frac{\delta_1^2}{\beta_\iota^{t_1}} \cdot \frac{\delta_2^2/\delta_1^2 - \beta_{\iota+1}^{t_2-t_1}}{\beta_\iota^{t_2-t_1} - \beta_{\iota+1}^{t_2-t_1}}, \\ b_{2,\iota} &= \frac{\delta_1^2}{\beta_{\iota+1}^{t_1}} \cdot \frac{\beta_\iota^{t_2-t_1} - \delta_2^2/\delta_1^2}{\beta_\iota^{t_2-t_1} - \beta_{\iota+1}^{t_2-t_1}}. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости равенств

$$b_{1,\iota} \beta_\iota^{t_e} + b_{2,\iota} \beta_{\iota+1}^{t_e} = \delta_e^2, \quad e = 1, 2.$$

Рассмотрим в условии (2.5) задачи (2.4)–(2.7) начальную функцию $\widehat{u}_0(x)$, определенную условиями

$$\widehat{u}_0(x) = \begin{cases} \sqrt{b_{1,\iota}} \Lambda_{\nu,\iota}(x) + \sqrt{b_{2,\iota}} \Lambda_{\nu,\iota+1}(x), & \iota = 1, 2, \dots, \\ \delta_1 \beta_1^{-t_1/2} \Lambda_{\nu,1}(x), & \iota = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Функция (4.6) допустима (это следует отметить, поскольку по условию основной задачи $t_1 \geq 0$). Решение задачи (2.4)–(2.7) с начальной функцией (4.6) имеет вид

$$\widehat{u}(x, t) = \begin{cases} \delta_1 \beta_1^{-t_1/2} e^{-\epsilon_1 t} \Lambda_{\nu,1}(x), & \iota = 0, \\ \sqrt{b_{1,\iota}} e^{-\epsilon_\iota t} \Lambda_{\nu,\iota}(x) + \sqrt{b_{2,\iota}} e^{-\epsilon_{\iota+1} t} \Lambda_{\nu,\iota+1}(x), & \iota = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.7)$$

Для функции (4.7) имеем:

$$\|\widehat{u}(x, t_1)\|_{L_2^\gamma(0,1)}^2 = \delta_1^2, \quad \|\widehat{u}(x, t_1)\|_{L_2^\gamma(0,1)}^2 = \delta_1^2 \beta^{t_2-t_1} \leq \delta_2^2,$$

а значит, это допустимая функция. При $t = \tau$ непосредственным вычислением получим:

$$\|\widehat{u}(x, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)}^2 = \widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2,$$

что и требовалось. $\square$

5. ВЕРХНЯЯ ОЦЕНКА ОШИБКИ ОПТИМАЛЬНОГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теперь построим метод оптимального восстановления. Для этого применим схему, предложенную в [12, 14, 15], подправляя ее для наших потребностей.

Пусть

$$y_\varrho(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} y_{\varrho\kappa} \Lambda_{\nu,\kappa}(x), \quad \varrho = 1, 2,$$

$$y_{\varrho\kappa} = \int_0^1 x^\gamma y_\varrho(x) \Lambda_{\nu,\kappa}(x) dx, \quad \varrho = 1, 2, \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

Будем искать оптимальный метод восстановления в виде

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(c_\kappa e^{\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} y_{1,\kappa} + (1 - c_\kappa) e^{\epsilon_\kappa(t_2-\tau)} y_{2,\kappa} \right) \Lambda_{\nu,\kappa}(\cdot). \quad (5.1)$$

Пусть

$$z_{j\kappa} = a_\kappa e^{-\epsilon_\kappa t_j} - y_{\kappa j}, \quad y_{j\kappa} = a_\kappa e^{-\epsilon_\kappa t_j} - z_{\kappa j}, \quad j = 1, 2, \quad \kappa \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Из условия (3.1) вытекает, что

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} z_{j\kappa}^2 \leq \delta_j^2, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда, согласно равенству Парсеваля [4, 6, 7], с учетом (5.2) получим

$$\begin{aligned} \|\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) - u(\cdot, \tau)\|_{L_2^\gamma(0,1)}^2 &= \int_0^1 (\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(x) - u(x, \tau))^2 x^\gamma dx = \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(c_\kappa e^{\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} y_{1,\kappa} + (1 - c_\kappa) e^{\epsilon_\kappa(t_2-\tau)} y_{2,\kappa} - a_\kappa e^{-\epsilon_\kappa \tau} \right)^2 = \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(c_\kappa e^{\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} (a_\kappa e^{-\epsilon_\kappa t_1} - z_{\kappa 1}) + (1 - c_\kappa) e^{\epsilon_\kappa(t_2-\tau)} (a_\kappa e^{-\epsilon_\kappa t_2} - z_{\kappa 2}) - a_\kappa e^{-\epsilon_\kappa \tau} \right)^2 = \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(c_\kappa e^{\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} z_{1,\kappa} + (1 - c_\kappa) e^{\epsilon_\kappa(t_2-\tau)} z_{2,\kappa} \right)^2. \end{aligned}$$

