

УДК 517.977

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-586-596

EDN: WBBYYF

ЗАДАЧА СУЩЕСТВОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ДРОБНОЙ МОДЕЛИ ФОЙГТА

А. В. Звягин, Е. И. Костенко

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В статье исследуется задача управления с обратной связью для одной математической модели, описывающей движение нелинейно-вязкой жидкости с бесконечной памятью вдоль траекторий поля скоростей. Доказывается существование оптимального управления, дающего минимум заданному ограниченному и полунепрерывному снизу функционалу качества. При доказательстве используется аппроксимационно-топологический подход, теория регулярных лагранжевых потоков и теория топологической степени для многозначных векторных полей.

Ключевые слова: управление с обратной связью, оптимальное управление, нелинейно-вязкая жидкость, аппроксимационно-топологический подход, регулярный лагранжев поток, топологическая степень.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10026, <https://rscf.ru/project/23-71-10026/>.

Для цитирования: А. В. Звягин, Е. И. Костенко. Задача существования управления с обратной связью для одной нелинейно-вязкой дробной модели Фойгта // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 586–596. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-586-596>

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время гидродинамическими задачами описывается огромное число процессов, протекающих на различных предприятиях. В данной статье рассматривается модель, описывающая движение нелинейно-вязкой жидкости. Первые работы, посвященные данной тематике, появились в 50-х годах прошлого века, их появление связано с развитием таких отраслей как биомеханика, биогидродинамика, пищевая промышленность и т. д. Использование полимерных насадок и нанопорошковых присадок на предприятиях повысило интерес к такому типу гидродинамических задач (см. [1, 2]).

В настоящей работе изучается задача оптимального управления с обратной связью для одной такой модели, описывающей движение вязкоупругой среды с памятью. Вначале опишем изучаемую модель. В ограниченной области $Q_T = (-\infty, T] \times \Omega$, где $T \geq 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$ с границей $\partial\Omega$ класса C^2 рассматривается задача, описывающая движение нелинейно-вязкой жидкости:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} [2\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v)] - \\ - \mu \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = f(t, x), \quad (t, x) \in Q; \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q; \quad (1.2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in (-\infty, T], x \in \bar{\Omega}; \quad (1.3)$$

$$v(t, x) |_{(t,x) \in (-\infty, T] \times \partial\Omega} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь $v(t, x) = (v_1(t, x), \dots, v_n(t, x))$ и $p(t, x)$ неизвестные скорость и давление рассматриваемой среды, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — тензор скоростей деформации с компонентами $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, f — плотность внешних сил, $\mu \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$ — константы, и $z(\tau; t, x)$ — траектория движения частицы жидкости, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, определяемая через абсолютно сходящийся интеграл $\Gamma(\beta) = \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-t} dt$ (см. [10]). Знак Div обозначает дивергенцию матрицы, т. е. вектор, координатами которого являются дивергенции векторов-столбцов матрицы. Функция I_2 определяется равенством: $I_2^2 = \sum_{i,j=1}^n \mathcal{E}_{ij}^2(v)$. Функция ν удовлетворяет следующим ограничениям:

$$(\nu_1) \quad 0 < C_1 \leq \nu(s) \leq C_2 < \infty; \quad (\nu_2) \quad -s\nu'(s) \leq \nu(s), \text{ при } \nu'(s) \leq 0; \quad (\nu_3) \quad |s\nu'(s)| \leq C_3 < \infty.$$

Наличие интегрального слагаемого в (1.1) отражает учет памяти сплошной среды. Различные модели с памятью возникали и изучались в большом числе работ (см., например, [1]). Но, как правило, математические постановки рассматривали вклад памяти при постоянном значении пространственной переменной x (см. [6]). На практике такие модели «не физичны». Память среды необходимо учитывать вдоль траектории движения частицы. Таким образом, в (1.1) появляется $z(s; t, x)$ — траектория частицы среды, указывающая в момент времени s расположение частицы среды, находящейся в момент времени t в точке x . Данная траектория определяется полем скоростей v .

Заметим, что для корректной постановки задачи необходимо, чтобы траектории z однозначно определялись полем скоростей v , другими словами, чтобы уравнение (1.3) имело единственное решение для поля скоростей v . Для этого в случае, когда скорость v принадлежит пространству Соболева, в работах [12–14] была исследована разрешимость интегральной задачи Коши (1.3) и установлены существование, единственность и устойчивость регулярных лагранжевых потоков (РЛП) — обобщения понятия классического решения. Эти результаты дают возможность корректно рассмотреть поставленную задачу.

Краевая задача (1.1)–(1.4) описывает математическую модель, изучающую движение нелинейно-вязкоупругой жидкости с бесконечной памятью вдоль траектории движения частицы среды. В работах [5, 17], изучалась математическая модель (1.1)–(1.4) с постоянной вязкостью и памятью на временном интервале $[0, T]$. В работе [18] доказана слабая разрешимость изучаемой модели с постоянной вязкостью, а в работе [15] — с нелинейной вязкостью.

