

УДК 517.938.5

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-610-625

EDN: WGSHP

УПОРЯДОЧЕННЫЕ БИЛЛИАРДНЫЕ ИГРЫ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА БИЛЛИАРДНЫХ КНИЖЕК

В. А. Кибкало^{1,2}, Д. А. Туниянц^{1,2}

¹Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

²Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

Аннотация. Обсуждается недавно отмеченная В. Драговичем и М. Раднович связь между введенной ими ранее конструкцией упорядоченной бильярдной игры и предложенным В. В. Ведюшкиной классом бильярдных книжек. В работе предложено обобщение понятия реализации некоторой игры при помощи бильярдной книжки и доказан аналог теоремы В. Драговича и М. Раднович для такой реализации. В рамках обзора изложены недавние результаты авторов, К. Е. Тюриной и В. Н. Завьялова о топологических свойствах изоэнергетических многообразий круговых бильярдных книжек и топологических инвариантах конкретных серий эллиптических бильярдных книжек.

Ключевые слова: упорядоченная бильярдная игра, бильярдная книжка, изоэнергетическое многообразие, топологический инвариант.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 22-71-10106 в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Для цитирования: В. А. Кибкало, Д. А. Туниянц. Упорядоченные бильярдные игры и топологические свойства бильярдных книжек // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 610–625. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-610-625>

1. ВВЕДЕНИЕ

Топологический подход к интегрируемым гамильтоновым системам, предложенный А. Т. Фоменко, его учениками и соавторами [1, 18, 19, 24], подробнее см. [3], позволил описывать качественные свойства таких систем с двумя степенями свободы в их неособых зонах энергии при помощи классифицирующих комбинаторных инвариантов. Фазовое пространство (M^4, ω) системы разбивается на совместные уровни энергии H и независимого с ней первого интеграла F , т. е. возникает структура слоения Лиувилля. Почти все его слои являются лагранжевыми регулярными торами и замыканиями фазовых траекторий системы. Послойный гомеоморфизм двух систем в их неособых зонах энергии (т. е. на трехмерных изоэнергетических поверхностях $Q_h^3 : H = h$, в точках которых $dH \neq 0$) означает возможность перевести друг в друга замыкания почти всех траекторий двух систем.

Классифицирующим инвариантом такой эквивалентности является инвариант Фоменко—Цишанга (меченая молекула). Ребра этого графа отвечают семействам регулярных торов, а вершины — бифуркациям такого слоения. Если слои слоения компактны, а критические точки отображения (H, F) невырождены, то классификация таких особенностей (называемых 3-атомами)

была получена А. Т. Фоменко. Атом A является произведением расслоенного 2-диска (окрестности точки минимума или максимума функции) на окружность. Седловые 3-атомы получаются как произведение двумерной расслоенной базы с морсовскими седлами (окрестности графа с вершинами степени 4, вложенного в ориентируемую 2-поверхность) на окружность, возможно, с факторизацией по группе $\mathbb{Z}_2$.

Граф-молекулу с атомами-бифуркациями в вершинах требуется дополнительно оснастить числовыми метками r, ε, n , отвечающими за склейку Q^3 из 3-атомов по диффеоморфизмам их граничных торов. Топологическое описание, включая бифуркационный анализ и вычисление инвариантов Фоменко—Цишанга, было выполнено для многих известных задач геометрии, механики и математической физики, см., например, [2, 3, 11–13, 25, 30]: для геодезических потоков с линейными и квадратичными по импульсам интегралами, волчков Эйлера и Лагранжа, системы Жуковского, волчка Ковалевской и его аналогов на алгебрах Ли. Важную роль в данном направлении сыграли работы М. П. Харламова, П. Е. Рябова и их коллег.

Были обнаружены нетривиальные эквивалентности систем разной природы, например, лиувиллево эквивалентными (и даже непрерывно траекторно эквивалентными при соответствующих значениях параметров систем) оказались геодезический поток на трехосном эллипсоиде и знаменитый волчок Эйлера, т. е. движение тяжелого твердого тела, закрепленного на шарнире в своем центре масс, см. [3]. Эквивалентность двух систем означает, помимо прочего, возможность промоделировать поведение сложной системы при помощи другой, более простой и наглядной.

Как оказалось, предложенное В. В. Ведюшкиной [9, 22] обобщение класса интегрируемых бильярдов в плоских областях, ограниченных софокусными квадратами семейства

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda) \quad (1.1)$$

или концентрическими окружностями, позволяет промоделировать широкий класс слоений интегрируемых систем и их особенностей, т. е. верен ряд положений гипотезы А. Т. Фоменко о бильярдах [20].

Для плоской области $\Omega \subset Oxy$, ограниченной гладкой или кусочно-гладкой кривой $\gamma = \partial\Omega$, системой бильярда в этой области называют гамильтонову систему с энергией $H = |v|^2/2 = (v_x^2 + v_y^2)/2$. Фазовое пространство M^4 получается из $T^*\Omega$ (отождествив его с множеством пар точка—вектор $T\Omega$, поскольку метрика единичная) после введения эквивалентности пар точка—вектор (x, v) для граничных $x \in \partial\Omega$, отвечающей отражению бильярдного шара от границы:

$$M^4 := \{(x, v) | x \in \Omega, v \in T_x\mathbb{R}^2, |v| > 0\} / \sim: (x, v) \sim (\tilde{x}, \tilde{v}) \Leftrightarrow x = \tilde{x} \in \gamma = \partial\Omega, |v| = |\tilde{v}|, v - \tilde{v} \perp T_x\Omega.$$

Движение частицы в области является прямолинейным и равномерным. Отражение от граничной кривой γ сохраняет $|\vec{v}|$ и задается равенством углов падения и отражения. В нашей работе рассматриваются бильярды в областях, ограниченных одной или двумя гладкими кривыми.

Классом бильярдных книжек, введенных В. В. Ведюшкиной [9, 22], называют кусочно-плоские двумерные столы-комплексы X^2 с проекцией $\pi : X^2 \rightarrow Oxy$. Проекция задает гомеоморфизм каждого листа книжки (двумерной клетки e_i^2) на плоскость, что позволяет поднять плоскую метрику с Oxy на объединение листов книжки. При ударе о корешок книжки e^1 (гладкую дугу границы листа книжки) частица может перейти с одного листа на другой, если по этому корешку склеено несколько 2-клеток, или стандартно отразиться, если такой лист один. В проекции на плоскость звенья траектории до и после удара либо лежат на одной прямой, либо получаются отражением от кривой $\gamma = \pi(e^1)$. Если по корешку склеено $k \geq 2$ листов, то правило перехода с листа i на лист $\sigma(i)$ задается циклической перестановкой σ длины k , приписанной этому корешку и действующей транзитивно на всех инцидентных ему листах. Отметим, что если границы листов кусочно-гладкие, например, дуги софокусных эллипсов и гипербол, то на отвечающие им перестановки требуется наложить условие коммутирования (для непрерывности фазового потока).

Пусть все корешки книжки проецируются на эллипсы семейства (1.1) или концентрические окружности. Тогда для любых перестановок на 1-ребрах движение шара по столу (книжке) интегрируемо с тем же интегралом, что и плоский бильярд. В проекции на плоскость фазовая траектория имеет *каустыку* — кривую, которой касаются прямые, содержащие звенья траектории.

Для софокусных билиардов она является квадрикой с параметром λ , равным значению квадратичного по импульсам интеграла Λ с условиями $0 < b < a$ на паре точка—вектор (x, y, v_x, v_y)

$$\Lambda = \frac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_1x - v_2y)^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Для билиярда в круге или кольце, ограниченном концентрическими окружностями, интеграл равен $\dot{\phi} = x\dot{y} - y\dot{x}$, т. е. является линейным по импульсам. Каждая каустика является окружностью с тем же центром, что и окружности границы.

Поверхность Q_h^3 уровня $H = h > 0$ в M^4 билиардной книжки, согласно результату И. С. Харчевой [26], гомеоморфна замкнутому трехмерному многообразию. Для плоских столов это ранее было показано В. В. Ведюшкиной в [17].

Вычисление топологических инвариантов плоских софокусных билиардов было выполнено В. Драговичем и М. Раднович в [28] и В. В. Ведюшкиной в [15]. Расширение класса рассматриваемых столов до топологических билиардов [16] (их столы являются кусочно-плоскими двумерными многообразиями) и билиардных книжек (клеточных комплексов с перестановками) позволило реализовать широкий класс инвариантов интегрируемых систем и их особенностей. В частности, произвольные боттовские особенности-атомы [9], базы слоения Лиувилля [10] и числовые метки, которыми оснащаются ребра и подграфы-семьи в инвариантах Фоменко—Цишанга [5, 7]. Последние результаты отвечают локальной версии гипотезы А. Т. Фоменко [21] о реализации «элементарных» подграфов графа-инварианта. Также были обнаружены неочевидные эквивалентности билиардов и систем из геометрии и динамики твердого тела [4, 8, 23].

