

УДК 517.954

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-643-653

EDN: WTQYMH

ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА—КИПРИЯНОВА. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Л. Н. Ляхов^{1,2,3}, В. А. Калитвин^{2,4}, М. Г. Лапшина²¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия²Липецкий государственный педагогический университет
им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия³Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия⁴Российская академия народного хозяйства и государственной службы
при Президенте Российской Федерации, Москва, Россия

Аннотация. Преобразование Радона—Киприянова (K_γ) введено в 1998 г. В теоретических и прикладных исследованиях требуется ввести двойственное к нему преобразование, которое в работе обозначено $K_\gamma^\#$. Доказаны теоремы об ограниченности преобразования $K_\gamma^\#$ в соответствующем подпространстве Л. Шварца основных функций. Получена формула представления обобщенной свертки $K_\gamma^\#$ -преобразований функций, принадлежащих соответствующим пространствам основных функций.

Ключевые слова: преобразование Радона—Киприянова, преобразование Фурье, преобразование Фурье—Бесселя, обобщенная свертка.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Результаты работы поддержаны грантом РНФ (проект № 24-21-00387).

Для цитирования: Л. Н. Ляхов, В. А. Калитвин, М. Г. Лапшина. Двойственное преобразование Радона—Киприянова. Основные свойства // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 643–653. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-643-653>

1. ВВЕДЕНИЕ

Различные задачи естествознания, порожденные сферической симметрией аргумента соответствующих функций, приводят к преобразованию Радона специального вида, которое может использоваться не только для работы с функциями, определенными в евклидовых пространствах. Более необычным оказывается возможность работы во фрактальных структурах Б. Мандельброта [8]. Изучаемое преобразование называется *преобразованием Радона—Киприянова*, введено в работах [4, 5]. В этой работе продолжены исследования, начатые в [7]. Перейдем к основным определениям.

Пусть положительное число γ фиксировано, и пусть $\mathbb{R}_n^+$ — часть евклидова пространства точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, определенная неравенством $x_1 > 0$. Через $\mathcal{P}_{x_1}^\gamma$ будем обозначать оператор Пуассона [9], действие которого на локально интегрируемую функцию f определено следующим

выражением:

$$\mathcal{P}_{x_1}^\gamma f(x) = C(\gamma_i) \int_0^\pi f(x_1 \cos \alpha, x') \sin^{\gamma-1} \alpha \, d\alpha,$$

где для удобства введено обозначение $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$.

Через $S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ обозначим класс пробных функций Л. Шварца $\{\varphi\}$, состоящий из функций, четных по переменной x_1 . Соответствующий класс регулярных весовых распределений S'_{ev} определяется весовой билинейной формой [3]

$$(f, \varphi)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \varphi(x) x_1^\gamma dx.$$

На основе оператора Пуассона введем в пространстве распределений S'_{ev} весовую обобщенную δ -функцию, сосредоточенную на поверхности $P(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_n^+$ (как правило, размерности $n-1$), следующим определением:

$$(\mathcal{P}_{x_1} \delta(P(x)), \varphi)_\gamma = C(\gamma) \int_{\Gamma=\{z: P(z)=0\}} \tilde{\varphi}(z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z), \quad (1.1)$$

где $z = (z_1, z_2, x')$, $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x')$ и введены обозначения $\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 \cos \alpha, \\ z_2 = x_1 \sin \alpha, \end{array} \right| 0 < \alpha < \pi$. При этом $-\infty < z_1 < \infty$, $0 < z_2 < \infty$. Будем называть δ -функционал (1.1) *распределением Дирака–Пуассона, сосредоточенном на поверхности $P(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}_n^+$* .

Отметим, что если бы первоначально поверхность $P(x) = 0$ была бы сферой $|x| - R = 0$, то отображенная поверхность интегрирования в (1.1) — тоже сфера $|z| = R$, но уже в евклидовом пространстве большей размерности: $\mathbb{R}_{n+1}^+ = \{z : z_2 > 0\}$. Далее рассматривается ситуация, когда поверхностью интегрирования является гиперплоскость в $\mathbb{R}_n$.