В данной статье для изучаемой математической модели рассматривается задача управления с обратной связью. Заметим, что задачам оптимального управления в механике жидкости посвящено большое число работ (см., например, [11] и имеющуюся там литературу). Однако в большинстве из них изучаются различные задачи оптимального управления для системы Навье—Стокса. Но в природе существует огромное число жидкостей, которые описываются более сложными системами уравнений (такие жидкости называются «неньютоновские жидкости»). Список работ, изучающих задачи оптимального управления, в том числе и задачи с обратной связью, для подобных моделей движения жидкости намного беднее (см. [4, 7, 19]). В настоящей работе доказывается существование оптимального управления с обратной связью для одной такой модели, описывающей движение вязкоупругой среды с памятью.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Обозначим через $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ множество измеримых вектор-функций $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, суммируемых с p -ой степенью, а через $W_p^m(\Omega)$, $m \geq 1$, $p \geq 1$ — пространства Соболева. Рассмотрим пространство $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно-дифференцируемых вектор-функций из Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω . Обозначим через $\mathcal{V}$ множество $\{v \in C_0^\infty(\Omega), \operatorname{div} v = 0\}$. Через V^0 мы обозначим замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, через V^1 — по норме $W_2^1(\Omega)$ и через V^2 пространство $W_2^2(\Omega) \cap V^1$.

Введем шкалу пространств V^β , $\beta \in \mathbb{R}$. Для этого рассмотрим проектор Лере $P : L_2(\Omega) \rightarrow V^0$ и оператор $A = -P\Delta$, определенный на $D(A) = V^2$. Этот оператор может быть продолжен в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с компактным обратным. Пусть $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$ — собственные значения оператора A . В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении компактных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0 . Обозначим через

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^N v_j e_j : v_j \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \right\},$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j , и определим пространство V^β , $\beta \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\beta} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta |v_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{где } v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e_k. \quad (2.1)$$

На пространстве V^β , $\beta > -1/2$, норма (2.1) эквивалентна обычной норме $\|\cdot\|_{W_2^\beta(\Omega)}$ пространства $W_2^\beta(\Omega)$ (см. [11]). Кроме того, нормы в пространствах V^1 , V^2 и V^3 могут быть заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} \|v\|_{V^1} &= \left(\int_{\Omega} \nabla v(x) : \nabla v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{V^2} = \left(\int_{\Omega} \Delta v(x) \Delta v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|v\|_{V^3} &= \left(\int_{\Omega} \nabla \Delta v(x) : \nabla \Delta v(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь символ «:» обозначает покомпонентное матричное произведение.

Далее, через $V^{-\beta} = (V^\beta)^{-1}$, $\beta \in \mathbb{N}$, будем обозначать сопряженное пространство к V^β .

Введем пространство, в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи:

$$W_1 = \{v \in L_2(-\infty, T; V^1) \cap L_\infty(-\infty, T; V^0), v' \in L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})\}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} + \|v\|_{L_\infty(-\infty, T; V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3,loc}(-\infty, T; V^{-1})}$.

Далее будем использовать понятие регулярного лагранжева потока (см. [12–14]).

Определение 2.1. Регулярным лагранжевым потоком (РЛП), порожденным v , называется функция $z(\tau; t, x)$, $(\tau; t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \bar{\Omega}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. при п.в. x и любом $t \in [0, T]$ функция $\gamma(t) = z(\tau; t, x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [0, T];$$

2. для любых $t, \tau \in [0, T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \bar{\Omega}$ с лебеговой мерой $m(B)$ справедливо соотношение $m(z(\tau; t, B)) = m(B)$;
3. при всех $t_i \in [0, T]$, $i = \overline{1, 3}$, и п.в. $x \in \bar{\Omega}$

$$z(t_3; t_1, x) = z(t_3; t_2, z(t_2; t_1, x)).$$

Приведем также следующие результаты о РЛП.

Теорема 2.1. Пусть $v \in L_1(0, T; W_p^1(\Omega))$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\operatorname{div} v(t, x) = 0$ и $v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП $z \in C(D; L)$, порожденный v , и

$$z(\tau; t, \bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} z(\tau; t, x) = v(\tau, z(\tau; t, x)), \quad \tau \in [0, T], \quad x \in \Omega,$$

где $C(D, L)$ — банахово пространство непрерывных функций на $D = [0, T] \times [0, T]$ со значениями в L — метрическом пространстве измеримых на Ω вектор-функций.

