Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 4 (2024). С. 561–574
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.518
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-561-574
EDN: VXYWFZ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ В ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ МОРРИ

Д. Дж. Джосеф

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. В статье представлен подробное изложение неравенства Бернштейна, неравенств разных метрик и разных размерностей для тригонометрических полиномов в периодических пространствах Морри.

Ключевые слова: пространства Морри, неравенство Бернштейна, тригонометрические полиномы.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Д. Дж. Джосеф.* Интегральные неравенства для тригонометрических многочленов в периодических пространствах Морри// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 4. С. 561–574. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-561-574

1. Введение

Определение 1.1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}_0$. Обозначим через $\mathfrak{M}^*_\mu(\mathbb{R}^n)$ множество всех тригонометрических многочленов порядка, не превышающего μ по каждой переменной:

$$T_\mu(x) = T_\mu(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{-\mu \leqslant k_j \leqslant \mu \\ j=1,\dots,n}} c_{k_j} e^{ik\cdot x} = \sum_{-\mu \leqslant k_1 \leqslant \mu} \cdots \sum_{-\mu \leqslant k_n \leqslant \mu} c_{k_1,\dots,k_n} e^{i(k_1x_1 + \dots k_nx_n)}, \tag{1.1}$$

где $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $c_{k_1,\dots,k_n} \in \mathbb{C}$ — постоянные коэффициенты, такие что $c_{-k} = \bar{c}_k$ (при этом $T_\mu(x) \in \mathbb{R}$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$).

Пусть далее $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Снабдим линейное пространство $\mathfrak{M}^*_\mu(\mathbb{R}^n)$ нормой

$$\|f\|^*_{L_p} = \|f\|_{L_p(Q(0,\pi))} < \infty, \tag{1.2}$$

где $Q(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x_j - y_j| < r, j = 1, \dots, n\}$. Обозначим получившееся нормированное пространство через $\mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$.

В книге [3] доказаны следующие неравенства для тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$.

1. (*неравенство Бернштейна*) Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{\partial T_\mu}{\partial x_j} \right\|^*_{L_p} \leqslant \mu \|T_\mu\|^*_{L_p}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

2. (*неравенство разных метрик*) Пусть $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\|T_\mu\|^*_{L_q} \leqslant 3^n \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_\mu\|^*_{L_p}. \tag{1.4}$$

3. (*неравенство разных измерений*) Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant m < n$, $x = (u, v)$, $u = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $v = (x_{m+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m}$, тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$\Big\| \|T_\mu(u,v)\|_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})} \Big\|^*_{L_{p,u}(\mathbb{R}^m)} \leqslant 3^{n-m} \mu^{\frac{n-m}{p}} \|T_\mu\|^*_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \tag{1.5}$$

в частности,

$$\|T_\mu(u,0)\|^*_{L_p(\mathbb{R}^m)} \leqslant 3^{n-m} \mu^{\frac{n-m}{p}} \|T_\mu\|^*_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.6}$$

Неравенства (1.4)–(1.6) были доказаны в книге [3] с помощью эквивалентной нормы $((T_\mu))^*_{L_p}$, определяемой следующим образом: пусть

$$1 \leqslant p \leqslant \infty,\ x_{k_i} = k_i \frac{2\pi}{N}, N \in \mathbb{N},\ k_i \in 1, \dots, N, i = 1, \dots, n$$

$$((T_\mu))^*_{L_p} = \max_{u \in Q(0,\pi)} \left(\left(\frac{2\pi}{N}\right)^n \sum_{k_1=1}^{N} \cdots \sum_{k_n=1}^{N} |T_\mu(x_{k_1} - u_1, \dots, x_{k_n} - u_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.7}$$

Неравенства (1.4)–(1.6) можно также доказать, используя представления тригонометрических многочленов в виде свертки его с некоторым ядром, см., например, книгу [7], где используется представление в виде свертки с ядром Валле-Пуссена $\mathfrak{V}_\mu$:

$$T_\mu = \mathfrak{V}_\mu * T_\mu. \tag{1.8}$$

Целью настоящей работы является доказательство аналогичных неравенств в случае, когда пространство $(L_p)^*$ заменено на периодическое пространство Морри $(M_p^\lambda)^*$. Для их доказательства будут использованы оба подхода. Основные результате этой работы были сформулированы без доказательства в заметке [5].

Отметим также, что неравенство Бернштейна, неравенства разных метрик и разных измерений для целых функций экспоненциального типа для пространств $L_p(\mathbb{R}^n)$ доказаны С. М. Никольским [3], а для пространств Морри M_p^λ — в работах [1, 4].

2. Периодические пространства Морри $(M_p^\lambda)^*$

Пространства $M_p^\lambda(\mathbb{R}^n)$, называемые теперь пространствами Морри, были впервые рассмотрены Чарльзом Морри [6] в связи с исследованием регулярности решений дифференциальных уравнений с частными производными. Их периодический аналог был рассмотрен в [2].

Определение 2.1 (см. [2])**.** Пусть $0 < p \leqslant \infty$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{n}{p}$, тогда функция $f \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$, если она имеет период 2π, измерима по Лебегу на $\mathbb{R}^n$ и

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} = \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0 < r \leqslant \pi} r^{-\lambda} \|f\|_{L_p(Q(x,r))} < \infty. \tag{2.1}$$

Отметим некоторые свойства этих пространств.

1. Из определения сразу видно, что при $\lambda = 0$

$$\|f\|^*_{M_p^0} = \|f\|^*_{L_p}.$$

2. При $\lambda = \dfrac{n}{p}$

$$\|f\|^*_{M_p^{\frac{n}{p}}} = \|f\|^*_{L_\infty}.$$

3. Если $\lambda < 0$ или $\lambda > \dfrac{n}{p}$, то пространства $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$ состоят только из функций, эквивалентных 0 на $\mathbb{R}^n$.