Мы следуем классическому определению преобразования Радона (см. например, [1, с. 16], [10, с. 20, формула (1.3)]). *Преобразование Радона–Киприянова* на основе введенного выше распределения (1.1) (введено в работах [4, 5]; см. также книги [6, с. 211–225] и [2, с. 483–495]) определено следующей конструкцией:

$$K_\gamma[f](\theta; p) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x_1}^\gamma \delta(p - \langle x; \theta \rangle) x_1^\gamma dx,$$

где $x = (x_1, x')$, $x_1 \in \mathbb{R}_1^+$, $x' \in \mathbb{R}_{n-1}$. Согласно определению (1.1) имеем

$$K_\gamma[f](\theta; p) = C(\gamma, n) \int_{\Gamma=\{z: p=\langle z, \tilde{\theta} \rangle\}^+} \tilde{f}(z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z), \quad (1.2)$$

$$z = (z_1, z_2, x'), \quad \tilde{\theta} = (\theta_1, 0, \theta_2, \dots, \theta_n), \quad \{z : p = \langle z, \tilde{\theta} \rangle\}^+ = \{z : \langle z, \tilde{\theta} \rangle, z_2 > 0\}.$$

Функция $\tilde{f}$ выражается через функцию f очевидным образом: $\tilde{f}(z) = f(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x')$.

Как видим, здесь гиперплоскость $\Gamma = \{z : p = \langle z_1, \tilde{\theta} \rangle\}^+ \subset \mathbb{R}_{n+1}^+$; при этом выражение $\langle z, \tilde{\theta} \rangle = z_1 \theta_1 + x_2 \theta_2 + \dots + x_n \theta_n$ представляет собой скалярное произведение $(n+1)$ -мерных векторов z и $\tilde{\theta}$. Если θ — единичный вектор нормали к плоскости $\Gamma = \{x : p = \langle x, \theta \rangle, x \in \mathbb{R}_n^+\}$, то $|p|$ — расстояние от начала координат до плоскости $\langle x, \theta \rangle = p$. То же самое справедливо для уравнения $\langle z, \tilde{\theta} \rangle = p$, $z \in \mathbb{R}_{n+1}^+$.

В принятых выше обозначениях K_γ -преобразование (1.2) сводится к *специальному весовому преобразованию Радона* в $\mathbb{R}_{n+1}^+$ (см. [4, 5])

$$K_\gamma[f](\theta; p) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(z) \delta(p - \langle z, \tilde{\theta} \rangle) z_2^{\gamma-1} dz = C(\gamma) \int_{\{p=\langle z, \Theta \rangle\}^+} \tilde{f}(z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z), \quad (1.3)$$

представленному в виде интеграла по части плоскости $\{p = \langle z, \tilde{\theta} \rangle\}^+$, которая записана в евклидовом полупространстве ($z_2 > 0$) $\mathbb{R}_{n+1}^+$ в виде $\{p = \langle z, \Theta \rangle\}^+$. Это уравнение определяет плоскость, параллельную весовой оси координат z_2 с единичным вектором нормали $\Theta \in \mathbb{R}_{n+1}^+$. Здесь и далее $C(\gamma)$ — константа, нормирующая интегральный оператор Пуассона.

Полуплоскость интегрирования в выражении (1.2) обозначим символом $\Theta_\perp^+$, т. е.

$$\Theta_\perp^+ = \{z: \langle \Theta, z \rangle = p, \quad z_2 > 0\} \in \overline{\mathbb{R}_{n+1}^+}.$$

При фиксированном векторе Θ примем обозначение

$$K_\gamma[f](\Theta; p) = K_{\gamma, \Theta}[f](p).$$

Следуя [10, с. 17], запишем преобразование Радона—Киприянова в виде интеграла по полуплоскости $\Theta_\perp^+$ в евклидовом пространстве точек $\in \mathbb{R}_{n+1}^+$:

$$K_{\gamma, \Theta}[f](p) = C(\gamma) \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z). \quad (1.4)$$

Отметим, что если выделить в (1.4) интегрирование по переменной z_2 , то получим смешанное преобразование Радона с преобразованием Меллина.

2. ДВОЙСТВЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В $\mathbb{R}_1$

Пусть функции f и g принадлежат подпространству $S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_1^+)$ основных функций Л. Шварца, состоящему из функций, четных по Киприянову¹ по переменной x_1 . Функция (1.4) является функцией одного переменного p , поэтому позволяет ввести линейную форму в $\mathbb{R}_1$ следующего вида:

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_1} \int_{\Theta_\perp^+} \tilde{f}(p\Theta + z) g(p) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z) dp. \quad (2.1)$$

Введем новую переменную

$$y = p\Theta + z \in \overline{\mathbb{R}_{n+1}^+} = \{y = (z_1, z_2, x') : z_2 \geq 0\}.$$

Согласно нашему построению векторы Θ и z в выражении (2.1) ортогональны: $\langle \Theta, z \rangle = 0$. Тогда $\langle y, \Theta \rangle = p\Theta^2 + \langle z, \Theta \rangle = p$, где $\Theta = (\theta_1, 0, \theta')$, $|\Theta| = 1$ (т. к. по построению $\theta_1^2 + |\theta'|^2 = 1$).

