

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-626-635

EDN: WGXSNU

ОБРАЩЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА С СИМВОЛОМ МАСЛОВА—ЧЕБЫШЕВА

А. В. Костин

*Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия**АО «Концерн «Созвездие», Воронеж, Россия*

Аннотация. Метод Маслова—Хевисайда применяется к обращению полиномиального оператора символом Маслова—Чебышева, введенного в работе. Результат применяется к доказательству теоремы об операторе Бесселя в пространствах Степанова $S_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $n = 1, 2, \dots$. Это существенно расширяет область применения операторных методов к исследованию с корректной разрешимости уравнений с оператором Лапласа, обычно исследуемых в пространствах L_p .

Ключевые слова: пространства Степанова, оператор Бесселя, символ оператора Максвелла—Фейера, полугруппа Вейерштрасса, корректная разрешимость, многочлены Чебышева, сильно непрерывная полугруппа, полигармоническое уравнение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. В. Костин. Обращение полиномиального оператора с символом Маслова—Чебышева // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 626–635. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-626-635>

1. ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Пусть E — банахово пространство и A — линейный, вообще говоря, неограниченный оператор с областью определения $D(A) \subset E$. Для $f \in E$ исследуется корректная разрешимость задачи нахождения элемента $u \in D(A^N)$, $N = 1, 2, \dots$, удовлетворяющего равенству

$$\mathbb{A}u = \sum_{m=0}^N a_m A^m u = f, \quad a_m \in \mathbb{C}. \quad (1.1)$$

В соответствии с Ж. Адамаром это означает, что уравнение (1.1) должно быть однозначно разрешимо при любых $f \in E$, оператор $\mathbb{A}^{-1}$ определен на всех $f \in E$ и непрерывен, т. е. справедливо неравенство $\|\mathbb{A}^{-1}f\|_E \leq M\|f\|_E$, где константа M не зависит от f .

В соответствии с [5] для оператора A определены многочлены

$$P_n(A)u = \sum_{k=0}^n a_k A^k u, \quad u \in D(A^n), \quad a_m \in \mathbb{C},$$

где $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость.

Следуя подходу В. П. Маслова, примененного в [9, с. 12] к операции $A = \frac{d}{dx}$, обозначим множество операторов вида (1.1) через $K[A]$, а через $K[x]$ обозначим множество полиномов над полем комплексных чисел $x \in \mathbb{C}$.

Пусть $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, $a_n \neq 0$. Так же, как и в [9, с. 12], полином $P_n(x)$, отвечающий оператору $P_n(A)$, будем называть *символом оператора* $P_n(A)$.

Рассматривается применение результатов работы [9] к случаю, когда операторный символ $\mathbb{P}_n(x)$ является ортогональным многочленом Чебышева 1-го рода, т. е.

$$\mathbb{P}_n(x) = T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

а оператор A является генератором полугруппы $U(t, A)$ класса C_0 в E . Это значит, что область определения $D(A)$ плотна в E , а область его значений $\mathfrak{R}(A) = E$. Резольвентное множество $\rho(A)$ содержит комплексную полуплоскость $\operatorname{Re} \lambda > \omega$. Семейство $U(t, A)$ удовлетворяет соотношениям:

1. $U(0, A) = I$ — тождественный оператор в E ,
2. $U(t + s, A) = U(t, A)U(s, A) = U(s, A)U(t, A)$,
3. $\lim_{t \rightarrow 0+} \|U(t, A)\| \leq M \exp \omega t$,
- 4.

$$\begin{aligned} \|U(t, A)\| &\leq M \exp \omega t, \\ \left. \frac{dU(t, A)}{dt} \right|_{t=0} \varphi &= A\varphi, \quad \varphi \in D(A). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Покажем, что справедлива следующая теорема.

Теорема 1.1. *Если операторному полиному $\mathbb{P}_N(A)$ соответствует символ Маслова—Чебышева, то оператор A является генератором полугруппы $U(t, A)$ с оценкой (1.3). При этом оператор $\mathbb{A}_N$ имеет ограниченный в E оператор $\mathbb{A}^{-1}$ и справедлива оценка*

$$\|\mathbb{A}_N^{-1} f\|_E \leq \frac{M \|f\|_E}{2^N \prod_{k=1}^N \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4N}}. \quad (1.4)$$

При этом решение имеет вид

$$u = \sum_{k=1}^N \frac{1}{T'_N(\alpha_k)} \int_0^\infty e^{\alpha_k x} U(x, A) f dx, \quad (1.5)$$

α_k — корни многочлена $T_N(x)$.