4. Отметим, что пространство $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$ обладает свойством монотонности по параметру λ:

$$(M_p^\mu)^* \subset (M_p^\lambda)^*, \quad 0 \leqslant \lambda < \mu \leqslant \frac{n}{p}, \quad 0 < p < \infty. \tag{2.2}$$

Действительно,

$$\|g\|^*_{M_p^\lambda} = \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(Q(x,r))} =$$
$$= \pi^{-\lambda} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leqslant\pi} \left(\frac{\pi}{r}\right)^\lambda \|f\|_{L_p(Q(x,r))} \leqslant$$
$$\leqslant \pi^{-\lambda} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leqslant\pi} \left(\frac{\pi}{r}\right)^\mu \|f\|_{L_p(Q(x,r))} =$$
$$= \pi^{\mu-\lambda} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\mu}\|f\|_{L_p(Q(x,r))} = \pi^{\mu-\lambda}\|f\|^*_{M_p^\mu},$$

следовательно,

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} \leqslant \pi^{\mu-\lambda}\|f\|^*_{M_p^\mu}. \tag{2.3}$$

5. В [2] доказано, что для любых $p > 0$ и $f \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} = \|f\|^{**}_{M_p^\lambda} \equiv \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\|f\|^*_{L_p(Q(x,r))}. \tag{2.4}$$

6. Инвариантность относительно сдвига: для любых $f \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|f(y+h)\|^*_{M_p^\lambda} = \|f(y)\|^*_{M_p^\lambda} \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Действительно,

$$\|f(y+h)\|^*_{M_p^\lambda} = \|f(y+h)\|^{**}_{M_p^\lambda} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\|f(y+h)\|^*_{L_p(Q(x,r))} =$$
$$\overset{(z=y+h)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\|f(z)\|^*_{L_p(Q(x+h,r))} =$$
$$\overset{(x+h=u)}{=} \sup_{u\in\mathbb{R}^n} \sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\|f(z)\|^*_{L_p(Q(u,r))} = \|f\|^*_{M_p^\lambda}.$$

7. $(M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n) \subset (L_p)^*(\mathbb{R}^n)$, причем для любых $f \in (M_p^\lambda)^*(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|^*_{L_p} \leqslant \pi^\lambda \|f\|^*_{M_p^\lambda}. \tag{2.6}$$

Действительно,

$$\|f\|^*_{M_p^\lambda} \geqslant \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda}\|f\|_{L_p(Q(0,r))} \geqslant \pi^{-\lambda} \sup_{0<r<\pi} \|f\|_{L_p(Q(0,r))} = \pi^{-\lambda}\|f\|_{L_p(Q(0,\pi))} = \pi^{-\lambda}\|f\|^*_{L_p}.$$

3. Неравенства для тригонометрических многочленов в пространствах $(M_p^\lambda)^*$

3.1. Неравенство Бернштейна. В одномерном случае интерполяционная формула для произвольного тригонометрического многочлена T_μ порядка $\mu \in \mathbb{N}$ имеет вид (см. [3]):

$$T'_\mu(x) = \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} (-1)^{k+1} \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}} T_\mu(x + x_k), \tag{3.1}$$

где x_k — нули многочлена $\cos(nx)$.

Если положить здесь $T_\mu(x) = \sin(\mu x)$ и $x = 0$, то получим

$$\mu = \frac{1}{4\mu} \sum_{k=1}^{2\mu} \frac{1}{\sin^2 \frac{x_k}{2}}. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Пусть Z^* — нормированное пространство периодических функций периода 2π по каждой переменной, причем норма $\|\cdot\|_Z^*$ инвариантна относительно сдвига, т. е. для любой функции $f \in Z^*$*

$$\|f(x+h)\|_Z^* = \|f\|_Z^* \quad \forall h \in \mathbb{R}^n. \tag{3.3}$$

Тогда для любых тригонометрических многочленов $T_\mu \in Z^*(\mathbb{R}^n)$ порядка $\mu \in \mathbb{N}$ по каждой переменной

$$\left\|\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}\right\|_Z^* \leqslant \mu \|T_\mu\|_Z^*, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Доказательство. Согласно формулам (3.1) и (3.2)

$$\|T'(x)\|_Z^* = \left\|\frac{1}{4\mu}\sum_{k=1}^{2\mu}(-1)^k \frac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}} T_\mu(x + x_k)\right\|_Z^* \leqslant \frac{1}{4\mu}\sum_{k=1}^{2\mu}\frac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}}\|T_\mu(x+x_k)\|_Z^* = \mu\|T(x)\|_Z^*.$$

В многомерном случае функция $T(x) = T(x_1, \ldots, x_n)$ при фиксированных $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$ является тригонометрическим многочленом по переменной x_j, поэтому в силу (3.1) имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{4\mu}\sum_{k=1}^{2\mu}(-1)^k \frac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}} T_\mu\Big(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + \frac{\pi}{\mu}\big(k - \frac{1}{2}\big), x_{j+1}, \ldots, x_n\Big) = \\ &= \frac{1}{4\mu}\sum_{k=1}^{2\mu}(-1)^k \frac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}} T_\mu\Big(x + \frac{\pi}{\mu}\big(k - \frac{1}{2}\big)e_j\Big), \quad x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned}$$

где $e_j = \underbrace{(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)}_{\text{j}}$. Следовательно, согласно (3.3)

$$\left\|\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}\right\|_Z^* \leqslant \frac{1}{4\mu}\sum_{k=1}^{2\mu}\frac{1}{\sin^2\frac{x_k}{2}}\left\|T_\mu\Big(x + \frac{\pi}{\mu}\big(k - \frac{1}{2}\big)e_j\Big)\right\|_Z^* = \mu\|T_\mu\|_Z^*.$$

□

Следствие 3.1. *Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$, тогда согласно* (2.5) $\forall T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$

$$\left\|\frac{\partial T_\mu}{\partial x_j}\right\|_{M_p^\lambda}^* \leqslant \mu\|T_\mu\|_{M_p^\lambda}^*, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.5}$$

3.2. Неравенство разных метрик для пространств Морри.

