

УДК 517.954

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-636-642

EDN: WOEBFC

О ПОСТРОЕНИИ КВАДРАТНОГО КОРНЯ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. А. Костин, Д. В. Костин, М. Н. Силаева

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. С использованием подхода Балакришнана—Иосиды построения дробных степеней линейных операторов в банаховом пространстве с помощью сильно непрерывных полугрупп с плотно определёнными производящими операторами, в работе приводится аналогичная схема для построения дробных степеней неплотно определённых операторов с применением полугрупп, имеющих суммируемую особенность. Выяснено, что вновь построенные полугруппы также имеют особенность в нуле, и установлена их точная оценка, связанная с порядком особенности исходной полугруппы и дробной степенью построенного оператора, в частности — квадратного корня. В качестве примера полученные результаты применяются к полугруппам с особенностью, приведённым в работе [3] и в докторской диссертации Ю. Т. Сильченко, а также строится квадратный корень для неплотно определённого оператора.

Ключевые слова: сильно непрерывные полугруппы, полугруппы с особенностью, производящие операторы, дробные степени операторов.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: В. А. Костин, Д. В. Костин, М. Н. Силаева. О построении квадратного корня для некоторых дифференциальных операторов // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 636–642. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-636-642>

1. ПОЛУГРУППЫ С ОСОБЕННОСТЬЮ И ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ ИХ ПРОИЗВОДЯЩИХ ОПЕРАТОРОВ

С. Г. Крейн в [2, с. 305] при рассмотрении уравнения

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} = Au(t), \quad t \in [0, T] \subset [0, \infty), \quad (1.1)$$

где A — линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A)$ в банаховом пространстве E , используется понятие квадратного корня $A^{\frac{1}{2}}$ при нахождении решения уравнения (1.1) в соответствии с определением: *решением* уравнения (1.1) называется функция со значениями в $D(A)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая уравнению (1.1) на отрезке $[0, T]$.

Для построения решения используется сильно непрерывная полугруппа $V(t, -A^{\frac{1}{2}})$ с C_0 -условием, и всякое решение уравнения (1.1) представимо в виде

$$u(t) = V(t, -A^{\frac{1}{2}})Z_0 + V(t, -A^{\frac{1}{2}})Z_T. \quad (1.2)$$

Если $Z_0, Z_T \in D(A^{1/2})$, то $u(t)$ является *ослабленным решением* уравнения (1.1), а если $Z_0, Z_T \in E$, то решение называется *обобщённым*.

Таким образом, при решении граничных задач для уравнения (1.1) ключевую роль играют сильно непрерывные полугруппы, построенные по операторам $-A^{\frac{1}{2}}$.

Важным классом таких полугрупп являются классы, построенные по операторам с плотной областью определения $D(A)$ — классы C_0 , удовлетворяющие условиям:

1. $V(0)\varphi = \varphi$, $\varphi \in E$;
2. $V(t+s)\varphi = V(t)V(s)\varphi$, $\varphi \in E$;
3. $\lim_{t \rightarrow 0+} \|V(t)\varphi - \varphi\| = 0$, $\varphi \in E$.

В этом случае справедлива оценка

$$\|V(t)\varphi\| \leq M e^{\omega t} \|\varphi\|, \quad t \geq 0, \quad (1.3)$$

где M и ω не зависят от φ , и для $\varphi \in D(A)$ выполняется равенство

$$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{t=0} = A\varphi, \quad (1.4)$$

Таким образом, если в уравнении (1.1) оператор A такой, что $-A$ является производящим оператором C_0 -полугруппы $V(t, -A)$, то для него определен оператор $A^{\frac{1}{2}}$ в рамках общей теории дробных степеней A^α , $\alpha \in (0, 1)$, развитой в работах [1–3], где показывается, что если в оценке (1.3) $\varphi \in E$ и $\omega \leq 0$, то

$$A^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{1}{t^{1+\alpha}} [V(t, -A)\varphi - \varphi] dt, \quad \varphi \in D(A), \quad (1.5)$$

при этом

$$V(t, -A^\alpha)\varphi = \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi) V(\xi, -A)\varphi d\xi. \quad (1.6)$$

Здесь

$$h_{t,\alpha}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p\xi - tp^\alpha} dp \geq 0 \quad (1.7)$$

— функция Иосиды [1, с. 358].