Доказательство. Доказательство следует из теоремы корректности [8], согласно которой если корни многочлена $\mathbb{P}_N(x)$ принадлежат резольвентному множеству оператора A , то задача (1.1) равномерно корректна и для ее решения справедливо представление

$$u = \int_0^\infty q(x) U(x, A) f dx, \quad (1.6)$$

где функция $q(x)$ является решением скалярной задачи

$$\mathbb{P}_N \left(-\frac{d}{dx} \right) q(x) = \delta, \quad (1.7)$$

$$q(0) = q'(0) = \dots = q^{N-1}(0) = 0. \quad (1.8)$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, а $q(x) = T_N(x)$.

Рассматривая случай с символами Маслова—Чебышева, имеем $P_0(x) = T_0(x) = 1$ и $P_1(x) = T_1(x) = x$, которые соответствуют операциям

$$\mathbb{A}_0 u = P_0(A)u = A^0 u = u, \quad (1.9)$$

и соответственно

$$\mathbb{A}_1 u = P_1(A)u = Au. \quad (1.10)$$

В случае $N = 0$ и уравнение (1.7) имеет вид

$$(-1)^0 q(x) = q(x) = \delta(x).$$

Следовательно,

$$\mathbb{A}_0^{-1} f = u = \int_0^\infty \delta(x) U(x, A) f dx = U(0, A) f = f.$$

Это соответствует обратимости тождественного оператора $I = \mathbb{A}_0$.

В случае (1.10) $N = 1$, $q(x)$ является решением задачи

$$-\frac{dq}{dx} = \delta x, \quad (1.11)$$

$$q(0) = 0. \quad (1.12)$$

То есть, $q(x)$ является функцией Хевисайда, в соответствии с [3, с. 194] и [6, с. 197]. И, таким образом, если $f \in D(A)$ и $U(x, A)$ удовлетворяют оценке (1.3) при $\omega < 0$, то

$$u = \mathbb{A}_1^{-1} f = - \int_0^\infty q(x) U(x, A) f dx = - \int_0^\infty U(x, A) f dx,$$

так как

$$Au = - \int_0^\infty AU(x, A) f dx = - \int_0^\infty \frac{dU(x, A)}{dx} f dx = f.$$

□

2. ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОБОЛЕВА В ПРОСТРАНСТВАХ СТЕПАНОВА

Применим теорему 1.1 к уравнению

$$T_N(\Delta_n)u = \sum_{m=0}^N a_m \Delta_n^m u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

где $\Delta_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x_i)}{\partial x_i^2}$ — лапласиан в $\mathbb{R}^n$.

Уравнение (2.1) относится к классу полигармонических уравнений Соболева, и исследованию связанных с ними задач посвящена монография [12].

Для формулировки нашего результата воспользуемся следующими фактами.

Известно (см., например, [4, §16]), что дифференциальный оператор, заданный дифференциальным выражением

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

и областью определения

$$D(\Delta) = W_p^2(\mathbb{R}^n), \quad (2.2)$$

где $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ — пространство Соболева с нормой

$$\|u\|_{W_p^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \right\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad (2.3)$$

при каждом $p \in (1, \infty)$ задает эллиптический оператор Δ_p , являющийся генератором полугруппы класса C_0 в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Также известно (см. [11, с. 316]), что оператор, действующий в $C(\mathbb{R}^n)$ (пространстве непрерывных и ограниченных функций $u(x)$ с нормой $\|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)|$), с областью определения

$C^2(\mathbb{R}^n)$ с нормой $\|u\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{C(\mathbb{R}^n)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} \right\|_{C(\mathbb{R}^n)}$, таким свойством не обладает.

В связи с этим теорема об операторе Лапласа в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$ переносится на случай пространств В. В. Степанова $S_p(\mathbb{R}^n)$, которые содержат пространства $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Показывается, что оператор Δ , определенный во введенных здесь пространствах Соболева—Степанова, является генератором C_0 -полугруппы Гаусса—Вейерштрасса.

3. ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА—СТЕПАНОВА $W^l S_p(\mathbb{R}^n)$

Пусть K_n — единичный куб в $\mathbb{R}^n$ с гранями $0 \leq x_i < 1$, $i = 1, \dots, n$, $K_{n,a}$ — куб K_n , сдвинутый на вектор $a \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$, $(T_a u)(x) = u(x + a)$.

