

УДК 517.98

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-533-541

EDN: VRITTM

КОРРЕКТНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ ДЛЯ ДРОБНО-СТЕПЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. Д. БАБОШИН

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В работе рассматривается сумма линейных дробно-степенных операторов, действующих в банаховом пространстве и удовлетворяющих слабой позитивности. Устанавливается корректная разрешимость задачи для соответствующего дробно-операторного уравнения и приводится представление решения через обратный оператор с точной оценкой его нормы. Результаты применяются к задачам без начальных условий для уравнения с сингулярными коэффициентами. Приводятся примеры таких уравнений.

Ключевые слова: дробно-степенной оператор, дробно-операторное уравнение, корректная разрешимость.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: С. Д. Бабошин. Корректная разрешимость задач для дробно-степенных операторных уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 4. С. 533–541. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-533-541>

1. ВВЕДЕНИЕ

При исследовании корректной разрешимости по Адамару задач для эволюционных уравнений актуальным является вопрос обратимости суммы интегро-дифференциальных операторов.

В этом направлении важный результат содержит работа Да Прато и Грисварда [7], в которой указываются условия обратимости суммы производящих операторов сильно непрерывных полугрупп линейных преобразований в банаховом пространстве.

Целью настоящей работы является применение однопараметрических полугрупп с дробными степенями производящих операторов, в смысле работ [1, 4, 8, 9], к обращению их сумм методом Да Прато—Грисварда.

На этом пути удаётся получить представление обратного к исследуемой сумме оператора и найти его точную оценку.

Приводятся примеры дифференциальных операторов с сингулярными коэффициентами, для которых соответствующие уравнения корректно разрешимы для задач без начальных условий.

2. КОРРЕКТНОСТЬ ПО АДАМАРУ

Пусть F и U — метрические пространства с соответствующими метриками ρ_F и ρ_U . Согласно Адамару, задача определения решения $u \in U$ уравнения

$$Au = f, \tag{2.1}$$

где $f \in F$ задано, называется *корректно поставленной* на пространствах (F, U) , если выполняются условия:

1. для всякого $f \in F$ существует $u \in U$ — решение уравнения (2.1);
2. решение определяется однозначно;
3. задача устойчива на пространствах (F, U) , т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho_F(f_1, f_2) < \delta$ следует $\rho_U(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Важно отметить, что устойчивость задачи (2.1) зависит от выбранных топологий в U и F , и, вообще говоря, подходящим выбором топологий можно формально добиться непрерывности оператора A^{-1} , существование которого обеспечивают условия 1 и 2. Так, в случае линейно взаимно-однозначного соответствия оператора A и нормированных пространств U и F устойчивость будет иметь место, если пространство F наделить нормой

$$\|f\|_F = \|A^{-1}f\| = \|u\|_U,$$

и тогда

$$\|A^{-1}\| = \sup_{\substack{f \in F \\ f \neq 0}} \frac{\|A^{-1}f\|}{\|f\|_F} = 1.$$

Однако обычно топологии определяются постановкой задачи и не могут выбираться произвольно. В связи с этим возникает следующая проблема, связанная с выбором топологий в пространствах данных задачи F и решений U .

1. С одной стороны, желательно, чтобы эти топологии не зависели от оператора A . Например, в случае, когда $A = A(\lambda)$ — оператор, зависящий от некоторого параметра λ , важно, чтобы область определения обратного оператора $A^{-1}(\lambda)$ (например, резольвенты $R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1}$) была не зависящей от λ .
2. С другой стороны, хотелось бы иметь наиболее широкие пространства данных задачи F , при которых решение задачи остаётся в некотором «достаточно хорошем» классе U .

Настоящая заметка посвящена исследованию корректной разрешимости задач вида (2.1), где оператор A представляется в виде дробно-операторной функции

$$\mathbb{A}_n = \sum_{m=1}^n a_m A^{\alpha_m}, \quad \alpha_m \in (0, 1) \quad a_m > 0.$$

Доказывается следующая теорема.

