

УДК 517.583 + 519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-575-585

EDN: VZNTSH

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОМОЩЬЮ РАВНОМЕРНЫХ СДВИГОВ ТЕТА-ФУНКЦИИ

М. Л. ЖАДАНОВА

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Рассматриваются задачи интерполяции периодических функций и построения биортогональных систем. В качестве базиса используются равномерные сдвиги третьей тета-функции Якоби. Получены явные формулы для узловой функции и функции, порождающей биортогональную систему. Найдены точные значения нижней и верхней констант Рисса.

Ключевые слова: периодическая функция, биортогональная система, интерполяция, тета-функция, целочисленный сдвиг, узловая функция, константа Рисса.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: М. Л. Жаданова. Интерполяция периодических функций и построение биортогональных систем с помощью равномерных сдвигов тета-функции // Соврем. мат. Фундам. на-
правл. 2024. Т. 70, № 4. С. 575–585. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-575-585>

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерполяция с помощью системы целочисленных сдвигов фиксированной базисной функции широко применяется в вычислительной математике и в цифровой обработке сигналов. Для решения задачи интерполяции обычно строится узловая функция, представляющая собой линейную комбинацию сдвигов базисной функции, равная единице в нулевой точке и обращающаяся в ноль во всех остальных целых точках.

Нахождение коэффициентов линейной комбинации сводится к обращению ряда Фурье, построенного с помощью значений в целочисленных точках исходной базисной функции. Реализация данной процедуры для базисных сплайнов описана в [9, гл. 4]. В теории сплайнов вместо термина узловая функция обычно используется название кардинальная функция. Теория интерполяции по системе целочисленных сдвигов функции Гаусса дана в [15, гл. 7]. При интерполяции периодических функций с помощью тригонометрических полиномов степени не выше заданной роль узловой функции выполняет ядро Дирихле [1, гл. 4]. Таким образом, здесь также можно говорить о системе целочисленных сдвигов.

В настоящее время довольно хорошо изучены системы равномерных сдвигов функций, заданных на всей оси. Ярким примером служат семейства сдвигов, порожденные базисными сплайнами

и функцией Гаусса. Поскольку в прикладных задачах очень часто используются равномерные сетки отсчетов, подобные математические конструкции являются очень удобными и нашли широкое применение [4, 11, 17].

Большой практический интерес представляет ситуация, когда исследуемый сигнал является периодическим. Тогда использовать для аппроксимации быстроубывающие функции не слишком удобно. Логичнее представляется сначала провести их периодизацию. Данная процедура, примененная к функции Гаусса, приводит к третьей тета-функции Якоби, о которой и пойдет речь в этой статье.

Так как тета-функцию можно представить в виде суммы сдвигов функции Гаусса [8, гл. 21], то ее можно рассматривать как периодизацию функции Гаусса (примеры периодизации различных базисных функций см. в [10]). Наличие явных формул построения узловой функции для сдвигов функции Гаусса [15, гл. 7] позволяет сравнительно просто изучить процедуру интерполяции по сдвигам тета-функции.

Тета-функции играют важную роль в теории эллиптических функций [14]. В прикладных задачах в первую очередь используется третья тета-функция Якоби. Хотя она является периодической с периодом π по одной из переменных, ранее ее для интерполяции периодических функций использовали редко, находя коэффициенты разложения численно, не используя явных формул. Однако решение дифференциального уравнения баротропной завихренности при помощи радиальных базисных функций на основе функции Гаусса приводит к необходимости интерполяции именно по сдвигам третьей тета-функции Якоби [10].

Целью данной работы является исследование конечных систем равномерных сдвигов третьей тета-функции Якоби, заданной на своем вещественном периоде. Рассматриваются вопросы интерполяции периодических функций с помощью таких систем, построения биортогональных систем и получения явных формул для констант Рисса, позволяющих оценить устойчивость аппроксимации.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Существует четыре тета-функции Якоби [8, гл. 21], [16, (20.1.1)–(20.1.4)]:

$$\begin{aligned}\theta_1(z, q) &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(2n+1)z}, \\ \theta_2(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n+\frac{1}{2})^2} e^{i(2n+1)z}, \\ \theta_3(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{i2nz}, \\ \theta_4(z, q) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{i2nz}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь $z, q \in \mathbb{C}$, причем $|q| < 1$. Мы, однако, сосредоточим свое внимание на $\theta_3(z, q)$. Это вызвано целым рядом причин. Во-первых, как уже упоминалось, она естественным образом возникает при периодизации функции Гаусса:

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x+kT)^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{T} \theta_3\left(\frac{\pi x}{T}, q_1\right), \quad x \in \mathbb{R},\tag{2.2}$$

где $T > 0$, $q_1 = \exp(-2\pi^2\sigma^2/T^2)$. Соотношение (2.2) называется *формулой тета-преобразования* [4, 9]. Во-вторых, третья тета-функция нашла наиболее широкое применение в математической физике, например, в задачах о теплопроводности [14], [16, (20.13)]. В-третьих, все тета-функции выражаются друг через друга с помощью операции сдвига аргумента, поэтому перенести полученные далее результаты на этот случай не составит никакого труда [16, (20.2.10)–(20.2.14)].

Перейдем к более строгой постановке задачи. Рассматривается пространство $L_2[0, 2\pi]$ комплекснозначных функций. Скалярное произведение и связанная с ним норма задаются стандартным образом:

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad \|f\| = \sqrt{(f, f)}.$$

Здесь $\overline{g(x)}$ обозначает комплексное сопряжение функции $g(x)$.

Обозначим через $\varphi(x)$ 2π -периодическую функцию, с помощью которой будет строиться система равномерных сдвигов. В нашем случае это третья тета-функция Якоби

$$\varphi(x) = \theta_3\left(\frac{x}{2}, q\right), \quad 0 < q < 1. \quad (2.3)$$

Зададим некоторое натуральное число N . Тогда исследуемое семейство функций выглядит следующим образом:

$$\varphi_n(x) = \varphi(x - nh), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.4)$$

где $h = 2\pi/N$. Данное обозначение будет использовано и во всех дальнейших формулах. Такой выбор параметра сдвига h продиктован желанием получить конструкцию, напоминающую по своим свойствам дискретное преобразование Фурье (ДПФ) [1, гл. 4].

Если $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ — некоторый заданный набор значений, то его прямое ДПФ мы определим следующим образом:

$$\hat{f}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} f_m e^{-ikmh}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Обратное ДПФ тогда имеет вид:

$$f_m = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}_k e^{ikmh}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Отметим одно важное свойство ДПФ — равенство Парсеваля, так как оно потребуется нам в дальнейшем:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{f}_k|^2 = \sum_{m=0}^{N-1} |f_m|^2.$$

Также для удобства будем полагать, что исходный набор значений и его ДПФ периодизированы:

$$f_{m+N} = f_m, \quad \hat{f}_{k+N} = \hat{f}_k.$$

Начнем с задачи об интерполяции. Пусть задана 2π -периодическая функция $f(x)$. Требуется построить интерполирующую функцию

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \varphi(x - nh)$$

с некоторыми коэффициентами c_n , значения которой совпадают с соответствующими значениями $f(x)$ в точках $x_m = mh$, $n = 0, 1, \dots, N-1$. Отметим, что в силу периодичности $f(x)$ и $\varphi(x)$ они будут совпадать также и в точке $x = Nh = 2\pi$. Для решения этой задачи удобно использовать вспомогательную конструкцию под названием узловая функция.

Определение 2.1. Функция $\tilde{\varphi}(x)$, являющаяся линейной комбинацией сдвигов $\varphi(x)$ вида

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \varphi(x - nh),$$

называется *узловой функцией*, если для нее выполнена система равенств

$$\tilde{\varphi}(mh) = \delta_{0,m}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.5)$$

где $\delta_{0,m}$ — символ Кронекера.

Из определения 2.1 видно, что узловая функция также будет периодической с тем же периодом, что и $\varphi(x)$. Если узловая функция известна, то решение интерполяционной задачи тогда легко построить следующим образом:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nh) \tilde{\varphi}(x - nh).$$

Рассмотрим теперь другой подход к представлению функций в виде суммы равномерных сдвигов. Пусть требуется найти ортогональную проекцию некоторой функции $f(x) \in L_2[0, 2\pi]$ на подпространство, образованное $\varphi(x - nh)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$. Одним из способов решения данной задачи является построение биортогональной системы [7, гл. 1], [3, гл. 1]. Ниже дано соответствующее определение, причем оно сразу адаптировано для рассматриваемого частного случая.