Определение 3.1 (см. [7, с. 99]). Обозначим через $S_p(\mathbb{R}^n)$ множество локально интегрируемых на $\mathbb{R}^n$ функций $u(x)$, для которых конечна норма

$$\|u\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \left[\int_{K_n} |(T_a u)(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1). \quad (3.1)$$

Очевидно, что при $n = 1$ они совпадают с классическими пространствами Степанова $S_p(\mathbb{R}^1)$ (см. [7], [13, с. 197]).

$S_p(\mathbb{R}^n)$ -пространства — банаховы.

Будем рассматривать подпространство $S_p(\overline{\mathbb{R}^n}) \subset S_p(\mathbb{R}^n)$ как множество функций $u \in S_p(\mathbb{R}^n)$, для которых справедливо соотношение непрерывности нормы (см. [7, (5.2.1)]).

Известно (см. [7, с. 110]), что эти пространства являются банаховыми. Они получаются замыканием в классе $C(\overline{\mathbb{R}^n})$ равномерно непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}^n$ функций.

Далее, используя нормы с пространствами $W_p^l(\Omega)$, введем следующее определение.

Определение 3.2. Множества локально суммируемых в $\mathbb{R}^n$ со степенью $p \geq 1$ функций $u(x)$ вместе со всеми производными до порядка l ($l \in \mathbb{N}$) включительно, для которых конечна норма

$$\|u\|_{W^l S_p(\mathbb{R}^n)} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|T_a u\|_{W_p^l(K_n)} = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \|u\|_{W_p^l(K_{n,a})}, \quad (3.2)$$

назовем *функциональными пространствами Соболева—Степанова* и обозначим $W^l S_p(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, пространства $W^l S_p(\mathbb{R}^n)$ — линейные и нормированные с нормой (2.3).

Лемма 3.1. Пространства $W^l S_p(\mathbb{R}^n)$ банаховы.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся утверждением, приведенным в [14, с. 103], о том, что если $f(\sigma)$ — векторнозначная функция, заданная на некотором абстрактном множестве $\mathfrak{G}$ со значениями в банаховом пространстве E , является сильно измеримой на $\mathfrak{G}$ и $\|f(\sigma)\|_E$ ограничена всюду, за исключением некоторого множества меры нуль, то множество таких функций образует банахово пространство $L_\infty(\sigma, E)$ с нормой $\|f\|_\infty = \text{vrai sup}_{\sigma \in \mathfrak{G}} \|f(\sigma)\|_E$. Если $\|f(\sigma)\|_E$ непрерывна, то $\|f\| = \sup_{\sigma \in \mathfrak{G}} \|f(\sigma)\|_E$, а $L_\infty(\sigma, E)$ переходит в $C(\sigma, E)$.

В нашем случае, полагая $\mathfrak{G} = \mathbb{R}^n$, $E = W_p^l(K_n)$, получаем доказательство леммы. $\square$

Теорема 3.1. Если $0 \leq m < l$ и $ln \leq n$, то справедливо вложение $W^l S_p(\mathbb{R}^n) \subset W^m S_p(\mathbb{R}^n)$ и выполняется неравенство

$$\|u\|_{W^m S_p(\mathbb{R}^n)} \leq C_3 \|u\|_{W^l S_p(\mathbb{R}^n)}, \quad (3.3)$$

где константа C_3 зависит лишь от m, n, l, p .

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться равенством (2.3) для каждого куба $K_{n,a}$

$$\|u\|_{W^m S_p(K_{n,a})} \leq C_4 \|u\|_{W^l S_p(K_{n,a})}, \quad (3.4)$$

а затем, учитывая, что диаметры кубов $K_{n,a}$ от a не зависят, перейти в (3.4) к $\sup$ по $a \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Отметим, что из (3.4) при $m = 0$ из (3.4) следует вложение $W^l S_p(\mathbb{R}^n) \subset S_p(\mathbb{R}^n)$ и неравенство

$$\|u\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq C_5 \|u\|_{W^l S_p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.5)$$

Однако этот результат можно усилить, так как справедлива

Лемма 3.2. *Если выполняется неравенство $lp \leq n$, то имеет место вложение $W^l S_p(\overline{\mathbb{R}^n}) \subset S_p(\mathbb{R}^n)$.*

Доказательство. Для доказательства этого факта воспользуемся формулой конечных приращений (см. [2, с. 248])

$$u(x+h) - u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u(x_i + \Theta h_i)}{\partial x_i} h_i, \quad (3.6)$$

где $h = (h_1, \dots, h_n)$, $0 < \Theta < 1$.