К общему члену полученной суммы применим неравенство Коши—Буняковского:

$$\begin{aligned} & \left(c_\kappa e^{\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} z_{1,\kappa} + (1-c_\kappa) e^{\epsilon_\kappa(t_2-\tau)} z_{2,\kappa} \right)^2 = \\ & = \left(\frac{c_\kappa e^{\epsilon_\kappa(t_1-\tau)}}{\sqrt{\hat{\lambda}_1}} \sqrt{\hat{\lambda}_1} z_{1,\kappa} + \frac{(1-c_\kappa) e^{\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}}{\sqrt{\hat{\lambda}_2}} \sqrt{\hat{\lambda}_2} z_{2,\kappa} \right)^2 \leq \\ & \leq \left(\frac{c_\kappa^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_1-\tau)}}{\hat{\lambda}_1} + \frac{(1-c_\kappa)^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}}{\hat{\lambda}_2} \right) (\hat{\lambda}_1 z_{1,\kappa}^2 + \hat{\lambda}_2 z_{2,\kappa}^2) \leq \\ & \leq \left(\frac{c_\kappa^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_1-\tau)}}{\hat{\lambda}_1} + \frac{(1-c_\kappa)^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}}{\hat{\lambda}_2} \right) (\hat{\lambda}_1 z_{1,\kappa}^2 + \hat{\lambda}_2 z_{2,\kappa}^2). \end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$e^2(\tau, \bar{\lambda}, \hat{m}) \leq \Upsilon \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\hat{\lambda}_1 z_{1,\kappa}^2 + \hat{\lambda}_2 z_{2,\kappa}^2) \leq \Upsilon (\hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2),$$

где

$$\Upsilon = \Upsilon(\{c_\kappa\}) = \sup_{\kappa \in \mathbb{N}} \left(\frac{c_\kappa^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_1-\tau)}}{\hat{\lambda}_1} + \frac{(1-c_\kappa)^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}}{\hat{\lambda}_2} \right). \quad (5.3)$$

Положим

$$c_\kappa = \hat{c}_\kappa = \frac{\hat{\lambda}_1 e^{2\epsilon_\kappa t_2}}{\hat{\lambda}_1 e^{2\epsilon_\kappa t_2} + \hat{\lambda}_2 e^{2\epsilon_\kappa t_1}}, \quad 1 - \hat{c}_\kappa = \frac{\hat{\lambda}_2 e^{2\epsilon_\kappa t_1}}{\hat{\lambda}_1 e^{2\epsilon_\kappa t_2} + \hat{\lambda}_2 e^{2\epsilon_\kappa t_1}}, \quad \kappa = 1, 2, \dots \quad (5.4)$$

Тогда

$$\frac{\hat{c}_\kappa^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_1-\tau)}}{\hat{\lambda}_1} + \frac{(1-\hat{c}_\kappa)^2 e^{2\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}}{\hat{\lambda}_2} = \frac{e^{2\epsilon_\kappa(t_1+t_2-\tau)}}{\hat{\lambda}_1 e^{2\epsilon_\kappa t_2} + \hat{\lambda}_2 e^{2\epsilon_\kappa t_1}} = \frac{1}{\hat{\lambda}_1 e^{-2\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} + \hat{\lambda}_2 e^{-2\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}}. \quad (5.5)$$

Введем в рассмотрение функцию

$$g(\zeta) = -1 + \hat{\lambda}_1 e^{-2\zeta(t_1-\tau)} + \hat{\lambda}_2 e^{-2\zeta(t_2-\tau)}.$$

Очевидно, что $g''(\zeta) > 0$, так что $g(\zeta)$ — выпуклая вниз функция. Из равенств

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1 \beta_\iota^{t_1} + \hat{\lambda}_2 \beta_\iota^{t_2} &= \beta_\iota^\tau, \\ \hat{\lambda}_1 \beta_{\iota+1}^{t_1} + \hat{\lambda}_2 \beta_{\iota+1}^{t_2} &= \beta_{\iota+1}^\tau \end{aligned}$$

следует, что значения $\zeta_\iota = \epsilon_\iota$ и $\zeta_{\iota+1} = \epsilon_{\iota+1}$ являются нулями функции $g(\zeta)$, а в силу ее выпуклости $g(\zeta) \geq 0$ при $\zeta \leq \epsilon_\iota$ и $\zeta \geq \epsilon_{\iota+1}$.