Определение 3.1. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$, $\mu, N \in \mathbb{N}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}_{\mu,p}^*(\mathbb{R}^n)$ и

$$((T_\mu))_{M_{p,N}^\lambda}^* = \sup_{x \in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\left(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \left|T_\mu\Big(x_1 + \frac{r}{N}k_1, \ldots, x_n + \frac{r}{N}k_n\Big)\right|^p\right)^{1/p}. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *Пусть $n = 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r > 0$, $x \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$, $x_k = x + \frac{r}{N}k$, $x_k < \xi_k < x_{k+1},$, $k = -N, \ldots, N-1$. Тогда для любых функций $f : Q(x, r) \to \mathbb{R}^n$ таких, что $f' \in L_p(Q(x, r))$*

$$\left|\left(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}|f(\xi_k)|^p\right)^{1/p} - \left(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}\left|f\Big(x + \frac{r}{N}k\Big)\right|^p\right)^{1/p}\right| \leqslant \frac{r}{N}\|f'\|_{L_p(Q(x,r))}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Положим $x_k = x + \frac{r}{N}k$, $k = -N, \ldots, N-1$. Применяя обратное неравенство треугольника и неравенство Гёльдера, получим, что

$$\left|\left(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}|f(\xi_k)|^p\right)^{1/p} - \left(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}|f(x_k)|^p\right)^{1/p}\right| =$$

$$= \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left| \left(\sum_{k=-N}^{N-1} |f(\xi_k)|^p\right)^{1/p} - \left(\sum_{k=-N}^{N-1} |f(x_k)|^p\right)^{1/p} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} |f(\xi_k) - f(x_k)|^p\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \left|\int\limits_{x_k}^{\xi_k} f'(t)dt\right|^p\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \left| \left(\int\limits_{x_k}^{\xi_k} |f'(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_{x_k}^{\xi_k} dt\right)^{1/p'} \right|^p\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \left| \left(\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} dt\right)^{1/p'} \right|^p\right)^{1/p} =$$

$$= \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \left| \left(\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(t)|^p dt\right)^{1/p} \left(\frac{r}{N}\right)^{1/p'} \right|^p\right)^{1/p} =$$

$$= \frac{r}{N} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t)|^p dt\right)^{1/p} = \frac{r}{N} \|f'\|_{L_p(Q(x,r))}.$$

□

Лемма 3.2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r > 0$, $N \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — *измеримая,* 2π*-периодическая функция по каждой переменной такая, что*

$$\sup_{x \in Q(0,\pi)} \left(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(x_1 + \frac{r}{N}k, \ldots, x_n + \frac{r}{N}k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{3.8}$$

Тогда

$$\sup_{x \in Q(0,\pi)} \|f\|_{L_p(Q(0,r))} \leqslant \sup_{x \in Q(0,\pi)} \left(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(x_1, \ldots, x_n) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Действительно, при $n = 1$

$$\sup_{-\pi<x<\pi} \|f\|_{L_p(x-r,x+r)} = \sup_{-\pi<x<\pi} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \int\limits_{x+\frac{r}{N}k}^{x+\frac{r}{N}(k+1)} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\{t = x + \frac{r}{N}k + \tau\} = \sup_{-\pi<x<\pi} \left(\sum_{k=-N}^{N-1} \int\limits_0^{\frac{r}{N}} \left| f(x + \frac{r}{N}k + \tau) \right|^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{-\pi<x<\pi} \left(\sup_{0<\tau<\frac{r}{N}} \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(x + \frac{r}{N}k + \tau) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\{y = x + \tau\} = \sup_{-\pi<x<\pi} \left(\sup_{x<y<x+\frac{r}{N}} \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(y + \frac{r}{N}k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sup_{-\pi<y<\pi+\frac{r}{N}} \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(y + \frac{r}{N}k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\{\text{в силу } 2\pi\text{-периодичности } f\} = \left(\sup_{-\pi<y<\pi} \frac{r}{N} \sum_{k=-N}^{N-1} \left| f(y+\frac{r}{N}k)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.10)$$

Многомерный случай следует n-кратным применением одномерного случая. □

Лемма 3.3. *Пусть* $n = 1, N, \mu \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{p}$, *тогда для любых* $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R})$ *имеет место неравенство*

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda} \leqslant ((T_\mu))^*_{M^\lambda_{p,N}} \leqslant (1+\frac{\pi}{N}\mu)\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}. \quad (3.11)$$

Доказательство. Пусть $r>0$, $k=-N,\dots,N-1$, $u \in Q(0,\pi)$, $x_k = x+\frac{r}{N}k-u$ и $x_k<\xi_k<x_{k+1}$, таковы, что

$$\int\limits_{x-r}^{x+r} |T_\mu(y)|^p dy = \sum_{k=-N}^{N-1} \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} |T_\mu(y)|^p dy = \frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}|T_\mu(\xi_k)|^p. \quad (3.12)$$

Согласно лемме 3.1, неравенству Бернштейна для пространств $(M_p^\lambda)^*$ и равенству (3.12)

$$\sup_{-\pi<x<\pi}\sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\left(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}|T_\mu(x_k)|^p\right)^{1/p} =$$

$$= \sup_{-\pi<x<\pi}\sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\left[\left(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}|T_\mu(x_k)|^p\right)^{1/p} - \left(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}|T_\mu(\xi_k)|^p\right)^{1/p} + \left(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}|T_\mu(\xi_k)|^p\right)^{1/p}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{-\pi<x<\pi}\sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\left[\frac{r}{N}\|T'_\mu\|_{L_p(Q(x,r))} + \left(\frac{r}{N}\sum_{k=-N}^{N-1}|T_\mu(\xi_k)|^p\right)^{1/p}\right] =$$

$$= \sup_{-\pi<x<\pi}\sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\left[\frac{\pi}{N}\|T'_\mu\|_{L_p(Q(x,r))} + \|T_\mu\|_{L_p(x-r,x+r)}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{N}\|T'_\mu\|^*_{M_p^\lambda} + \|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda} = (1+\frac{\pi}{N}\mu)\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}.$$