Отсюда, пользуясь инвариантностью нормы в $S_p(\mathbb{R}^n)$ относительно сдвига T_a функции $u(x)$, из (3.6) получаем неравенство

$$\|u(x+h) - u(x)\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq \max_{0 \leq i \leq n} |h_i| \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.7)$$

Далее, учитывая, что вложение $W^l S_p(\mathbb{R}^n) \subset W^1 S_p(\mathbb{R}^n)$ дает оценку $\left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq M_i$, применяя которую в (3.7), получаем выполнение условия (3.2). Это доказывает лемму. $\square$

Следующий результат справедлив для класса $C_\mu^m(\mathbb{R}^n)$, состоящего из всех функций, производные m -го порядка которых удовлетворяют условию Гельдера с показателем μ на каждом кубе $K_{n,t}$, и для которых конечна норма

$$\|u\|_{C_\mu^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{0 \leq r \leq m} |D^r u(0)| + \sup_{t \in \mathbb{R}^n} \sup_{\substack{x, y \in K_{n,t} \\ |\bar{\alpha}| = m}} \frac{|D^{\bar{\alpha}} u(x) - D^{\bar{\alpha}} u(y)|}{|(x-y)^\mu|}, \quad (3.8)$$

где $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Так же, как и в случае пространств $W^l S_p(\mathbb{R}^n)$, доказывается, что пространства $C_\mu^m(\mathbb{R}^n)$ — банаховы с нормой (3.8).

4. ПОЛУГРУППА ГАУССА—ВЕЙЕРШТРАССА В ПРОСТРАНСТВАХ $S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$

Интеграл вида

$$\begin{aligned} u(t, x) = (U(t)\varphi)(x) &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-s|^2}{4t}} \varphi(s) ds = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} \mathbb{T}(\xi) \varphi d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} \varphi(x + \xi) d\xi, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$t > 0$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $ds = ds_1, \dots, ds_n$ в теории уравнений с частными производными носит название *поверхностного теплового потенциала* (см. [1]).

В [10] интеграл (4.1) называется *потенциалом Гаусса—Вейерштрасса*. В [2, с. 325] для $n = 1$ доказывается, что семейство операторов $U(t)$ является сжимающей полугруппой класса C_0 в пространствах $L_p(\mathbb{R}^1)$ ($p \geq 1$) и $C_{[-\infty, \infty]}$ — пространствах равномерно непрерывных и ограниченных на $(-\infty, \infty)$ функций. В [7] этот интеграл называется *полугруппой Вейерштрасса*.

Инвариантность нормы в $S_p(\mathbb{R}^n)$ относительно $\mathbb{T}(a)$ -переноса позволяет получить оценку

$$\|\mathbb{T}(a)U(t)f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} = \|U(t)f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}. \quad (4.2)$$

В [7] показано, что оператор A , заданный дифференциальным выражением

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$$

с областью определения $D(A) = W^2 S_p(\mathbb{R}^n)$ является генератором полугруппы Гаусса—Вейерштрасса в пространствах $S_p(\mathbb{R}^n)$.

5. ОПЕРАТОР УСРЕДНЕННОГО СДВИГА В $\mathbb{R}^n$

Пусть $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ — функция, определенная в $\mathbb{R}^n$, и вектор $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n)$ такой, что $h_i > 0$, ($i = 1, \dots, n$).

Введем операторы левого и правого сдвига по каждой координате x_i :

$$\begin{aligned} (T_i^+(h_i)u)(x) &= u(x_1, \dots, x_i + h_i, \dots, x_n), \\ (T_i^-(h_i)u)(x) &= u(x_1, \dots, x_i - h_i, \dots, x_n), \end{aligned}$$

Наряду с ними введем усредняющий оператор по координате x_i :

$$(T_i(h_i)u)(x) = \left[\frac{T_i^+(h_i) + T_i^-(h_i)}{2} \right] u(x). \quad (5.1)$$

Определение 5.1. Оператор $\Pi^{(n)}(\bar{h})$, заданный выражением

$$(\Pi^{(n)}(\bar{h})u)(x) = \left(\prod_{i=1}^n T_i(h_i)u \right)(x), \quad (5.2)$$

будем называть *оператором усредненного сдвига* в $\mathbb{R}^n$.