Определение 2.2. Два набора функций $\varphi(x - nh)$ и $\psi_n(x)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$ образуют *биортогональную систему*, если они удовлетворяют следующему условию ортогональности:

$$(\varphi(\cdot - mh), \psi(\cdot - nh)) = \delta_{m,n}, \quad m, n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Поскольку мы имеем дело с семейством сдвигов, для получения биортогональной системы достаточно построить всего одну функцию $\psi_0(x)$, которую в дальнейшем мы будем обозначать просто $\psi(x)$. После этого остается только положить $\psi_n(x) = \psi(x - nh)$, $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

Для оценки устойчивости процедуры разложения в ряд по неортогональным системам функций часто применяются константы Рисса [9, гл. 3], [11, гл. 3].

Определение 2.3. Набор функций $\varphi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ называется *системой Рисса* в $L_2[0, 2\pi]$, если $\forall c = \{c_n\}$ таких, что

$$\sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 = 1,$$

выполняются неравенства

$$A \leq \left\| \sum_{n=0}^{N-1} c_n \varphi_n \right\|^2 \leq B,$$

где $0 < A, B < \infty$ — постоянные, именуемые *константами Рисса*.

Введем обозначения $A_R = \sup\{A\}$ и $B_R = \inf\{B\}$. Для ортонормированных систем функций $A_R = B_R = 1$. Если функции линейно зависимы, то $A_R = 0$. Ключевую роль играет отношение B_R/A_R . Это, по сути, число обусловленности матрицы Грама, построенной с помощью попарных скалярных произведений функций $\varphi_n(x)$. Чем ближе оно к 1, тем быстрее сходятся итерационные алгоритмы разложения. Также величина B_R/A_R косвенно показывает чувствительность алгоритмов к малым изменениям входных данных [11, гл. 3].

3. УЗЛОВАЯ ФУНКЦИЯ

Хотя мы имеем дело с конечным набором целочисленных сдвигов одной функции, узловая функция представляется в виде бесконечного ряда Фурье. В этом состоит отличие от процедуры ДПФ.

Теорема 3.1. *Функция*

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{\theta_3\left(\frac{\pi k}{N}, q_1\right)} e^{ikx},$$

где $q = \exp(-1/(2\sigma^2))$, $q_1 = \exp(-2\pi^2\sigma^2/N^2)$, $\sigma > 0$, является узловой для набора точек $x_m = mh$, $m = 0, 1, \dots, N - 1$.

Доказательство. Будем искать $\tilde{\varphi}(x)$ в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \varphi(x - nh),$$

где d_n — неопределенные коэффициенты. Запишем данное выражение в форме ряда Фурье. Для этого подставим в него явный вид третьей тета-функции Якоби:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \theta_3 \left(\frac{x - nh}{2}, q \right) = \sum_{n=0}^{N-1} d_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{ik(x-nh)}.$$

Затем поменяем порядок суммирования:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{ikx} \left(\sum_{n=0}^{N-1} d_n e^{-iknh} \right).$$

Выражение в скобках представляет собой не что иное, как $\sqrt{N} \hat{d}_k$. С учетом этого имеем:

$$\tilde{\varphi}(x) = \sqrt{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{d}_k q^{k^2} e^{ikx}. \quad (3.1)$$

Зная $\hat{d}_k$, всегда можно найти и d_n , выполнив обратное ДПФ. Поэтому в дальнейшем основной целью является нахождение $\hat{d}_k$.

Чтобы функция $\tilde{\varphi}(x)$ являлась узловой, она должна удовлетворять набору соотношений (2.5). Это приводит к следующей системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов $\hat{d}_k$:

$$\tilde{\varphi}(mh) = \sqrt{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{d}_k q^{k^2} e^{ikmh} = \delta_{0,m}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Придадим этой формуле структуру ДПФ с помощью замены $k = Np + n$ и сведения однократной суммы к двойной:

$$\tilde{\varphi}(mh) = \sqrt{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \hat{d}_{Np+n} q^{(Np+n)^2} e^{-i(Np+n)mh}.$$

Поскольку $\hat{d}_{Np+n} = \hat{d}_n$, $e^{-iNpnh} = e^{-i2\pi pm} = 1$, имеем:

$$\tilde{\varphi}(mh) = \sqrt{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{d}_n \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} q^{(Np+n)^2} \right) e^{-inmh} = \sqrt{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{d}_n \alpha_n e^{-inmh},$$