1.1. Упорядоченные билиардные игры. В работе [27] В. Драговичем и М. Раднович были введены *упорядоченные билиардные игры*, т. е. системы движения частицы «с памятью», которые задаются двумя упорядоченными наборами: набор из n софокусных эллипсов $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ и *сигнатура* игры, т. е. набор из n знаков $\delta_1, \dots, \delta_n : \delta_j \in \{\pm 1\}$.

Рассмотрев все эллипсы $\mathcal{E}_s$ как представителей семейства (1.1) при $\lambda = \lambda_s$ для $0 \leq \lambda_s < b$, опишем траекторию системы в терминах чисел λ_s . Траектория билиардной игры является ломаной $\dots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \dots$, вершины которой A_k принадлежат эллипсу $\mathcal{E}_s$ для $s \equiv k \pmod{n}, k \in \mathbb{Z}$. Если знак $\delta_s = 1$, то отражение от эллипса $\mathcal{E}_s$ в вершине A_k является внутренним, а если $\delta_s = -1$, то внешним. На рис. 1 приведен пример такой упорядоченной билиардной игры.

Отметим, что для *корректности* упорядоченной билиардной игры необходимо и достаточно, чтобы для сигнатуры $(\delta_1, \dots, \delta_n)$ было верно:

- отсутствует два последовательных элемента $\delta_s = \delta_{s+1} = -1$ (здесь $\delta_{n+1} = \delta_1$), поскольку два последовательных внешних отражения от эллипса в $\mathbb{R}^2$ невозможны;
- если $\delta_s = -1$, то эллипс $\mathcal{E}_s$ лежит внутри эллипсов $\mathcal{E}_{s-1}$ и $\mathcal{E}_{s+1}$ (т. е. $\lambda_{s-1} < \lambda_s < b$ и $\lambda_{s+1} < \lambda_s$).

Поскольку при отражении от эллипсов семейства (1.1) и движении вдоль прямой сохраняется значение λ интеграла Λ , то вдоль траекторий упорядоченной билиардной игры сохраняются энергия и интеграл Λ плоских билиардов и книжек. Отметим, что при замене софокусных эллипсов, вложенных друг в друга на плоскости, на набор концентрических окружностей, данное свойство сохранится (для линейного интеграла).

В работе [29] для произвольной билиардной игры строится билиардная книжка, система на которой реализует игру в следующем смысле.

Определение 1.1. Интегрируемый билиард на столе Ω реализует упорядоченную билиардную игру $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ с сигнатурой $\delta_1, \dots, \delta_n$, если для каждого значения интеграла $\Lambda = \lambda : \max_s \lambda_s < \lambda \leq a$ билиард имеет траекторию, лежащую на уровне λ и отвечающую данной игре.

Прямая, содержащая произвольное звено траектории, лежащей на уровне $\Lambda = \lambda \in \left(\max_s \lambda_s, a \right]$, будет пересекать каждый эллипс билиардной игры. Для круговых билиардов то же верно для траекторий, каустика которых имеет меньший радиус, чем остальные корешки-окружности игры.

Билиард в эллипсе $\mathcal{E}_1 = \{x^2/a + y^2/b = 1\}$ с параметром $\lambda_1 = 0$ реализует игру $(\mathcal{E}_1)$ с сигнатурой $\delta_1 = 1$, т. к. для всех $0 < \lambda \leq a$ на уровне $\Lambda = \lambda$ имеется траектория, отражающаяся

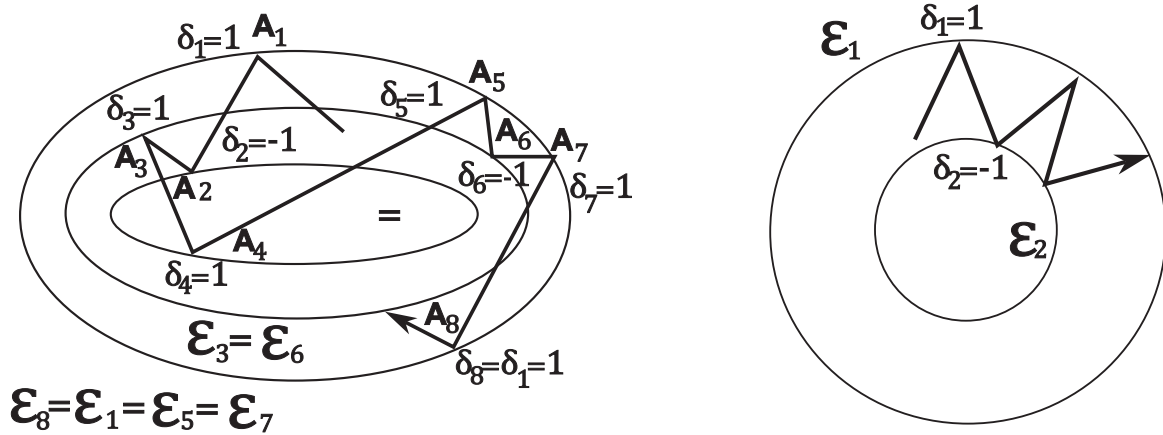


РИС. 1. Упорядоченная бильярдная игра, заданная наборами $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7)$ и $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7) = (1, -1, 1, 1, 1, -1, 1)$ с совпадающими эллипсами $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_5 = \mathcal{E}_7$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_4$ и $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_6$. В силу $\delta_4 = +1$ частица завершает движение по звену A_3A_4 отражением от эллипса $\mathcal{E}_4$ не в первой точке пересечения прямой с эллипсом $\mathcal{E}_4$, а во второй: отражение должно быть внутренним, а точка A_3 лежит вне него.

FIG. 1. An ordered billiard game defined by the sets $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \mathcal{E}_4, \mathcal{E}_5, \mathcal{E}_6, \mathcal{E}_7)$ and $(\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta_5, \delta_6, \delta_7) = (1, -1, 1, 1, 1, -1, 1)$ with coinciding ellipses $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_5 = \mathcal{E}_7$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_4$ and $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_6$. Due to $\delta_4 = +1$ the particle completes its motion along the edge A_3A_4 with reflection from the ellipse $\mathcal{E}_4$ not at the first point of intersection of the line with the ellipse $\mathcal{E}_4$, but at the second one: the reflection must be internal, and the point A_3 lies outside of it.

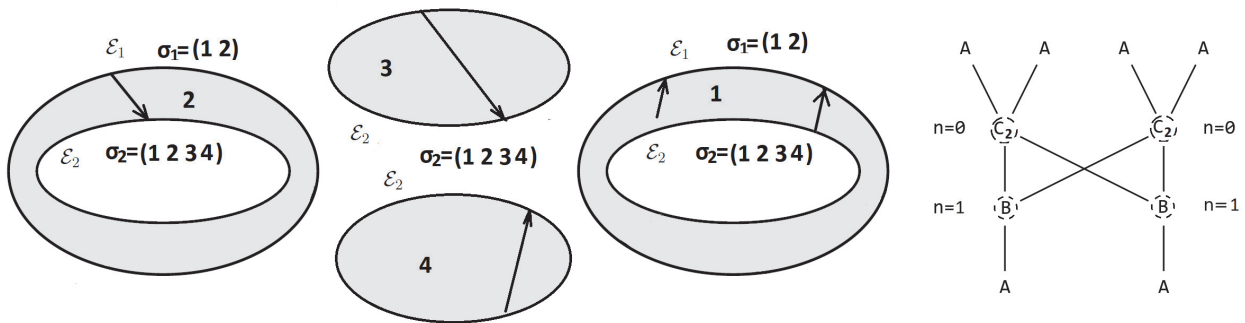


РИС. 2. Бильярдная книжка, реализующая игру $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с сигнатурой $(1, 1)$ и инвариант Фоменко—Цишанга бильярда на ней.

FIG. 2. A billiard book implementing the game $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ with the signature $(1, 1)$ and the Fomenko—Zieschang invariant of the billiard on it.

от $\mathcal{E}_1$ внутренне. Бильярд в кольце между эллипсами $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ с параметрами $\lambda_1 < \lambda_2 < b$ реализует игру $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с сигнатурой $(1, -1)$. На уровне $\max(\lambda_1, \lambda_2) < \lambda \leq a$ интеграла Λ есть траектория, удовлетворяющая игре.