Из (1.6) и (1.7) следует оценка

$$\|V(\varphi, -A^\alpha)\| \leq \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi) \|V(\xi, -A)\varphi\| d\xi \leq M \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi) e^{-|\omega|\xi} d\xi = M e^{-|\omega|^\alpha t} \|\varphi\|. \quad (1.8)$$

Если $\alpha = \frac{1}{2}$, то

$$V(t, -A^{\frac{1}{2}})\varphi = \frac{2t}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4\xi}} V(\xi, -A)\varphi}{\xi^{\frac{3}{2}}} d\xi. \quad (1.9)$$

Такое представление, в частности, для уравнения (1.1) при $t \in [0, \infty)$ с условием $u(0) = u_0$ даёт представление обобщённого ограниченного решения в форме

$$u(t) = V(t, -A^\alpha)u_0. \quad (1.10)$$

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Однако существуют операторы, которые могут иметь неплотную область определения, вследствие чего соответствующие полугруппы будут иметь особенность в нуле. Исследованию таких полугрупп посвящены работы многих авторов, в числе которых: С. Г. Крейн, П. Е. Соболевский, Ю. Т. Сильченко, А. Л. Скубачевский, А. А. Шкаликов. Согласно С. Г. Крейну [2], такие полугруппы порождаются при исследовании корректной разрешимости ослабленной задачи Коши для уравнения первого порядка с неплотно определенными операторами, решения которой имеют вид

$$u(t) = V(t)u_0, \quad (2.1)$$

где $V(t)$ — сильно непрерывная полугруппа ограниченных при $t > 0$ операторов.

В этом случае, если задача Коши не является равномерно корректной, а ослабленная задача Коши корректна на $D(A)$, для $V(t)$ справедливо соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0+} V(t)u_0 = u_0, \quad (2.2)$$

однако оператор $V(t)$ не ограничен при $t = 0$, и при соответствующих условиях на резольвенту оператора A выполняется оценка [2, с. 85]

$$\|V(t)u_0\| \leq \frac{M}{t^\gamma} e^{\omega t} \|u_0\|. \quad (2.3)$$

Оказывается, что если оператор A такой, что оператор $-A$ является производящим оператором полугруппы $V(t, -A)$ с оценкой (2.3), где $\omega \leq 0$, $\gamma \in (0, 1)$, то определено семейство ограниченных операторов $\tilde{V}_\alpha(t)$ при $t > 0$ вида

$$\tilde{V}_\alpha(t)\varphi = \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi) V(\xi, -A)\varphi d\xi. \quad (2.4)$$

Здесь $h_{t,\alpha}(\xi)$ — функция Иосиды.

Для доказательства, используя [1], оценим

$$\begin{aligned} \|V_\alpha(t)\varphi\| &\leq \int_0^\infty h_{\alpha,t}(\xi) \|V(\xi, -A)\| d\xi \|\varphi\| \leq M \int_0^\infty h_{\alpha,t}(\xi) \frac{e^{-\omega\xi}}{\xi^\gamma} d\xi \|\varphi\| = \\ &= M \int_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt-p^\alpha\xi} dp \frac{e^{-\omega\xi}}{\xi^\gamma} d\xi = M \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} \int_0^\infty \frac{e^{-(\omega+p^\alpha)\xi}}{\xi^\gamma} d\xi dp = \\ &= M\Gamma(1-\gamma) \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt} dp}{(p^\alpha + \omega)^{1-\gamma}} = t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\rho(-\omega t^\alpha) = M t^{\alpha(1-\gamma)-1} E_{\alpha,\alpha(1-\gamma)}^{1-\gamma}(-\omega t^\alpha). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь мы воспользовались формулой из [5, с. 445] преобразования Лапласа для обобщённой функции Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha,\beta}^\rho(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\rho+n)}{\Gamma(\alpha n + \beta)\Gamma(\rho)} \frac{z^n}{n!} \quad (2.6)$$

при $\rho = 1 - \gamma$, $\beta = \alpha(1 - \gamma)$.

Ставится задача о доказательстве того, что семейство $V_\alpha(t)$ является сильно непрерывной при $t > 0$ полугруппой, и нахождении её производящего оператора.

Оказывается, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Если полугруппа $V(t, -A)$ удовлетворяет оценке (2.3) и выполняется неравенство

$$\alpha + \gamma < 1, \quad (2.7)$$

то семейство $V_\alpha(t)$ является сильно непрерывной полугруппой с оценкой (2.6) при $t > 0$ и производящим оператором

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{dV}{dt} \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty s^{-(1+\alpha)} [V(s, -A) - J] \varphi ds, \quad \varphi \in D(A). \quad (2.8)$$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Так как оценка (2.6) показывает ограниченность семейства $V_\alpha(t)$ при $t > 0$, то для доказательства свойства

$$V_\alpha(t+s)\varphi = V_\alpha(t)V_\alpha(s)\varphi, \quad (3.1)$$

пользуясь соотношением [1, с. 361]

$$h_{t+s,\alpha}(\xi) = \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi - \mu) f_s(\mu) d\mu, \quad (3.2)$$