Теорема 2.1 (о корректности). Пусть A — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|$, и область определения $D(A)$ плотна в E . Кроме того, оператор $-A$ является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы $U(t), t \geq 0$ линейных ограниченных операторов, действующих в E , с оценкой

$$\|U(t)\varphi\| \leq M e^{-\omega t}, \quad \omega > 0.$$

Тогда оператор $\mathbb{A}_n$ имеет ограниченный обратный оператор $\mathbb{A}_n^{-1}$ и для $f \in D(A)$ выполняется оценка

$$\|\mathbb{A}_n^{-1}f\| \leq \frac{M\|f\|}{\sum_{m=1}^n a_m^{\omega \alpha_m}}.$$

3. НЕОБХОДИМЫЕ ФАКТЫ ИЗ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

3.1. C_0 -полугруппы B -позитивных операторов. При доказательстве корректной разрешимости уравнения (2.1) ключевую роль играет понятие сильно непрерывной однопараметрической полугруппы линейных и ограниченных операторов $U(t), t \geq 0$, действующих в банаховом пространстве E .

Определение 3.1. Семейство ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве E , называется *сильно непрерывной* однопараметрической полугруппой операторов, если $U(t)$ сильно непрерывно зависит от $t \geq 0$ и удовлетворяет условиям:

1. $U(0)\varphi = \varphi, \varphi \in E$,

2. $U(t+s)\varphi = U(t)U(s)\varphi = U(s)U(t)\varphi$, $\varphi \in E$,
3. $\lim_{t \rightarrow 0+} \|U(t)\varphi - \varphi\|_E = 0$, $\varphi \in E$.

Для всякой полугруппы $U(t)$, удовлетворяющей условиям 1–3, существуют числа M и ω такие, что выполняется оценка

$$\|U(t)\varphi\|_E \leq M e^{\omega t}. \quad (3.1)$$

Классы таких полугрупп называются *сильно непрерывными*, или C_0 -полугруппами. Если $U(t)$ — C_0 -полугруппа, то существует оператор

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \| [U(h) - I]\varphi \| = A\varphi, \quad \varphi \in D(A),$$

который называется *производящим оператором* (генератором) полугруппы $U(t)$.

Область определения $D(A)$ оператора A плотна в E . Полугруппы $U(t)$ с производящим оператором A будем обозначать $U(t, A)$.

Определение 3.2. Оператор A будем называть *позитивным по Балакришнану* (B -позитивным), если оператор $-A$ является генератором C_0 -полугруппы $U(t, -A)$, удовлетворяющей оценке (3.1) при $\omega < 0$.

3.2. Обращение суммы B -позитивных операторов. Нам понадобится результат Ж. Да Прато и Д. Грисварда об обращении операторной суммы.

Пусть X — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, а A и B — два замкнутых в X линейных оператора с областями определения D_A и D_B , причём D_B плотно в X . Рассмотрим оператор $L\varphi = A\varphi + B\varphi$, $\varphi \in D_A \cap D_B = D_L$.

Теорема 3.1 (Да Прато—Грисвард [7]). Пусть

$$(A - \lambda)^{-1}(B - \lambda)^{-1}\varphi = (B - \lambda)^{-1}(A - \lambda)^{-1}\varphi, \quad \lambda > 0, \quad \varphi \in D_L,$$

и существуют такие $M_A, M_B > 0$, что для всех $k \in \mathbb{N}$

$$\|(A - \lambda)^{-k}\| \leq \frac{M_A}{\lambda^k}, \quad \|(B - \lambda)^{-k}\| \leq \frac{M_B}{\lambda^k}, \quad \lambda > 0.$$