Из неравенства $g(\zeta) \geq 0$ при $\zeta \leq \epsilon_\iota$ и $\zeta \geq \epsilon_{\iota+1}$ следует, что при выборе последовательности $\{c_\kappa\}$ в соответствии с формулами (5.4), с учетом (5.5), из (5.3) мы получим:

$$\Upsilon = \Upsilon(\{\hat{c}_\kappa\}) = \sup_{\kappa \in \mathbb{N}} \frac{1}{\hat{\lambda}_1 e^{-2\epsilon_\kappa(t_1-\tau)} + \hat{\lambda}_2 e^{-2\epsilon_\kappa(t_2-\tau)}} \leq 1.$$

Отсюда следует, что

$$e^2(\tau, \bar{\lambda}, \hat{m}) \leq \hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2 \leq E^2(\tau, \bar{\lambda}).$$

Таким образом, для метода $\hat{m}$ мы получили верхнюю оценку его ошибки, которая совпадает с нижней оценкой ошибки оптимального восстановления. Это означает, что $\hat{m}$ — оптимальный метод.

Сформулируем полученный результат в виде теоремы, которая является аналогом [22, теорема 1] и основным результатом настоящей статьи.

Теорема 5.1. Для любой пары $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ выполняется равенство

$$E(\tau, \bar{\delta}) = \sqrt{\hat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \hat{\lambda}_2 \delta_2^2}.$$

При этом метод

$$\widehat{m}(y_1, y_2)(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} e^{-\epsilon_{\kappa} t} \frac{\widehat{\lambda}_1 e^{-\epsilon_{\kappa} t_1} y_{1\kappa} + \widehat{\lambda}_2 e^{-\epsilon_{\kappa} t_2} y_{2\kappa}}{\widehat{\lambda}_1 e^{-2\epsilon_{\kappa} t_1} + \widehat{\lambda}_2 e^{-2\epsilon_{\kappa} t_2}} \Lambda_{\nu, \kappa}(x)$$

является оптимальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виск Н. Д., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения волнового уравнения по неточным начальным данным // Мат. заметки. — 2007. — 81, № 6. — С. 803–815. — DOI: 10.4213/mzm3743.
2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. Ч. II. — М.: Физматлит, 1967.
3. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — 64, № 2. — С. 211–426. — DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426.
4. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
5. Кузнецов А. В., Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Райхельгауз Л. Б., Санина Е. Л., Шишкина Э. Л. j-Функции Бесселя и их применения в задачах математической физики. — Воронеж: ВГУ, 2015.
6. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя // Усп. мат. наук. — 1951. — 6, № 2. — С. 102–143.
7. Ляхов Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
8. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Мат. сб. — 2002. — 193, № 3. — С. 79–100. — DOI: 10.4213/sm637.
9. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функци. анализ и его прилож. — 2003. — 37, № 3. — С. 51–64. — DOI: 10.4213/faa157.
10. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб. — 2009. — 200, № 5. — С. 37–54. — DOI: 10.4213/sm7301.
11. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Мат. заметки. — 2012. — 92, № 1. — С. 59–67. — DOI: 10.4213/mzm9042.
12. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Сивкова Е. О. Оптимальное восстановление температуры трубы по неточным измерениям // Тр. МИАН. — 2021. — 312. — С. 216–223. — DOI: 10.4213/tm4139.
13. Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Мат. сб. — 2012. — 203, № 4. — С. 119–130. — DOI: 10.4213/sm7903.
14. Осипенко К. Ю. Введение в теорию оптимального восстановления: учебное пособие для вузов. — СПб: Лань, 2022.
15. Осипенко К. Ю. О построении семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов // Изв. РАН. Сер. мат. — 2024. — 88, № 1. — С. 98–120. — DOI: 10.4213/im9384.
16. Половинкина М. В. О восстановлении решения задачи Коши для сингулярного уравнения теплопроводности // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прилож. — 2024. — 231. — С. 89–99. — DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-89-99.
17. Половинкина М. В., Половинкин И. П. Замечания о восстановлении решений начально-краевых задач для сингулярных волновых уравнений // Прикл. мат. физ. — 2023. — 55, № 4. — С. 330–338. — DOI: 10.52575/2687-0959-2023-55-4-330-338.
18. Сивкова Е. О. Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье // Владикавк. мат. ж. — 2012. — 14, № 4. — С. 63–72.
19. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
20. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. Table of integrals, series, and products. — Amsterdam: Academic Press, 2007.
21. Muravnik A. B. Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2016. — 216. — С. 345–496. — DOI: 10.1007/s10958-016-2904-0.
22. Osipenko K. Yu., Wedenskaya E. V. Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data // J. Complexity. — 2007. — 23, № 4–6. — С. 653–661. — DOI: 10.1016/j.jco.2007.03.003.
23. Polovinkina M. V. Recovery of the operator Δ_B from its incomplete Fourier–Bessel image // Lobachevskii J. Math. — 2020. — 41, № 5. — С. 839–852.