Теорема 2.2. Пусть $v, v^m \in L_1(0, T; W_1^p(\Omega))$, $m = 1, 2, \dots$, при некотором $p > 1$. Пусть $\operatorname{div} v(t, x) = 0$, $\operatorname{div} v^m(t, x) = 0$, $v|_{[0, T] \times \partial\Omega} = v^m|_{[0, T] \times \partial\Omega} = 0$. Пусть выполняются неравенства

$$\|v_x\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega))} + \|v\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega))} \leq C_4, \quad \|v_x^m\|_{L_1(0, T; L_p(\Omega))} + \|v^m\|_{L_1(0, T; L_1(\Omega))} \leq C_5.$$

Пусть v^m сходится к v в $L_1(Q_T)$ при $m \rightarrow +\infty$. Пусть $z(\tau; t, x)$ и $z^m(\tau; t, x)$ — РЛП, порожденные v и v^m , соответственно. Тогда последовательность z^m сходится к z по мере Лебега на множестве $[0, T] \times \Omega$ при $t \in [0, T]$.

Здесь v_x — матрица Якоби вектор-функции v .

Таким образом, в силу теоремы 2.2 для каждого $v \in L_2(-\infty, T; V^1)$ и для почти всех $x \in \Omega$ уравнение (1.3) имеет единственное решение $z(v)$.

Перейдём к описанию задачи управления для изучаемой математической модели. Для этого рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W_1 \rightharpoonup L_2(-\infty, T; V^{-1})$, которое будет использовано для определения обратной связи и задания ограничений на управление. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

- (Ψ1) отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;
- (Ψ2) отображение Ψ полунепрерывно сверху и компактно;
- (Ψ3) отображение Ψ глобально ограничено, т. е. существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(-\infty, T; V^{-1})} := \sup \left\{ \|u\|_{L_2(-\infty, T; V^{-1})} : u \in \Psi(v) \right\} \leq M \quad \text{для всех } v \in W_1;$$

- (Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле:

$$\text{если } \{v_l\}_{l=1}^\infty \subset W_1, v_l \rightharpoonup v_0, u_l \in \Psi(v_l) \text{ и } u_l \rightarrow u_0 \text{ в } L_2(-\infty, T; V^{-1}), \text{ тогда } u_0 \in \Psi(v_0).$$

Мы будем рассматривать слабую постановку задачи управления с обратной связью для начально-краевой задачи (1.1)–(1.4). Под обратной связью мы понимаем следующее условие:

$$f \in \Psi(v). \quad (2.2)$$

Таким образом, в работе рассматривается задача управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2). Сформулируем определение слабого решения задачи управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2).

Определение 2.2. Слабым решением задачи управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2) называется пара функций $(v, f) \in W_1 \times L_2(-\infty, T; V^{-1})$, удовлетворяющая а) условию обратной связи (2.2), б) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (-\infty, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + 2 \int_{\Omega} \nu(I_2(v)) \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(\varphi) dx + \\ + \mu \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь z — РЛП, порожденный v .

Первым результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2.3. Пусть многозначное отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4). Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2).

Обозначим через $\Sigma \subset W_1 \times L_2(-\infty, T; V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (1.1)–(1.4), (2.2). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- (Ф1) существует число γ такое, что $\Phi(v, f) \geq \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$;
 (Ф2) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W_1 и $f_m \rightarrow f_*$ в $L_2(-\infty, T; V^{-1})$, то $\Phi(v_*, f_*) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \Phi(v_m, f_m)$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.4. Если отображение Ψ удовлетворяет условиям (Ψ1)–(Ψ4), а функционал Φ удовлетворяет условиям (Ф1)–(Ф2), тогда задача оптимального управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2) имеет хотя бы одно слабое решение (v_*, f_*) такое, что $\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f)$.

Доказательство данных результатов состоит из нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики, разработанного В. Г. Звягиным (см. [8]), доказывается существование слабых решений исследуемой задачи управления с обратной связью. Для этого вводится семейство $(0 \leq \xi \leq 1)$ вспомогательных включений, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$, доказываются априорные оценки решений и на основе теории топологической степени для многозначных векторных полей доказывается существование слабых решений вспомогательной задачи управления с обратной связью при $\xi = 1$. Далее, для доказательства разрешимости исходной задачи управления с обратной связью на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход. В заключение, показывается, что во множестве решений найдется хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

3. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим следующее семейство вспомогательных задач $(0 \leq \xi \leq 1)$ с малым параметром $\theta > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \xi \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - \xi \operatorname{Div} [2\nu(I_2(v))\mathcal{E}(v)] - \theta \frac{\partial \Delta^2 v}{\partial t} - \\ - \mu \frac{\xi}{\Gamma(1-\alpha)} \operatorname{Div} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = \xi f; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad t \in [-m, T], \quad x \in \Omega; \quad (3.2)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x)) ds, \quad t, \tau \in [-m, T], x \in \Omega; \quad (3.3)$$

$$v(t, x)|_{(t,x) \in [-m, T] \times \partial\Omega} = 0, \quad v(-m, x) = 0, \quad \Delta v(t, x)|_{(t,x) \in [-m, T] \times \partial\Omega} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.4)$$

Здесь $m = 1, 2, \dots$. Разрешимость данного семейства вспомогательных задач будет доказана в следующем функциональном пространстве: $W_2 = \{v \in L_2(-m, T; V^3), v' \in L_2(-m, T; V^3)\}$ с нормой $\|v\|_{W_2} = \|v\|_{L_2(-m, T; V^3)} + \|v'\|_{L_2(-m, T; V^3)}$. Дадим определение слабого решения задачи (3.1)–(3.4).