где

$$\alpha_n = \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} q^{(Np+n)^2} \right).$$

Коэффициенты α_n можно выразить через третью тета-функцию Якоби. Для этого сделаем подстановку $q = \exp(-1/(2\sigma^2))$, $\sigma > 0$ и воспользуемся формулой тета-преобразования, положив в ней $T = N$:

$$\alpha_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp \left(-\frac{(pN+n)^2}{2\sigma^2} \right) = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{N} \theta_3 \left(\frac{\pi n}{N}, q_1 \right),$$

где $q_1 = \exp(-2\pi^2\sigma^2/N^2)$. В результате имеем следующий набор уравнений:

$$\tilde{\varphi}(mh) = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{d}_n \theta_3 \left(\frac{\pi n}{N}, q_1 \right) e^{-inmh} = \delta_{0,m}.$$

Чтобы найти $\hat{d}_n$, осталось только применить обратное ДПФ:

$$\hat{d}_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi N} \theta_3 \left(\frac{\pi n}{N}, q_1 \right)}.$$

Подставив это равенство в формулу (3.1), придем непосредственно к утверждению теоремы. $\square$

Замечание 3.1. Из четности третьей тета-функции следует, что

$$\frac{q^{k^2}}{\theta_3\left(\frac{\pi k}{N}, q_1\right)} = \frac{q^{(-k)^2}}{\theta_3\left(-\frac{\pi k}{N}, q_1\right)}.$$

Отсюда узловая функция может быть записана в виде

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\theta_3(0, q_1)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{\theta_3\left(\frac{\pi k}{N}, q_1\right)} \cos kx \right).$$

4. БИОРТОГОНАЛЬНАЯ СИСТЕМА

Как следует из доказываемой ниже теоремы, формулы для узловой функции и для функции, порождающей биортогональную систему, отличаются только параметром q и нормировочной константой.

Теорема 4.1. Пусть $\varphi(x)$ задается формулой (2.3), а $\psi(x)$ определяется выражением

$$\psi(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{3/2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{\theta_3\left(\frac{\pi k}{N}, q_1\right)} e^{ikx},$$

где $q = \exp(-1/(4\sigma^2))$, $q_1 = \exp(-2\pi^2\sigma^2/N^2)$, $\sigma > 0$. Тогда функции $\varphi(x - nh)$ и $\psi(x - nh)$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ образуют биортогональную систему.

Доказательство. Будем искать функцию

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \varphi(x - nh),$$

где s_n — неопределенные коэффициенты, удовлетворяющую условию ортогональности

$$(\varphi(\cdot - mh), \psi) = \delta_{0,m}, \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 3.1, представим $\psi(x)$ в виде ряда Фурье:

$$\psi(x) = \sqrt{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{s}_k q^{k^2} e^{ikx}. \quad (4.1)$$

Запишем условие ортогональности в терминах коэффициентов Фурье $\sqrt{N}\hat{s}_k q^{k^2}$ и $q^{k^2} e^{-ikmh}$ функций $\psi(x)$ и $\varphi(x - mh)$, соответственно:

$$(\varphi(\cdot - mh), \psi) = 2\pi\sqrt{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{s}_k} q^{2k^2} e^{-ikmh} = \delta_{0,m}.$$

Приведем эту формулу к двойной сумме с помощью замены $k = Np + n$:

$$\begin{aligned} (\varphi(\cdot - mh), \psi) &= 2\pi\sqrt{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \overline{\hat{s}_{Np+n}} q^{2(Np+n)^2} e^{-i(Np+n)mh} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\hat{s}_n} \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} q^{2(Np+n)^2} \right) e^{-inmh} = \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\hat{s}_n} \beta_n e^{-inmh}, \end{aligned}$$

где

$$\beta_n = \left(\sum_{p=-\infty}^{\infty} q^{2(Np+n)^2} \right).$$

Коэффициенты β_n , как и α_n ранее, могут быть выражены через третью тета-функцию Якоби. Если ввести обозначение $q = \exp(-1/(4\sigma^2))$, то соответствующая формула будет иметь вид:

$$\beta_n = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{N} \theta_3\left(\frac{\pi n}{N}, q_1\right),$$