24. *Polovinkina M. V., Polovinkin I. P.* Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data// *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (3). — 2023. — 29, № 41. — DOI: 10.1007/s40590-023-00513-3.
25. *Sitnik S. M., Fedorov V. E., Polovinkina M. V., Polovinkin I. P.* On recovery of the singular differential Laplace—Bessel operator from the Fourier—Bessel transform// *Mathematics*. — 2023. — 11, № 5. — 1103. — DOI: 10.3390/math11051103.

Половинкина Марина Васильевна

Воронежский государственный университет инженерных технологий Россия, Воронеж, Россия

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

UDC 517.444, 517.957.7, 517.951.9, 51-7

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-669-678

EDN: WUYQMW

On the recovery of the solution of the initial-boundary value problem for the singular heat conduction equation

M. V. Polovinkina

Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

Abstract. We present the results concerning the research of the problem of the best recovery of the solution of the initial-boundary value problem for the heat equation with the Bessel operator in the spatial variable from two approximately known temperature profiles.

Keywords: Bessel operator, optimal recovery, extremal problem, Fourier—Bessel transform, heat equation.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: M. V. Polovinkina, “On the recovery of the solution of the initial-boundary value problem for the singular heat conduction equation,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 669–678. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-669-678>

REFERENCES

1. N. D. Vysk and K. Yu. Osipenko, “Optimal’noe vosstanovlenie resheniya volnovogo uravneniya po netochnym nachal’nym dannym” [Optimal recovery of the solution of the wave equation from inaccurate initial data], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2007, **81**, No. 6, 803–815, DOI: 10.4213/mzm3743 (in Russian).
2. V. A. Il’in and E. G. Poznyak, *Osnovy matematicheskogo analiza. Ch. II* [Fundamentals of Mathematical Analysis. Part II], Fizmatlit, Moscow, 1967 (in Russian).
3. V. V. Katrakhov and S. M. Sitnik, “Metod operatorov preobrazovaniya i kraevye zadachi dlya singulyarnykh ellipticheskikh uravneniy” [The transmutation method and boundary-value problems for singular differential equations], *Sovrem. mat. Fundam. naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 2, 211–426, DOI: 10.22363/2413-3639-2018-64-2-211-426 (in Russian).
4. I. A. Kipriyanov, *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1997 (in Russian).