Тогда $L = A + B$ допускает замыкание $\bar{L}$, при этом резольвентное множество оператора $\rho_{\bar{L}} \subset (0, \infty)$ и

$$\|(\bar{L} - \lambda)^{-k}\| \leq \frac{M_A M_B}{\lambda^k}, \quad \lambda > 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.2)$$

$$(\bar{L} - \lambda)^{-1}(D_A + D_B) \subset D_L, \quad \lambda > 0. \quad (3.3)$$

Примером применения этой теоремы является доказательство корректной разрешимости задач Коши для уравнения

$$-\frac{du}{dt} + Bu(t) - \lambda u(t) = f(t), \quad t \in (0, T),$$

где $f(t)$ — векторная функция со значениями в E , принадлежащая пространству $X = L^p[(0, T), E]$ с нормой

$$\|f\|_p = \left[\int_0^T \|f(t)\|_E^p dt \right]^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

Из теоремы получаем следствия.

Следствие 3.1. Оператор $L = A + B$ является генератором C_0 -полугруппы операторов $U(t, A + B)$ в силу оценки (3.2) и соотношения (3.3).

Следствие 3.2. Если A и B — генераторы C_0 -полугрупп $U(t, A)$ и $U(t, B)$ с оценками

$$\|U(t, A)\| \leq M_1 e^{-\omega_1 t}, \quad \|U(t, B)\| \leq M_2 e^{-\omega_2 t}, \quad \omega_1, \omega_2 > 0,$$

при этом для всех $s, t \geq 0$ выполнено

$$U(t, A)U(s, B)\varphi = U(s, B)U(t, A)\varphi, \quad (3.4)$$

то оператор $L = A + B$ имеет обратный L^{-1} и справедливо равенство

$$(A + B)^{-1}\varphi = - \int_0^{\infty} U(s, A)U(s, B)\varphi ds. \quad (3.5)$$

Доказательство. Для доказательства заметим, что в силу представления резольвенты (см. [1])

$$(\lambda - A)^{-1}\varphi = R(\lambda, A)\varphi = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}U(t, A)\varphi dt,$$

а из (3.4) следует коммутруемость резольвент:

$$\begin{aligned} R(\lambda, A)R(\lambda, B)\varphi &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}U(t, A) \int_0^{\infty} e^{-\lambda s}U(s, B)\varphi ds dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(t+s)}U(t, A)U(s, B)\varphi ds dt = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda(t+s)}U(s, B)U(t, A)\varphi ds dt = R(\lambda, B)R(\lambda, A)\varphi \end{aligned}$$

и соотношение

$$\begin{aligned} -(A + B) \int_0^{\infty} U(s, A)U(s, B)\varphi ds &= - \int_0^{\infty} AU(s, A)U(s, B)\varphi ds - \int_0^{\infty} BU(s, B)U(s, A)\varphi ds = \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{dU(s, A)}{ds}U(s, B)\varphi ds - \int_0^{\infty} \frac{dU(s, B)}{ds}U(s, A)\varphi ds = \\ &= - \int_0^{\infty} \frac{d}{ds}[U(s, A)U(s, B)]\varphi ds = -U(s, A)U(s, B)\varphi|_0^{\infty} = \varphi. \end{aligned}$$

□

Этот результат позволяет обобщить равенство (3.5) на случай суммы нескольких операторов:

$$\left(\sum_{i=1}^n A_i \right)^{-1} \varphi = - \int_0^{\infty} \prod_{i=1}^n U(s, A_i)\varphi ds, \quad (3.6)$$

где $U(s, A_i)$ — сильно непрерывные полугруппы с производящими операторами A_i такими, что для любых $i, m \in \{1, 2, \dots, n\}$ выполнено $U(s_i, A_i)U(s_m, A_m)\varphi = U(s_m, A_m)U(s_i, A_i)\varphi$.