Доказательство левого неравенства (3.11) следует непосредственно из леммы 3.2. □

Теорема 3.2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $n, \mu, N \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n}{p}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$, *тогда имеет место неравенство*

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda} \leqslant ((T_\mu))^*_{M^\lambda_{p,N}} \leqslant (1+\frac{\pi}{N}\mu)^n\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}. \quad (3.13)$$

Доказательство. Согласно лемме 3.2

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda} = \sup_{x\in Q(0,\pi)}\sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\left(\int\limits_{x_1-r}^{x_1+r}\cdots\int\limits_{x_n-r}^{x_n+r}|T_\mu(x_1\dots x_n)|^p dx_1\dots dx_n\right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in Q(0,\pi)}\sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\left(\left(\frac{r}{N}\right)^n\sum_{k_1=-N}^{N-1}\cdots\sum_{k_n=-N}^{N-1}|T_\mu(x_1+\frac{r}{N}k_1\dots x_n+\frac{r}{N}k_n)|^p du\right)^{1/p} = ((T_\mu))^*_{M^\lambda_{p,N}},$$

этим доказано первое неравенство.

Докажем второе неравенство (3.13) по индукции. При $n=1$ оно было доказано в лемме 3.3. Пусть $n>1$. Допустим теперь, что оно верно для $n-1$. Зафиксируем x_1, тогда функция T по-прежнему будет тригонометрической по $x_2\dots x_n$ и верно неравенство

$$(1+\frac{\pi}{N}\mu)^{p(n-1)}\sup_{x\in Q(0,\pi)}\sup_{0<r<\pi} r^{-p\lambda}\int\limits_{x_2-r}^{x_2+r}\cdots\int\limits_{x_n-r}^{x_n+r}|T_\mu(x_1\dots x_n)|^p dx_2\dots dx_n \geqslant \quad (3.14)$$

$$\geqslant \sup_{x\in Q(0,\pi)}\sup_{0<r<\pi} r^{-p\lambda}\int\limits_{x_2-r}^{x_2+r}\cdots\int\limits_{x_n-r}^{x_n+r}|T_\mu(x_1\dots x_n)|^p dx_2\dots dx_n \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{r}{N}\right)^{n-1} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-p\lambda} \sum_{k_2=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} |T_\mu(x_1, x_{k_2} \dots x_{k_n})|^p. \tag{3.15}$$

Интегрируя (3.14)-(3.15) по x_1 и возводя в степень 1/p, получим что

$$(1+\frac{\pi}{N}\mu)^{n-1} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda}\Bigg(\int\limits_{x_1-r}^{x_1+r} \cdots \int\limits_{x_n-r}^{x_n+r} |T_\mu(x_1 \dots x_n)|^p dx_1 \dots dx_n\Bigg)^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n-1}{p}} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda}\Bigg(\sum_{k_2=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \int\limits_{x_1-r}^{x_1+r} |T_\mu(x_1, x_{k_2} \dots x_{k_n})|^p dx_1\Bigg)^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n-1}{p}} \frac{1}{(1+\frac{\pi}{N}\mu)} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda}\Bigg(\sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \int\limits_{x_1-r}^{x_1+r} |T_\mu(x_1, x_{k_1} \dots x_{k_n})|^p dx_1\Bigg)^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n-1}{p}} \frac{1}{(1+\frac{\pi}{N}\mu)} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda}\Bigg(\frac{\pi}{N}\sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} |T_\mu(x_1, x_{k_1} \dots x_{k_n})|^p\Bigg)^{1/p} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(1+\frac{\pi}{N}\mu)} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r<\pi} r^{-\lambda}\Bigg(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} |T_\mu(x_{k_1} \dots x_{k_n})|^p\Bigg)^{1/p}.$$

□

Лемма 3.4. *При* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ $n, \mu, N \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{n}{q}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$

$$((T_\mu))^*_{M_{q,N}^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \leqslant N^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}((T_\mu))^*_{M_{p,N}^\lambda}. \tag{3.16}$$

Доказательство. В силу неравенства Йенсена и определения 3.1:

$$((T_\mu))^*_{M_{q,N}^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} = \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-(\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\Bigg(\left(\frac{r}{N}\right)^n \times$$

$$\times \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \left|T_\mu\left(x_1+\frac{r}{N}k_1, \dots, x_n+\frac{r}{N}k_n\right)\right|^q\Bigg)^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-(\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n}{q}}\Bigg(\sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \left|T_\mu\left(x_1+\frac{r}{N}k_1, \dots, x_n+\frac{r}{N}k_n\right)\right|^p\Bigg)^{1/p} =$$

$$= \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-(\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))}\left(\frac{r}{N}\right)^{\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} \times$$

$$\times \Bigg(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \left|T_\mu\left(x_1+\frac{r}{N}k_1, \dots, x_n+\frac{r}{N}k_n\right)\right|^p\Bigg)^{1/p} =$$

$$= N^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \sup_{x\in Q(0,\pi)} \sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda}\Bigg(\left(\frac{r}{N}\right)^n \sum_{k_1=-N}^{N-1} \cdots \sum_{k_n=-N}^{N-1} \left|T_\mu\left(x_1+\frac{r}{N}k_1, \dots, x_n+\frac{r}{N}k_n\right)\right|^p\Bigg)^{1/p} =$$

$$= N^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}((T_\mu))^*_{M_{p,N}^\lambda}.$$

□

Теорема 3.3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $n\Big(\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}\Big) \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{n}{p}$, $T_\mu \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \leqslant (1+\pi)^n \mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}. \tag{3.17}$$

Доказательство. Для любого $N \in \mathbb{N}$

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \leqslant ((T_\mu))^*_{M_{q,N}^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \leqslant N^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}((T_\mu))^*_{M^\lambda_{p,N}} \leqslant N^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(1+\frac{\pi}{N}\mu)^n\|T_\mu\|^*_{M^\lambda_p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\mu}{N}\right)^{n(\frac{1}{q}-\frac{1}{p})}(1+\frac{\pi}{N}\mu)^n\mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M^\lambda_p}.$$