Для реализации произвольной бильярдной игры В. Драговичем и М. Раднович были применены [29] динамические системы на кусочно-плоских бильярдных книжках. Нетрудно видеть, что бильярдами из более простого класса (на плоских столах) нельзя реализовать, например, игру $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с сигнатурой $(1, 1)$, изображенную на рис. 2.

В пределах каждого листа L траектория частицы является поднятием траектории бильярда в плоской области $\pi(L)$. При трансверсальном ударе о гладкую границу листа L (корешок книжки) частица продолжит движение по листу $\sigma_k(L)$, причем если проекции $\pi(L)$ и $\pi(\sigma_k(L))$ лежат

1. по одну сторону от проекции граничной кривой $\pi(\gamma)$, то для проекции траектории выполнен закон отражения от $\pi(\gamma)$;

2. по разные стороны от проекции граничной кривой $\pi(\gamma)$, то проекции двух звеньев (до и после отражения) попадают на одну прямую, пересекающую $\pi(\gamma)$, т. е. отражение отсутствует.

Для реализации произвольной корректной упорядоченной бильярдной игры с эллипсами $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ и сигнатурой $\delta_1, \dots, \delta_n$ В. Драгович и М. Раднович алгоритмически построили книжки, склеенные из эллиптических колец и дисков. Далее ограничимся случаем, когда соседние эллипсы в наборе не совпадают: $\lambda_s \neq \lambda_{s+1}$. Тогда построенная книжка имеет n корешков с перестановками $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ — гладких кривых, проецирующихся на эти эллипсы $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$.

Теорема 1.1 (В. Драгович, М. Раднович). *Корректная упорядоченная бильярдная игра с софокусными эллипсами $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$ и сигнатурой $(\delta_1, \dots, \delta_n)$, где $\mathcal{E}_s \neq \mathcal{E}_{s+1}$ (считаем, что $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1} = \mathcal{E}_1$) реализуется книжкой, склеенной из следующих листов для $\forall s \in \{1, \dots, n\}$:*

- (A) кольцо A_s , ограниченное эллипсами $\mathcal{E}_s$ и $\mathcal{E}_{s+1}$;
- (D1) диск D_s с границей $\mathcal{E}_s$, если знак $\delta_s = 1$ и эллипс $\mathcal{E}_s$ лежит между двумя соседними эллипсами $\mathcal{E}_{s-1}$ и $\mathcal{E}_{s+1}$;
- (D2) пара дисков D'_s и D''_s с границей $\mathcal{E}_s$, если знак $\delta_s = -1$ и эллипс $\mathcal{E}_s$ лежит внутри обоих соседних эллипсов $\mathcal{E}_{s-1}$ и $\mathcal{E}_{s+1}$.

Перестановка σ_s , соответствующая корешку $s = 1, \dots, n$ на эллипсе склейки $\mathcal{E}_s$, равна

1. $(A_{s-1}D_sA_s)$ в случае (D1);
2. $(A_{s-1}D'_sD''_sA_s)$ в случае (D2);
3. $(A_{s-1}A_s)$ иначе.

В той же работе доказана более общая теорема для класса игр, содержащих среди соседних эллипсов $\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{i+1} = \dots = \mathcal{E}_{i+k-1}$ равные. Набору соседних равных эллипсов соответствует вклейка некоторого количества дисков, причем во всех возникающих случаях перестановки на корешках имеют тот же вид: кольцо с меньшим номером, набор дисков, кольцо с большим номером. При этом количество вклеиваемых дисков должно быть на k больше, чем в теореме для игр без таких повторов, сформулированной выше.

Отметим следующий общий факт: книжка может реализовывать некоторый набор бильярдных игр, не обязательно одну или две. Построенные по алгоритму из работы [29] бильярдные книжки реализуют ровно две игры: после удаления листов-дисков стол оказывается гомеоморфен двумерному тору, склеенному из плоских колец. Переход от траектории, реализующей одну бильярдную игру, к траектории, реализующей другую, происходит при изменении направления движения на противоположное в точке одного из колец A_k .

Пусть одна игра отвечает заданным наперед наборам $(\dots \mathcal{E}_k \dots)$ и $(\dots \delta_k \dots)$. Введем понятие *обратной игры* — запишем в обратном порядке последовательность эллипсов, задававших данную упорядоченную бильярдную игру, и запишем в обратном порядке сигнатуру. В общем случае, построенная в [29] бильярдная книжка не является обратимой системой в следующем смысле: проекция на плоскость траектории шара, запущенного в обратном направлении с некоторого листа, не будет задаваться (как бильярдная игра) ни данной, ни обратной игрой.

Покажем, что следующая модификация алгоритма путем вклейки дисков позволяет сделать вторую игру, реализуемую книжкой, обратной к первой. Иначе говоря, можно дать более сильное определение реализации упорядоченной бильярдной игры бильярдными книжками:

Определение 1.2. Бильярдная книжка, склеенная из эллиптических колец и дисков с корешками, проецирующимися на эллипсы с параметрами λ_k , *реализует упорядоченную бильярдную игру*, если произвольная траектория на уровнях интеграла $\Lambda = \lambda : \max_k \lambda_k < \lambda \leq a$ реализуют либо данную игру, либо ей обратную.

Теорема 1.2 (Кибкало, Туниянц). *Произвольная упорядоченная бильярдная игра реализуется в смысле определения 1.2 алгоритмически задаваемой бильярдной книжкой Ω' . Последняя получается из книжки Ω , построенной по алгоритму [29] В. Драговича и М. Раднович для данной игры, путем добавления второго экземпляра диска $\tilde{D}_k^i$ для каждого листа-диска D_k^i , входящего в Ω и соответствующего изменению перестановки на корешке, инцидентном листу D_k^i . Если включающая лист D_k^i перестановка книжки Ω имеет вид $(A_{k-1}, D_k^1, \dots, D_k^s, A_k)$, то перестановка новой книжки Ω' будет иметь вид $(A_{k-1}, D_k^{(1)}, \dots, D_k^{(s)}, A_k, \tilde{D}_k^1, \dots, \tilde{D}_k^s)$.*

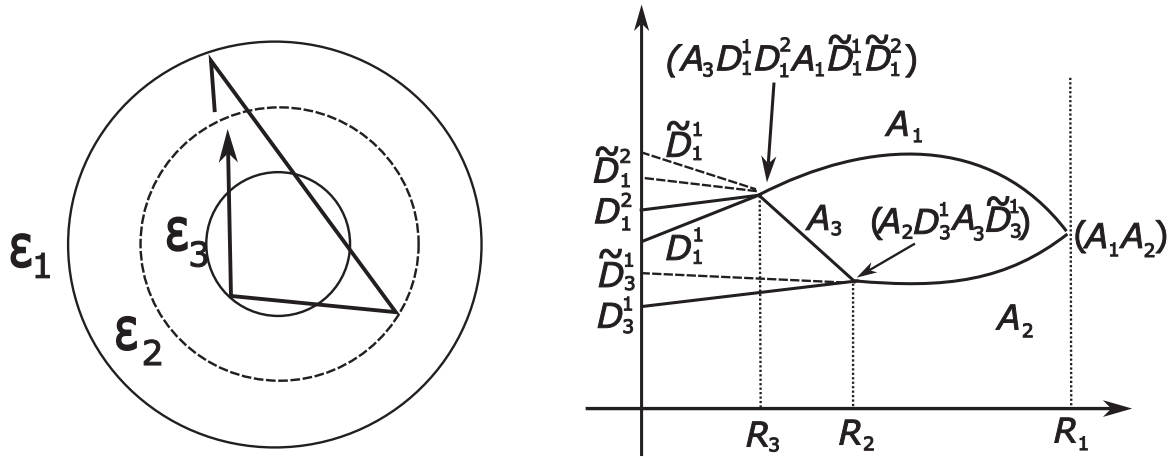


РИС. 3. Биллиардная игра $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$ с сигнатурой $(1, 1, 1)$, реализующая ее по алгоритму из [29] книжка и ее модификация путем вклейки дисков $\tilde{D}_k^i$ для каждого диска D_k^i исходной книжки.

FIG. 3. Billiard game $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$ with the signature $(1, 1, 1)$, the book implementing it according to the algorithm from [29], and its modification by gluing disks $\tilde{D}_k^i$ for each disk D_k^i of the original book.

Доказательство.