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(y) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle) z_2^{\gamma-1} dy = \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(y) \mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^\# [g](y) z_2^{\gamma-1} dy. \quad (2.2)$$

Преобразование

$$\mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^\# [g](y) = C(\gamma) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle)$$

будем называть *двойственным преобразованием Радона—Киприянова* в $\mathbb{R}_{n+1}^+$.

Воспользуемся цилиндрическими координатами $y \in \mathbb{R}_{n+1}^+$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 \cos \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi, \\ z_2 = x_1 \sin \alpha, \quad x_1 > 0, \\ x' = x', \end{array} \right. \quad y = (z_1, z_2, x') \rightarrow \{x : (x_1, x'), x_1 > 0\} = x \in \mathbb{R}_n^+.$$

Учитывая равенство $f(x_1, x') = \tilde{f}(z)$, из (2.1) имеем

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(y) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle) z_2^{\gamma-1} dy =$$

¹Так называются функции, имеющие по переменной $x_1 \geq 0$ четное продолжение на отрицательную полуось $x_1 \leq 0$ с сохранением класса своей принадлежности (см. [3, с. 21]).

$$= C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_n^+} \int_0^\pi f(x_1, x') g\left(\theta, (x_1 \theta_1 \cos \alpha + x_2 \theta_2 + \dots + x_n \theta_n)\right) \sin^{2\gamma} \alpha x_1^\gamma dx.$$

Согласно определению оператора Пуассона получим следующее представление линейной формы (1.4):

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x_1}^\gamma g(\theta, \langle x, \theta \rangle) x_1^\gamma dx_1 dx'.$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Теорема 2.1. Для функций $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1 \times S_1^+(n))$ справедливы равенства

$$\int_{\mathbb{R}_1} K_{\gamma, \Theta}[f](p) g(p) dp = \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \tilde{f}(y) \mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^\# [g](y) z_2^{\gamma-1} dy = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma, \theta}^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx', \quad (2.3)$$

первое из которых выполняется в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{n+1}^+$ (в результате вращения (1.1)) с двойственным оператором

$$\mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^\# [g](y) = C(\gamma) g(\Theta, \langle y, \Theta \rangle), \quad y \in \mathbb{R}_{n+1}^+, \quad \Theta = (\theta_1, 0, \theta'), \quad (2.4)$$

а второе справедливо в исходном евклидовом полупространстве $\mathbb{R}_n^+$ с двойственным оператором

$$K_{\gamma, \theta}^\# g(x) = \mathcal{P}_{x_1}^\gamma (g(\theta, \langle \theta, x \rangle)). \quad (2.5)$$

Замечание 2.1. В частности, если в (2.3) положить $g = K_\gamma[f](\Theta, \langle y, \Theta \rangle)$, то для преобразования Радона—Киприянова, записанного вращением (1.1), имеет место равенство

$$\mathcal{K}_{\gamma, \Theta}^\# \left[K_{\gamma, \Theta}[f] \right] (y) = C(\gamma) K_\gamma[f](\Theta, \langle y, \Theta \rangle) = C(\gamma) K_\gamma[f](\Theta; p).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\gamma^\# K_\gamma[f](\Theta, \langle y, \Theta \rangle) &= \int_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_{x_1} \left(K_\gamma[f](\theta, \langle y, \theta \rangle) \right) \theta_1^\gamma dS(\theta) = \\ &= C(\gamma) \int_{S_1^+(n+1)} K_\gamma[f](\Theta, \langle y, \Theta \rangle) z_2^{\gamma-1} dS(\theta), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\Theta = (\theta_1, 0, \theta')$, $|\theta| = 1$.

В теореме 2.1 определены виды одномерных двойственных операторов Радона—Киприянова. Оператор, двойственный к преобразованию Радона—Киприянова в $\mathbb{R}_n$, определим интегрированием по взвешенной сфере в следующей теореме.