Нетрудно видеть, что все приведенные операторы коммутируют.

Далее, пусть

$$T_n^{(k)}(\bar{h}) = \prod_{i=1}^k T_{m_i}^+(h_{m_i}) \prod_{j=k+1}^n T_{m_j}^-(h_{m_j}) \quad (5.3)$$

— оператор, осуществляющий по k координатам левые сдвиги и по $(n - k)$ координатам — правые. Тогда нетрудно видеть, что справедливо представление

$$\Pi_n(\bar{h}) = \frac{1}{2^n} \prod_{i=1}^n [T_i^+(h_i) + T_i^-(h_i)] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} T_n^{(k)}(\bar{h}). \quad (5.4)$$

Например, в случае $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$ операторы усредненного сдвига имеют вид

$$\begin{aligned} (\Pi_1(\bar{h})u)(x) &= \frac{u(x+h) + u(x-h)}{2}, \\ (\Pi_2(\bar{h})u)(x) &= \frac{1}{4} [u(x_1 + h_1, x_2 + h_2) + u(x_1 - h_1, x_2 - h_2) + \\ &\quad + u(x_1 - h_1, x_2 + h_2) + u(x_1 + h_1, x_2 - h_2)]. \end{aligned}$$

Приведем некоторые необходимые нам в дальнейшем свойства оператора усредненного сдвига.

Лемма 5.1. Пусть для функций $g(x)$ и $f(x)$ определена свертка

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi) f(x - \xi) d\xi, \quad (5.5)$$

тогда, если $g(\xi) = g(-\xi)$ — четная функция по каждой координате ξ_i ($i = 1, \dots, n$), то справедливо равенство

$$(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (\Pi(\xi)f)(x) g(\xi) d\xi. \quad (5.6)$$

Доказательство. Доказательство следует из инвариантности представления (5.5) относительно смены знака у координаты ξ_i ($i = 1, \dots, n$) под знаком интеграла. Пользуясь этим, запишем 2^n соответствующих равенств (5.5), сложив которые, с учетом равенства (5.4) получаем (5.6). $\square$

Следствие. Для полугруппы Гаусса–Вейерштрасса справедливо представление

$$(U(t)\varphi)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} (\Pi_n(\xi)\varphi)(x) d\xi, \quad (5.7)$$

так как в этом случае функция $g(\xi) = e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}}$ удовлетворяет условиям леммы 5.1.

Легко доказывается, что для функции $u \in W^2 S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$ справедливо представление

$$(\Pi_n(h)u)(x) - u(x) - \frac{h^2}{2} \Delta u(x) = \alpha(h, x) h^2, \quad (5.8)$$

где $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$, функция $\alpha(h, x)$ такова, что $\alpha(h, x) \in S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$ при каждом $h_0 > h > 0$ и $\lim_{h \rightarrow 0} \|\alpha(h, x)\|_{S_p(\overline{\mathbb{R}^n})} = 0$.

6. ПРОИЗВОДЯЩИЙ ОПЕРАТОР ПОЛУГРУППЫ ГАУССА–ВЕЙЕРШТРАССА

Здесь мы применим полученные результаты для определения оператора Лапласа в пространствах $S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$ как производящего оператора Гаусса–Вейерштрасса в этом классе функций.

Теорема 6.1. Оператор A , заданный дифференциальным выражением $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$ с областью определения $D(A) = W^2 S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$, является генератором полугруппы Гаусса–Вейерштрасса в пространствах $S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$.

Доказательство. Используя равенство (4.1) для $\varphi \in W^2 S_p(\overline{\mathbb{R}^n})$, оценим

$$\begin{aligned} \left| \frac{(U(t)\varphi)(x) - \varphi(x)}{t} - \Delta \varphi(x) \right| &= \\ &= \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n t} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} \left[(\Pi_n(\xi)\varphi)(x) - \varphi(x) - \frac{|\xi|^2}{2} \Delta u(x) \right] d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2(2\sqrt{\pi t})^n t} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\xi|^2}{4t}} |\xi|^2 |\alpha(\xi, x)| d\xi = \\ &= \frac{1}{2(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mu|^2} |\mu|^2 |\alpha(2\sqrt{t}\mu, x)| d\mu. \quad (6.1) \end{aligned}$$

Отсюда, применяя обобщенное неравенство Минковского, имеем

$$\left[\int_{K_{\overline{\pi}}} \left| \frac{(U(t)\varphi)(x) - \varphi(x)}{t} - \Delta \varphi(x) \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2(\sqrt{\pi})^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\mu|^2} |\mu|^2 \left[\int_{K_a} |\alpha(2\sqrt{t}\mu, x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} d\mu, \quad (6.2)$$

где K_a — единичный куб, сдвинутый на произвольный вектор $a = (a_1, \dots, a_n)$.