1. Рассмотрим на биллиардной книжке из исходного алгоритма В. Драговича и М. Раднович траекторию, реализующую требуемую игру. Она последовательно проходит по кольцам A_i , а перед переходом с листа A_i на лист A_{i+1} по перестановке $\sigma_i = (A_i, \dots, A_{i+1})$ проходит по листам D_i в имеющемся количестве (в записи перестановки σ_i они стоят на месте многоточия). В частности, добавление дисков в перестановку σ_i после кольца A_{i+1} не влияет на то, какую игру реализует рассмотренная траектория.

2. Изменим направление на звене траектории, лежащем на кольце A_{i+1} . В этом случае она перейдет на кольцо A_i , и в конце пути вернется на данный лист A_{i+1} с кольца A_{i+2} . При ударе об общий корешок листов A_{i+1} и A_i отражение будет иметь тот же тип (внешнее или внутреннее), а количество дисков позволяет реализовать нужное число последовательных внутренних отражений от повторяемого k раз эллипса. При этом эллипсы игры проходятся в обратном порядке. Теорема доказана. $\square$

На рис. 3 приведен пример игры и реализующей ее книжки, которая после вклейки дополнительных листов (обозначены штриховыми линиями на рис. 3 справа) согласно теореме 1.2 начинает реализовывать одновременно игру $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1)$ с сигнатурой $(1, 1, 1)$ и обратную ей игру вместо реализации исходной игры вместе с игрой $(\mathcal{E}_3, \mathcal{E}_1)$ с сигнатурой $(-1, 1)$.

Теперь укажем, какие корректные биллиардные игры невозможно реализовать (книжкой, склеенной из эллиптических или круговых колец и дисков) при дополнительном условии: траектория проходит хотя бы по одному диску. Иными словами, реализующая такую игру траектория биллиарда (на книжке) может проходить только по ее кольцам. Отметим, что реализуемость без данного условия следует из теоремы 1.1.

Утверждение 1.1 (Туниянц). *Корректная упорядоченная биллиардная игра не может быть реализована компактной биллиардной книжкой (склеенной из колец и дисков) с условием, что реализующие игру траектории проходят хотя бы по одному диску, тогда и только тогда, когда игра содержит четное количество эллипсов $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{2n}$, а сигнатура знакопеременна: $\delta_s = -\delta_{s+1}$ для $s = 1, \dots, 2n$.*

Доказательство. Поскольку книжка корректна, а сигнатура знакопеременна, то соседние эллипсы $\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_{i+1}$ не могут совпадать. Выберем некоторое звено траектории. Пусть оно проходит по листу-диску L_k книжки. Тогда после удара о границу траектория покидает этот лист (иначе игра имеет вид $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}, \delta_1 = 1$).

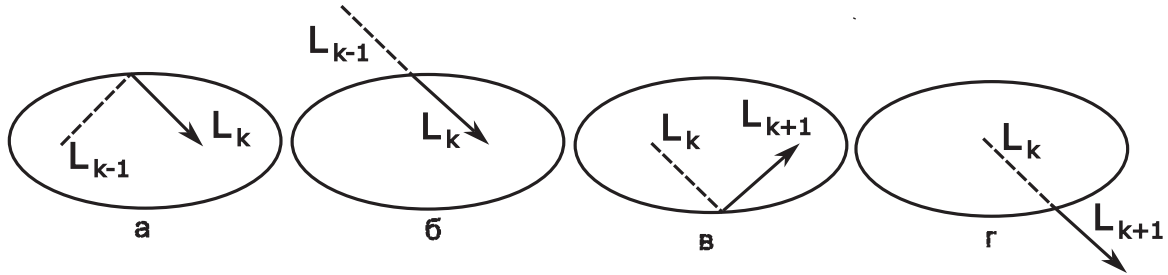


РИС. 4. Возможные варианты движения частицы (в проекции на плоскость) при переходе с листа L_{k-1} на гомеоморфный диску и ограниченный эллипсом $\mathcal{E}$ лист L_k (а, б) и при переходе с такого листа L_k на лист L_{k+1} (в, г).

FIG. 4. Possible variants of particle motion (in projection onto a plane) when moving from the sheet L_{k-1} to the sheet L_k , which is homeomorphic to a disk and bounded by an ellipse $\mathcal{E}$ (а, б) and when moving from such sheet L_k to sheet L_{k+1} (в, г).

Обозначим листы, по которым проходят предыдущее и следующее звенья траектории, через L_{k-1} и L_{k+1} . Вместе с L_k они имеют общий корешок. На рис. 4 приведены варианты расположения проекции листов L_{k-1} и L_{k+1} и эллипса $\mathcal{E} = \pi(\partial L_k)$. Сплошная стрелка отвечает звену траектории на листе L_k и L_{k+1} на рис. 4 (а, б) и на рис. 4 (в, г), соответственно.

Для каждого из четырех случаев такое невозможно: или два отражения подряд будут внутренними, или после прохождения по диску отражение должно было бы быть внешним.

Покажем, что если книжка склеена только из колец, то сигнатура каждой из реализуемых ею игр знакопеременная. Для удобства рассмотрим уровень $\Lambda = a$ для софокусного бильярда и $r = 0$ для кругового бильярда: при этом проекция всей траектории лежит на одной прямой. После внешнего отражения должно быть внутреннее: иначе траектория (и книжка) будет неограниченной. После внутреннего отражения имеем внешнее: иначе частица проходила бы через центр семейства каустик, что для колец невозможно. Утверждение доказано. $\square$

2. ТОПОЛОГИЯ ИЗОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ БИЛЛИАРДНЫХ КНИЖЕК И УПОРЯДОЧЕННЫХ БИЛЛИАРДНЫХ ИГР

В данном разделе приведем несколько утверждений о топологии изоэнергетических поверхностей Q^3 бильярдных книжек, склеенных из колец и дисков. Согласно результату И. С. Харчевой, для корректной книжки уровень Q^3 будет замкнутым топологическим 3-многообразием.

Отметим, что в недавней работе В. В. Ведюшкиной [6] были алгоритмически реализованы бильярдными книжками связные суммы произвольного набора линзовых пространств $L(p_i, q_i)$ и прямых произведений $S^1 \times S^2$. Корешки склейки и свободные границы таких столов проектируются как на софокусные эллипсы $\lambda < b$, так и на гиперболы $b < \lambda < a$.

Будем говорить о *кольцевой* бильярдной книжке, если она склеена из плоских областей, гомеоморфных кольцам, причем корешки книжки являются регулярными замкнутыми кривыми без самопересечений, а их проекции $\pi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2(x, y)$ либо совпадают, либо не пересекаются. Тогда на множестве корешков задается порядок: проекция одного из двух корешков находится внутри замкнутого диска, ограниченного проекцией другой.

Скажем, что две кольцевые книжки Ω_1 и Ω_2 *эквивалентны*, если существует гомеоморфизм $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ этих книжек, переводящий лист в лист, корешок в корешок с сохранением перестановки на корешке, а также сохраняющий порядок на корешках, описанный выше.

Это понятие корректно. Набор корешков произвольной кольцевой книжки (точнее, их проекций на плоскость) можно путем регулярной гомотопии привести к набору концентрических окружностей. Поднятие гомотопии с плоскости на бильярдную книжку (с учетом перестановок) порождает для каждого значения параметра гомотопии бильярдные книжки, эквивалентные исходной. В итоге получается некоторая круговая книжка, эквивалентная исходной.

Добавление к кольцевой книжке листов, гомеоморфных дискам и ограниченных корешками кольцевой книжки, не препятствует ее приведению к *каноническому виду*, т. е. к эквивалентной ей

книжке, склеенной из круговых колец и листов-дисков. Последняя имеет S^1 -симметрию, $\pi^{-1} \circ \alpha$, где α — поворот в плоскости.

Определение 2.1. Профилем $P(\Omega)$ бильярдной книжки Ω , склеенной из колец и дисков, назовем факторпространство канонического вида Ω по S^1 -симметрии $\pi^{-1} \circ \alpha$ с проекцией на ось Or .

Если книжка Ω кольцевая, то она гомеоморфна $P(\Omega) \times S^1$. Профиль имеет структуру графа: его ребру отвечает лист книжки Ω , а вершине — центр листа-диска или корешок склейки книжки Ω . Пример профиля круговой книжки, склеенной из двух колец и диска, приведен на рис. 5.

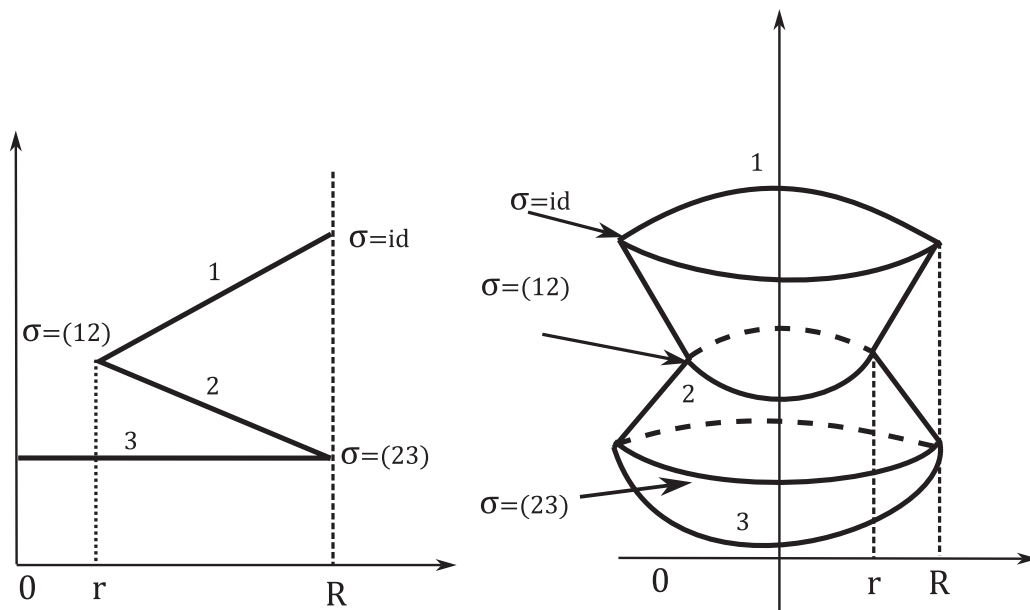


РИС. 5. Профиль бильярдной книжки, склеенной из двух колец и диска

FIG. 5. Profile of a billiard book glued from two rings and a disc

Сформулируем условие эквивалентности двух круговых книжек в терминах их профилей. Для каждой точки A профиля определен радиус r окружности с центром в точке O , на которой лежит $\pi^{-1}(A)$. Две круговые книжки *эквивалентны*, если имеется гомеоморфизм f между ними, сохраняющий отношение порядка: из $r(A) < r(B)$ следует, что $r(f(A)) < r(f(B))$.

2.1. Кольцевые книжки. Класс гомеоморфности изоэнергетической поверхности Q^3 кольцевой бильярдной книжки определяется цикломатическим числом (первым числом Бетти) ее графа-профиля. Оно равно минимальному количеству ребер, удаление которого превращает граф в дерево. Для связного графа с V вершинами и E ребрами оно равно $E - V + 1$.

Теорема 2.1 (Туниянц). *Изоэнергетическая поверхность Q^3 кольцевой бильярдной книжки гомеоморфна прямому произведению окружности и сферы с g ручками: $Q^3 \cong S^1 \times (S^2 + g \text{ ручек})$, где g — цикломатическое число графа-профиля книжки.*

Комментарий. Класс гомеоморфности Q^3 кольцевой книжки не зависит от выбора циклических перестановок на корешках, т. е. определяется только свойствами комплекса, а не его оснащением перестановками.

Следствие. Пусть бильярдная книжка из алгоритма теоремы 1.1 склеена из колец. Тогда ее изоэнергетическое многообразие Q^3 гомеоморфно трехмерному тору T^3 .

Доказательство. Для канонического вида кольцевой книжки Ω имеем, что трехмерное ориентируемое многообразие Q^3 есть произведение S^1 на двумерный прообраз M^2 ее профиля (как подмножества конфигурационного пространства) в фазовом Q^3 . Отсюда имеем, что M^2 является двумерным ориентируемым многообразием.

1. Покажем, что прообраз в фазовом Q^3 окрестности вершины V_i графа-профиля $U(V_i) \subset M^2$ есть сфера S^2 с k_i вырезанными дисками D^2 , где $k_i = \deg V_i$. Напомним, что прообраз внутренней точки x ребра в Q^3 есть окружность, состоящая из пар «точка x и вектор скорости $|\vec{v}| = 1$ ». Два вектора скорости направлены по касательной к окружности-каустике в данной точке x (по и против часовой стрелки). Такие пары точка—вектор разбивают прообраз ребра в Q^3 (т. е. цилиндр) на два прямоугольника.

Прообраз вершины V_i графа-профиля степени $k_i = \deg V_i$ есть пара точек A_1 и A_2 (вектор скорости касается корешка склейки) и k_i соединяющих их дуг. К каждой дуге приклеено ровно два из $2k_i$ прямоугольников, на которые разбиваются k_i цилиндров, склеиваемых в прообразе вершины. Окрестности точек A_1, A_2 в многообразии M_i^2 гомеоморфны дискам.

Тем самым M_i^2 разбито на $2 + 2k_i$ вершин, $2k_i$ граней, гомеоморфных дискам, и $5k_i$ ребер. $2k_i$ ребер лежат (вместе с $2k_i$ вершинами) в прообразе $\partial U(V_i)$, другие $2k_i$ разбивают цилиндры (прообразы ребер, инцидентных V_i) на пары прямоугольников, а k_i ребер отвечают дугам между точками A_1, A_2 в прообразе вершины V_i . Эйлерова характеристика $\chi_i = 2 + 2k_i - 5k_i + 2k_i = 2 - k_i$, т. е. из ориентируемости M_i^2 это сфера S^2 без k_i дисков.

2. Цикломатическое число графа-профиля равно $g = E - V + 1$, где E — число ребер в графе-профиле, V — число вершин в нем. Поскольку $\sum_{i=1}^V k_i = \sum_{i=1}^V \deg V_i = 2E$, то эйлерова характеристика замкнутой $\chi(M^2)$ как склейки V сфер с дырками равна

$$\chi(M^2) = \sum_{i=1}^V \chi_i = \sum_{i=1}^V (2 - k_i) = 2V - \sum_{i=1}^V k_i = 2V - 2E = 2 - 2(E - V + 1) = 2 - 2g.$$

Отсюда $M^2 \cong S^2 + (g \text{ ручек})$, т. е. $Q^3 \cong (S^2 + g \text{ ручек}) \times S^1$. Теорема доказана. $\square$

Из доказанной теоремы следует, что при следующих преобразованиях круговой кольцевой книжки топологический тип ее изоэнергетической поверхности Q^3 не меняется. Книжка остается круговой кольцевой книжкой, но граф-профиль, количество корешков и листов может меняться.

Выберем корешок γ_0 радиуса r_0 книжки, по которому склеено $n > 3$ листов с перестановкой $\sigma_0 = (L_1, \dots, L_n)$. Для листа L_1 и листа $L_2 = \sigma_0(L_1)$ изменим радиус колец L_1, L_2 с r_0 на r_1 , вклеим кольцо A_0 с радиусами r_0, r_1 и зададим перестановки $\sigma = (A_0, L_3, \dots, L_n)$ и $\sigma_1 = (A_0 L_1 L_2)$ на корешках радиусов r_0 и r_1 . При этом траектория шара, пришедшая в окрестность замыкания нового листа A_0 по листу L_i , покидает ее по тому же листу $L_{i+1} = \sigma_0(L_i)$, что до преобразования.

Таковыми преобразованиями произвольную кольцевую книжку с цикломатическим числом g можно преобразовать к книжке, изображенной на рис. 6 (в). Она склеена из $2g$ колец так, что все кольца имеют общий корешок, а по оставшимся корешкам склеены по парам. Многообразие Q^3 такой книжки гомеоморфно произведению сферы S^2 с g ручками на окружность S^1 . Это можно проверить и явно: прообраз окрестности вершины есть сфера с $2g$ дырками, а прообраз пары колец отвечает ручке.

2.2. Круговые бильiardные книжки, содержащие диски. Если книжка содержит диск, то класс гомеоморфности ее изоэнергетической поверхности Q^3 устроен сложнее. Для его изучения оказывается полезным использовать слоение Лиувилля соответствующего кругового бильiardа. В качестве интеграла F , независимого с H , выберем не радиус окружности-каустики, а ориентированный угол, отсчитываемый от вектора скорости траектории к направляющему вектору каустики (направленной по часовой стрелке). Тогда интеграл F меняется от 0 до π , и его уровень $\pi/2$ отвечает случаю, когда траектория проходит через центр диска. В. А. Кибкало совместно с В. Н. Завьяловым недавно был получен следующий результат, который мы приведем с коротким обоснованием.

Утверждение 2.1. *Класс гомеоморфности Q^3 связной бильiardной книжки, разные корешки которой не имеют общих точек, не зависит от того, к каким именно корешкам книжки приклеены листы-диски.*

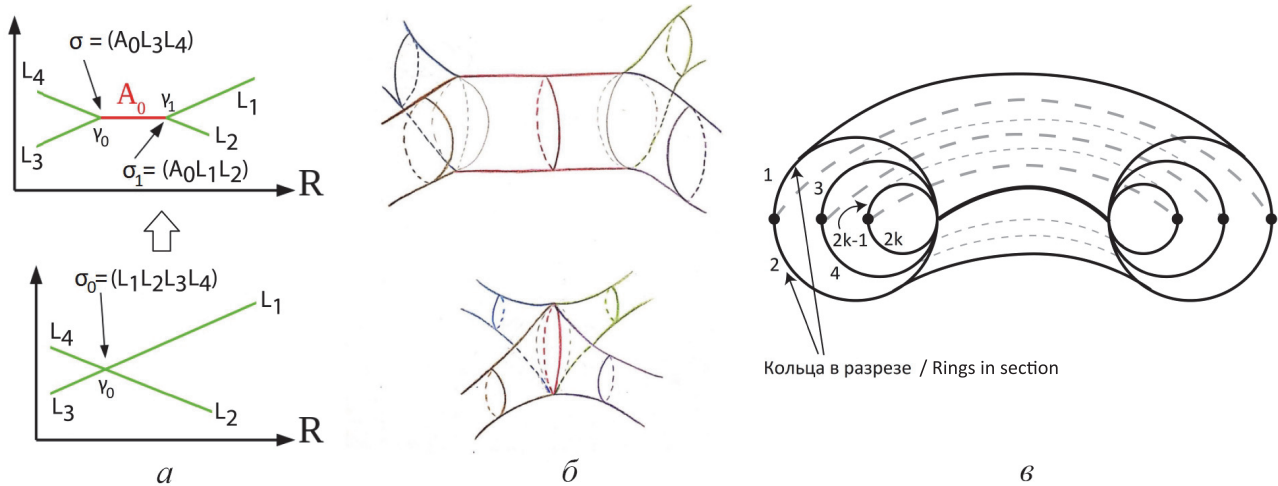


РИС. 6. Граф-профиль книжки (а) и прообраз окрестности вершины (б) до преобразования (снизу) и после него (сверху). Вид, к которому таким преобразованием приводится произвольная круговая книжка.

FIG. 6. The profile graph of a book (a) and the preimage of the neighborhood of a vertex (б) before the transformation (bottom) and after it (top). The form to which such a transformation reduces an arbitrary circular book.

Доказательство. Вычислим инвариант Фоменко—Цишанга кругового биллиарда с выбранным графом-профилем. Этот биллиард интегрируем с интегралом $F : f \in [\pi/2, \pi]$. Данный граф, напомним, является базой слоения Лиувилля на изоэнергетической Q^3 . Его вершины отвечают бифуркациям слоения, а ребра — семействам регулярных торов. Висячие вершины графа отвечают минимальным и максимальным атомам A , т. е. полноториям, расслоенным на торы и их общую ось (особую окружность системы). Остальные вершины отвечают седловым 3-атомам. Состоящий из них подграф связан, а в его прообразе имеем многообразие Зейферта со слоем-окружностью, не стягиваемой во всем Q^3 . Особые окружности седловых 3-атомов также отвечают корешкам склейки с учетом направления обхода.

Инвариант Фоменко—Цишанга симметричен относительно уровня интеграла $F = \pi/2$, т. е. имеет вид $W = W$ для некоторого подграфа W . Две компоненты (выше и ниже уровня $F = \pi/2$) соединяются некоторым количеством ребер, середина которых отвечает уровню $F = \pi/2$, траектории на котором проходят через центр стола. Уровни выше и ниже него отвечают движению шара, происходящему по или против часовой стрелки вокруг центра стола.

Числовые метки равны $r = \infty$ на ребрах между седловыми атомами и равны $r = 0$ между атомом A и седловым атомом. При этом седловые атомы не имеют вершин-звездочек, т. е. многообразие Зейферта имеет вид прямого произведения расслоенной 2-базы M^2 с морсовскими седловыми точками на окружность.

Вклад в целочисленную метку n дают те ребра, которые соединяют два подграфа W и регулярные торы которых проецируются, в том числе, на диски. При этом вклад каждого ребра определяется количеством вклеенных дисков, т. е. числом раз, при которых цикл касается каустики при прохождении по этому диску при значении f , близком к $\pi/2$. Далее вклады каждого ребра складываются, т. е. имеет значение лишь количество дисков. Утверждение доказано. $\square$

3. ТОПОЛОГИЯ СЛОЕНИЙ ЛИУВИЛЛЯ КОНКРЕТНЫХ БИЛЛИАРДНЫХ КНИЖЕК

В работе [29] были подсчитаны инварианты Фоменко (молекулы без меток) нескольких серий биллиардных книжек, реализующих определенные биллиардные игры. Вопрос вычисления для них более тонких топологических инвариантов Фоменко—Цишанга (молекул, к которым добавлены числовые метки) является открытой проблемой. При наличии на листах стола фокусов

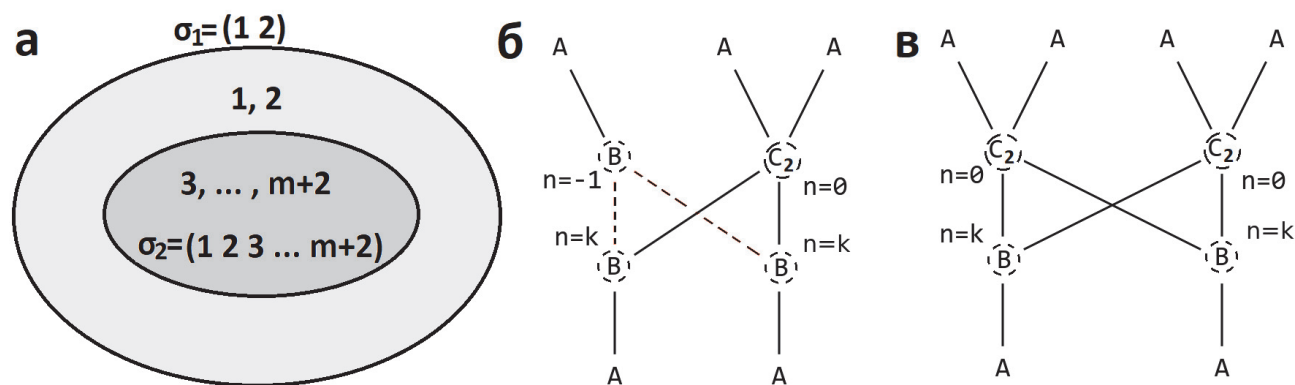


РИС. 7. Биллиардная книжка, склеенная из двух колец и m дисков, (а). Инвариант Фоменко—Цишанга биллиардной системы на ней при (б) $m = 2k + 1$ и (в) $m = 2k$.

FIG. 7. A billiard book glued together from two rings and m disks, (a). The Fomenko—Zieschang invariant of the billiard system on it for (б) $m = 2k + 1$ and (в) $m = 2k$.

квадрик семейства (1.1), т. е. при наличии у книжки листов-дисков, нахождение как типов атомов, так и числовых меток r, ε, n становится весьма нетривиальной задачей. Приведем далее ряд результатов о таких книжках, полученных недавно К. Е. Тюриной [14].

Пусть книжка склеена из кольца 1 с граничными эллипсами $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ и двух равных эллиптических дисков 2 и 3 по общему граничному эллипсу $\mathcal{E}_2$. В этом случае инвариант Фоменко—Цишанга не будет отличаться от вычисленного в [16] инварианта топологического биллиарда, склеенного из двух эллиптических дисков. Он содержит один седловой 3-атом C_2 с меткой $n = 2$ на нем.

Метки на четырех ребрах имеют вид $C_2 \frac{r=0}{\varepsilon=1} A$. Если корешок $\mathcal{E}_2$ является меньшим граничным эллипсом кольца, то как отмечено в [29], такая книжка реализует игру $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с сигнатурой $(1, 1)$.