Теорема 2.2. Пусть $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ и $g \in S_{ev}(\mathbb{R}_1 \times S_1^+(n))$. Тогда

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{K}_\gamma^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx',$$

где

$$\mathcal{K}_\gamma^\# g(x) = \int_{S_1^+(n)} K_{\gamma, \theta}^\# g(x) x_1^\gamma dx = \int_{S_1^+(n)} \mathcal{P}_{x_1} \left(g(\theta, \langle \theta, x \rangle) \right) \theta_1^\gamma dS(\theta). \quad (2.7)$$

Доказательство. Согласно равенству (2.2) имеем

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta) = \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) K_{\gamma, \theta}^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx' dS(\theta).$$

Теперь воспользуемся определением оператора $K_{\gamma,\theta}^\#$ формулой (2.4). Тогда

$$\int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta, p) g(p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta) = \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{P}_{x_1}^\gamma(g(\theta, \langle \theta, x \rangle)) dx_1 dx' dS(\theta).$$

Изменение порядка интегрирования здесь законно, т. к. рассматриваемые функции f и g принадлежат пространству Л. Шварца. Поменяв порядок интегрирования, получим утверждение доказываемой теоремы. $\square$

Отметим, что теорема 2.2 в теории интегральных преобразований называется *проекционной теоремой*. Также отметим, что двойственный оператор $\mathcal{K}_\gamma^\#$ получен дополнительным интегрированием функции $K_{\gamma,\theta}^\# g(x)$ по полусфере $S_1^+(n)$, поэтому $\mathcal{K}_\gamma^\#$ не зависит от вектора нормали к плоскости.

3. О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ФУРЬЕ—БЕССЕЛЯ И ФУРЬЕ

Напомним, что через $S_{ev} = S_{ev}^+(\mathbb{R}_n^+)$ обозначено подпространство пространства Л. Шварца основных функций, четных по Киприянову по переменной x_1 .

Смешанное преобразование Фурье—Бесселя (введено в [9] в виде преобразования Ганкеля; общее определение и свойства этого преобразования см. в [2]) определено формулой

$$F_B[f](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) j_\nu(x_1 \xi_1) e^{-i\langle x', \xi' \rangle} x_1^\gamma dx, \quad \gamma = 2\nu + 1 > 0,$$

где $j_\nu(t) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1) J_\nu(t)}{t^\nu}$, J_ν — функция Бесселя первого рода, $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Пространство основных функций S_{ev} инвариантно относительно преобразование F_B и обратимо [2]. Обратное преобразование определено равенством

$$F_B^{-1}[\widehat{f}](x) = (2\pi)^{1-n} 2^{-2\nu} \Gamma^{-2}(\nu + 1) F_B[\widehat{f}](-x) = f(x).$$

Известно представление функции Бесселя интегралом Пуассона [4]

$$j_\nu(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int_0^\pi e^{-t \cos \alpha} \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha.$$

Отсюда, воспользовавшись определением (1.1), получим

$$F_B[\widehat{f}](x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} e^{-i\langle z, \tilde{\xi} \rangle} \tilde{f}(z) z_2^{\gamma-1} dz, \quad \tilde{f}(z) = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x'\right). \quad (3.1)$$

Разумеется, здесь вектор $\tilde{\xi}$ произвольный, т. е. не обязательно единичный.

3.1. Преобразование Фурье в направлении вектора нормали. Пусть $\mathbb{Z}_n^+ = S_{ev}(S_1^+(n) \times \mathbb{R}_1)$ — пространство основных функций Л. Шварца, заданных на единичном цилиндре $S_1^+(n) \times \mathbb{R}_1 \in \mathbb{R}_{n+1}$. Очевидно, что функция $K_\gamma[f](\xi, p)$, определенная на $\mathbb{Z}_n^+$, является четной в следующем смысле:

$$K_\gamma[f](-\xi, -p) = K_\gamma[f](\xi, p).$$

Теорема 3.1. Пусть $|\theta| = 1$. Если $f \in \mathbb{Z}_n^+$, то для любой точки $\theta \in \overline{S_1^+(n)}$ выполнены равенства

$$F_{(p \rightarrow s)}[K_{\gamma,\theta}[f](p)](s) = F_B[f](s\theta) = F_B[f](\xi), \quad (3.2)$$

$$K_{\gamma,\theta}[f](p) = F_{(s \rightarrow p)}^{-1}[F_B[f](s\theta)](p) = F_{(s \rightarrow p)}^{-1}[F_B[f](\xi)](p), \quad (3.3)$$

где $s\theta = \xi$, $|\theta| = 1$.

Доказательство. Имеем

$$F_{(p \rightarrow s)}[K_{\gamma, \theta}[f](p)](s) = \int_{\mathbb{R}_1} e^{-ips} K_{\gamma, \theta}[f](p) dp.$$

Воспользуемся представлением K_γ -преобразования в терминах определения (1.1), тогда

$$F_{(p \rightarrow s)}[K_{\gamma, \theta}[f](p)](s) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_1} e^{-ips} \int_{\Theta^\perp} \tilde{f}(p\Theta + z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z) dp,$$

где $\Theta = \tilde{\theta} = (\theta_1, 0, \theta')$.