где $q_1 = \exp(-2\pi^2\sigma^2/N^2)$. В результате имеем набор уравнений:

$$\sigma(2\pi)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\widehat{s}_n} \theta_3\left(\frac{\pi n}{N}, q_1\right) e^{-imnh} = \delta_{0,m}.$$

Для завершения доказательства осталось применить обратное ДПФ:

$$\overline{\widehat{s}_n} = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{3/2} \sqrt{N} \theta_3\left(\frac{\pi n}{N}, q_1\right)},$$

заметить, что $\widehat{s}_n \in \mathbb{R}$, и подставить результат в (4.1). $\square$

5. КОНСТАНТЫ РИССА

Теорема 5.1. *Набор функций $\varphi_n(x) = \varphi(x - nh)$, $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$, где $\varphi(x)$ задается формулой (2.3), образует систему Рисса с точными константами*

$$A_R = \sigma(2\pi)^{3/2} \theta_3\left(\frac{\pi}{N} \left[\frac{N}{2}\right], q_1\right), \quad B_R = \sigma(2\pi)^{3/2} \theta_3(0, q_1),$$

где $q_1 = \exp(-2\pi^2\sigma^2/N^2)$, а $[N/2]$ — целая часть $N/2$.

Доказательство. Для оценки констант Рисса рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \varphi_n(x).$$

Подставим сюда явный вид $\varphi_n(x)$, используя формулы (2.1), (2.3) и (2.4):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2} e^{ik(x-nh)}.$$

Поменяв суммы местами, в результате получаем ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikx}$$

с коэффициентами

$$d_k = q^{k^2} \sum_{n=0}^{N-1} c_n e^{-iknh}.$$

Запишем сумму в последней формуле через ДПФ:

$$d_k = \sqrt{N} q^{k^2} \widehat{c}_k.$$

Здесь предполагается, что $\widehat{c}_{k+N} = \widehat{c}_k$.

Требуется получить точную оценку вида

$$A_R \leq \|f\|^2 \leq B_R$$

на сфере

$$\sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 = 1.$$

С этой целью воспользуемся равенством Парсеваля для рядов Фурье:

$$\|f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_k|^2 = 2\pi N \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{2k^2} |\widehat{c}_k|^2.$$

Преобразуем полученную сумму:

$$\|f\|^2 = 2\pi N \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=mN}^{mN+N-1} q^{2k^2} |\widehat{c}_k|^2.$$

Сделаем замену индекса $k = p + mN$, а также поменяем порядок суммирования

$$\|f\|^2 = 2\pi N \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2(p+mN)^2} |\hat{c}_p|^2.$$

Здесь учтено, что $\hat{c}_{k+N} = \hat{c}_k$. В результате имеем

$$\|f\|^2 = 2\pi N \sum_{p=0}^{N-1} \beta_p |\hat{c}_p|^2,$$

где

$$\beta_p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{2(p+mN)^2}.$$

В силу равенства Парсеваля для ДПФ

$$\sum_{p=0}^{N-1} |\hat{c}_p|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 = 1.$$

Кроме того, ДПФ дает взаимно однозначное отображение. Отсюда можно сделать вывод, что

$$A_R = 2\pi N \min_{p=0,1,\dots,N-1} \beta_p, \quad B_R = 2\pi N \max_{p=0,1,\dots,N-1} \beta_p.$$

Для завершения доказательства осталось записать β_p через третью тета-функцию Якоби и заметить, что $\theta_3(x, q)$ на вещественной оси не обращается в нуль, достигает минимального значения в точке $x = \pi/2$, а максимального при $x = 0$ (см. [4, 6, 16]). $\square$

6. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Результат, полученный в теореме 3.1, позволяет построить целое семейство узловых функций на основе бесконечных тригонометрических рядов, не используя ядро Дирихле. Свойства этого семейства могут регулироваться при помощи двух параметров σ и N , которые могут уменьшать влияние комплексных экспонент с высокими частотами. Это может быть использовано для одновременной процедуры интерполяции и фильтрации.

Теорема 4.1 дает аналитический способ аппроксимации при помощи сдвигов тета-функции Якоби. Причем и здесь есть параметры σ и N , влияющие на данную процедуру. Их можно подобрать таким образом, чтобы изменение числа узлов не меняло исходной тета-функции. Возможность использования семейства сдвигов тета-функции обосновывается теоремой 5.1. Отношение констант Рисса в случае четного числа узлов совпадает с тем же отношением для системы целочисленных сдвигов функции Гаусса, а в случае нечетного — не больше [6].