Рассмотрим игру $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_2)$ с m отражениями от меньшего эллипса $\mathcal{E}_2$ подряд и сигнатурой $(1, \dots, 1)$. Склеим книжку $\Omega_{2,m}$ из двух колец 1, 2 и m эллиптических дисков 3, $\dots$, $m+2$ по меньшему эллипсу $\mathcal{E}_2$ с перестановкой $\sigma_2 = (1234 \dots m+2)$ и по большему эллипсу $\mathcal{E}_1$ с перестановкой $\sigma_1 = (12)$. Она изображена на рис. 6 (а). Параметры эллипсов обозначим λ_1, λ_2 . Движение шара по такой книжке реализует описанную выше игру и игру $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с сигнатурой $(1, -1)$.

Молекула без меток для частного случая $m = 2$ была найдена в [29, пример 3.1]. Она изображена на рис. 2. Отметим также, что топология слоения Лиувилля биллиардной книжки, склеенной из m эллипсов, была вычислена ранее В. В. Ведюшкиной.

Утверждение 3.1 (Тюрина). *Инвариант Фоменко—Цишанга книжки $\Omega_{2,m}$ при $m = 2k$ и $m = 2k + 1$ имеет вид, изображенный на рис. 7 (б) и рис. 7 (в), соответственно. Метка r равна $1/2$ на штрихованных ребрах и нулю на сплошных ребрах. Все метки ε равны 1.*

За исключением уровня $\lambda = b$ (отвечающего «верхней» паре атомов B или C_2 на рис. 7), количество регулярных торов или тип 3-атома нетрудно определить. На уровне $\lambda = b$ одна пара торов Лиувилля, отвечающих игре $(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ с сигнатурой $(1, -1)$ и проецирующихся на кольцо между эллипсами $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$, перестраивается через две критические окружности через атом C_2 . Для изображенных инвариантов это «правый» из двух «верхних» седловых атомов. Два других тора в пределе $\lambda \rightarrow b - 0$ пересекутся либо по одной (при нечетном m) или по двум (при четном m) окружностям. Атом не имеет звездочек и имеет симметрии, т. е. это либо атом B , либо атом C_2 .

Для вычисления меток на граничных торах 3-атомов строится пара циклов (λ, μ) , которые образуют на торе базис в его группе π_1 . Цикл λ при этом гомологичен в седловом 3-атоме (как 3-многообразию с границей) особым окружностям этого 3-атома и имеет то же направление, а набор циклов μ на всех граничных торах 3-атома должен продолжаться внутрь атома до его сечения (слой которого есть λ цикл). Ребру молекулы отвечает матрица перехода между базисами, идущими с двух соединяемых им атомов. Ее определитель равен -1 , что задает направления оставшихся циклов.

Сформулируем ответ о циклах в терминах матриц склейки: на нижних ребрах имеем

$$\begin{pmatrix} \lambda_B \\ \mu_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \mu_A \end{pmatrix}.$$

Аналогично имеем для верхних ребер между атомами A и C_2 , а также между «нижними» 3-атомами B и «верхними» атомами C_2 , отвечающими торам, проекция которых принадлежит кольцу между эллипсами с параметрами λ_1 и λ_2 .

В случае нечетного $m = 2k + 1$ имеем на верхних ребрах между 3-атомом A и седловым 3-атомом B , отвечающим перестройке через фокусы, матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda_B \\ \mu_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm(2k+1) & 1 \\ \pm k & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \mu_A \end{pmatrix}.$$

На ребрах между двумя «верхним» и «нижним» атомами B матрица равна

$$\begin{pmatrix} \lambda_B^+ \\ \mu_B^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2k+1) & 2 \\ \pm k & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_B \\ \mu_B \end{pmatrix},$$

где (λ_B^+, μ_B^+) — базис верхнего 3-атома B , лежащего на уровне $\lambda = b$.

4. ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

В настоящем разделе сформулируем несколько открытых вопросов об интегрируемых бильярдных книжках. Ответы на них, как нам представляется, позволят получить более глубокую информацию о связи двух недавно открытых обобщений классических плоских бильярдов.

1. Можно ли для произвольной упорядоченной бильярдной игры построить бильярдную книжку, реализующую данную игру и только ее?
2. Какой класс инвариантов Фоменко (Фоменко—Цишанга) интегрируемых систем реализуется бильярдными книжками, реализующими данную упорядоченную бильярдную игру?
3. Можно ли подходящей связной бильярдной книжкой реализовать наперед заданный набор упорядоченных бильярдных игр и только их?
4. Чему равна сложность реализации бильярдной игры в классе книжек, т. е. минимальное количество листов у книжки, реализующей эту игру? Как связана сложность с количеством листов книжки, реализующей игру по алгоритму В. Драговича и М. Раднович?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности // Усп. мат. наук. — 1990. — 45, № 2. — С. 49–77.
2. Болсинов А. В., Ризтер П. Х., Фоменко А. Т. Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской // Мат. сб. — 2000. — 191, № 2. — С. 3–42.
3. Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. — Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999.
4. Ведюшкина В. В. Слоение Лиувилля бильярдной книжки, моделирующей случай Горячева—Чаплыгина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2020. — № 1. — С. 64–68.
5. Ведюшкина В. В. Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2021. — № 2. — С. 28–32.
6. Ведюшкина В. В. Топологический тип изоэнергетических поверхностей бильярдных книжек // Мат. сб. — 2021. — 212, № 12. — С. 3–19.
7. Ведюшкина В. В., Кибкало В. А. Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейферта интегрируемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2020. — № 2. — С. 22–28.
8. Ведюшкина В. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды // Изв. РАН. Сер. мат. — 2019. — 83, № 6. — С. 63–103.
9. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем // Мат. сб. — 2018. — 209, № 12. — С. 17–56.
10. Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем // Мат. сб. — 2021. — 212, № 8. — С. 89–150.
11. Кибкало В. А. Топологическая классификация слоений Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ // Мат. сб. — 2019. — 210, № 5. — С. 3–40.

12. Морозов П. В. Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа// Мат. сб. — 2004. — 195, № 3. — С. 69–114.
13. Рябов П. Е. Бифуркации первых интегралов в случае Соколова// Теор. и мат. физ. — 2003. — 134, № 2. — С. 207–226.
14. Тюрин К. Е. Топологические инварианты некоторых бильярдных упорядоченных игр// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2024. — № 3. — С. 19–25.
15. Фокичева В. В. Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2014. — 1, № 4. — С. 18–27.
16. Фокичева В. В. Топологическая классификация билиардов в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик// Мат. сб. — 2015. — 206, № 10. — С. 127–176.
17. Фокичева В. В. Топологическая классификация интегрируемых билиардов// Дисс. к.ф.-м.н. — М.: МГУ, 2016.
18. Фоменко А. Т. Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1986. — 50, № 6. — С. 1276–1307.
19. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю// Функци. анализ и его прилож. — 1988. — 22, № 4. — С. 38–51.
20. Фоменко А. Т., Ведюшкина В. В. Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2019. — 1, № 3. — С. 15–25.
21. Фоменко А. Т., Ведюшкина В. В., Кибкало В. А. Топологическое моделирование интегрируемых систем билиардами: реализация числовых инвариантов// Докл. РАН. Мат., информ., проц. управл. — 2020. — 493. — С. 9–12.
22. Фоменко А. Т., Ведюшкина В. В., Харчева И. С. Моделирование невырожденных бифуркаций замкнутых решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими билиардами// Докл. РАН. — 2018. — 479, № 6. — С. 607–610.
23. Фоменко А. Т., Фокичева В. В. Интегрируемые билиарды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела// Докл. РАН. — 2015. — 465, № 2. — С. 1–4.
24. Фоменко А. Т., Цишанг Х. Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1990. — 54, № 3. — С. 546–575.
25. Харламов М. П. Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела. — Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1988.
26. Харчева И. С. Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2020. — 1, № 4. — С. 12–22.
27. Dragovic V., Radnovic M. Cayley-type conditions for billiards within k quadrics in $\mathbb{R}^d$ // J. Phys. A. Math. General. — 2004. — 37, № 4. — С. 1269–1276.
28. Dragovic V., Radnovic M. Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards// Regul. Chaotic Dyn. — 2009. — 14, № 4-5. — С. 479–494.
29. Dragovic V., Radnovic M., Gasiorek S. Billiard ordered games and books// Regul. Chaot. Dyn. — 2022. — 27, № 2. — С. 132–150.
30. Oshemkov A. A. Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations// В сб.: «Topological classification of integrable systems». — Providence: Am. Math. Soc., 1991. — С. 67–146.