4. ДРОБНЫЕ СТЕПЕНИ B -ПОЗИТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Если оператор A является B -позитивным и для полугруппы $U(t, -A)$ выполняется оценка

$$\|U(t, -A)\varphi\| \leq M e^{-\omega t} \|\varphi\|, \quad \omega \geq 0,$$

то для оператора A определена дробная степень A^α , $\alpha \in (0, 1)$, которая по Балакришнану [1] для $f \in D(A)$ имеет вид

$$A^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{1+\alpha}} [U(t, -A) - I] f dt, \quad (4.1)$$

и отрицательная степень

$$A^{-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{U(t, -A) f dt}{t^{1-\alpha}} dt. \quad (4.2)$$

При этом оператор A^α является B -позитивным и полугруппа $U(t, -A^\alpha)$ имеет вид

$$U(t, -A^\alpha)f = \int_0^\infty h_{\alpha,t}(\xi)U(\xi, -A)f d\xi,$$

где $h_{\alpha,t}(\xi)$ — функция Иосиды [1], являющаяся обратным преобразованием Лапласа функции $F(p) = e^{-p^\alpha t}$ со свойствами

$$h_{\alpha,t}(\xi) > 0, \quad \int_0^\infty e^{-a\xi} h_{\alpha,t}(\xi) d\xi = e^{-a^\alpha t}.$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ КОРРЕКТНОСТИ

Сначала проведём доказательство для двух слагаемых. То есть рассмотрим уравнение

$$A_2 u = (a_1 A^{\alpha_1} + a_2 A^{\alpha_2}) = f, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1), \quad (5.1)$$

где оператор A является B -позитивным с оценкой на полугруппу

$$\|U(t, -A)f\| \leq M e^{-\omega t} \|f\|, \quad \omega > 0.$$

Отсюда операторы $a_1 A^{\alpha_1}$ и $a_2 A^{\alpha_2}$ являются B -позитивными с полугруппами

$$U(t, -a_1 A^{\alpha_1})f = \int_0^\infty h_{\alpha_1, a_1 t}(\xi)U(\xi, -A)f d\xi,$$

$$U(t, -a_2 A^{\alpha_2})f = \int_0^\infty h_{\alpha_2, a_2 t}(\xi)U(\xi, -A)f d\xi$$

и оценками

$$\|U(t, -a_1 A^{\alpha_1})f\| \leq \int_0^\infty h_{\alpha_1, a_1 t}(\xi) \|U(\xi, -A)f\| d\xi \leq M \int_0^\infty h_{\alpha_1, a_1 t} e^{-\omega \xi} \|f\| d\xi = M e^{-a_1 \omega^{\alpha_1} t} \|f\|,$$

$$\|U(t, -a_2 A^{\alpha_2})f\| \leq M e^{-a_2 \omega^{\alpha_2} t} \|f\|. \quad (5.2)$$

Таким образом, для уравнения (5.1) можно применить теорему Да Прато—Грисварда и воспользоваться формулой (3.5).

В результате для $f \in D(A)$ получаем решение уравнения (5.1) в виде

$$u = - \int_0^\infty U(t, -a_1 A^{\alpha_1}) U(t, -a_2 A^{\alpha_2}) f dt. \quad (5.3)$$

Отсюда и из (5.2), (5.3) следует оценка корректности:

$$\|u\| \leq \int_0^\infty \|U(t, -a_1 A^{\alpha_1})\| \|U(t, -a_2 A^{\alpha_2})\| dt \|f\| \leq M^2 \int_0^\infty e^{-a_1 \omega^{\alpha_1} t} e^{-a_2 \omega^{\alpha_2} t} dt \|f\| = - \frac{M^2 \|f\|}{a_1 \omega_1^{\alpha_1} + a_2 \omega_2^{\alpha_2}}. \quad (5.4)$$