В качестве примеров применения систем сдвигов из тета-функций при численном решении дифференциальных уравнений можно указать работы [10, 13]. При задании разностных аналогов дифференциальных операторов можно использовать технику эрмитовой интерполяции [2]. В указанной работе рассматривается система равномерных сдвигов функции Гаусса, домноженных на тригонометрические полиномы невысоких степеней. Замена тригонометрических функций тета-функциями позволит улучшить локализацию базисных функций.

В работе [5] изучена скорость убывания коэффициентов, задающих узловую функции для системы сдвигов функции Гаусса на всей оси. Эти результаты с помощью процедуры периодизации легко переносятся на случай системы сдвигов тета-функции, что позволит, следуя технике [12], провести оптимизацию по параметрам требуемых свойств узловых функций и биортогональных систем.

Следует отметить, что полученные с помощью аналитических соотношений факты для конкретных функций далеко не всегда можно получить с помощью общих свойств систем целочисленных сдвигов. Приведем два примера. В работе [6] показано, что коэффициенты, задающие узловую функцию для системы сдвигов функции Гаусса, знакопереваются и монотонно убывают по модулю. Аналогичные же коэффициенты для системы сдвигов функции Лоренца имеют постоянный знак, начиная с некоторого номера. При этом обе функции используются при описании атомных спектров. В работе [4] показано, что коэффициенты, задающие узловую функцию для

системы сдвигов функции Гаусса, и константы Рисса для биортогональных систем очень быстро растут с увеличением параметра σ . Критическим при расчетах на компьютере с обычной точностью является уже значение $\sigma = 2$. Поэтому точные формулы играют важную роль при оценке используемых приближенных методов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Наука, 1987.
2. Жаданова М. Л., Киселев Е. А., Новиков И. Я., Ушаков С. Н. Эрмитова интерполяция с помощью оконных систем, порожденных равномерными сдвигами функции Гаусса // Мат. заметки. — 2023. — 114, № 6. — С. 936–939.
3. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. — М.: Изд-во АФЦ, 1999.
4. Киселев Е. А., Минин Л. А., Новиков И. Я., Ситник С. М. О константах Рисса для некоторых систем целочисленных сдвигов // Мат. заметки. — 2014. — 96, № 2. — С. 239–250.
5. Киселев Е. А., Минин Л. А., Новиков И. Я., Ушаков С. Н. Локализация оконных функций двойственных и жестких фреймов Габора, порожденных функцией Гаусса // Мат. сб. — 2024. — 215, № 3. — С. 80–99.
6. Минин Л. А., Ситник С. М., Ушаков С. Н. Поведение коэффициентов узловых функций, построенных из равномерных сдвигов функций Гаусса и Лоренца // Науч. вед. БелГУ. Сер. Мат. Физ. — 2014. — 183, № 12. — С. 214–217.
7. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. Теория всплесков. — М.: Физматлит, 2005.
8. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного Анализа. Ч. 2. Трансцендентные функции. — М.: Физматлит, 1963.
9. Чуи Ч. Введение в вейвлеты. — М.: Мир, 2001.
10. Boyd J. P., Xiao J. Periodized radial basis functions. I: Theory // Appl. Numer. Math. — 2013. — 86. — С. 43–73.
11. Christensen O. An introduction to frames and Riesz bases. — Basel: Birkhäuser/Springer, 2016.
12. Faulhuber M., Steinerberger S. Maximal polarization for periodic configurations on the real line // Int. Math. Res. Not. IMRN. — 2024. — С. 1–30.
13. Hubbert S., Mueller S. Interpolation with circular basis functions // Numer. Algorithms. — 2006. — 42, № 1. — С. 75–90.
14. Lawden D. F. Elliptic functions and applications. — New York: Springer, 1989.
15. Maz'ya V., Schmidt G. Approximate approximations. — New York: Am. Math. Soc., 2007.
16. Olver F. W. J., Lozier D. W., Boisvert R. F., Clark C. W. NIST handbook of mathematical functions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
17. Schlumprecht Th., Sivakumar N. On the sampling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian // J. Approx. Theory. — 2009. — 151, № 1. — С. 128–153.