Определение 3.1. Слабым решением задачи (3.1)–(3.4), (2.2) называется пара функций $(v, f) \in W_2 \times L_2(-m, T; V^{-1})$, удовлетворяющих а) условию обратной связи (2.2), б) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (-m, T)$ тождеству

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \xi \int \sum_{i=1}^n v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \theta \int_{\Omega} \nabla \Delta v' : \nabla \varphi dx + 2\xi \int_{\Omega} \nu(I_2(v)) \mathcal{E}(v) \mathcal{E}(\varphi) dx + \\ + \mu \frac{\xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\Omega} \int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds \mathcal{E}(\varphi) dx = \xi \langle f, \varphi \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

и начальному условию $v(-m, \cdot) = 0$. Здесь z — РЛП, порожденный v .

Перейдём к операторной трактовке задачи (3.1)–(3.4). Введем операторы:

$$\begin{aligned}
 J : V^3 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Jv, \varphi \rangle = \int_{\Omega} v \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1; \\
 A : V^3 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle Av, \varphi \rangle = - \int_{\Omega} \nabla \Delta v : \nabla \varphi dx, \quad v \in V^3, \quad \varphi \in V^1; \\
 B : V^1 &\times [-m, T] \times [-m, T] \times \overline{\Omega} \rightarrow V^{-1}, \\
 (B(v, z)(t), \varphi) &= \left(\int_{-m}^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds, \quad \mathcal{E}(\varphi) \right), \\
 v \in V^1, \quad z &\in [-m, T] \times [-m, T] \times \overline{\Omega}, \quad \varphi \in V^1, \quad t \in (-m, T); \\
 K : L_4(\Omega) &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle K(v), \varphi \rangle = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad \varphi \in V^1; \\
 D : V^1 &\rightarrow V^{-1}, \quad \langle D(v), \varphi \rangle = 2 \int_{\Omega} \nu (I_2(v)) \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) \mathcal{E}(\varphi) dx, \quad v \in V^1, \quad \varphi \in V^1.
 \end{aligned}$$

Поскольку в равенстве (3.5) функция $\varphi \in V^1$ произвольна, оно эквивалентно в $L_2(-m, T; V^{-1})$ следующему операторному уравнению:

$$Jv' - \theta Av' + \frac{\mu_1 \xi}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z) - \xi K(v) + \xi D(v) = \xi f. \quad (3.6)$$

Также определим операторы при помощи следующих равенств:

$$\begin{aligned}
 L : W_2 &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad L(v) = ((J + \theta A)v', v|_{t=-m}); \\
 C : W_2 &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad C(v) = (K(v), 0); \\
 G : W_2 &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad G(v) = \left(\frac{\mu}{\Gamma(1-\alpha)} B(v, z), 0 \right); \\
 F : W_2 &\rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3, \quad F(v) = (D(v), 0).
 \end{aligned}$$

Тогда задача о нахождении решения интегрального уравнения (3.5) при фиксированном $0 \leq \xi \leq 1$, удовлетворяющего начальному условию (3.4) и условию обратной связи (2.2), эквивалентна задаче о нахождении решения при фиксированном $0 \leq \xi \leq 1$ операторного уравнения

$$L(v) = \xi(C(v) - G(v) - F(v) + (f, 0)),$$

удовлетворяющего условию обратной связи (2.2).

Для введенных выше операторов справедливы следующие свойства.

Лемма 3.1. Для любой функции $v \in W_2$ функция $K(v) \in L_2(-m, T; V^{-1})$, отображение $K : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ является компактным, и для него имеет место оценка

$$\|K(v)\|_{V^{-1}} \leq C_6 \|v\|_{L_4(\Omega)}^2. \quad (3.7)$$

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится аналогично [18, лемма 5]. $\square$

Лемма 3.2. Оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3$ обратим, и обратный к нему оператор $L^{-1} : L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_2$ является непрерывным оператором.