5. A. V. Kuznetsov, L. N. Lyakhov, I. P. Polovinkin, L. B. Raykhel'gauz, E. L. Sanina, and E. L. Shishkina, *j-Funktsii Besselya i ikh primeneniya v zadachakh matematicheskoy fiziki* [j-Bessel Functions and Their Applications in Problems of Mathematical Physics], VGU, Voronezh, 2015 (in Russian).
6. B. M. Levitan, "Razlozhenie v ryady i integraly Fur'e po funktsiyam Besselya" [Expansion into Fourier series and integrals with Bessel functions], *Usp. Mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1951, **6**, No. 2, 102–143 (in Russian).
7. L. N. Lyakhov, *V-gipersingulyarnye integraly i ikh primeneniye k opisaniyu funktsional'nykh klassov Kipriyanova i k integral'nykh uravneniyam s V-potentsial'nymi yadrami* [B-hypersingular Integrals and Their Applications to the Description of the Kupriyanov Functional Classes and to Integral Equations with B-potential Kernels], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
8. G. G. Magaril-II'yaev and K. Yu. Osipenko, "Optimal'noe vosstanovlenie funktsiy i ikh proizvodnykh po koeffitsientam Fur'e, zadannym s pogreshnost'yu" [Optimal recovery of functions and their derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 3, 79–100, DOI: 10.4213/sm637 (in Russian).
9. G. G. Magaril-II'yaev and K. Yu. Osipenko, "Optimal'noe vosstanovlenie funktsiy i ikh proizvodnykh po priblizhennoy informatsii o spektre i neravenstva dlya proizvodnykh" [Optimal Recovery of functions and their derivatives from inaccurate information about the spectrum and inequalities for derivatives], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2003, **37**, No. 3, 51–64, DOI: 10.4213/faa157 (in Russian).
10. G. G. Magaril-II'yaev and K. Yu. Osipenko, "Optimal recovery of the solution of the heat equation from inaccurate data," *Sb. Math.*, 2009, **200**, No. 5, 665–682, DOI: 10.1016/SM2009v200n05ABEH004014.
11. G. G. Magaril-II'yaev and K. Yu. Osipenko, "Kak nailuchshim obrazom vosstanovit' funktsiyu po netochno zadannomu spektru?" [How best to recover a function from its inaccurately given spectrum?], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2012, **92**, No. 1, 59–67, DOI: 10.4213/mzm9042 (in Russian).
12. G. G. Magaril-II'yaev, K. Yu. Osipenko, and E. O. Sivkova, "Optimal'noe vosstanovlenie temperatury trub po netochnym izmereniyam" [Optimal recovery of pipe temperature from inaccurate measurements], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2021, **312**, 216–223, DOI: 10.4213/tm4139 (in Russian).
13. G. G. Magaril-II'yaev and E. O. Sivkova, "Best recovery of the Laplace operator of a function from incomplete spectral data," *Sb. Math.*, 2012, **203**, No. 4, 569–580, DOI: 10.1070/SM2012v203n04ABEH004235.
14. K. Yu. Osipenko, *Vvedenie v teoriyu optimal'nogo vosstanovleniya: uchebnoe posobie dlya vuzov* [Introduction to Optimal Renewal Theory: A Textbook for Universities], Lan', SPb, 2022 (in Russian).
15. K. Yu. Osipenko, "On the construction of families of optimal recovery methods for linear operators," *Izv. Math.*, 2024, **88**, No. 1, 92–113, DOI: 10.4213/im9384e.
16. M. V. Polovinkina, "O vosstanovlenii resheniya zadachi Koshi dlya singulyarnogo uravneniya teploprovodnosti" [On the recovery of the solution of the Cauchy problem for the singular heat equation], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2024, **231**, 89–99, DOI: 10.36535/2782-4438-2024-231-89-99 (in Russian).
17. M. V. Polovinkina and I. P. Polovinkin, "Zamechaniya o vosstanovlenii resheniy nachal'no-kraevykh zadach dlya singulyarnykh volnovykh uravneniy" [Notes on the recovery of solutions of initial-boundary value problems for singular wave equations], *Prikl. mat. fiz.* [Appl. Math. Phys.], 2023, **55**, No. 4, 330–338, DOI: 10.52575/2687-0959-2023-55-4-330-338 (in Russian).
18. E. O. Sivkova, "Ob optimal'nom vosstanovlenii laplasiana funktsii po ee netochno zadannomu preobrazovaniyu Fur'e" [On the optimal recovery of the Laplacian of a function from its inaccurately given Fourier transform], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz Math. J.], 2012, **14**, No. 4, 63–72 (in Russian).
19. S. M. Sitnik and E. L. Shishkina, *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravneniy s operatorami Besselya* [The Transmutation Operators Method for Differential Equations with Bessel Operators], Fizmatlit, Moscow, 2019 (in Russian).
20. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, Amsterdam, 2007.
21. A. B. Muravnik, "Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2016, **216**, 345–496, DOI: 10.1007/s10958-016-2904-0.
22. K. Yu. Osipenko and E. V. Wedenskaya, "Optimal recovery of solutions of the generalized heat equation in the unit ball from inaccurate data," *J. Complexity*, 2007, **23**, No. 4–6, 653–661, DOI: 10.1016/j.jco.2007.03.003.
23. M. V. Polovinkina, "Recovery of the operator Δ_B from its incomplete Fourier–Bessel image," *Lobachevskii J. Math.*, 2020, **41**, No. 5, 839–852.

24. M. V. Polovinkina and I. P. Polovinkin, “Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data,” *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 2023, **29**, 41, DOI: 10.1007/s40590-023-00513-3.
25. S. M. Sitnik, V. E. Fedorov, M. V. Polovinkina, and I. P. Polovinkin, “On recovery of the singular differential Laplace—Bessel operator from the Fourier—Bessel transform,” *Mathematics*, 2023, **11**, No. 5, 1103, DOI: 10.3390/math11051103.

M. V. Polovinkina

Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia

E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru