

УДК 517.53

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-597-609

EDN: WBOQMN

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ ЭРЛА В ПРОСТРАНСТВЕ ФУНКЦИЙ ПОЛУФОРМАЛЬНОГО ПОРЯДКА

М. В. КАБАНКО, К. Г. МАЛЮТИН

Курский государственный университет, Курск, Россия

Аннотация. Рассматривается задача простой свободной интерполяции в пространстве функций конечного порядка и нормального типа в полуплоскости. Предложено ее решение методом сдвига узлов интерполяции. Такое решение основано на методе Эрла, который решал задачу свободной интерполяции в пространстве аналитических ограниченных функций в единичном круге.

Ключевые слова: свободная интерполяция, функция конечного порядка, сдвиг узлов интерполяции, метод Эрла.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы выражают признательность рецензенту за замечания, которые, на наш взгляд, значительно улучшили содержание статьи. Исследование второго автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00006, <https://rscf.ru/project/24-21-00006/>.

Для цитирования: М. В. Кабанко, К. Г. Малютин. Интерполирование методом Эрла в пространстве функций полуформального порядка // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 597–609. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-597-609>

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем использовать следующие определения и терминологию. Обозначим через $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость с вещественной осью $\mathbb{R}$ и положительной полуосью $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ — верхняя полуплоскость. Одноточечные множества записываем без фигурных скобок, если это не вызывает разночтений. Так, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \pm\infty$ и $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R} \cup +\infty$ — расширенные, соответственно, вещественная ось и положительная полуось с обычным модулем $|\cdot|$ как и для $\mathbb{C}$, и $|\pm\infty| := +\infty$, ∞ — это бесконечность в комплексной полуплоскости $\mathbb{C}_+$, т. е. последовательность точек $\{z_n\} \subset \mathbb{C}_+$ сходится к ∞ при $n \rightarrow \infty$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = +\infty$. По определению считаем, что $\infty \in \mathbb{R}$, $\overline{n_1, n_2}$ — множество целых чисел $n : n_1 \leq n \leq n_2$. Открытый круг радиуса r с центром в точке a будем обозначать через $C(a, r)$, G_+ означает пересечение множества G с полуплоскостью $\mathbb{C}_+$, т. е. $G_+ := G \cap \mathbb{C}_+$, $\overline{G}$ — замыкание множества G .

Через a^+ обозначаем $(|a| + a)/2$, в частности, $\ln^+ 0 := 0$. Через $[\cdot]$ мы обозначаем целую часть числа, $\emptyset$ — пустое множество, $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_+$ — последовательность точек без повторений, все предельные точки которой на вещественной оси и ∞ . Всюду далее, если не оговорено противное, считаем $r_n = |a_n|$, $\theta_n = \arg a_n$, $r = |z|$, $\theta = \arg z$, где $0 \leq \arg z \leq \pi$ для $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$, $n_A^+(G) := n^+(G) =$

$\sum_{a_n \in G} \sin \theta_n$, в частности, $n_A^+(R) := n^+(C(0, R))$. Для точек $a, b \in \mathbb{C}_+$ через

$$l(a, b) = \left| \frac{a - b}{\bar{a} - \bar{b}} \right|$$

обозначим неевклидово расстояние. Через C, K, M обозначаем положительные константы, которые могут принимать различные значения в процессе доказательства одного утверждения.

Цель нашей работы — представить решение задачи простой свободной интерполяции в пространстве функций конечного порядка и нормального типа в полуплоскости методом сдвига узлов интерполяции, основанное на идеях Эрла [12].

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\rho(r)$, $r \in \mathbb{R}_+$, — уточненный порядок в смысле Валирона [5], $\lim_{r \rightarrow \infty} \rho(r) = \varrho > 0$, $V(r) \stackrel{\text{def}}{=} r^{\rho(r)}$. Для функций, аналитических в полуплоскости, следуя работе [4] (см. также [9]), введем понятия формального и полуформального порядка.

Пусть функция $f(z)$, аналитическая в полуплоскости $\mathbb{C}_+$, такова, что для всех $z \in \mathbb{C}_+$ неравенство

$$|f(z)| < \exp(M_f V(|z|))$$

выполняется с некоторой константой M_f , зависящей только от $f(z)$. В этом случае уточненный порядок $\rho(r)$ называется *формальным порядком функции* $f(z)$.

Если понятие формального порядка вводится для описания роста функции в окрестности бесконечной точки (как в случае целых, так и в случае аналитических в полуплоскости функций), то более тонким является понятие полуформального порядка, характеризующее не только рост, но и убывание функции, аналитической в полуплоскости.

Пусть уточненный порядок $\rho(r)$, $r \in \mathbb{R}_+$, является формальным порядком аналитической в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функции $f(z)$, причем выполняется условие Левина [5, гл. 2]:

существуют числа C , $0 < C < 1$, и θ_0 , $0 < \theta_0 < \pi/2$, зависящие только от функции $f(z)$, такие, что в каждой области

$$\{z = re^{i\theta} : Cr \leq r \leq C^{-1}r, \theta_0 < \theta < \pi - \theta_0\}$$

найдется точка $\bar{z}$ такая, что

$$|f(\bar{z})| \geq \exp(-M_f V(|\bar{z}|)).$$

Тогда $\rho(r)$ называется *полуформальным порядком функции* $f(z)$.

Заметим, если $\varrho > 1$, то понятия формального и полуформального порядков эквивалентны. Отличие между этими определениями имеет место только при $\varrho \leq 1$.

Пространство аналитических функций в $\mathbb{C}_+$, для которых $\rho(r)$ является полуформальным порядком, обозначим через $[\rho, \infty)^+$.

Определение 2.1. Последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_+$, все предельные точки которой принадлежат $\mathbb{R}$, называется *интерполяционной в пространстве* $[\rho, \infty)^+$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющей условию

$$\sup_n \frac{\ln^+ |b_n|}{V(|a_n|)} < \infty, \quad (2.1)$$

существует функция $f(z) \in [\rho, \infty)^+$, которая решает интерполяционную задачу

$$f(a_n) = b_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Первичный множитель Неванлинны $E_p(u, v)$ при $p \in \mathbb{N}$ определяется как

$$E_p(u, v) = \left(1 - \frac{u}{v}\right) \left(1 - \frac{u}{\bar{v}}\right)^{-1} \exp \sum_{k=1}^p \frac{u^k}{k} \left(\frac{1}{v^k} - \frac{1}{\bar{v}^k}\right),$$

а при $p = 0$

$$E_0(u, v) = \left(1 - \frac{u}{v}\right) \left(1 - \frac{u}{\bar{v}}\right)^{-1}.$$

Определение 2.2. Последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, имеет *конечную верхнюю плотность* при уточненном порядке $\rho(r)$, если

$$n^+(r) = O(V(r)). \quad (2.2)$$

В этом случае при нецелом $\rho > 0$ *каноническое произведение последовательности* A

$$E(z, A) = \prod_{r_n \leq 1} E_0(z, a_n) \prod_{r_n > 1} E_p(z, a_n)$$

принадлежит пространству $[\rho, \infty)^+$ (см. [4]).

Случай целого ρ сложнее. В этом случае для того, чтобы каноническое произведение последовательности A принадлежало пространству $[\rho, \infty)^+$, необходимо и достаточно, чтобы она имела *аргументно-граничную симметрию* (см. [4]). В работе [10] для последовательности A , удовлетворяющей условию (2.2), при целом $\rho > 1$ строится присоединенная последовательность At , точки которой распределены на двух лучах, обеспечивающая аргументную симметрию последовательности $A \cup At$. Точки последовательности At расположены достаточно «далеко» от точек последовательности A так, что объединенная последовательность $A \cup At$ удовлетворяет условиям интерполяционности в пространстве $[\rho, \infty)^+$ (конечно, если этим условиям изначально удовлетворяет последовательность A). В работе [8] рассматривается общий случай целого $\rho \geq 1$. В отличие от работы [10] показано, что существует вещественная измеримая функция $u(x)$ такая, что функция $E_a(z) = E(z)E_u(z)$, где

$$E_u(z) = \exp \left\{ \frac{1}{i\pi} \left[\int_{-1}^1 \frac{u(t) dt}{t-z} + z^{\rho+1} \int_{|t| \geq 1} \frac{u(t) dt}{(t-z)t^{\rho+1}} \right] \right\},$$

принадлежит классу $[\rho(r), \infty)^+$. Функция $E_a(z)$ называется *присоединенной функцией последовательности* A . Кроме того, подчеркнем, что присоединенная функция при целом $\rho \geq 1$ и выполнении условия (2.2) определяется неоднозначно, причем ее сингулярная граничная мера равна нулю почти всюду на вещественной оси, $\ln |E_a(x)| = u(x)$ и

$$|\ln |E_u(z)|| \leq MV(r), \quad |\ln |E_a(x)|| \leq MV(x), \quad z \in \overline{\mathbb{C}}_+, \quad (2.3)$$

с некоторой константой $M > 0$. Заметим, что функция $u(z)$ не имеет нулей. Это упрощает некоторые рассуждения, избавляя от необходимости оценивать дополнительные нули At . Этот факт и неравенство (2.3), в частности, обеспечивают сохранение условий интерполяционности. Другими словами, функция $E_u(z)$ не влияет на эти условия. Далее мы будем фиксировать функцию $E_u(z)$, а под присоединенной функцией последовательности A понимать при нецелом $\rho > 0$ функцию $E(z)$, а при целом $\rho \geq 1$ — функцию $E_a(z)$, обозначая ее также $E(z)$. В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 2.1. Пусть $a, b, c, d \in \mathbb{C}_+$, $0 < \delta < 1$. Положим

$$u = \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}, \quad v = \frac{d-c}{\bar{d}-\bar{c}}.$$

Если

$$l(a, d) \leq \frac{\delta}{4}, \quad l(b, c) \leq \frac{\delta}{4}, \quad |u| \geq \delta,$$

то $|v| \geq |u|^\beta$, где $\beta = \frac{\ln(\delta/4)}{\ln \delta}$.

Доказательство. Доказательство леммы легко получить, применяя конформное отображение $\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ полуплоскости $\mathbb{C}_+$ на единичный круг $C(0, 1)$ и аналогичную лемму для круга (см. [1, лемма 8]). $\square$

Лемма 2.2. Пусть $a, b \in \mathbb{C}_+$, $|a| > 1$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0; 1)$ при $l(a, b) \leq \varepsilon$ будут выполняться следующие неравенства:

$$1. |a-b| \leq \frac{2\varepsilon \operatorname{Im} a}{1-\varepsilon}; \quad 2. \left| \sin \arg \frac{a}{b} \right| \leq \frac{2\varepsilon \operatorname{Im} a}{1-\varepsilon}.$$

Доказательство. По условию леммы имеем $\left| \frac{\bar{a}-b}{a-b} \right| \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда получаем $\left| 1 - \frac{2 \operatorname{Im} a}{a-b} \right| \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Из последнего неравенства следует, что $|a-b| + 2 \operatorname{Im} a \geq \frac{|a-b|}{\varepsilon}$. Отсюда получаем неравенство 1 леммы.

Неравенство 2 следует из неравенства 1. Действительно, из теоремы синусов для треугольника с вершинами в точках O , a , b и неравенств $|a| > 1$ и $|a-b| \leq r$ выполняется соотношение $|\sin(\arg a - \arg b)| \leq r$. $\square$

Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет конечную верхнюю плотность при уточненном порядке $\rho(r)$. Определим монотонную последовательность положительных чисел $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $l_n \uparrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$). Обозначим через $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ исчерпывающую последовательность конечных подмножеств из A таких, что $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \subset A_{n+1}$,

$$A_n = \left\{ a_k \in A \mid r_k \leq l_n, \operatorname{Im} a_k \geq \frac{1}{l_n} \right\}, \quad a_k = r_k e^{i\theta_k}. \quad (2.4)$$

Без ограничения общности будем считать, что A_n состоит из n точек.

Обозначим через $\Omega(a, K, \rho(|a|))$ круг $\Omega(a, K, \rho(|a|)) \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : l(z) \leq \exp(-KV(|a|))\}$. Множество E' называется K -сдвинутым множеством относительно множества E ($E \subset \mathbb{C}_+$) при уточненном порядке ρ , при некотором $K > 0$, если существует отображение ω множества E на множество E' такое, что $\omega(\xi) \in \Omega(\xi, K, \rho(|\xi|))$ при любом $\xi \in E$. В этом случае будем говорить, что отображение ω есть K -сдвиг множества E при уточненном порядке ρ .

Пусть $A' = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — K -сдвиг при уточненном порядке $\rho(r)$ множества A .

Определение 2.3. Обобщенной присоединенной функцией множеств $\{A', A\}$ при целом $\varrho \in \mathbb{N}$ будем называть функцию

$$L(z, A', A) = E_u(z) \prod_{r_k \leq 1} E_p(z, a_k) \prod_{r_k > 1} E_p(z, \lambda_k, a_k),$$

где величины $E_p(z, u, v)$ при $p \geq 1$ определяются как

$$E_p(z, u, v) = \left(1 - \frac{z}{u}\right) \left(1 - \frac{z}{v}\right)^{-1} \exp \sum_{k=1}^p \frac{z^k}{k} \left(\frac{1}{v^k} - \frac{1}{u^k}\right).$$

При нецелом $\varrho > 0$ сомножитель $E_u(z)$ в определении опускаем.

Аналогично определим семейство функций

$$L(z, A'_n, A_n) = E_u(z) \prod_{r_k \leq 1} E_p(z, a_k) \prod_{r_k > 1, a_k \in A_n} E_p(z, \lambda_k, a_k).$$

Справедлива следующая лемма (см. [7]), в которой сформулировано необходимое условие интерполяционности последовательности в пространстве $[\rho, \infty)^+$.

Лемма 2.3. Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ является интерполяционной в пространстве $[\rho, \infty)^+$. Тогда для любой присоединенной функции $E(z)$ последовательности A справедливо соотношение

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{V(r_n)} \ln \frac{1}{\operatorname{Im} a_n |E'(a_n)|} < \infty. \quad (2.5)$$

На самом деле, как доказано в работах [7, 8], условие (2.5) является и достаточным. В настоящей работе мы дадим другое доказательство, основанное на идеях работы Эрла [12].

Лемма 2.4. Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет конечную верхнюю плотность при уточненном порядке $\rho(r)$. Тогда существует такое число $K > 0$, что при любом K -сдвиге при уточненном порядке $\rho(r)$ последовательности A для сдвинутой последовательности $A' = \{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\lambda_k = r'_k e^{i\theta'_k}$, верно соотношение:

$$\sum_{r'_k \leq r} \sin \theta'_k \leq CV(r),$$

где константа $C > 0$ не зависит от сдвига.

Доказательство. Для $\lambda_k = r'_k e^{i\theta'_k}$ и $a_k = r_k e^{i\theta_k}$ имеем

$$\begin{aligned} \sum_{r'_k \leq r} \sin \theta'_k &= \sum_{r'_k \leq r} \sin(\theta'_k - \theta_k + \theta_k) = \sum_{r'_k \leq r} (\sin(\theta'_k - \theta_k) \cos \theta_k + \cos(\theta'_k - \theta_k) \sin \theta_k) \leq \\ &\leq \sum_{r'_k \leq r} \sin \theta_k + \sum_{r'_k \leq r} |\sin(\theta'_k - \theta_k)|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поскольку последовательность A имеет конечную верхнюю плотность при уточнённом порядке $\rho(r)$, то существует такая константа $C_1 > 0$, что

$$\sum_{r_k \leq r} \sin \theta_k \leq C_1 V(r). \quad (2.7)$$

Из пункта 2 леммы 2.2 получаем

$$|\sin \theta'_k - \sin \theta_k| \leq \sin \theta_k \exp(-C_2 V(r_k)).$$

с некоторой постоянной $C_2 > 0$.

Из неравенства (2.7) следует, что ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sin \theta_n \exp(-C_2 V(r_n))$$

сходится.

Учитывая выражения (2.6) и (2.7), получаем утверждение леммы. $\square$

Далее, положим

$$L_k(z, A'_n, A_n) = \frac{\lambda_k}{\overline{\lambda_k}} \cdot \frac{z - \overline{\lambda_k}}{z - \lambda_k} \cdot L(z, A'_n, A_n).$$

Лемма 2.5. Пусть последовательность A имеет конечную верхнюю плотность при уточнённом порядке $\rho(r)$, и для любой присоединенной функции $E(z)$ выполняется соотношение (2.5). Тогда существует такое число $K > 0$, что справедливы утверждения:

1. При любом K -сдвиге при уточнённом порядке $\rho(r)$ последовательности $A_n = \{a_k\}_{k \in \overline{1, n}}$ верны соотношения:

$$\ln |L_k(t, A'_n, A_n)| \geq -KV(r_n)$$

для любого $t \in \Omega(a_k, K, \rho(r_k))$.

2. $\Omega(a_k, K, \rho(r_k)) \cap \Omega(a_j, K, \rho(r_j)) = \emptyset$, если $k \neq j$.
3. Любой K -сдвиг при уточнённом порядке $\rho(r)$ множества A_n , $n \geq 1$, взаимно однозначен.
4. При любом K -сдвиге при уточнённом порядке $\rho(r)$ множества A_n последовательность функций $\{L(z, A'_n, A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ равномерно ограничена на любом компактном множестве в $\mathbb{C}_+$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что существует $K_1 > 0$, для которого справедливо неравенство

$$\ln |L_k(a_k, A, A)| \geq -K_1 V(r_k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Представим $L_k(a_k, A, A)$ в виде произведения $L_k(a_k, A, A) = L_k^{(1)}(a_k, A, A) \cdot L_k^{(2)}(a_k, A, A)$, где

$$L_k^{(1)}(a_k, A, A) = \prod_{\frac{r_k}{2} \leq r_j \leq \frac{3r_k}{2}} \frac{\overline{a_j}}{a_j} \cdot \frac{a_k - a_j}{a_k - \overline{a_j}}.$$

Для $L_k^{(2)}(a_k, A, A)$, используя неравенство (2.3), можно получить следующую оценку при некотором $K_2 > 0$ (см., например, [3]):

$$\ln |L_k^{(2)}(a_k, A, A)| \geq -K_2 V(r_k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.9)$$

Из неравенств (2.8) и (2.9) получаем, что

$$\ln |L_k^{(1)}(a_k, A, A)| \geq -(K_1 + K_2)V(r_k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.10)$$

Представляя аналогичным образом функцию $L_k(a_k, A_n, A_n) = L_k^{(1)}(a_k, A_n, A_n) \cdot L_k^{(2)}(a_k, A_n, A_n)$, из (2.10) получаем

$$\ln |L_k^{(1)}(a_k, A_n, A_n)| \geq \ln |L_k^{(1)}(a_k, A, A)| \geq -(K_1 + K_2)V(r_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\ln \left| \frac{a_k - a_j}{a_k - \bar{a}_j} \right| \geq -(K_1 + K_2)V(r_k), \quad j \neq k.$$

Выберем $K_3 > K_1 + K_2$ таким образом, чтобы при $\frac{r_k}{2} \leq r_j \leq \frac{3r_k}{2}$ выполнялись соотношения

$$\exp(-K_3V(r_j)) \leq \frac{1}{4} \exp(-(K_1 + K_2)V(r_k)).$$

Применяя лемму 2.1, получим, что если $t \in \Omega(a_k, K, \rho(r_k))$, $\lambda_j \in \Omega(a_j, K_3, \rho(r_j))$, то выполняется неравенство

$$\left| \frac{t - \lambda_j}{t - \bar{\lambda}_j} \right| \geq \left| \frac{a_k - a_j}{a_k - \bar{a}_j} \right|^{\beta_k} \quad \text{для } \lambda_j \in A'_n,$$

где $\beta_k = 1 + (\ln 4)(K_3V(r_k))^{-1}$. Поэтому

$$|L_k^{(1)}(t, A'_n, A_n)| \geq |L_k^{(1)}(a_k, A_n, A_n)|^{\beta_k} \geq \frac{1}{4} \exp(-K_3V(r_k)). \quad (2.11)$$

Оценим теперь функцию $L_k^{(2)}(t, A'_n, A_n)$, представив ее предварительно в виде произведения

$$L_k^{(2)}(t, A'_n, A_n) = \tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A_n) \cdot \tilde{\tilde{L}}_k^{(2)}(t, A'_n, A_n),$$

где

$$\tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A_n) = \prod_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} E_p(t, \lambda_n, a_n) \cdot E_u(z).$$

Имеем

$$|\ln \tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A_n)| \leq |\tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A'_n)| + \sum_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} \sum_{i=1}^{\rho} \left| \frac{t^i}{i} \left(\frac{1}{a_j^i} - \frac{1}{\lambda_j^i} + \frac{1}{\bar{a}_j^i} - \frac{1}{\bar{\lambda}_j^i} \right) \right| + |\ln E_u(t)|. \quad (2.12)$$

Оценим функцию $\ln \tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A'_n)$, используя лемму 2.4:

$$|\ln \tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A'_n)| \leq \left| \sum_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} \sum_{i=\rho+1}^{\infty} \frac{t^i}{i} \left(\frac{1}{\lambda_j^i} - \frac{1}{\bar{\lambda}_j^i} \right) \right| = S.$$

Оценим сумму S :

$$S \leq \sum_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} \sum_{i=\rho+1}^{\infty} \frac{t^i}{i} \frac{|\sin i\theta'_j|}{(r'_j)^i} \leq \sum_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} \frac{|t|^{\rho+1} \sin \theta'_j}{(r'_j)^{\rho+1}} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^i = 3|t|^{\rho+1} \int_{\frac{3t}{2}}^{\infty} \frac{d\tilde{\mu}(r)}{r^{\rho+1}},$$

где $\tilde{\mu}(r) = \sum_{r'_j \leq r} \sin \theta'_j$ для $\lambda_j = r'_j e^{i\theta'_j}$. Воспользовавшись асимптотическим равенством (15.3') из [5], получаем:

$$S \leq K_4 V(t). \quad (2.13)$$

Оценим теперь второе слагаемое в (2.12). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} \sum_{i=1}^{\rho} \left| \frac{t^i}{i} \left(\frac{1}{a_j^i} - \frac{1}{\lambda_j^i} + \frac{1}{\bar{a}_j^i} - \frac{1}{\bar{\lambda}_j^i} \right) \right| &\leq 2 \sum_{r_j \geq \frac{3r_k}{2}} \sum_{i=1}^{\rho} |t|^i \frac{|a_k - \lambda_k|}{r_k^{i+1}} \leq \\ &\leq \frac{2\rho(\rho+1)}{3} \sum_{j=1}^{\infty} \sin \theta_j \exp(-C_2 V(r_j)). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из соотношений (2.3), (2.13) и (2.14) следует, что существует такая константа $K_6 > 0$, что выполняется

$$\ln |\tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A_n)| \leq K_6 V(|a_k|).$$

Аналогично можно показать, что

$$\ln |\tilde{L}_k^{(2)}(t, A'_n, A_n)| \leq K_7 V(|r_k|). \quad (2.15)$$

Из неравенств (2.3), (2.11) и (2.15) получаем утверждение 1 леммы.

Из утверждения 1 следует, что для любых $t \in \Omega(a_k, K_3, \rho(r_k))$ и $\lambda_j \in \Omega(a_j, K_3, \rho(r_j))$ выполняется неравенство $\left| \frac{t - \lambda_j}{t - \bar{\lambda}_j} \right| > 0$, а значит, $\Omega(a_k, K, \rho(r_k)) \cap \Omega(a_j, K, \rho(r_j)) = \emptyset$. Таким образом, пункты 2 и 3 доказаны.

При доказательстве пункта 1 мы получили неравенство

$$\ln |L_k^{(2)}(z, A'_n, A_n)| \leq K_1 V(r),$$

из которого следует утверждение пункта 4 леммы. $\square$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Заметим, что функции $L(z, A'_n, A_n)$ отличаются от канонических произведений Неванлинны. Модифицированные таким образом канонические произведения лучше приспособлены к дальнейшим рассуждениям. Дело в том, что если равенство

$$L(z, A'_n, A_n) = L(z, A''_n, A_n) \quad (3.1)$$

выполняется для n попарно различных точек $z_1, z_2, \dots, z_n$ верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, то равенство (3.1) автоматически выполняется еще в $n + 1$ попарно различных точках $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n, 0$. В то же время степень многочлена, стоящего в числителе дроби, получающейся после сокращения разности

$$L(z, A'_n, A_n) - L(z, A''_n, A_n)$$

на общий множитель, не имеющий корней, не превышает $2n$. Поэтому модифицированное каноническое произведение вполне определяется своими значениями в точках n -элементного подмножества верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Точнее говоря, нами доказана лемма.

Лемма 3.1. Если равенство (3.1) выполняется в n попарно различных точках верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, то $A'_n = A''_n$.

Положим далее

$$q_j \stackrel{\text{def}}{=} q_j(A_n, K, \rho) = \inf\{|L_j(\lambda_j, A'_n, A_n)| : \lambda_j \in \Omega(a_j, K, \rho(r_j))\}.$$

Лемма 3.2. Пусть положительное число K таково, что $\Omega(a_j, K, \rho(r_j)) \cap \Omega(a_k, K, \rho(r_k)) = \emptyset$, $j \neq k$; $j, k \in \overline{1, n}$. Предположим, что функция ψ , заданная на множестве A_n , удовлетворяет условию:

$$|\psi(a_k)| \leq q_k \exp(-KV(r_k)) \quad (r_k > 1), \quad \psi(a_k) = 0 \quad (r_k \leq 1). \quad (3.2)$$

Тогда существует такое множество A'_n , являющееся K -сдвигом при порядке относительно множества A_n , что

$$L(a_k, A'_n, A_n) = \psi(a_k), \quad k \in \overline{1, n}.$$

В основе доказательства лежит следующее топологическое соображение [2]: если J — взаимно однозначное и непрерывное отображение замкнутого круга $\overline{\Omega}$ на плоскость $\mathbb{C}$, и J -образ граничной окружности $\partial\Omega$ удален от начала не менее, чем на r ($r > 0$), и $0 \in J(\overline{\Omega})$, то $J(\overline{\Omega})$ содержит весь замкнутый круг $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$.

Доказательство. Будем использовать индукцию по n . Обозначим через λ вектор, координатами которого являются точки множества A'_n : $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Кроме того, положим

$$L(z, \lambda, A_n) \stackrel{\text{def}}{=} L(z, A'_n, A_n).$$

Пусть сначала $n = 1$. По лемме 3.1 отображение

$$\lambda_1 \mapsto L(\lambda_1, A'_1, A_1)$$

непрерывно и взаимно однозначно в замкнутом круге $\overline{\Omega(a_1, K, \rho(r_1))}$. Его значение в точке a_1 равно нулю, а окружность $\Omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega(a_1, K, \rho(r_1))$ оно отображает в кривую, расстояние d_1 которой до начала координат удовлетворяет неравенству:

$$d_1 \geq \inf_{\lambda_1 \in \Omega_1} |L(\lambda_1, A'_1, A_1)| \geq \inf_{\lambda_1 \in \Omega_1} \left\{ \left| \frac{a_1 - \lambda_1}{a_1 - \overline{\lambda_1}} \right| \cdot |E_1(z, \lambda_1, a_1)| \right\} \geq q_1 \exp(-KV(r_1)).$$

Значит, если $\psi(a_1)$ удовлетворяет неравенству (3.2), то по замечанию, сделанному перед доказательством, найдется точка $\lambda_1 \in \Omega(a_1, K, \rho(r_1))$, удовлетворяющая условиям леммы.

Пусть теперь $n \geq 2$. Предположим, что утверждение доказано для всех множеств A_k , содержащих не более $n-1$ точек a_j ($j \in \overline{1, k}$). Вектор $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ обозначим символом $\tilde{\lambda}$.

Система уравнений

$$L(a_k, \lambda, A_n) = \psi(a_k), \quad k \in \overline{1, n}, \quad (3.3)$$

равносильна системе

$$\begin{cases} L(a_k, \tilde{\lambda}, A_{n-1}) = (E_p(a_k, \lambda_k, a_n))^{-1} \psi(a_k), & k \in \overline{1, n-1}, \\ L(a_n, \lambda, A_n) = \psi(a_n) \end{cases} \quad (3.4)$$

(заметим, что $\lambda_n \neq a_k$, $k \in \overline{1, n-1}$, если $\lambda_n \in \Omega(a_n, K, \rho(r_n))$).

Предположим, что заданная на множестве A_n функция ψ удовлетворяет условию (3.2). Из индукционного предположения следует, что для любой точки $t \in \Omega(a_n, K, \rho(r_n))$ существует единственная точка $\tilde{\lambda}(t)$, обладающая следующими свойствами:

$$\tilde{\lambda}(t) \in \Omega(a_1, K, \rho(r_1)) \times \dots \times \Omega(a_{n-1}, K, \rho(r_{n-1})), \quad (3.5)$$

$$L(a_k, \tilde{\lambda}, A_{n-1}) = (E_p(a_k, \lambda_k, a_n))^{-1} \psi(a_k) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\psi}(a_k), \quad k \in \overline{1, n-1}.$$

В самом деле, из (3.2) следует, что $|\tilde{\psi}(a_k)| \leq q_k \exp(-KV(r_k))$. Единственность решения $\tilde{\lambda}$ следует из леммы 3.1.

Поставим теперь в соответствие точке $t \in \Omega(a_n, K, \rho(r_n))$ число

$$h(t) \stackrel{\text{def}}{=} L(a_n, \lambda(t), A_n), \quad \lambda(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda_1(t), \dots, \lambda_{n-1}(t), t) \in \mathbb{C}^n.$$

Если мы установим, что функция $h(t)$ непрерывна, то доказательство будет закончено. Ведь если t находится на границе круга $\Omega(a_n, K, \rho(r_n))$, то

$$|h(t)| \geq \left| \frac{a_n - t}{a_n - \overline{t}} \right| \exp \left(- \sum_{j=1}^p \frac{1}{j} \right) |L_n(a_n, \lambda(t), A_n)| \geq q_n \exp(-KV(r_n))$$

(мы воспользовались условием (3.5) и определением числа q_n).

Взаимная однозначность функции $h(t)$ следует из леммы 3.1 и равносильности систем (3.3) и (3.4). По замечанию, сделанному перед доказательством леммы,

$$h(\Omega(a_n, K, \rho(r_n))) \supset \overline{C(0, q_n \exp(-KV(r_n)))}.$$

Выбрав $t \in \Omega(a_n, K, \rho(r_n))$ так, чтобы $h(t) = \psi(a_n)$, а затем решив систему (3.4), мы и найдем искомую точку $\lambda \in \mathbb{C}^n$, удовлетворяющую системе (3.3).

Проверим, что функция $h(t)$ непрерывна. Для этого убедимся в том, что всякая последовательность $\{h(\eta_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$, где $\eta_m \in \Omega(a_n, K, \rho(r_n))$ при любом $m \in \mathbb{N}$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \eta_m = \eta$, содержит подпоследовательность, сходящуюся к $h(\eta)$. Пусть $\{m(j)\}_{j \in \mathbb{N}}$ — такая строго возрастающая последовательность номеров, что последовательность точек $\{\tilde{\lambda}(\eta_{m(j)})\}_{j \in \mathbb{N}}$ сходится в $\mathbb{C}^{n-1}$ к точке $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n-1})$. Полагая в (3.4) $t = \eta_{m(j)}$ и переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$, получим

$$L(a_n, \nu, A_{n-1}) = (E(a_k, \eta, a_n))^{-1} \psi(a_k), \quad k \in \overline{1, n-1},$$

$$h(\eta) = L(a_n, (\nu_1, \dots, \nu_{n-1}, \eta), A_n) = \lim_{j \rightarrow \infty} L(a_n, (\tilde{\lambda}_1(\eta_{m(j)}) \tilde{\lambda}_{n-1}(\eta_{m(j)}), \eta_{m(j)}), A_n),$$

так как $L(a_n, \lambda, A_n)$ непрерывно зависит от λ в $\mathbb{C}^n$. □

Из леммы 3.2 и леммы 2.5 легко получить следующую лемму.

Лемма 3.3. Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет конечную верхнюю плотность при уточненном порядке $\rho(r)$ и удовлетворяет условию (2.5), множества A_n определены соотношением (2.4), функция Ψ , заданная на множестве A , удовлетворяет неравенству

$$|\Psi(a_k)| \leq \exp(-2KV(r_k)) \text{ при } r_k > 1, \text{ и } \Psi(a_k) = 0, \text{ если } r_k \leq 1,$$

число $K > 0$ удовлетворяет условиям леммы 2.5. Тогда существует последовательность отображений $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ и отображение ω_∞ , обладающие следующими свойствами:

1. ω_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) является K -сдвигом при уточненном порядке $\rho(r)$ множества A_n , при $n \geq 1$.
2. Все отображения ω_n ($n = 1, 2, \dots, \infty$) взаимно однозначны.
3. Последовательность функций $\{L(z, A'_n, A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($A'_n \stackrel{\text{def}}{=} \omega_n(A_n)$) сходится равномерно на каждом компакте в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n(a_k) = \omega_\infty(a_k)$ ($a_k \in A$).
5. $L(a_k, A'_n, A_n) = \Psi(a_k)$ для $a_k \in A_n$.

Докажем теперь теорему, которая является аналогом теоремы Эрла в пространстве $[\rho, \infty)^+$.

Теорема 3.1. Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_+$, все предельные точки которой лежат на вещественной оси, имеет конечную верхнюю плотность при уточненном порядке $\rho(r)$ и удовлетворяет условию (2.5). Тогда существует такое число $K > 0$, что для любой функции Ψ , заданной на последовательности A , и удовлетворяющей условиям

$$|\Psi(a_k)| \leq \exp(-KV(r_k)) \text{ при } r_k > 1, \text{ и } \Psi(a_k) = 0, \text{ если } r_k \leq 1,$$

можно поставить в соответствие последовательность A' , такую, что

1. $\Psi(a_k) = L(a_k, A', A)$, для $a_k \in A$,
2. последовательность A' — K -сдвинута при уточненном порядке $\rho(r)$ относительно последовательности A .

Доказательство. Докажем теорему, используя обозначения леммы 3.3. Положим $A' = \omega_\infty(A)$. Теорема будет доказана, если мы проверим, что из последовательности $\{L(z, A'_n, A_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на каждом компакте в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ к функции $L(z, A', A)$.

Итак, пусть $G = \left\{z : |z| \leq R, \operatorname{Im} z \geq \frac{1}{R}\right\}$. Обозначим через $\{\tilde{A}'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ последовательность подмножеств последовательности A' , исчерпывающих A' :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{A}'_n = A', \quad \tilde{A}'_n = \left\{\lambda_j \in A' : r'_j \leq l_n, \operatorname{Im} \lambda_j \geq \frac{1}{l_n}\right\},$$

где последовательность $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ введена в определении множеств A_n .

Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое натуральное число n_ε , что при всех $n > n_\varepsilon$ и $z \in G$ будет выполняться неравенство

$$|L(z, \tilde{A}'_n, A_n) - L(z, A', A)| < \varepsilon. \quad (3.6)$$

Обозначим через $A'_{n,m}$ подмножество множества A'_m для $n < m$, имеющее столько же элементов, сколько и множество A'_n . Поскольку последовательность отображений-сдвигов $\{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ сходится поточечно, то по заданному $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое число $m(n, \varepsilon)$, что при всех $m > m(n, \varepsilon)$ и $z \in G$ будет выполняться неравенство

$$|L(z, \tilde{A}'_n, A_n) - L(z, A'_{n,m}, A_n)| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

Оценим далее отношение:

$$\begin{aligned} \frac{L(z, A'_m, A_m)}{L(z, A'_{n,m}, A_n)} &= \prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} E_p(z, \lambda_{k,m}, a_k) = \prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} E_p(z, a_k) \times \\ &\times \prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_{k,m}}\right) \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{\bar{a}_k}\right) \left(1 - \frac{z}{\bar{\lambda}_{k,m}}\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $A_m = \{\lambda_{k,m}\}_{k \in \overline{1,m}}$.

Последнее произведение в соотношении (3.8) стремится к единице, если $n \rightarrow \infty$ и $z \in G$. Действительно, при достаточно больших n и $m > n$ для точек $a_k \in A_m \setminus A_n$ выполняется неравенство $|z - a_k| \geq \delta > 0$, а значит,

$$\left| \ln \prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} \left(1 - \frac{z}{\lambda_{k,m}}\right) \left(1 - \frac{z}{a_k}\right)^{-1} \left(1 - \frac{z}{\bar{a}_k}\right) \left(1 - \frac{z}{\bar{\lambda}_{k,m}}\right)^{-1} \right| \leq \\ \leq \frac{2R}{\delta} \sum_{a_k \in A_m \setminus A_n} \sin \theta_k \exp(-CV(r_k)) \text{ при некотором } C > 0,$$

так как

$$\left| \ln \frac{1 - z/\lambda_{k,m}}{1 - z/a_k} \right| \leq \left| \ln \left| \frac{1 - z/\lambda_{k,m}}{1 - z/a_k} \right| \right| + \left| \arg \frac{1 - z/\lambda_{k,m}}{1 - z/a_k} \right|,$$

и каждое слагаемое в правой части предыдущего неравенства можно оценить следующим образом:

$$\left| \ln \left| \frac{1 - z/\lambda_{k,m}}{1 - z/a_k} \right| \right| \leq R \frac{|a_k - \lambda_{k,m}|}{|\lambda_{k,m}| \cdot |a_k - z|} \leq \frac{R}{\delta} \sin \theta_k \exp(-CV(r_k)); \\ \left| \arg \frac{1 - z/\lambda_{k,m}}{1 - z/a_k} \right| \leq \frac{R}{\delta} \sin \theta_k \exp(-CV(r_k)).$$

Произведение

$$\prod_{a_k \in A_m \setminus A_n} E_p(z, a_k)$$

также стремится к единице при $z \in G$ и $n \rightarrow \infty$, так как бесконечное произведение $E(z)$ сходится равномерно на каждом компакте в $\mathbb{C}_+$.

Тогда, применяя (3.6) и (3.7), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого достаточно большого натурального m

$$|L(z, A', A) - L(z, A'_m, A_m)| < \varepsilon.$$

Теорема доказана. $\square$

Для доказательства основной теоремы нам понадобится следующая лемма, которая может быть получена из [5, теорема 5] и [6, теорема 1.3.2].

Лемма 3.4. Пусть последовательность $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет все предельные точки на вещественной оси и удовлетворяет условию (2.5). Тогда можно построить функцию $\varphi(z)$ вполне регулярного роста порядка $\rho(r)$ и нормального типа с индикатором $h_\varphi(\theta) > C$, где C — любое положительное число, нули которой образуют R -множество, и исключительные кружки, содержащие ее нули, не пересекаются с последовательностью $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Для этой функции $\varphi(z)$ имеет место следующая оценка вне исключительных кружков:

$$\ln |\varphi(z)| > \frac{h_\varphi}{2} V(|z|),$$

где $h_\varphi = \min_{0 \leq \theta \leq 2\pi} h_\varphi(\theta)$ — положительная постоянная.

Сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема 3.2. Пусть последовательность $A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ имеет все предельные точки на вещественной оси. Для того, чтобы последовательность A была интерполяционной в пространстве $[\rho, \infty)^+$, необходимо и достаточно, чтобы любая ее присоединенная функция $E(z)$ удовлетворяла условию (2.5).

Доказательство. Необходимость доказана в работе [7] (см. лемму 2.3).

Докажем достаточность. Прежде всего, используя результат Эрла, методом сдвига узлов a_n ($r_n \leq 1$) построим аналитическую ограниченную в $\mathbb{C}_+$ функцию $f \in H^\infty$, которая решает интерполяционную задачу

$$f(a_n) = b_n, \quad r_n \leq 1.$$

Действительно, для таких точек a_n значения b_n ограничены в совокупности, а из (2.5) следует, что произведение Бляшке

$$\prod_{r_n \leq 1} E_0(z, a_n)$$

удовлетворяет условию интерполяционности Карлесона [11] в пространстве H^∞ :

$$\left| \prod_{r_k \leq 1, a_k \neq a_n} E_0(a_n, a_k) \right| > \delta > 0.$$

Пусть теперь последовательность $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (2.1). Определим последовательность $\{b'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ равенством $b'_n = b_n - f(a_n)$, если $r_n > 1$, и $b'_n = b_n$, если $r_n \leq 1$. Так как функция $f(z)$ ограничена, то b'_n удовлетворяют условию (2.1). Пусть K из теоремы 3.1. Используя лемму 3.4, построим целую функцию φ вполне регулярного роста с индикатором $h(\theta) \geq K_1$ такую, что исключительные кружки не покрывают узлы интерполяции и вне исключительных кружков выполняется неравенство $|\varphi(re^{i\theta})| \geq \exp[(h(\theta) - \varepsilon)V(r)] > \exp[K_1 V(r)]$. Число K_1 выберем так, чтобы $|b'_n| \exp(-K_1 V(r)) \leq K$. Используя теорему 3.1, построим множество A' , такое, что функция $F_1(z) = L(z, A', A)$ решает интерполяционную задачу $F_1(a_k) = b'_k / \varphi(a_k)$ для всех a_k таких, что $r_k > 1$ и $F_1(a_k) = 0$ для всех a_k таких, что $r_k \leq 1$.

Общее решение можно получить теперь в виде $F(z) = F_1(z)\varphi(z) + f(z)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов С. А., Хавин В. П. Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций. I // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1974. — 47. — С. 15–54.
2. Виноградов С. А., Хавин В. П. Свободная интерполяция в H^∞ и в некоторых других классах функций. II // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1974. — 56. — С. 12–58.
3. Говоров Н. В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. — М.: Наука, 1986.
4. Гришин А. Ф. Непрерывность и асимптотическая непрерывность субгармонических функций // Мат. физ., анализ, геом. — 1994. — 1, № 2. — С. 193–215.
5. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
6. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1976.
7. Малютин К. Г. Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа // Мат. сб. — 1993. — 184, № 2. — С. 129–144.
8. Малютин К. Г. Модифицированный метод Джонса для решения задач кратной интерполяции в полуплоскости // В сб.: «Математический форум. Исследования по математическому анализу». — Владикавказ: ВНИЦ РАН и РСО-А, 2009. — 3. — С. 143–164.
9. Малютин К. Г., Боженко О. А. Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций нулевого порядка в полуплоскости // Уфимский мат. ж. — 2014. — 6, № 1. — С. 18–29.
10. Уен Н. Т. Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа // Теор. функций, функц. анализ и их прил. — 1979. — 31. — С. 119–129.
11. Carleson L. An interpolation problem for bounded analytic functions // Am. J. Math. — 1958. — 80. — С. 921–930.
12. Earl J. P. On the interpolation of bounded sequences by bounded functions // J. London Math. Soc. — 1970. — 2, № 3. — С. 544–548.

М. В. Кабанко

Курский государственный университет, Курск, Россия
E-mail: kabankom@gmail.com

К. Г. Малютин

Курский государственный университет, Курск, Россия
E-mail: malyutinkg@gmail.com

UDC 517.53

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-597-609

EDN: WBOQMN

Interpolation by Earl's method in the space of functions of semi-formal order

M. V. Kabanko and K. G. Malyutin

Kursk State University, Kursk, Russia

Abstract. We consider the problem of simple free interpolation in the space of functions of finite order and normal type in a half-plane. We propose its solution by the method of shifting interpolation nodes. This solution is based on Earl's method, who solved the problem of free interpolation in the space of analytic bounded functions in a unit circle.

Keywords: free interpolation, finite order function, shift of interpolation nodes, Earl's method.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The second author's research was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 24-21-00006, <https://rscf.ru/project/24-21-00006/>.

For citation: M. V. Kabanko, K. G. Malyutin, "Interpolation by Earl's method in the space of functions of semi-formal order," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 4, 597–609. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-597-609>

REFERENCES

1. S. A. Vinogradov and V. P. Khavin, "Svobodnaya interpolatsiya v H^∞ i v nekotorykh drugikh klassakh funktsiy. I" [Free interpolation in H^∞ and some other classes of functions. I], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1974, **47**, 15–54 (in Russian).
2. S. A. Vinogradov and V. P. Khavin, "Svobodnaya interpolatsiya v H^∞ i v nekotorykh drugikh klassakh funktsiy. II" [Free interpolation in H^∞ and some other classes of functions. II], *Zap. nauch. sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1974, **56**, 12–58 (in Russian).
3. N. V. Govorov, *Kraevaya zadacha Rimana s beskonечnym indeksom* [Riemann Boundary-Value Problem with Infinite Index], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. A. F. Grishin, "Nepřeryvnost' i asimptoticheskaya nepřeryvnost' subgarmonicheskikh funktsiy" [Continuity and asymptotic continuity of subharmonic functions], *Mat. fiz., analiz, geom.* [Math. Phys. Anal. Geom.], 1994, **1**, No. 2, 193–215 (in Russian).
5. B. Ya. Levin, *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Roots of Entire Functions], GITTL, Moscow, 1956 (in Russian).
6. A. F. Leont'ev, *Ryady eksponent* [Exponent Series], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
7. K. G. Malyutin, "Zadacha kratnoy interpolatsii v poluploskosti v klasse analiticheskikh funktsiy konechnogo poryadka i normal'nogo tipa" [The problem of multiple interpolation in a half-plane in the class of analytic functions of finite order and normal type], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1993, **184**, No. 2, 129–144 (in Russian).
8. K. G. Malyutin, "Modifitsirovanny metod Dzhonsa dlya resheniya zadach kratnoy interpolatsii v poluploskosti" [Modified Johns method for solving problems of multiple interpolation in a half-plane], In: *Matematicheskiiy forum. Issledovaniya po matematicheskomu analizu* [Mathematical Forum. Research in Mathematical Analysis], VNTs RAN and RSO-A, Vladikavkaz, 2009, **3**, pp. 143–164 (in Russian).



9. K. G. Malyutin and O. A. Bozhenko, “Zadacha kratnoy interpolatsii v klasse analiticheskikh funktsiy nulevogo poryadka v poluploskosti” [The problem of multiple interpolation in the class of analytic functions of zero order in a half-plane], *Ufmskiy mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2014, **6**, No. 1, 18–29 (in Russian).
10. N. T. Uyen, “Interpolirovanie s kratnymi uzlami v poluploskosti v klasse analiticheskikh funktsiy konechnogo poryadka i normal’nogo tipa” [Interpolation with multiple nodes in the half-plane in the class of analytic functions of finite order and normal type], *Teor. funktsiy, funkts. analiz i ikh pril.* [Theor. Funct. Funct. Anal. Appl.], 1979, **31**, 119–129 (in Russian).
11. L. Carleson, “An interpolation problem for bounded analytic functions,” *Am. J. Math.*, 1958, **80**, 921–930.
12. J. P. Earl, “On the interpolation of bounded sequences by bounded functions,” *J. London Math. Soc.*, 1970, **2**, No. 3, 544–548.

M. V. Kabanko
Kursk State University, Kursk, Russia
E-mail: kabankom@gmail.com

K. G. Malyutin
Kursk State University, Kursk, Russia
E-mail: malyutinkg@gmail.com