Доказательство. Доказательство данной леммы является достаточно стандартным и проводится аналогично лемме 4.4.3 монографии [8]. $\square$

Лемма 3.3. Отображение $D : L_2(-m, T; V^1) \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ непрерывно, и для него справедлива оценка

$$\|D(v) - D(u)\|_{L_2(-m, T; V^{-1})} \leq C_7 \|v - u\|_{L_2(-m, T; V^1)}. \quad (3.8)$$

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится аналогично лемме 4 статьи [15]. $\square$

Лемма 3.4. Для любого $v \in L_2(-m, T; V^1)$, $z \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}$ выполнено $B(v, z) \in L_2(-m, T; V^{-1})$ и отображение $B : L_2(-m, T; V^1) \times [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega} \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ непрерывно и ограничено. Кроме того, для любого фиксированного $z \in [-m, T] \times [-m, T] \times \bar{\Omega}$, для любого $u, v \in L_2(-m, T; V^1)$ справедлива оценка

$$\|B(v, z) - B(u, z)\|_{k, L_2(-m, T; V^{-1})} \leq C_8 T^{1-\alpha} \sqrt{\frac{\lambda(T+m)}{1+k\lambda}} \|v - u\|_{k, L_2(-m, T; V^1)}. \quad (3.9)$$

Доказательство. Доказательство первой части леммы описано в [6, Lemma 2.2], вторая часть доказана в [18, Lemma 3]. $\square$

Определим несколько понятий, касающихся меры некомпактности и L -уплотняющих операторов (см. [3, 9]).

Определение 3.2. Неотрицательная вещественная функция ψ , определенная на подмножестве банахова пространства F , называется *мерой некомпактности*, если для любого подмножества $\mathcal{M}$ этого пространства выполнены следующие свойства:

1. $\psi(\overline{\text{co}} \mathcal{M}) = \psi(\mathcal{M})$;
2. для любых двух множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ из $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_2$ следует, что $\psi(\mathcal{M}_1) \leq \psi(\mathcal{M}_2)$.

Здесь $\overline{\text{co}} \mathcal{M}$ обозначает выпуклое замыкание множества $\mathcal{M}$. В качестве примера меры некомпактности возьмём меру некомпактности Куратовского: точная нижняя граница $d > 0$, для которого множество $\mathcal{M}$ допускает разбиение на конечное число подмножеств, диаметры которых меньше d . Приведём некоторые важные свойства меры некомпактности Куратовского:

3. $\psi(\mathcal{M}) = 0$, если $\mathcal{M}$ относительно компактное подмножество;
4. $\psi(\mathcal{M} \cup K) = \psi(\mathcal{M})$, если K относительно компактное множество.

Определение 3.3. Пусть X — ограниченное подмножество банахова пространства и $L : X \rightarrow F$ — отображение X в банахово пространство F . Отображение $g : X \rightarrow F$ называется *L -уплотняющим*, если $\psi(g(\mathcal{M})) < \psi(L(\mathcal{M}))$ для любого множества $\mathcal{M} \subseteq X$ такого, что $\psi(g(\mathcal{M})) \neq 0$.

Пусть γ_k — мера некомпактности Куратовского в пространстве $L_2(-m, T; V^{-1})$ с нормой $\|v\|_{k, L_2(-m, T; V^{-1})} = \left(\int_{-m}^T \|v\|_{V^{-1}}^2 e^{-kt} dt \right)^{\frac{1}{2}}$. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 3.5. Отображение $B : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1})$ является L -уплотняющим по мере некомпактности Куратовского γ_k .

Доказательство. Данная лемма была доказана в [18, Lemma 4]. $\square$

Используя полученные выше свойства операторов, получим следующие априорные оценки для семейства вспомогательных задач.

Лемма 3.6. Для любого решения операторного включения (3.6) имеют место оценки:

$$\|v\|_{L_2(-m, T; V^1)} \leq C_9; \quad \theta \|v'\|_{L_2(-m, T; V^3)} \leq C_{11}; \quad (3.10)$$

$$\|v\|_{C([-m, T]; V^0)} \leq C_{10}; \quad \|v'\|_{L_{4/3}(-m, T; V^{-1})} \leq C_{12}; \quad (3.11)$$

где константы $C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}$ не зависят от v, ξ и m .

Доказательство. Доказательство данной леммы проводится достаточно стандартно. Подробные расчеты можно посмотреть, например, в [18, Lemmas 7-8]. $\square$

Лемма 3.7. Если $v \in W_2$ — решение уравнения (3.6) для некоторого $\xi \in [0, 1]$, то для него имеет место оценка $\|v\|_{W_2} \leq C_{13}$, где C_{13} зависит от θ .

Теорема 3.1. Операторное включение (3.6) при $\xi = 1$ имеет хотя бы одно решение $v \in W_2$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени для многозначных векторных полей (см., например, [19]).