Так как функция $|\alpha(\xi, x)|$ удовлетворяет условиям

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\overline{\Omega}} \alpha(h, x) dx = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\overline{\Omega}} \alpha_m(h, x) dx = 0,$$

то интеграл (6.2) абсолютно сходится и, следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N > 0$, что выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus K_N} e^{-|\mu|^2} \left[\int_{K_{\bar{a}}} |\alpha(2\sqrt{t}\mu, x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} d\mu < \varepsilon, \quad (6.3)$$

где $K_N \subset \mathbb{R}^n$ — шар радиуса N с центром в нуле.

Разбивая интеграл в (6.2) на два:

$$\int_{\mathbb{R}^n} = \int_{\mathbb{R}^n \setminus K_N} + \int_{K_N} \quad (6.4)$$

и замечая, что свойства функции $|\alpha(\xi, x)|$ позволяют перейти к пределу при $t \rightarrow 0$ под знаком интеграла и, следовательно, при достаточно малом t_0 и всех $x_0 < t < t_0$ сделать его меньше ε , заключаем, с учетом (6.3), что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{K_{\bar{a}}} \left| \frac{U(t)\varphi - \varphi(x)}{t} - \Delta\varphi(x) \right|^p dx = 0.$$

Отсюда с учетом леммы 5.1 следует равенство

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{K_{\bar{a}}} \left\| \frac{(U(t) - I)\varphi(x)}{t} - \Delta\varphi(x) \right\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} = 0$$

для любой функции $\varphi \in W^2 S_p(\mathbb{R}^n)$.

Учитывая плотность вложения $W^2 S_p(\mathbb{R}^n) \subset \bar{S}_p(\mathbb{R}^n)$, заключаем, что определенный таким образом оператор Лапласа является производящим оператором в пространстве $\bar{S}_p(\mathbb{R}^n)$. $\square$

7. ОБРАЩЕНИЕ ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ СИМВОЛОМ МАСЛОВА—ЧЕБЫШЕВА В $S_p(\mathbb{R}^n)$

Напомним, что так называемое бесселево дробное интегродифференцирование (см. [10, с. 335]) обязано оператору $\Delta_n - I = A$ в связи с удобством исследования операторов $(I - A)^{-1}$ в пространствах $L_p(\mathbb{R})$.

В рамках таких исследований применим теорему 1.1 к обращению оператора $P_N(\Delta_n - I)$ в пространствах $S_p(\mathbb{R}^n)$. Оператор $\Delta_n - I$ является генератором C_0 -полугруппы $U(t, \Delta_n - I) = e^{-t}U(t, \Delta_n)$, и для нее справедлива оценка

$$\|U(t, \Delta_n - I)f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq e^{-t}\|f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда по теореме 1.1 и неравенству (1.4) получаем оценку

$$\|P_N^{-1}(\Delta_n - I)f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{\|f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}}{\prod_{k=1}^N \left[\cos \frac{(2k-1)\pi}{2N} + 1 \right]} = \frac{\|f\|_{S_p(\mathbb{R}^n)}}{2^N \prod_{k=1}^N \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4N}}.$$

В заключение заметим, что если вместо $A = \Delta - I$ рассматривать оператор $A = \Delta_n - aT$, $a \in \mathbb{R}$, то оператор A имеет ограниченный в $S_p(\mathbb{R}^n)$ обратный оператор A_n^{-1} при любом символе

$$P_N(x) = T_n \left(\frac{2x - a - b}{b - a} \right), \quad (7.1)$$

так как в этом случае $P_N(x)$ является смещенным многочленом Чебышева [13, с. 81] с корнями $\alpha_k \in (a, b)$ при любом $a = 0$. В частности, при $a = 0$ сюда относится семейство полиномов $T_N \left(\frac{2x - b}{b} \right)$ при $b > 0$:

$$\|A_N^{-1}f\| \leq \frac{M\|f\|}{\prod_{k=1}^N (\alpha_k - a)} = \frac{M2^N\|f\|}{\prod_{k=1}^N \left[b \cos^2 \frac{(2k-1)\pi}{4N} - a \right]},$$

$$\frac{2x_k - b}{b} = \cos \frac{2k - 1}{2N}, \quad 2x_k = b + b \cos \frac{(2k - 1)\pi}{2N}, \quad x_k = \frac{b}{2} \left(1 + \cos \frac{(2k - 1)\pi}{2N} \right) = \frac{b}{2} \cos^2 \frac{(2k - 1)\pi}{4N}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ: Учебник. — М.: Мир, 1967.
3. *Зельдович Я. Б.* Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1972.
4. *Красносельский М. А.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1967.
5. *Крейн С. Г. (ред.)* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972.
6. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
7. *Костин А. В.* К теории функциональных пространств Степанова. — Воронеж: Изд.-полигр. центр ВГУ, 2007.
8. *Костин В. А.* Операторный метод Маслова—Хевисайда и C_0 -операторный интеграл Дюамеля // Докл. РАН. — 2013. — 452, № 4. — С. 367–370.
9. *Маслов В. П.* Операторные методы. — М.: Наука, 1973.
10. *Самко С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
11. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
12. *Соболев С. Л.* Кубатурные формулы. — Новосибирск: Изд-во Ин-та мат., 1996.
13. *Степанов В. В.* О метрике в пространстве почти-периодических функций S_2 // Докл. АН СССР. — 1949. — 64, № 3. — С. 171.
14. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Иностран. лит., 1962.

А. В. Костин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

АО «Концерн «Созвездие», Воронеж, Россия

E-mail: leshakostin@mail.ru

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-626-635

EDN: WGXSNU

Inversion of a polynomial operator with the Maslov–Chebyshev symbol

A. V. Kostin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Concern “Sozvezdie”, Voronezh, Russia

Abstract. The Maslov–Heaviside method is applied to the inversion of a polynomial operator by the Maslov–Chebyshev symbol introduced in the paper. The result is applied to the proof of a theorem on the Bessel operator in the Stepanov spaces $S_p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, $n = 1, 2, \dots$. This significantly expands the scope of application of operator methods to the study of the correct solvability of equations with the Laplace operator, usually studied in L_p spaces.

Keywords: Stepanov spaces, Bessel operator, Maxwell–Fejér operator symbol, Weierstrass semigroup, correct solvability, Chebyshev polynomials, strongly continuous semigroup, polyharmonic equation.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.



Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: A. V. Kostin, “Inversion of a polynomial operator with the Maslov–Chebyshev symbol,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 626–635. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-626-635>

REFERENCES

1. V. S. Vladimirov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
2. K. Yosida, *Funktsional'nyy analiz: Uchebnik* [Functional Analysis: Textbook], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
3. Ya. B. Zel'dovich, *Elementy prikladnoy matematiki* [Elements of Applied Mathematics], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
4. M. A. Krasnosel'skii, *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
5. S. G. Kreyn (ed.), *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
6. A. N. Kolmogorov, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
7. A. V. Kostin, *K teorii funktsional'nykh prostranstv Stepanova* [To the Theory of Stepanov Function Spaces], VGU, Voronezh, 2007 (in Russian).
8. V. A. Kostin, “Operatornyy metod Maslova—Khevisayda i C_0 -operatornyy integral Dyumelya” [Maslov–Heaviside operator method and C_0 -operator Duhamel’s integral], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2013, **452**, No. 4, 367–370 (in Russian).
9. V. P. Maslov, *Operatornye metody* [Operator Methods], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
10. S. G. Samko, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications], Nauka i tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
11. S. L. Sobolev, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
12. S. L. Sobolev, *Kubturnye formuly* [Cubature Formulas], Inst. Mat., Novosibirsk, 1996 (in Russian).
13. V. V. Stepanov, “O metrike v prostranstve pochti-periodicheskikh funktsiy S_2 ” [On the metric in the space of almost periodic functions S_2], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1949, **64**, No. 3, 171 (in Russian).
14. E. Hille and R. Phillips, *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semi-groups], Inostr. Lit., Moscow, 1962 (Russian translation).

A. V. Kostin
 Voronezh State University, Voronezh, Russia
 Concern “Sozvezdie”, Voronezh, Russia
 E-mail: leshakostin@mail.ru