Введем новую переменную интегрирования $y = p\Theta + z$ (при $|\Theta| = |\tilde{\theta}| = 1$), тогда $p = \langle \Theta, y \rangle$, $dy = dz dp$, следовательно

$$F_{(p \rightarrow s)}[K_{\gamma, \theta}[f](p)](s) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} e^{-is\langle \Theta, y \rangle} \tilde{f}(y) z_2^{\gamma-1} dy.$$

Здесь вектор $s\Theta$ произвольной длины, поэтому обозначим его так же, как в формуле (2.7), символом $s\tilde{\theta} = \xi$. Тогда, обозначая через $\tilde{y} = (z_1, 0, x')$, запишем

$$F_{(p \rightarrow s)}[K_{\gamma, \theta}[f](p)](s) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} e^{-i\langle \xi, \tilde{y} \rangle} \tilde{f}(y) z_2^{\gamma-1} dy.$$

Вводя, как и раньше, цилиндрические координаты, и воспользовавшись интегралом Пуассона представления j -функций Бесселя, вернемся к классическому преобразованию Фурье—Бесселя (с j -функцией Бесселя). Имеем

$$F_{(p \rightarrow s)}[K_{\gamma, \theta}[f](p)](s) = \int_{\mathbb{R}_n^+} j_\nu(s\theta_1 x_1) e^{-i\langle s\theta', x' \rangle} f(x) x_1^\gamma dx = F_B[f](\xi),$$

где $\xi = s\theta$ — вектор нормали (не единичный) к плоскости $p = \langle x, \xi/s \rangle$.

Утверждение (3.3) теоремы 3.1 вытекает из (3.2) применением к нему обратного преобразования Фурье. $\square$

Равенства (3.2) и (3.3) другими средствами получены в [4, 5].

4. K_γ -ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБОБЩЕННОЙ СВЕРТКИ

Смешанной обобщенной сверткой (сверткой Пуассона) функций называется выражение

$$(f * g)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_n^+} T_{x_1}^{y_1} f(x_1, x' - y') g(y) y_1^\gamma dy_1 dy',$$

где обобщенный сдвиг Пуассона определен формулой [4]

$$T_{x_1}^{y_1} f(x) = C(\gamma) \int_0^\pi f\left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 y_1 \cos \alpha}, x'\right) \sin^{\gamma-1} \alpha d\alpha,$$

$$C(\gamma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \quad \gamma > 0.$$

Теорема 4.1. Если $u, v \in S_{ev}$, то справедлива формула

$$K_\gamma[(u * v)_\gamma](\xi; p) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_\gamma[u](\xi, t) K_\gamma[v](\xi; p - t) dt. \quad (4.1)$$

Доказательство. Из равенства (3.2) имеем

$$K_\gamma[(u * v)_\gamma](\xi; p) = F_{(s \rightarrow p)}^{-1} [F_B[(u * v)_\gamma](s\xi)](p\xi).$$

Известна формула преобразовании Фурье—Бесселя обобщенной свертки функций

$$F_B[(u * v)_\gamma](\xi) = F_B[u](\xi) F_B[v](\xi).$$

Следовательно,

$$K_\gamma[(u * v)_\gamma](\xi; p) = F_{(s \rightarrow p)}^{-1} [F_B[u](\xi s) F_B[v](s\xi)](p\xi).$$

Теперь воспользуемся свойством преобразования Фурье: обратное преобразование Фурье произведения функций есть свертка (обычная, не обобщенная) обратных преобразований Фурье исходных функций:

$$K_\gamma[(u * v)_\gamma](\xi; s) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{s \rightarrow t}^{-1} [F_B[u]](\xi t) F_{(s \rightarrow p-t)}^{-1} [F_B[v]](\xi(p-t)) dt.$$

Согласно (3.2), каждая из двух функций под знаком интеграла представляют собой преобразования Радона—Киприянова. Отсюда следует (4.1). $\square$

Лемма 4.1. Для любой функции $\omega \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$ справедлива формула

$$\widetilde{K_\gamma[\widehat{\omega}]}(\theta; p) = (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) \omega(p\theta). \quad (4.2)$$

Доказательство. Пространство основных функций S_{ev} инвариантно относительно смешанного преобразования Фурье—Бесселя, поэтому $\widehat{\omega} = F_B[\omega] \in S_{ev}$.