Полагая здесь $N=\mu$, получим неравенство (3.17). □

Рассмотрим свёртку функций $\varphi, g \in L_1(Q(0,\pi))$, 2π-периодических по каждой переменной:

$$(\varphi * g)(x) = \int\limits_{Q(0,\pi)} \varphi(x-y)g(y)dy,\ x\in\mathbb{R}^n. \tag{3.18}$$

Напомним, что $\forall k\in\mathbb{Z}^n$:

$$c_k(\varphi * g) = (2\pi)^n c_k(\varphi)c_k(g). \tag{3.19}$$

Если $c_k(\varphi)=(2\pi)^{-n}$ для $k\in\mathbb{Z}^n$, для которых $c_k(g)\neq 0$, то

$$c_k(g) = c_k(\varphi * g). \tag{3.20}$$

Лемма 3.5. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $\mu\in\mathbb{N}$, $\varphi\in L_1(Q(0,\pi))$ — 2π-периодическая функция по каждой переменной. Для того, чтобы для любого тригонометрического многочлена T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной, выполнялось равенство*

$$T_\mu = \varphi * T_\mu, \tag{3.21}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$c_k(\varphi) = (2\pi)^{-n}\ \forall k\in\mathbb{Z}^n : |k_j|\leqslant\mu,\quad j=1,\dots,n. \tag{3.22}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть равенство (3.21) выполняется для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной. Согласно (3.19)

$$(2\pi)c_k(\varphi)c_k(T_\mu) = c_k(T_\mu)$$

для любых $k\in\mathbb{Z}^n$ таких, что $|k_j|\leqslant\mu$, $j=1,\dots,n$. Для каждого такого k существует тригонометрический многочлен T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной, для которого $c_k(T_\mu)\neq 0$, откуда следует, что выполняется равенство (3.22).

Достаточность. Пусть выполняется равенство (3.22) для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной:

$$T_\mu(x) = \sum_{\substack{|k_j|\leqslant\mu\\ j=1,\dots,n}} c_k e^{ik\cdot x} = \sum_{\substack{|k_j|\leqslant\mu\\ j=1,\dots,n}} c_k(T_\mu)e^{ik\cdot x}.$$

тогда

$$(\varphi * T_\mu)(x) = \sum_{\substack{|k_j|\leqslant\mu\\ j=1,\dots,n}} c_k(T_\mu)(\varphi * e^{ik\cdot x})(x) =$$

$$= \sum_{\substack{|k_j|\leqslant\mu\\ j=1,\dots,n}} c_k(T_\mu)\Bigg(\int\limits_{Q(0,\pi)} \varphi(x-\xi)e^{ik\cdot\xi}d\xi\Bigg) =$$

$$= \sum_{\substack{|k_j|\leqslant\mu\\ j=1,\dots,n}} c_k(T_\mu)\Bigg(\int\limits_{Q(0,\pi)} \varphi(x-\xi)e^{ik\cdot(x-\xi)}d\xi\Bigg)e^{ik\cdot x} =$$

$$= \sum_{\substack{|k_j|\leqslant\mu\\ j=1,\dots,n}} c_k(T_\mu)\Bigg(\int\limits_{Q(x,\pi)} \varphi(y)e^{ik\cdot y}dy\Bigg)e^{ik\cdot x} =$$

$$= \sum_{\substack{|k_j|\leqslant\mu\\ j=1,\dots,n}} c_k(T_\mu)(2\pi)^n c_k(\varphi)e^{ik\cdot x} =$$

$$= \sum_{\substack{|k_j| \leqslant \mu \\ j=1,\dots,n}} c_k(T_\mu) e^{ik\cdot x} = (T_\mu)(x).$$

□

Определение 3.2 (*ядро Дирихле*)**.** Для $\mu \in \mathbb{N}$

$$D_\mu(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\mu}^{\mu} e^{ikx} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\mu}\cos(kx) = \frac{\sin(\mu+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}, \tag{3.23}$$

$$\widetilde{D}_\mu(x) = \frac{1}{\pi} D_\mu(x). \tag{3.24}$$

Отметим, что

$$\|\widetilde{D}_\mu\|^*_{L_2} = \sqrt{\frac{2\mu+1}{2\pi}} \tag{3.25}$$

и

$$\|\widetilde{D}_\mu\|^*_{L_\infty} = \frac{2\mu+1}{2\pi}. \tag{3.26}$$

Из неравенств (3.25) и (3.26) следует, что для любых $2 < p < \infty$

$$\|\widetilde{D}_\mu\|^*_{L_p} \leqslant \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{1-\frac{1}{p}}, \tag{3.27}$$

так как согласно интерполяционному неравенству для лебеговых пространств

$$\|\widetilde{D}_\mu\|^*_{L_p} \leqslant \left(\|\widetilde{D}_\mu\|^*_{L_2}\right)^{\frac{2}{p}} \left(\|\widetilde{D}_\mu\|^*_{L_\infty}\right)^{1-\frac{2}{p}}.$$

Частным случаем равенства (3.21) является хорошо известное равенство

$$T_\mu(x) = \widetilde{D}_\mu(x) * T_\mu(x).$$

Замечание 3.1. Если φ — тригонометрический многочлен порядка μ по каждой переменной, то равенство (3.21) выполняется для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной, тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{\substack{|k_j| \leqslant \mu \\ j=1,\dots,n}} e^{ik\cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^n} \prod_{j=1}^{n} \sum_{|k_j| \leqslant \mu} e^{ik_j x_j} = \frac{1}{\pi^n}\prod_{j=1}^{n} D_\mu(x_j) = \prod_{j=1}^{n} \widetilde{D}_\mu(x_j).$$

Замечание 3.2. Пусть для $\alpha, n \in \mathbb{N}$

$$\Delta_\alpha(j) = \{k \in \mathbb{Z}^n, |k_j| \leqslant \alpha\} \quad \text{и} \quad \Delta_\alpha = \Delta_\alpha(1) \times \dots \times \Delta_\alpha(n).$$

Если φ — тригонометрический многочлен порядка $\nu > \mu$ по каждой переменной, то равенство (3.21) выполняется для любых тригонометрических многочленов T_μ порядка, не превышающего μ по каждой переменной, тогда и только тогда, когда

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\Delta_\nu} c_k e^{ik\cdot x} = \frac{1}{(2\pi)^n}\sum_{k\in\Delta_\mu} e^{ik\cdot x} + \sum_{k\in\Delta_\nu\setminus\Delta_\mu} c_k e^{ik\cdot x} = \prod_{j=1}^{n}\widetilde{D}_\mu(x_j) + \sum_{k\in\Delta_\nu\setminus\Delta_\mu} c_k e^{ik\cdot x}. \tag{3.28}$$

$\Bigg($В частности, при $n = 1$ имеем $\varphi(x) = \widetilde{D}_\mu(x) + \big(\sum\limits_{k=-\nu}^{-\mu-1} + \sum\limits_{k=\mu+1}^{\nu}\big) c_k e^{ik\cdot x}.\Bigg)$

Определение 3.3. Для $\mu \in \mathbb{N}$ обозначим через J^*_μ множество всех 2π-периодических функций $\varphi \in L_1(Q(0,\pi))$, удовлетворяющих условию (3.22) (следовательно, имеющих вид (3.28) для некоторого $\nu \in N$, $\nu \geqslant \mu$).

Согласно лемме 3.5 для таких функций φ справедливо равенство (3.21).

Определение 3.4 (см. [7]). Пусть $\mu,\ \nu \in \mathbb{N}$ и $\nu > \mu$. *Ядро Валле-Пуссена* определяется следующим образом:

$$\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x) = (\nu-\mu)^{-1}\sum_{l=\mu}^{\nu-1} D_l(x), \tag{3.29}$$

в частности,

$$\mathfrak{V}_{\mu}(x) = \mathfrak{V}_{\mu,2\mu}(x), \quad \mu \geqslant 1, \quad \mathfrak{V}_0(x) = 1. \tag{3.30}$$

Замечание 3.3. Для $\nu > \mu$ представим ядро Дирихле в виде

$$D_\nu(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \dots + \cos\mu x + (\cos(\mu+1)x + \dots + \cos\nu x) = D_\mu(x) + D_{\mu,\nu}(x),$$

где

$$D_{\mu,\nu}(x) = \sum_{l=\mu+1}^{\nu} \cos lx.$$

Тогда

$$\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\nu-\mu}\sum_{l=\mu}^{\nu-1} D_l(x) = \frac{1}{\nu-\mu}\Bigg(D_\mu(x) + \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1} D_l(x)\Bigg) =$$
$$= \frac{1}{\nu-\mu}\Bigg(D_\mu(x) + \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1}\Big(D_\mu(x) + D_{\mu,l}(x)\Big)\Bigg) =$$
$$= \frac{1}{\nu-\mu}\Bigg((\nu-\mu)D_\mu(x) + \sum_{l=\mu+1}^{\nu-1} D_{\mu,l}(x)\Bigg) =$$
$$= D_\mu(x) + \frac{1}{\nu-\mu}\sum_{l=m+1}^{\mu-1} D_{\mu,\nu}(x).$$

Положим

$$\widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi}\mathfrak{V}_{\mu,\nu}(x), \quad \widetilde{D}_{\mu,\nu}(x) = \frac{1}{\pi}D_{\mu,\nu}(x), \tag{3.31}$$

тогда

$$\widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) = \widetilde{D}_\mu(x) + \frac{1}{\nu-\mu}\sum_{l=\mu+1}^{\nu-1}\widetilde{D}_{\mu,\nu}(x). \tag{3.32}$$

Частным случаем равенства (3.21) является равенство

$$T_\mu(x) = \widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu,\nu}(x) * T_\mu(x), \tag{3.33}$$

в частности,

$$T_\mu(x) = \widetilde{\mathfrak{V}}_{\mu}(x) * T_\mu(x). \tag{3.34}$$

Теорема 3.4 (см., например [7]). *Пусть* $\mu \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *тогда*

$$\|\widetilde{\mathfrak{V}}_\mu(x)\|^*_{L_p} \leqslant 3^n \mu^{n(1-1/p)}. \tag{3.35}$$

Теорема 3.5. (Следствие из неравенства типа Юнга для периодических пространств Морри, см. [3]). *Пусть*

$$0 \leqslant \lambda < \frac{n}{p}, \quad 1 \leqslant r, \quad p < q \leqslant \infty, \quad 1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p},$$

$f_1 \in L_r(\mathbb{R}^n)$ *и* $f_2 \in (M_p^\lambda)^*$. *Тогда*

$$\|f_1 * f_2\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \leqslant \pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})}\|f_1\|^*_{L_r}(\|f_2\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}}(\|f_2\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}}. \tag{3.36}$$

Теорема 3.6. *Пусть* $1 \leqslant r$, $p < q \leqslant \infty$, $n, \mu \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{n}{p}$, $1 + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{p}$. *Тогда*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \leqslant c(\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}} \leqslant c\pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda} \tag{3.37}$$

для любого $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, *где*

$$c = c(\mu, r) = \inf_{\varphi \in J_\mu^*} \|\varphi\|^*_{L_r}. \tag{3.38}$$

Доказательство. Используя равенство (3.21) и теорему 3.5, получим, что для любой функции $\varphi \in J_\mu^*$ и для любого $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} = \left\|\varphi * T_\mu\right\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \leqslant \|\varphi\|^*_{L_r}(\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}}. \tag{3.39}$$

Переходя к инфимумам по $\varphi \in J_\mu^*$, получим утверждение теоремы. $\square$