Введем оператор $\mathcal{Y} : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3$ следующим образом: $\mathcal{Y}(v) = (\Psi(v), v_0)$. Тогда задача существования решения $(v, f) \in W_2 \times L_2(-m, T; V^{-1})$ аппроксимационной задачи эквивалентна задаче существования решения $v \in W_2$ для следующего операторного включения:

$$v \in \xi \mathcal{M}, \quad \text{где} \quad \mathcal{M} = L^{-1}(\mathcal{Y} + C(v) - G(v) - F(v)). \quad (3.12)$$

Из леммы 3.7 следует, что все решения уравнения (3.12) лежат в шаре $B_R \subset W_2$ с центром в нуле и радиусом $R = C_{13} + 1$. Согласно утверждению леммы 3.2 оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3$ является обратимым. Тогда ни одно решение $v \in \xi \mathcal{M}$ не принадлежит границе шара B_R . В силу леммы 3.2 оператор $L^{-1} : L_2(0, T; V^{-1}) \times V^3 \rightarrow W_2$ является непрерывным. Согласно леммам 3.1, 3.3, 3.5 отображение $\mathcal{Y} + C(v) - G(v) - F(v) : W_2 \rightarrow L_2(-m, T; V^{-1}) \times V^3$ является L -уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k . Следовательно, оператор $\mathcal{M} : W_2 \rightarrow W_2$ является уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k . Таким образом, векторное поле $v \in \xi \mathcal{M}$ невырождено на границе шара B_R , а значит, для этого векторного поля определена топологическая степень $\deg(I - \xi \mathcal{M}, B_R, 0)$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что

$$\deg(I - \mathcal{M}, B_R, 0) = \deg(I, B_R, 0) = 1.$$

Отличие от нуля степени отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v \in W_2$ включения (3.6) при $\xi = 1$, а следовательно, и вспомогательной задачи (3.1)–(3.4), (2.2) при $\xi = 1$. $\square$

4. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Перейдём к доказательству разрешимости исходной краевой задачи.

Лемма 4.1. Пусть $f^m \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда следующая оценка выполнена для v^m :

$$\sup_{-\infty < t \leq T} \|v^m(t, \cdot)\|_{V^0} + \sup_{-\infty < t \leq T} \|v^m(t, \cdot)\|_{V^2} + \|v^m(t, \cdot)\|_{L_2(-\infty, T; V^1)} \leq C_{14} \|f^m\|_{L_2(-\infty, T; V^0)} \quad (4.1)$$

с константой C_{14} , не зависящей от m . Здесь v^m — последовательность, сходящаяся к искомой функции скорости. Существование данной последовательности вытекает из того факта, что пространство V^3 плотно в V^0 .

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично [20, Lemma 3.4]. $\square$

Оценка (4.1) означает, что последовательность v^m ограничена в $L_2(-\infty, T; V^1)$. Это позволяет утверждать, что существует функция $v^* \in L_2(-\infty, T; V^1)$ такая, что v^m (с точностью до подпоследовательности) слабо сходится к v^* в $L_2(-\infty, T; V^1)$. Кроме того, оценка (4.1) влечет за собой сходимость v^m к v^* (с точностью до подпоследовательности) п.в. на $[-k, T] \times \Omega$ для любого $k > 0$.

Лемма 4.2. Пусть $k < m$, $f \in L_2(-\infty, T; V^{-1})$. Тогда для функций v^m оценка

$$\left\| \frac{dv^m}{dt} \right\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} \leq C_{15}(k) (1 + \|f^m\|_{L_1(-k, T; V^{-1})} + \|f^m\|_{L_1(-k, T; V^{-1})}^2)$$

выполняется с независимой от m , но зависящей от k константой $C_{15}(k)$.

Доказательство. Данная лемма доказывается аналогично [20, Lemma 3.5]. $\square$

Лемма 4.2 подразумевает, что последовательность $\frac{dv^m}{dt}$ ограничена по норме пространства $L_1(-k, T; V^{-1})$ и сходится к $\frac{dv}{dt}$ в смысле распределения на $[-k, T]$ для любого $-\infty < k < T$.

Рассмотрим задачу Коши (1.3) для предельной функции v^* . Так как $v^* \in W_1$, следовательно, v^* удовлетворяет условиям теоремы 2.2. Поэтому на любом конечном интервале $[-k, T]$ для любого $-\infty < k < T$. Тогда из теоремы 2.1 следует существование РПП $z^*(\tau; t, x)$, $-\infty < \tau, t \leq T, x \in \bar{\Omega}$, порожденного v^* . Обозначим через $z^m(\tau; t, x)$ — РПП, порожденные v^m .

Лемма 4.3. Последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится по мере Лебега на $[-k, T] \times \Omega$ по (τ, x) к $z^*(\tau; t, x)$ для $t \in [-k, T], k \geq 0$.