имеем

$$\begin{aligned} V_\alpha(t+s)\varphi &= \int_0^\infty h_{t+s,\alpha}(\xi) V(\xi, -A)\varphi d\xi = \int_0^\infty \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi - \mu) h_{s,\alpha}(\mu) V(\xi, -A)\varphi d\mu d\xi = \\ &= \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\mu) \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\xi - \mu) V(\xi, -A)\varphi d\mu d\xi = \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\mu) \int_{-\mu}^\infty h_{t,\alpha}(\tau) V(\tau + \mu, -A)\varphi d\mu d\tau = \\ &= \int_0^\infty h_{s,\alpha}(\mu) V(\mu, -A) \int_0^\infty h_{t,\alpha}(\tau) V(\tau, -A)\varphi d\mu d\tau = V_\alpha(t)V_\alpha(s)\varphi. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Далее, следуя [1, с. 363], для $\varphi \in D(A)$ воспользуемся равенством (20') там же [1, с. 363], которое в нашем случае имеет вид

$$V_\alpha(t)\varphi = \int_0^\infty V(vt^{\frac{1}{\alpha}}, -A)\varphi h_{1,\alpha}(v)dv. \quad (3.4)$$

Так как в силу (2.2)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|V(vt^{\frac{1}{\alpha}}, -A)\varphi\| = \|\varphi\|,$$

и при $t \rightarrow \infty$ в силу (2.3) для $\varphi \in D(A)$ имеем оценку

$$\|V(vt^{\frac{1}{\alpha}}, -A)\varphi\| \leq M\|\varphi\|. \quad (3.5)$$

Отсюда и из (3.5) так же, как и в [1], но для $\varphi \in D(A)$, следует оценка

$$\|V_\alpha(t)\varphi\| \leq \sup_{t \geq 0} \|V(t)\varphi\| \int_0^\infty h_{1,\alpha}(v)dv = \sup_{t \geq 0} \|v(t, -A)\|, \quad (3.6)$$

и, переходя в равенстве (3.4) к пределу при $t \rightarrow 0$, учитывая равенство Иосиды [1, с. 361]

$$\int_0^\infty h_{1,\alpha}(v)dv = 1,$$

получаем

$$\lim_{t \rightarrow 0} V_\alpha(t)\varphi = \int_0^\infty h_{1,\alpha}(v)dv\varphi = \varphi. \quad (3.7)$$

Для доказательства равенства (2.8) воспользуемся неравенством

$$\left\| \frac{1}{s^{1+\alpha}} [V(s, -A) - J]\varphi \right\| \leq \frac{1}{s^{1+\alpha}} \int_0^s \|V(\xi, -A)A\varphi\| d\xi \leq \frac{M}{s^{1+\alpha}} \int_0^s \xi^{-\gamma} e^{-\omega\xi} d\xi \|A\varphi\| \leq \frac{M}{s^{\alpha+\gamma}} \|A\varphi\|, \quad (3.8)$$

которое с учётом оценки (1.3) обеспечивает сходимость интеграла в (2.8) и установление равенства (2.8) согласно схеме [1, с. 364], что и доказывает справедливость представления оператора A^α равенством (2.8) и завершает доказательство теоремы.

Замечание 3.1. Оценка (2.5) — точная, так как, если φ_λ — собственный элемент оператора A такой, что $A\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, $\Re \lambda \geq 0$, то $V(t, -A)\varphi_\lambda = e^{-\lambda t}\varphi_\lambda$ и неравенство (2.5) переходит в равенство

$$\|V(t, -A^\alpha)\varphi_\lambda\| = t^{\alpha(1-\gamma)-1} |E_{\alpha,\alpha(1-\gamma)}^{1-\gamma}| \|\varphi_\lambda\|. \quad (3.9)$$

Также отметим, что для таких φ_λ справедливо представление

$$A^\alpha \varphi_\lambda = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} - 1}{t^{1+\alpha}} dt \varphi_\lambda = \frac{2}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}t} \operatorname{sh} \frac{\lambda}{2}t}{t^{1+\alpha}} dt \varphi_\lambda = \lambda^\alpha \varphi_\lambda. \quad (3.10)$$

4. ПРИМЕРЫ

В качестве примера возьмём полугруппы с особенностью, приведённые в [3] и в докторской диссертации Ю. Т. Сильченко.