Учитывая четность преобразования Радона—Киприянова, имеем

$$\widetilde{K_\gamma[\widehat{\omega}]}(\theta; p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ips} K_\gamma[\widehat{\omega}](\theta; s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ips} K_\gamma[\widehat{\omega}](-\theta; -s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ips} K_\gamma[\widehat{\omega}](-\xi; s) ds.$$

В этом равенстве справа уже прямое преобразование Фурье по параметру s . По формуле (3.1) получим

$$\widetilde{K_\gamma[\widehat{\omega}]}(\theta; p) = (2\pi)^{-1} F_B[\widehat{\omega}](-\xi) = (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) F_B^{-1}[\widehat{\omega}](\xi) = (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) F_B^{-1}[\widehat{\omega}](\xi).$$

Но на функциях из основного пространства S_{ev} преобразование Фурье—Бесселя обратимо: $F_B^{-1}[\widehat{\omega}](x) = \omega(x)$. Отсюда следует формула (4.2). $\square$

Теорема 4.2. Если $g \in \mathbb{Z}_n^+$, то

$$F_{(p \rightarrow s)} \left[\mathcal{K}_\gamma^\# g \right] (s\theta) = (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) |\xi|^{1-n} \left[\widehat{g} \left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi| \right) + \widehat{g} \left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi| \right) \right].$$

Доказательство. Условимся в этом доказательстве использовать следующие обозначения прямого и обратного преобразований Фурье: $\widehat{f}(x)$ и $\widehat{g}(\xi)$, соответственно. Разумеется, эти преобразования определены в направлении вектора нормали к плоскости интегрирования. При этом, учитывая обратимость преобразования Фурье в классе основных функций Л. Шварца, имеем равенство $\widehat{\widehat{\omega}(x)} = \omega$.

Согласно теореме 2.2

$$\int_{\mathbb{R}_n^+} f(x) \mathcal{K}_\gamma^\# g(x) x_1^\gamma dx_1 dx' = \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} K_\gamma[f](\theta; p) g(p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta).$$

Отсюда, полагая $f(x) = F_B[\omega](x) = \widehat{\omega}$, запишем

$$\int_{\mathbb{R}_n^+} \mathcal{K}_\gamma^\# [g](p) F_B[\omega](x) x_1^\gamma dx_1 dx' = \int_{S_1(n)} \int_{\mathbb{R}_1} g(\theta; s) \widetilde{K_\gamma[\widehat{\omega}]}(\theta; s) ds \theta_1^\gamma dS(\theta).$$

По формуле Парсеваля для преобразования Фурье получим

$$\int_{\mathbb{R}_n^+} \mathcal{K}_\gamma^\# [g] \widehat{\omega} x_1^\gamma dx_1 dx' = \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} \widehat{g}(\theta, p) \widetilde{K_\gamma[\widehat{\omega}]}(\theta; p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta).$$

Согласно (4.2) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_n^+} \mathcal{K}_\gamma^\# [g] \widehat{\omega} x_1^\gamma dx_1 dx' &= (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) \int_{S_1^+(n)} \int_{\mathbb{R}_1} \widehat{g}(\theta, p) \omega(\theta p) dp \theta_1^\gamma dS(\theta) = \\ &= (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) \int_{\mathbb{R}_n^+} \widehat{g}(\xi, p) \omega(\xi) \xi_1^\gamma d\xi = \\ &= (2\pi)^{n-2} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) \int_{\mathbb{R}^n} \left[\widehat{g}\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) + \widehat{g}\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right) \right] |\xi|^{1-n-\gamma} \omega(\xi) \left(\frac{\xi_1}{|\xi|}\right)^\gamma d\xi, \end{aligned}$$

где мы положили $\xi = p\theta$ отдельно для $p > 0$ и $p < 0$. Поскольку ω — произвольная функция основного пространства S_{ev} , то имеет место равенство

$$\widetilde{\mathcal{K}^\# g}(\xi) = (2\pi)^{n-1} 2^{2\nu} \Gamma^2(\nu+1) \left[\widehat{g}\left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi|\right) + \widehat{g}\left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi|\right) \right] |\xi|^{1-n}.$$

□

Теорема 4.3. Если $f \in S_{ev}(\mathbb{R}_n^+)$, то

$$K_\gamma^\# K_\gamma[f](x) = |S_1(n-1)| \left(\frac{1}{|x|} * f \right)_\gamma,$$

где $|S_1(n-1)|$ — площадь единичной сферы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_{n-1}$, $(u, v)_\gamma$ — обобщенная свертка функций, порожденная смешанным обобщенным сдвигом Пуассона.