Следствие 3.2. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $n, \mu \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{n}{p}$. *Если* $\varphi = \widetilde{\mathfrak{V}}_\mu(x)$, $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, *то из неравенства* (3.35) *следует, что*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \leqslant 3^n\mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}} \leqslant 3^n\pi^{\lambda(1-\frac{p}{q})}\mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}. \tag{3.40}$$

Следствие 3.3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, $n, \mu \in \mathbb{N}$, $n\Big(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q}\Big) \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{n}{p}$. *Если* $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$, *то из неравенства* (2.3) *и следствия* 3.2 *вытекает, что*

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\lambda-n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}} \leqslant \pi^{\frac{\lambda p}{q}-\lambda+n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{\lambda p}{q}}} \leqslant 3^n\pi^{\frac{n}{p}(1-\frac{p}{q})}\mu^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda}. \tag{3.41}$$

Следствие 3.4. *Если* $1 \leqslant p \leqslant 2$, $q \geqslant \dfrac{2p}{2-p}$, *то для любого* $T_\mu \in (M_p^\lambda)^*$

$$\|T_\mu\|^*_{M_q^{\frac{p\lambda}{q}}} \leqslant \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{n(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}(\|T_\mu\|^*_{M_p^\lambda})^{\frac{p}{q}}(\|T_\mu\|^*_{L_p})^{1-\frac{p}{q}}, \tag{3.42}$$

в частности, для $0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{n}{2}$

$$\|T_\mu\|^*_{LM_2^{\frac{\lambda}{2}}} \leqslant \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}(\|T_\mu\|^*_{LM_1^\lambda}\|T_\mu\|^*_{L_1})^{\frac{1}{2}} \tag{3.43}$$

и

$$\|T_\mu\|^*_{L_\infty} \leqslant \left(\frac{2\mu+1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\|T_\mu\|^*_{L_2}. \tag{3.44}$$

В последнем неравенстве постоянная точная, равенство достигается для $T_\mu(x) = \prod\limits_{l=1}^{n} \tilde{D}_\mu(x_l)$.

Доказательство. В рассматриваемом случае $r \geqslant 2$, в качестве функции φ в теореме 3.6 берется функция $\varphi(x) = \prod\limits_{l=1}^{n} \tilde{D}_\mu(x_l)$ и используются равенства (3.25) и (3.26). $\square$

Замечание 3.4. Неравенство (3.40) — это периодический аналог неравенства разных метрик для целых функций экспоненциального типа из работ [1, 4].

3.3. Неравенство разных измерений для пространств Морри.

Определение 3.5. Пусть

$$0 < p_1, p_2 \leqslant \infty,\ m_1, m_2 \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \frac{m_1}{p_1},\ 0 \leqslant \lambda_2 \leqslant \frac{m_2}{p_2}.$$

Определим пространство

$$(M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R})^{m_1})^* \times (M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2}))^* \tag{3.45}$$

со смешанной квазинормой как множество всех измеримых по Лебегу на $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ функций f, для которых

$$\|T_\mu\|^*_{M_{p_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times M_{p_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \Big\| \|T_\mu(u_1,u_2)\|^*_{M_{p_1,u_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\Big\|^*_{M_{p_2,u_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} =$$

$$= \sup_{y\in Q(0,\pi)(\mathbb{R}^{m_2})}\ \sup_{0<\rho\leqslant\pi} \rho^{-\lambda_2}\Big\| \sup_{x\in Q(0,\pi)(\mathbb{R}^{m_1})}\ \sup_{0<r\leqslant\pi} r^{-\lambda_1}\|T_\mu(u_1,u_2)\|_{L_{p_1,u_1}(Q(x,r))}\Big\|_{L_{p_2,u_2}(Q(x,r))} < \infty. \tag{3.46}$$

Отметим некоторые свойства этих пространств.

Лемма 3.6. *Пусть* $0 < p \leqslant \infty$, $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \dfrac{m_1}{p}$, $0 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dfrac{m_2}{p}$. *Тогда*

$$(M_p^{\lambda_1})^*(\mathbb{R}^{m_1}) \times (M_p^{\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_2}) \subset (M_p^{\lambda_1+\lambda_2})^*(\mathbb{R}^{m_1+m_2}), \tag{3.47}$$

причем

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} \leqslant \|T_\mu\|^*_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}$$

для любых $f \in M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1}) \times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})$.

Доказательство. Пусть $u_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $r < 0$, тогда

$$Q_{\mathbb{R}^{m_1+m_2}}((u_1,u_2),r) = Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,r) \times Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r). \tag{3.48}$$

Используя равенство (3.48), получим, что

$$\|T_\mu\|^*_{M_p^{\lambda_1+\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_1+m_2})} = \sup_{u_1\in\mathbb{R}^{m_1}}\ \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}}\ \sup_{r>0} r^{-\lambda_1-\lambda_2}\|T_\mu\|^*_{L_p(Q_{\mathbb{R}^{m_1+m_2}}((u_1,u_2),r))} =$$
$$= \sup_{u_1\in\mathbb{R}^{m_1}}\ \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}}\ \sup_{r>0} r^{-\lambda_1-\lambda_2}\|T_\mu(v_1,v_2)\|^*_{L_p(Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,r)\times Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))} =$$
$$= \sup_{u_1\in\mathbb{R}^{m_1}}\ \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}}\ \sup_{r>0} r^{-\lambda_2}\|r^{-\lambda_1}\|T_\mu(v_1,v_2)\|^*_{L_{p,v_1}(Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,r))}\|^*_{L_{p,v_2}(Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))} =$$
$$= \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}}\ \sup_{r>0} r^{-\lambda_2}\| \sup_{u_1\in\mathbb{R}^{m_1}} r^{-\lambda_1}\|T_\mu(v_1,v_2)\|^*_{L_{p,v_1}(Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,r))}\|^*_{L_{p,v_2}(Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}}\ \sup_{r>0} r^{-\lambda_2}\| \sup_{u_1\in\mathbb{R}^{m_1}}\ \sup_{\rho>0} \rho^{-\lambda_1}\|T_\mu(v_1,v_2)\|^*_{L_{p,v_1}(Q_{\mathbb{R}^{m_1}}(u_1,\rho))}\|^*_{L_{p,v_2}(Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))} =$$
$$= \sup_{u_2\in\mathbb{R}^{m_2}}\ \sup_{r>0} r^{-\lambda_2}\|\ \|T_\mu(v_1,v_2)\|^*_{M_{p,v_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\|^*_{L_{p,v_2}(Q_{\mathbb{R}^{m_2}}(u_2,r))} =$$
$$= \|\ \|T_\mu(v_1,v_2)\|^*_{M_{p,v_1}^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})}\|^*_{M_{p,v_2}^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})} = \|T_\mu\|^*_{M_p^{\lambda_1}(\mathbb{R}^{m_1})\times M_p^{\lambda_2}(\mathbb{R}^{m_2})}.$$