В. А. Кибкало

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

E-mail: slava.kibkalo@gmail.com

Д. А. Туниянц

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

E-mail: 2001dat@inbox.ru

UDC 517.938.5

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-610-625

EDN: WGSHP

Ordered billiard games and topological properties of billiard books

V. A. Kibkalo^{1,2} and D. A. Tuniyants^{1,2}

¹*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

²*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Abstract. We discuss the connection between the construction of an ordered billiard game introduced earlier by Dragovic and Radnovic and the class of billiard books proposed by Vedyushkina. In this paper, we propose a generalization of the concept of realization of a certain game using a billiard book and prove an analogue of the Dragovic–Radnovic theorem for such a realization. We present recent results by the authors, Tyurina, and Zav’ialov on topological properties of isoenergy manifolds of circular billiard books and topological invariants of specific series of elliptic billiard books.

Keywords: ordered billiard game, billiard book, isoenergy manifold, topological invariant.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out in the Lomonosov Moscow State University with financial support from the Russian Science Foundation, grant 22-71-10106.

For citation: V. A. Kibkalo, D. A. Tuniyants, “Ordered billiard games and topological properties of billiard books,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 4, 610–625. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-610-625>

REFERENCES

1. А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, and А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности” [Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of low complexity systems], *Усп. мат. наук* [Progr. Math. Sci.], 1990, **45**, No. 2, 49–77 (in Russian).
2. А. В. Болсинов, П. Х. Richter, and А. Т. Фоменко, “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской” [The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2000, **191**, No. 2, 3–42 (in Russian).
3. А. В. Болсинов and А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы* [Integrable Hamiltonian Systems], Удмуртский Univ., Ижевск, 1999 (in Russian).
4. В. В. Ведюшкина, “Слоение Лиувилля бильярдной книжки, моделирующей случай Горячева–Чаплыгина” [The Liouville foliation of the billiard book modelling the Goryachev–Chaplygin case], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2020, No. 1, 64–68 (in Russian).
5. В. В. Ведюшкина, “Локальное моделирование бильярдами слоений Лиувилля: реализация реберных инвариантов” [Local modeling of Liouville foliations by billiards: implementation of edge invariants], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2021, No. 2, 28–32 (in Russian).
6. В. В. Ведюшкина, “Топологический тип изоэнергетических поверхностей бильярдных книжек” [Topological type of isoenergy surfaces of billiard books], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2021, **212**, No. 12, 3–19 (in Russian).
7. В. В. Ведюшкина and В. А. Кибкало, “Реализация бильярдами числового инварианта расслоения Зейфerta интегрируемых систем” [Realization of numerical invariant of the Siefert bundle of integrable



- systems by billiards], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2020, No. 2, 22–28 (in Russian).
8. В. В. Ведюшкина and А. Т. Фоменко, “Интегрируемые геодезические потоки на ориентируемых двумерных поверхностях и топологические бильярды” [Integrable geodesic flows on orientable two-dimensional surfaces and topological billiards], *Изв. РАН. Сер. мат.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2019, **83**, No. 6, 63–103 (in Russian).
 9. В. В. Ведюшкина and И. С. Харчева, “Бильярдные книжки моделируют все трехмерные бифуркации интегрируемых гамильтоновых систем” [Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2018, **209**, No. 12, 17–56 (in Russian).
 10. В. В. Ведюшкина and И. С. Харчева, “Бильярдные книжки реализуют все базы слоений Лиувилля интегрируемых гамильтоновых систем” [Billiard books realize all bases of Liouville foliations of integrable Hamiltonian systems], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2021, **212**, No. 8, 89–150 (in Russian).
 11. В. А. Кибкало, “Топологическая классификация слоений Лиувилля для интегрируемого случая Ковалевской на алгебре Ли $\mathfrak{so}(4)$ ” [Topological classification of Liouville foliations for the Kovalevskaya integrable case on the Lie algebra $\mathfrak{so}(4)$], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 5, 3–40 (in Russian).
 12. П. В. Морозов, “Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова уравнений Кирхгофа” [Topology of Liouville foliations of Steklov and Sokolov integrability cases of Kirchhoff equations], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2004, **195**, No. 3, 69–114 (in Russian).
 13. П. Е. Рябов, “Бифуркации первых интегралов в случае Соколова” [Bifurcations of first integrals in the Sokolov case], *Теор. и мат. физ.* [Theor. Math. Phys.], 2003, **134**, No. 2, 207–226 (in Russian).
 14. К. Е. Тюрина, “Топологические инварианты некоторых бильярдных упорядоченных игр” [Topological invariants of some ordered billiard games], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2024, No. 3, 19–25 (in Russian).
 15. В. В. Фокичева, “Описание особенностей системы бильярда в областях, ограниченных софокусными эллипсами или гиперболами” [Description of singularities for billiard systems bounded by confocal ellipses or hyperbolas], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2014, **1**, No. 4, 18–27 (in Russian).
 16. В. В. Фокичева, “Топологическая классификация бильярдных областей в локально плоских областях, ограниченных дугами софокусных квадрик” [A topological classification of billiards in locally planar domains bounded by arcs of confocal quadrics], *Мат. сб.* [Math. Digest], 2015, **206**, No. 10, 127–176 (in Russian).
 17. В. В. Фокичева, *Топологическая классификация интегрируемых бильярдных систем* [Topological Classification of Integrable Billiards], PhD Thesis, MSU, Moscow, 2016 (in Russian).
 18. А. Т. Фоменко, “Топология поверхностей постоянной энергии некоторых интегрируемых гамильтоновых систем и препятствия к интегрируемости” [Topology of constant energy surfaces of some integrable Hamiltonian systems and obstructions to integrability], *Изв. АН СССР. Сер. Мат.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1986, **50**, No. 6, 1276–1307 (in Russian).
 19. А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю” [Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems] *Функц. анализ и его прилож.* [Funct. Anal. Appl.], 1988, **22**, No. 4, 38–51 (in Russian).
 20. А. Т. Фоменко and В. В. Ведюшкина, “Бильярды и интегрируемость в геометрии и физике. Новый взгляд и новые возможности” [Billiards and integrability in geometry and physics. New scope and new potential], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2019, **1**, No. 3, 15–25 (in Russian).
 21. А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина, and В. А. Кибкало, “Топологическое моделирование интегрируемых систем бильярдами: реализация числовых инвариантов” [Topological modeling of integrable systems by billiards: realization of numerical invariants] *Докл. РАН. Мат., информ., проц. управл.* [Rep. Russ. Acad. Sci. Math. Inform. Control], 2020, **493**, 9–12 (in Russian).
 22. А. Т. Фоменко, В. В. Ведюшкина, and И. С. Харчева, “Моделирование невырожденных бифуркаций замыканий решений интегрируемых систем с двумя степенями свободы интегрируемыми топологическими бильярдами” [Modeling nondegenerate bifurcations of closures of solutions for integrable systems with two degrees of freedom by integrable topological billiards], *Докл. РАН* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2018, **479**, No. 6, 607–610 (in Russian).
 23. В. В. Фокичева and А. Т. Фоменко, “Интегрируемые бильярды моделируют важные интегрируемые случаи динамики твердого тела” [Integrable billiards model important integrable cases of rigid body dynamics], *Докл. РАН* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2015, **465**, No. 2, 1–4 (in Russian).
 24. А. Т. Фоменко and Х. Ципанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы” [A topological invariant and a criterion for the

- equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom], *Изв. АН СССР. Сер. Мат.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1990, **54**, No. 3, 546–575 (in Russian).
25. М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела* [Topological Analysis of Integrable Problems of Rigid Body Dynamics], ЛГУ, Ленинград, 1988 (in Russian).
 26. И. С. Харчева, “Изоэнергетические многообразия интегрируемых бильярдных книжек” [Isoenergy manifolds of integrable billiard books], *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2020, **1**, No. 4, 12–22 (in Russian).
 27. V. Dragovic and M. Radnovic, “Cayley-type conditions for billiards within k quadrics in $\mathbb{R}^d$,” *J. Phys. A. Math. General.*, 2004, **37**, No. 4, 1269–1276.
 28. V. Dragovic and M. Radnovic, “Bifurcations of Liouville tori in elliptical billiards,” *Regul. Chaotic Dyn.*, 2009, **14**, No. 4–5, 479–494.
 29. V. Dragovic, M. Radnovic, and S. Gasiorek, “Billiard ordered games and books,” *Regul. Chaot. Dyn.*, 2022, **27**, No. 2, 132–150.
 30. A. A. Oshemkov, “Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations,” In: *Topological classification of integrable systems*, Am. Math. Soc., Providence, 1991, pp. 67–146.

V. A. Kibkalo

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

E-mail: slava.kibkalo@gmail.com

D. A. Tuniyants

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

E-mail: 2001dat@inbox.ru