М. Л. Жаданова

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: masha.minina97@mail.ru

UDC 517.583 + 519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-575-585

EDN: VZNTSH

Interpolation of periodic functions and construction of biorthogonal systems using uniform shifts of the theta function

M. L. Zhadanova

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The problems of interpolation of periodic functions and construction of biorthogonal systems are considered. Uniform shifts of the third Jacobi theta function are used as a basis. Explicit formulas for the nodal function and the function generating the biorthogonal system are obtained. Exact values of the lower and upper Riesz constants are found.

Keywords: periodic function, biorthogonal system, interpolation, theta function, integer shift, nodal function, Riesz constant.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: M. L. Zhadanova, “Interpolation of periodic functions and construction of biorthogonal systems using uniform shifts of the theta function,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 575–585. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-575-585>

REFERENCES

1. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobel'kov, *Chislennye metody* [Numerical Methods], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
2. M. L. Zhadanova, E. A. Kiselev, I. Ya. Novikov, and S. N. Ushakov, “Ermitova interpolatsiya s pomoshch'yu okonnykh sistem, porozhdennykh ravnomernymi sdvigami funktsii Gaussa” [Hermitian interpolation using window systems generated by uniform shifts of the Gaussian function], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **114**, No. 6, 936–939 (in Russian).
3. B. S. Kashin and A. A. Saakyan, *Ortogonal'nye ryady* [Orthogonal Series], AFTs, Moscow, 1999 (in Russian).
4. E. A. Kiselev, L. A. Minin, I. Ya. Novikov, and S. M. Sitnik, “O konstantakh Rissa dlya nekotorykh sistem tselochislennykh sdvigoov” [On Riesz constants for some systems of integer shifts], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2014, **96**, No. 2, 239–250 (in Russian).
5. E. A. Kiselev, L. A. Minin, I. Ya. Novikov, and S. N. Ushakov, “Lokalizatsiya okonnykh funktsiy dvoystvennykh i zhestkikh freymov Gabora, porozhdennykh funktsiei Gaussa” [Localization of window functions of dual and rigid Gabor frames generated by a Gaussian function], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2024, **215**, No. 3, 80–99 (in Russian).
6. L. A. Minin, S. M. Sitnik, and S. N. Ushakov, “Povedenie koeffitsientov uzlovykh funktsiy, postroennykh iz ravnomernykh sdvigoov funktsiy Gaussa i Lorentsa” [Behavior of the coefficients of nodal functions constructed from uniform shifts of Gaussian and Lorentzian functions], *Nauch. ved. BelGU. Ser. Mat. Fiz.* [Sci. Bull. Belgorod State Univ. Ser. Math. Phys.], 2014, **183**, No. 12, 214–217 (in Russian).
7. I. Ya. Novikov, V. Yu. Protasov, and M. A. Skopina, *Teoriya vspleskov* [Wavelet Theory], Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).
8. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Kurs sovremennogo Analiza. Ch. 2. Transtsendentnye funktsii* [A Course of Modern Analysis. Part 2: Transcendental Functions], Fizmatlit, Moscow, 1963 (Russian translation).



9. Ch. Chui, *Vvedenie v veyvlety* [An Introduction to Wavelets], Mir, Moscow, 2001 (Russian translation).
10. J. P. Boyd and J. Xiao, “Periodized radial basis functions. I: Theory,” *Appl. Numer. Math.*, 2013, **86**, 43–73.
11. O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*, Birkhäuser/Springer, Basel, 2016.
12. M. Faulhuber and S. Steinerberger, “Maximal polarization for periodic configurations on the real line,” *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2024, 1–30.
13. S. Hubbert and S. Mueller, “Interpolation with circular basis functions,” *Numer. Algorithms*, 2006, **42**, No. 1, 75–90.
14. D. F. Lawden, *Elliptic functions and applications*, Springer, New York, 1989.
15. V. Maz’ya and G. Schmidt, *Approximate approximations*, Am. Math. Soc., New York, 2007.
16. F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, and C. W. Clark, *NIST handbook of mathematical functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010.
17. Th. Schlumprecht and N. Sivakumar, “On the sampling and recovery of bandlimited functions via scattered translates of the Gaussian,” *J. Approx. Theory*, 2009, **151**, No. 1, 128–153.

M. L. Zhadanova

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: masha.minina97@mail.ru