Замечание 5.1. Оценка (5.4) точная, так как если f является собственным элементом оператора A , соответствующим соотношению $Af = \omega f$, $\omega > 0$, то для такого f равенство (5.3) имеет вид

$$u = - \int_0^\infty U(t, -a_1 A^{\alpha_1}) U(t, -a_2 A^{\alpha_2}) f dt = - \int_0^\infty U(t, -a_1 A^{\alpha_1}) e^{-a_2 \omega^{\alpha_2} t} f dt =$$

$$= - \int_0^\infty e^{-a_2 \omega^{\alpha_2} t} \cdot e^{-a_1 \omega^{\alpha_1} t} dt f = \frac{f}{a_1 \lambda_1^{\alpha_1} + a_2 \lambda_2^{\alpha_2}}.$$

Отсюда имеем равенство

$$\|u\| = \frac{\|f\|}{a_1\lambda_1^{\alpha_1} + a_2\lambda_2^{\alpha_2}},$$

показывающее точность оценки (5.4).

Доказательство. Доказательство теоремы корректности для произвольного $n \in \mathbb{N}$ следует из соотношения (3.6), дающего оценку

$$\|u\| \leq \int_0^\infty \left\| \prod_{m=1}^n U(t, -A^{\alpha_m}) f \right\| dt \leq \int_0^\infty \left\| \prod_{m=1}^n U(t, -A^{\alpha_m}) \right\| dt \|f\| \leq \int_0^\infty e^{\sum_{m=1}^n a_m^{\omega_{\alpha_m} t}} dt \|f\| = \frac{\|f\|}{\sum_{m=1}^n a_m^{\omega_{\alpha_m}}}. \quad (5.5)$$

Точность оценки (5.5) доказывается как и в случае оценки (5.4), с применением к f , являющемуся собственным элементом оператора A вида $Af = \omega f$. $\square$

6. ПРИМЕРЫ B -ПОЛУГРУПП

6.1. Канонические полугруппы. Для демонстрации приложений полученных результатов приведём примеры однопараметрических полугрупп, играющих важную роль в теории уравнений параболического типа, которые по классификации Э. Хилле и Р. Филлипса [6] называются *каноническими*, и определяемых сложением $U(\alpha \oplus \beta) = U(\alpha)U(\beta)$, где α, β — действительные или комплексные числа.

Так, если $F(x, y)$ — функция от $x, y \in \mathbb{R}$ такая, что $F(x, y) \in \mathbb{R}^+$ и

$$F(x, (F(x, z))) = F(F(x, y), z),$$

то формула $\alpha \oplus \beta = F(\alpha, \beta)$ может служить определением полугрупповой операции в $\mathbb{R}^+$.

При этом введение таких операций связывается с теоремами сложения для некоторых элементарных функций. К таким сложениям, например, относятся

$$1) \alpha + \beta, \quad 2) \alpha \cdot \beta, \quad 3) \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \quad 4) \alpha(1 + \beta^2)^{\frac{1}{2}} + \beta(1 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (6.1)$$

соответствующие функциям

$$1) x, \quad 2) \ln x, \quad 3) \operatorname{th} x, \quad 4) \operatorname{sh} x.$$

Полугруппы, определяемые соотношениями (6.1), можно строить следующим образом: пусть функция $h(x)$ определена на интервале $x \in (a, b) \subset \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ и удовлетворяет условиям

$$h'(x) > 0, \quad h(a) = -\infty, \quad h(b) = \infty.$$

Через $C_\omega(a, b)$ будем обозначать банахово пространство функций $\varphi(x)$ с нормой

$$\|\varphi\|_{C_\omega} = \sup_{x \in (a, b)} e^{\omega h(x)} |\varphi(x)|, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (6.2)$$

Введём операторы $\pm A_h$, заданные выражениями $\mathbb{D}_h = \pm \frac{d}{dh}$ с областями определения

$$D(\mathbb{D}_h) = \left\{ \varphi \in C_\omega(a, b), \quad \frac{d\varphi}{dh} \in C_\omega(a, b) \right\}. \quad (6.3)$$

Такие операторы являются генераторами полугрупп вида

$$U(t, \pm A_h)\varphi(x) = \varphi[h^{-1}(h(x) \pm t)], \quad t \geq 0. \quad (6.4)$$