Доказательство. Данная лемма следует из априорной оценки леммы 3.6 и теоремы 2.2. $\square$

Из леммы 4.3 следует, что последовательность $z^m(\tau; t, x)$ сходится (с точностью до подпоследовательности) к $z^*(\tau; t, x)$ п.в. на $Q(k, T) = [-k, T] \times \Omega$ как функция переменных $(\tau, x) \in Q(k, T)$ для любого $-k \in (-\infty, T)$ для $t \in [-k, T]$ (см. [16, лемма VI.5.1]). Легко видеть, что последовательность f^m сходится к f в $L_2(-\infty, T; V^0)$ сильно в $L_2(Q)^n$ и п.в. на $Q = (-\infty, T] \times \Omega$.

Полученные сходимости позволяют перейти к пределу при $\theta \rightarrow 0$ в каждом слагаемом интегрального равенства вспомогательной задачи для $\xi = 1$. Это подразумевает, что предельная функция v^* удовлетворяет тождеству (2.3). Таким образом, мы доказали существование хотя бы одного слабого решения задачи (1.1)–(1.4), (2.2), описывающего движение нелинейно-вязкой жидкости.

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Из теоремы 2.3 мы получаем, что множество решений Σ непусто. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$ такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f).$$

Как и ранее, используя оценку (3.10)–(3.11), мы без ограничения общности, в случае необходимости переходя к подпоследовательности, можем предположить, что $v_l \rightarrow v_*$ сильно в $L_2(-\infty, T; L_4(\Omega))$; $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(-\infty, T; V^1)$; $z_l(\tau; t, x) \rightarrow z_*(\tau; t, x)$ по норме Лебега относительно $(\tau, x) \in [0, T] \times \Omega$; $f_l \rightarrow f_* \in \Psi(v^*)$ сильно в $L_2(-\infty, T; V^{-1})$ при $m \rightarrow +\infty$.

Аналогично предыдущему разделу, переходя к пределу во включении

$$Jv'_l + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_l, z_l) - K(v_l) + D(v_l) = f_l \in \Psi(v_l),$$

мы получим следующее включение:

$$Jv'_* + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_*, z_*) - K(v_*) + D(v_*) = f_* \in \Psi(v_*).$$

Следовательно, $(v_*, f_*) \in \Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, мы имеем

$$\Phi(v_*, f_*) \leq \inf_{(v, f) \in \Sigma} \Phi(v, f),$$

что доказывает, что (v_*, f_*) — требуемое решение. Это и завершает доказательство теоремы 2.4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Астрита Дж., Маруччи Дж. Основы гидродинамики не-newтоновских жидкостей. — М.: Мир, 1978.
2. Виноградов Г. В., Малкин А. Я. Реология полимеров. — М.: Химия, 1977.
3. Дмитриенко В. Т., Звягин В. Г. Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений // Мат. заметки. — 1982. — 31, № 5. — С. 801–812.
4. Звягин А. В. Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье—Стокса // Докл. РАН. — 2019. — 486, № 5. — С. 527–530.
5. Звягин А. В., Костенко Е. И. О существовании управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта // Дифф. уравн. — 2023. — 59, № 12. — С. 1710–1714.
6. Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т. О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости // Дифф. уравн. — 2002. — 38, № 12. — С. 1633–1645.
7. Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В. Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2018. — 477. — С. 54–86.
8. Звягин В. Г., Турбин М. В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. — М.: КРА-САНД УРСС, 2012.
9. Садовский Б. Н. Предельно компактные и уплотняющие операторы // Усп. мат. наук. — 1972. — 27, № 1. — С. 81–146.
10. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
11. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
12. Crippa G. The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields // Boll. Unione Mat. Ital. — 2008. — 1, № 2. — С. 333–348.

13. *Crippa G., de Lellis C.* Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow// *J. Reine Angew. Math.* — 2008. — 616. — C. 15–46.
14. *DiPerna R. J., Lions P. L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces// *Invent. Math.* — 1989. — 98, № 3. — C. 511–547.
15. *Kostenko E. I.* Investigation of weak solvability of one model nonlinear viscosity fluid// *Lobachevskii J. Math.* — 2024. — 45. — C. 1421–1441.
16. *Temam R.* Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis. — Amsterdam: North-Holland, 1977.
17. *Zvyagin A. V., Kostenko E. I.* Investigation of the weak solvability of one viscoelastic fractional Voigt model// *Mathematics.* — 2023. — 21, № 11. — 2272.
18. *Zvyagin V. G., Kostenko E. I.* Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory// *Lobachevskii J. Math.* — 2023. — 44, № 3. — C. 969–988.
19. *Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A.* On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems// *J. Fixed Point Theory Appl.* — 2014. — 16. — C. 27–82.
20. *Zvyagin V., Orlov V.* Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity// *Discrete Contin. Dyn. Syst.* — 2018. — 23, № 8. — C. 3855–3877.