□

Теорема 3.7. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, $0 \leqslant \lambda \leqslant \dfrac{n}{p}$, *тогда*

$$\|T_\mu\|^*_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} \leqslant 3^{n-m}\mu^{\frac{n-m}{p}}\|T_\mu\|^*_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)}. \tag{3.49}$$

Доказательство. Пусть $x = (u,v)$. Так как для любого $u \in Q_{\mathbb{R}^m}(0,\pi)$ имеет место $T_\mu(u,v) \in \mathfrak{M}^*_{\mu,p}(\mathbb{R}^{n-m})$, то согласно неравенству (3.37) с $q = \infty$

$$\|T_\mu(u,v)\|^*_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})} \leqslant 3^{n-m}\mu^{\frac{n-m}{p}}\|T_\mu(u,v)\|^*_{L_{p,v}(\mathbb{R}^{n-m})}.$$

Следовательно,

$$\|T_\mu\|^*_{L_\infty(\mathbb{R}^{n-m})\times M_p^\lambda(\mathbb{R}^m)} = \|\|T_\mu(u,v)\|^*_{L_{\infty,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\|^*_{M_{p,u}^\lambda(\mathbb{R}^m)} \leqslant$$

$$\leqslant 3^{n-m}\mu^{\frac{n-m}{p}}\| \|T_\mu(u,v)\|^*_{L_{p,v}(\mathbb{R}^{n-m})}\|^*_{M^\lambda_{p,u}(\mathbb{R}^m)} =$$
$$= 3^{n-m}\mu^{\frac{n-m}{p}}\|T_\mu\|^*_{L_p(\mathbb{R}^{n-m})\times M^\lambda_p(\mathbb{R}^m)}.$$

□

Замечание 3.5. Если $\lambda = 0$, то очевидно, что

$$L^*_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M^0_p)^*(\mathbb{R}^m) = L^*_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times L^*_p(\mathbb{R}^m) = L^*_p(\mathbb{R}^n), \tag{3.50}$$

однако, при $0 < \lambda \leqslant \dfrac{m}{p}$ согласно лемме 3.6

$$L^*_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m) \subset (M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^n), \tag{3.51}$$

но

$$L^*_p(\mathbb{R}^{n-m}) \times (M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^m) \neq (M^\lambda_p)^*(\mathbb{R}^n). \tag{3.52}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Буренков В. И., Джосеф Д. Д.* Интегральные неравенства для целых функций экспоненциального типа в пространствах Морри// Тр. МИАН. — 2023. — *323*. — С. 87–106.
2. *Буренков В. И., Тарарыкова Т. В.* Аналог неравенства Юнга для сверток функций для общих пространств типа Морри// Тр. МИАН. — 2016. — *293*. — С. 113–132.
3. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977.
4. *Burenkov V. I., Joseph D. J.* Inequalities for entire functions of exponential type in Morrey spaces// Eurasian Math. J. — 2022. — *13*, № 3. — С. 92–99.
5. *Burenkov V. I., Joseph D. J.* Inequalities for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces// Eurasian Math. J. — 2024. — *15*, № 2. — С. 92–100.
6. *Morrey C. D.* On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations// Trans. Am. Math. Soc. — 1938. — *43*, № 1. — С. 126–166.
7. *Temlyakov V.* Multivariate approximation. — Cambridge: Cambridge University Press, 2018.

Д. Дж. Джосеф
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `dj_144life@hotmail.com`

UDC 517.518
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-561-574
EDN: VXYWFZ

Integral inequalities for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces

D. J. Joseph

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we present a detailed exposition of Bernstein's inequality, inequalities of different metrics and different dimensions for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces.

Keywords: Morrey spaces, Bernstein inequality, trigonometric polynomials.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: D. J. Joseph, "Integral inequalities for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 561–574. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-561-574

REFERENCES

1. V. I. Burenkov and D. J. Joseph, "Integral'nye neravenstva dlya tselykh funktsiy eksponentsial'nogo tipa v prostranstvakh Morri" [Integral inequalities for entire functions of exponential type in Morrey spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2023, **323**, 87–106 (in Russian).
2. V. I. Burenkov and T. V. Tararykova, "Analog neravenstva Yunga dlya svertok funktsiy dlya obshchikh prostranstv tipa Morri" [Analogue of Young's inequality for convolutions of functions for general Morrey-type spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2016, **293**, 113–132 (in Russian).
3. S. M. Nikol'skii, *Priblizhenie funktsiy mnogikh peremennykh i teoremy vlozheniya* [Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
4. V. I. Burenkov and D. J. Joseph, "Inequalities for entire functions of exponential type in Morrey spaces," *Eurasian Math. J.*, 2022, **13**, No. 3, 92–99.
5. V. I. Burenkov and D. J. Joseph, "Inequalities for trigonometric polynomials in periodic Morrey spaces," *Eurasian Math. J.*, 2024, **15**, No. 2, 92–100.
6. C. D. Morrey, "On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1938, **43**, No. 1, 126–166.
7. V. Temlyakov, *Multivariate approximation*, Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

D. J. Joseph
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: dj_144life@hotmail.com