Лемма 6.1. При $\omega \geq 0$ справедливы оценки

$$\|U(t, \pm A_h)\varphi\|_{\pm\omega} \leq e^{-\omega t} \|\varphi\|_{\pm\omega}. \quad (6.5)$$

Доказательство. Доказательство следует из (6.4) после замены $h^{-1}[h(x) \pm t] = s$, где $s \in (a, b)$, откуда следует соотношение

$$e^{\omega h(x)} U(t, \pm A_h) \varphi(x) = \varphi(s) e^{h(s)} e^{\mp \omega t}, \quad (6.6)$$

и из (6.6) следует (6.5).

Переходя к супремуму в правой и левой части (6.6), получаем

$$\|U(t, \pm A) \varphi\| \leq e^{\mp \omega t} \|\varphi\|_{\omega}.$$

□

Следствие 6.1. Неравенства (6.5) показывают, что операторы A_h являются B -позитивными в пространствах $C_{-\omega}(a, b)$, а операторы $-A_h$ будут B -позитивными в $C_{\omega}(a, b)$.

В частности, для некоторых классических случаев имеем:

1. $x \in (-\infty, \infty)$, $h(x) = x$, $\pm A_h = \pm \frac{d}{dx}$, $U(t, \pm A_h) \varphi(x) = \varphi(x \pm t)$ — полугруппы переноса. Пространства $E = C_{\pm}[-\infty, \infty] \|\varphi\| = \sup |\varphi(x)|$. Дробным степеням $(\pm A)^{\alpha}$ соответствуют дробные производные Маршо.
2. $x \in [0, 1]$, $h(x) = \ln x$, $A = x \frac{d}{dx}$, $E = C \|\varphi\| = \sup_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)|$, $U(x, -A) \varphi(x) = \varphi(xe^{-t})$. Дробным степеням операторов $x \frac{d}{dx}$ соответствуют дробные производные Адамара [4, с. 251].

Следствие 6.2. Для дробных степеней операторов A_h справедливо равенство

$$A_h^{\alpha} \varphi = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^x \frac{[\varphi(s) - \varphi(x)] dh(s)}{[h(s) - h(x)]^{1+\alpha}}. \quad (6.7)$$

Доказательство. Для доказательства подставим $U(t, -A_h)$, определённую соотношением (6.4), в (4.1) и получим

$$A_h^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{[U(t, -A_h) \varphi(x) - \varphi(x)]}{t^{1+\alpha}} dt = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{[\varphi[h^{-1}(h(x) - t)] - \varphi(x)]}{t^{1+\alpha}} dt. \quad (6.8)$$

Делая в (6.8) замену $h^{-1}(h(x) - t) = s$, получаем (6.7). □

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что если $x \in (-\infty, \infty)$, $h(x) = x$, $A_h = \frac{d}{dx}$, $U\left(t, -\frac{d}{dx}\right) \varphi(x) = \varphi(x - t)$, то

$$A_h^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{[\varphi(x - t) - \varphi(x)]}{t^{1+\alpha}} dt = D_{+}^{\alpha} \varphi = \frac{d\alpha}{dx\alpha} \varphi(x), \quad (7.1)$$

и, следовательно, в соответствии с [4] $A_h^{\alpha} \varphi(x)$ является правой производной Маршо.