Доказательство. Согласно равенству (2.5), имеем

$$\mathcal{K}_\gamma^\# K_\gamma[f](\Theta, \langle z, \Theta \rangle) = C(\gamma) \int_{S_1^+(n+1)} K_\gamma[\widetilde{f}](\Theta, \langle z, \Theta \rangle) z_2^{\gamma-1} dS(\xi)$$

(напомним, что $z = (z_1, z_2, x') \in \mathbb{R}_{n+1}^+$, $\widetilde{f} = f\left(\sqrt{z_1^2 + z_2^2}, x'\right)$, $\Theta = (\theta_1, 0, \theta_2, \dots, \theta_n)$, $|\Theta| = 1$).

Воспользуемся представлением преобразования Радона—Киприянова (1.3), тогда

$$\mathcal{K}_\gamma^\# K_\gamma[f](\Theta, \langle z, \Theta \rangle) = C(\gamma) \int_{S_1^+(n+1)} \int_{\Theta_\perp^+} \widetilde{f}(p\Theta + z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z) dS(\xi).$$

Учитывая то, что $s\Theta = \langle x, \Theta \rangle \Theta = \tilde{x} = (x_1, 0, x')$ — проекция начала координат на плоскость интегрирования $\Theta_\perp^+$, запишем

$$\mathcal{K}_\gamma^\# K_\gamma[f](\Theta, \langle z, \Theta \rangle) = C(\gamma) \int_{S_1^+(n+1)} \int_{\Theta_\perp^+} \widetilde{f}(\tilde{x} + z) z_2^{\gamma-1} d\Gamma(z) dS(\xi). \quad (4.3)$$

Применением меры Лебега на группе вращений $SO(n)$ в [9, с. 217, формула (2.7)] получено равенство

$$\frac{1}{|S_1(n)|} \int_{SO(n)} f(\xi \theta_n) d\xi = \int_{S_1(n)} f(\theta) dS, \quad (4.4)$$

из которого вытекает

$$\int_{S_1(n)} \int_{\Theta_\perp} f(y) dy = |S_1(n-1)| \int_{\mathbb{R}_n} \frac{f(y)}{|x-y|} dy. \quad (4.5)$$

Продолжая правую часть равенства (4.3) по формулам (2.6) и (4.5), получим

$$\mathcal{K}_\gamma^\# K_\gamma[f](\Theta, \langle z, \Theta \rangle) = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_{n+1}^+} \frac{\tilde{f}(z)}{|\tilde{x} - z|} z_2^{\gamma-1} dz.$$

В левую и правую части полученного равенства введем цилиндрические координаты $y \in \mathbb{R}_{n+1}^+$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = x_1 \cos \alpha, \quad 0 < \alpha < \pi, \\ z_2 = x_1 \sin \alpha, \quad x_1 > 0, \\ x' = x', \end{array} \right| \quad y = (z_1, z_2, x') \rightarrow \{x : (x_1, x'), x_1 > 0\} = x \in \mathbb{R}_n^+.$$

Учитывая, что при этом

$$C(\gamma) \frac{\tilde{f}(z)}{|\tilde{x} - z|} \rightarrow f(x) T_{x_1}^{y_1} \left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + |x' - y'|^2}} \right),$$

получим утверждение теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гельфанд И. М., Граев И. М., Виленкин Н. Я. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. — М.: ГИФМЛ, 1952.
2. Катрахов В. В., Катрахова А. А., Ляхов Л. Н., Муравник А. Б., Ситник С. М., Хе К. Ч. Сингулярные краевые задачи. — Воронеж: Научная книга, 2024.
3. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
4. Киприянов И. А., Ляхов Л. Н. О преобразованиях Фурье, Фурье—Бесселя и Радона// Докл. АН СССР. — 1998. — 360, № 2. — С. 157–160.
5. Ляхов Л. Н. Преобразование Киприянова—Радона// Тр. МИАН. — 2005. — 248. — С. 153–163.
6. Ляхов Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их применение к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
7. Ляхов Л. Н., Калитвин В. А., Лапшина М. Г. О преобразовании, двойственном к преобразованию Радона—Киприянова// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. — 2024. — 232. — С. 70–77.
8. Ляхов Л. Н., Саннина Е. Л. Дифференциальные и интегральные операции в скрытой сферической симметрии и размерность кривой Коха// Мат. заметки. — 2023. — 113, № 4. — С. 517–528.
9. Левитан Б. М. Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя// Усп. мат. наук. — 1951. — 6, № 2. — С. 102–143.
10. Наттерер Ф. Математические основы компьютерной томографии. — М.: Мир, 1990.