А. В. Звягин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: zvyagin.a@mail.ru

Е. И. Костенко

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: ekaterinarshina@mail.ru

UDC 517.977

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-586-596

EDN: WBBYYF

The problem of existence of feedback control for one nonlinear viscous fractional Voigt model

A. V. Zvyagin and E. I. Kostenko

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, we study the feedback control problem for a mathematical model describing the motion of a nonlinear viscous fluid with infinite memory along the trajectories of the velocity field. The existence of an optimal control that gives a minimum to a given bounded and lower semicontinuous quality functional is proved. The proof uses the approximation-topological approach, the theory of regular Lagrangian flows, and the theory of topological degree for multivalued vector fields.

Keywords: feedback control, optimal control, nonlinear viscous fluid, approximation-topological approach, regular Lagrangian flow, topological degree.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was supported by the grant from the Russian Science Foundation № 23-71-10026, <https://rscf.ru/project/23-71-10026/>.

For citation: A. V. Zvyagin, E. I. Kostenko, “The problem of existence of feedback control for one nonlinear viscous fractional Voigt model,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 4, 586–596. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-586-596>



REFERENCES

1. G. Astarita and G. Marrucci, *Osnovy gidrodinamiki nen'yutonovskikh zhidkostey* [Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics], Mir, Moscow, 1978 (Russian translation).
2. G. V. Vinogradov and A. Ya. Malkin, *Reologiya polimerov* [Rheology of Polymers], Khimiya, Moscow, 1977 (in Russian).
3. V. T. Dmitrienko and V. G. Zvyagin, “Gomotopicheskaya klassifikatsiya odnogo klassa nepreryvnykh otobrazheniy” [Homotopy classification of one class of continuous mappings], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1982, **31**, No. 5, 801–812 (in Russian).
4. A. V. Zvyagin, “Optimal’noe upravlenie s obratnoy svyaz’yu dlya al’fa-modeli Lere i al’fa-modeli Nav’e—Stoksa” [Optimal feedback control for the Leray alpha model and the Navier–Stokes alpha model], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **486**, No. 5, 527–530 (in Russian).
5. A. V. Zvyagin and E. I. Kostenko, “O sushchestvovanii upravleniya s obratnoy svyaz’yu dlya odnoy drobnoy modeli Foygta” [On the existence of feedback control for a fractional Voigt model], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2023, **59**, No. 12, 1710–1714 (in Russian).
6. V. G. Zvyagin and V. T. Dmitrienko, “O slabym resheniyam regulyarizovannoy modeli vyazkoprugoy zhidkosti” [On weak solutions of a regularized model of viscoelastic fluid], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2002, **38**, No. 12, 1633–1645 (in Russian).
7. V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin, and M. V. Turbin, “Optimal’noe upravlenie s obratnoy svyaz’yu dlya modeli Bingama s periodicheskimi usloviyami po prostranstvennym peremennym” [Optimal feedback control for the Bingham model with periodic conditions on spatial variables], *Zap. nauch. sem. POMI* [Notes Sci. Semin. St. Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2018, **477**, 54–86 (in Russian).
8. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, *Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vyazkoprugikh sred* [Mathematical Issues of Hydrodynamics of Viscoelastic Media], KRASAND URSS, Moscow, 2012 (in Russian).
9. B. N. Sadovskiy, “Predel’no kompaktnye i uplotnyayushchie operatory” [Limit-compact and condensing operators], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1972, **27**, No. 1, 81–146 (in Russian).
10. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
11. A. V. Fursikov, *Optimal’noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* [Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications], Nauchnaya kniga, Novosibirsk, 1999 (in Russian).
12. G. Crippa, “The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields,” *Boll. Unione Mat. Ital.*, 2008, **1**, No. 2, 333–348.
13. G. Crippa and C. de Lellis, “Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow,” *J. Reine Angew. Math.*, 2008, **616**, 15–46.
14. R. J. DiPerna and P. L. Lions, “Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces,” *Invent. Math.*, 1989, **98**, No. 3, 511–547.
15. E. I. Kostenko, “Investigation of weak solvability of one model nonlinear viscosity fluid,” *Lobachevskii J. Math.*, 2024, **45**, 1421–1441.
16. R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1977.
17. A. V. Zvyagin and E. I. Kostenko, “Investigation of the weak solvability of one viscoelastic fractional Voigt model,” *Mathematics*, 2023, **21**, No. 11, 2272.
18. V. G. Zvyagin and E. I. Kostenko, “Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory,” *Lobachevskii J. Math.*, 2023, **44**, No. 3, 969–988.
19. V. Zvyagin, V. Obukhovskii, and A. Zvyagin, “On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems,” *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2014, **16**, 27–82.
20. V. Zvyagin and V. Orlov, “Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2018, **23**, No. 8, 3855–3877.

A. V. Zvyagin
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvyagin.a@mail.ru

E. I. Kostenko
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: ekaterinalarshina@mail.ru