В случае $x \in [0, 1]$, $h(x) = \ln x$, $A_h = x \frac{d}{dx}$, $U(t, -A_h) \varphi(x) = \varphi(xe^{-t})$ из (6.4) и (4.1) имеем дробную степень оператора Адамара при $\varphi \in C[0, 1]$, $\|\varphi\| = \max_{x \in [0, 1]} |\varphi(x)|$:

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^{\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{[\varphi(xe^{-t}) - \varphi(x)]}{t^{1+\alpha}} dt = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{[\varphi(s) - \varphi(x)]}{s \left(\ln \frac{x}{s}\right)^{1+\alpha}} ds. \quad (7.2)$$

Аналогично, для отрицательной степени, пользуясь формулой (4.2), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}\right)^{-\alpha} \varphi(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\varphi[h^{-1}(h(x)-t)]}{t^{1-\alpha}} dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{\varphi(x-t)dt}{t^{1-\alpha}} = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x (x-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds = J^\alpha \varphi(x). \end{aligned} \quad (7.3)$$

В соответствии с [4] $J^\alpha \varphi(x)$ — дробный интеграл Римана—Лиувилля.

А в случае $A_h = x \frac{d}{dx}$ из (4.2) следует равенство

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^{-\alpha} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{t(\ln \frac{x}{t})^{1-\alpha}} = J_+^\alpha \varphi \quad (7.4)$$

для дробного интеграла Адамара [4].

В заключение заметим, что теорема 2.1 здесь применяется только к дифференциальным операторам в одномерном случае.

Однако очевидно, что эту теорему можно применять и для функций с несколькими переменными. Например, с оператором $Au = (I - \Delta)u$, где $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ — лапласиан в пространствах $W_p^2(\mathbb{R}^n)$ — пространствах Соболева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. Функциональный анализ: Учебник. — М.: Мир, 1967.
2. Костин В. А., Костин А. В., Костин Д. В. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения // Докл. РАН. — 2014. — 455, № 2. — С. 142–146.
3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
5. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
6. Хилье Э., Филлипс Р. С. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: Иностран. лит., 1962.
7. Da Prato G., Grisvard P. Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles // J. Math. Pures Appl. (9). — 1975. — 54. — С. 305–387.
8. Hilfer R. Threefold introduction to fractional derivatives // В сб.: «Anomalous Transport: Foundations and Applications». — Weinheim: Wiley-VCH, 2008. — С. 17–73.
9. Kolokoltsov V. N., Shishkina E. L. Fractional calculus for non-discrete signed measures // Mathematics. — 2024. — 12. — 2804.

С. Д. Бабошин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: ijustbsd@gmail.com

UDC 517.98

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-533-541

EDN: VRITTM

Correct solvability of problems for fractional-power operator equations

S. D. Baboshin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, we consider the sum of linear fractional-power operators acting in a Banach space and satisfying weak positivity. We establish the correct solvability of the problem for the corresponding fractional-operator equation and we give the representation of the solution through the inverse operator with an exact estimate of its norm. The results are applied to problems without initial conditions for an equation with singular coefficients. We consider examples of such equations.

Keywords: fractional power operator, fractional-operator equation, correct solvability.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: S. D. Baboshin, “Correct solvability of problems for fractional-power operator equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 533–541. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-533-541>

REFERENCES

1. K. Yosida, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
2. V. A. Kostin, A. V. Kostin, and D. V. Kostin, “Elementarnye polugruppy preobrazovaniy i ikh proizvodnyashchie uravneniya” [Elementary semigroups of transformations and their generating equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **455**, No. 2, 142–146 (in Russian).
3. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
4. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
5. A. N. Tikhonov, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
6. E. Hille and R. S. Phillips, *Funktsional'nyy analiz i polugruppy* [Functional Analysis and Semi-groups], Inostr. Lit., Moscow, 1962 (Russian translation).
7. G. Da Prato and P. Grisvard, “Sommes d’opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles,” *J. Math. Pures Appl. (9)*, 1975, **54**, 305–387.
8. R. Hilfer, “Threefold introduction to fractional derivatives,” In: *Anomalous Transport: Foundations and Applications*, Wiley-VCH, Weinheim, 2008, pp. 17–73.
9. V. N. Kolokoltsov and E. L. Shishkina, “Fractional calculus for non-discrete signed measures,” *Mathematics*, 2024, **12**, 2804.

S. D. Baboshin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: ijustbsd@gmail.com