Л. Н. Ляхов

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец, Россия

E-mail: levnllya@mail.ru

В. А. Калитвин

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Москва, Россия

E-mail: kalitvin@gmail.com

М. Г. Лапшина

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

E-mail: marina.lapsh@ya.ru

UDC 517.954

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-643-653

EDN: WTQYMH

Dual Radon—Kipriyanov transformation. Basic properties

L. N. Lyakhov^{1,2,3}, V. A. Kalitvin^{2,4}, and M. G. Lapshina²¹Voronezh State University, Voronezh, Russia²Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shanskiy, Lipetsk, Russia³Yelets State University named after I. A. Bunin, Yelets, Russia⁴Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia

Abstract. The Radon—Kipriyanov transformation (K_γ) was introduced in 1998. In theoretical and applied studies, it is necessary to introduce its dual transformation, which is denoted by $K_\gamma^\#$ in the paper. Theorems on the boundedness of the $K_\gamma^\#$ transformation in the corresponding Schwartz subspace of the main functions are proved. A formula for representing the generalized convolution of $K_\gamma^\#$ -transformations of functions belonging to the corresponding spaces of the main functions is obtained.

Keywords: Radon—Kipriyanov transformation, Fourier transformation, Fourier—Bessel transformation, generalized convolution.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The results of this work were supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 24-21-00387).

For citation: L. N. Lyakhov, V. A. Kalitvin, M. G. Lapshina, “Dual Radon—Kipriyanov transformation. Basic properties,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 4, 643–653. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-643-653>

REFERENCES

1. I. M. Gel'fand, I. M. Graev, and N. Ya. Vilenkin, *Integral'naya geometriya i svyazannye s ney voprosy teorii predstavleniy* [Integral Geometry and Related Topics in Representation Theory], GIFML, Moscow, 1952 (in Russian).
2. V. V. Katrakhov, A. A. Katrakhova, L. N. Lyakhov, A. B. Muravnik, S. M. Sitnik, and K. Ch. Khe, *Singulyarnye kraevye zadachi* [Singular Boundary-Value Problems], Nauchnaya Kniga, Voronezh, 2024 (in Russian).
3. I. A. Kipriyanov, *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1997 (in Russian).
4. I. A. Kipriyanov and L. N. Lyakhov, “O preobrazovaniyakh Fur'e, Fur'e—Besselya i Radona” [On the Fourier, Fourier—Bessel and Radon transformations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1998, **360**, No. 2, 157–160 (in Russian).
5. L. N. Lyakhov, “Preobrazovanie Kipriyanova—Radona” [Kipriyanov—Radon transform], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **248**, 153–163 (in Russian).
6. L. N. Lyakhov, *V-gipersingulyarnye integraly i ikh primeneniye k opisaniiyu funktsional'nykh klassov Kipriyanova i k integral'nykh uravneniyam s V-potentsial'nyimi yadrami* [B-hypersingular Integrals and Their Applications to the Description of the Kipriyanov Functional Classes and to Integral Equations with B-potential Kernels], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).



7. L. N. Lyakhov, V. A. Kalitvin, and M. G. Lapshina, “O preobrazovanii, dvoystvennom k preobrazovaniyu Radona—Kipriyanova” [On the transformation dual to the Radon–Kipriyanov transformation], *Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Mat. i Ee Pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2024, **232**, 70–77 (in Russian).
8. L. N. Lyakhov and E. L. Sanina, “Differentsial’nye i integral’nye operatsii v skrytoy sfericheskoy simmetrii i razmernost’ krivoy Kokha” [Differential and integral operations in hidden spherical symmetry and the dimension of the Koch curve], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2023, **113**, No. 4, 517–528 (in Russian).
9. B. M. Levitan, “Razlozhenie v ryady i integraly Fur’e po funktsiyam Besselya” [Expansion into Fourier series and integrals with Bessel functions], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1951, **6**, No. 2, 102–143 (in Russian).
10. F. Natterer, *Matematicheskie osnovy komp’yuternoy tomografii* [The Mathematics of Computerized Tomography], Mir, Moscow, 1990 (Russian translation).

L. N. Lyakhov

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shanskiy, Lipetsk, Russia

Yelets State University named after I. A. Bunin, Yelets, Russia

E-mail: levnlya@mail.ru

V. A. Kalitvin

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shanskiy, Lipetsk, Russia

Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, Moscow, Russia

E-mail: kalitvin@gmail.com

M. G. Lapshina

Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shanskiy, Lipetsk, Russia

E-mail: marina.lapsh@ya.ru