Пусть $A = -\frac{d^2}{dx^2}$ — оператор дифференцирования с областью определения

$$D(A) = \{y(x) \in W_p^3, \quad y(0) = y(1)\}$$

в пространстве $E = W_p^1$, $y(0) = y(1) = 0$.

В этом случае соответствующая полугруппа $V(t, -A)$ не является сильно непрерывной в нуле, и для неё справедлива оценка

$$\|V(t, -A)\| \leq Mt^{-\gamma} e^{-\omega t}, \quad \omega > 0, \quad (4.1)$$

где

$$\gamma = \frac{p-1}{p+1}. \quad (4.2)$$

Таким образом, в силу теоремы 2.1 оператор A имеет дробную степень $A^{\frac{1}{2}}$ при условии

$$\frac{1}{2} + \frac{p-1}{p+1} < 1, \quad \text{т. е.} \quad 0 < p < 3,$$

и производит полугруппу $V(t, -A^{\frac{1}{2}})$ с особенностью и оценкой (2.5) при

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{p-1}{p+1}, \quad 0 < p < 3,$$

и имеющую вид

$$V(t, -A^{\frac{1}{2}})\varphi = \frac{2t}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{4\xi}} V(\xi, -A)\varphi}{\xi^{\frac{3}{2}}} d\xi. \quad (4.3)$$

В частности, при $p = 2$ справедлива оценка

$$\|V(t, -A^{\frac{1}{2}})\varphi\|_{W_2^1} \leq \frac{M}{t^{\frac{2}{3}}} E_{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}(-\omega t^{\frac{1}{2}}) \|\varphi\|_{W_2^1}. \quad (4.4)$$

Таким образом, представление полугруппы (4.3) с учётом оценки (4.4) позволяет судить о корректной разрешимости ослабленной задачи для уравнения (1.1) и позволяет строить алгоритмы её численной реализации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
2. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
3. Сильченко Ю. Т. Разрешимость задачи Коши для линейного уравнения второго порядка с неплотно заданными операторными коэффициентами, порождающими полугруппы с особенностями // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1993. — № 11. — С. 40–49.
4. Соболевский П. Е. О дифференциальных уравнениях второго порядка в банаховом пространстве // Докл. АН СССР. — 1962. — 146, № 4. — С. 774–777.
5. Учайкин В. В. Методы дробных производных. — Ульяновск: Логос, 2002.

В. А. Костин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: vlkostin@mail.ru

Д. В. Костин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: dvk605@mail.ru

М. Н. Силаева
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: marinanebolsina@yandex.ru

UDC 517.954

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-636-642

EDN: WOEBFC

On the construction of the square root for some differential operators

V. A. Kostin, D. V. Kostin, and M. N. Silaeva

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. Using the Balakrishnan–Yosida approach to constructing fractional powers of linear operators in a Banach space by means of strongly continuous semigroups with densely defined generating operators, in this paper, a similar scheme is presented for constructing fractional powers of nondensely defined operators by means of semigroups with a summable singularity. It is found that the newly constructed semigroups also have a singularity at zero, and their sharp estimate is established, related to the order of the singularity of the original semigroup and the fractional power of the constructed operator, in particular, the square root. As an example, the obtained results are applied to semigroups with a singularity given in the paper [3] and in the doctoral dissertation of Yu. T. Silchenko, and a square root is also constructed for a nondensely defined operator.

Keywords: strongly continuous semigroups, semigroups with singularity, generating operators, fractional powers of operators.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: V. A. Kostin, D. V. Kostin, M. N. Silaeva, “On the construction of the square root for some differential operators,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 4, 636–642. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-636-642>

REFERENCES

1. K. Yosida, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
2. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
3. Yu. T. Sil'chenko, “Razreshimost' zadachi Koshi dlya lineynogo uravneniya vtorogo poryadka s neplotno zadannymi operatornymi koeffitsientami, porozhdayushchimi polugruppy s osobennostyami” [Solvability of the Cauchy problem for a second-order linear equation with nondensely defined operator coefficients generating semigroups with singularities], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1993, No. 11, 40–49 (in Russian).
4. P. E. Sobolevskiy, “O differentsial'nykh uravneniyakh vtorogo poryadka v banakhovom prostranstve” [On second-order differential equations in a Banach space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1962, 146, No. 4, 774–777 (in Russian).

5. V. V. Uchaykin, *Metody drobnykh proizvodnykh* [Fractional Derivative Methods], Logos, Ul'yanovsk, 2002 (in Russian).

V. A. Kostin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: vlkoston@mail.ru

D. V. Kostin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: dvk605@mail.ru

M. N. Silaeva

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: marinanebolsina@yandex.ru