Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 4 (2024). С. 517–532
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 515.172.2, 512.816, 517.55
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-517-532
EDN: VQUHHA

О НЕВЫРОЖДЕННЫХ ОРБИТАХ 7-МЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ, СОДЕРЖАЩИХ 3-МЕРНЫЙ АБЕЛЕВ ИДЕАЛ

А. В. Атанов[1], **А. В. Лобода**[2,3]

[1] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*
[2] *Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия*
[3] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Аннотация. Статья связана с задачей описания однородных вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств как орбит действия в этих пространствах групп и алгебр Ли. Изучаются реализации в виде алгебр голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ 7-мерных алгебр Ли, содержащих только 3-мерные абелевы идеалы и подалгебры. Среди 594 типов 7-мерных разрешимых неразложимых алгебр Ли, содержащих 6-мерный нильрадикал, таких алгебр имеется пять типов. В статье описаны все их реализации, допускающие невырожденные по Леви 7-мерные орбиты. Показано наличие «просто однородных» орбит среди построенных гиперповерхностей.

Ключевые слова: алгебра Ли, абелева подалгебра, голоморфное векторное поле, однородное многообразие, вещественная гиперповерхность, вырождение в смысле Леви.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант 23-21-00109).

Для цитирования: *А. В. Атанов, А. В. Лобода.* О невырожденных орбитах 7-мерных алгебр Ли, содержащих 3-мерный абелев идеал// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 4. С. 517–532. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-517-532

1. Введение

Статья связана с задачей описания однородных вещественных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств. Отметим, что случаи пространств $\mathbb{C}^2$ (см. [17]) и $\mathbb{C}^3$ (см. [8, 19]) изучены. При этом полное описание однородных вещественных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{C}^3$ оказалось достаточно объемным, а его построение заняло фактически более 20 лет. Важным фрагментом полной классификации в задаче об однородности в $\mathbb{C}^3$ стала работа [20], содержащая описание Леви-вырожденных однородных гиперповерхностей.

В то же время это семейство поверхностей оказалось достаточно небольшим по сравнению с семейством невырожденных по Леви однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^3$. С ростом размерности объемлющих комплексных пространств количество Леви-вырожденных однородных многообразий увеличивается, например, за счет (являющихся голоморфно вырожденными) прямых произведений маломерных однородных многообразий на пространства $\mathbb{C}^k$.

Как показывает опыт авторов данной работы, ситуация с вырожденностью количественно меняется, начиная уже с пространства $\mathbb{C}^4$, в котором вырожденных однородных гиперповерхностей гораздо больше, чем невырожденных. Например, имеет место следующее утверждение (см. [11, 13]): *в пространстве $\mathbb{C}^4$ Леви-невырожденными орбитами семейства* (*из* 149 *типов*) *нильпотентных* 7-*мерных неразложимых алгебр Ли являются лишь*

$$\operatorname{Im} z_4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm |z_3|^2 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} z_4 = z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_3|^2 \pm |z_1|^4.$$

Отметим, что 7 — это минимально возможная размерность алгебры голоморфных векторных полей на однородных гиперповерхностях пространства $\mathbb{C}^4$. В серии работ [5,10,11,13,14] авторами изучаются имеющиеся большие списки абстрактных 7-мерных алгебр Ли (см. [21,22,24,26]) с точки зрения их голоморфной реализации. Показано (см., например, [5,14]), что наличие в 7-мерной алгебре абелевых подалгебр или идеалов «больших» размерностей является препятствием для существования невырожденных орбит.

С другой стороны, именно «малая» размерность максимальной абелевой подалгебры у 5-мерной неразрешимой алгебры Ли позволила получить за счет реализации этой алгебры в пространстве $\mathbb{C}^3$ интересный пример просто однородной невырожденной гиперповерхности. В имеющихся списках 7-мерных алгебр Ли минимальной размерностью максимальных абелевых подалгебр (и одновременно абелевых идеалов) оказывается именно 3. Тем самым, изучение орбит алгебр именно с такими свойствами является естественным и оправданным.

Отметим еще, что в последние годы вырос интерес к изучению Леви-вырожденных, но обладающих свойствами k-невырожденности однородных гиперповерхностей многомерных комплексных пространств (см. [23,25]). Многие из них оказываются сводимыми к так называемым трубчатым многообразиям, представляющим большой класс однородных поверхностей. Свойство трубчатости важно и в наших исследованиях, но вопрос о связи его с однородностью пока не изучен в полном объеме.

2. Основные понятия

Определение 2.1. Многообразие M *однородно относительно некоторой группы* (преобразований) G, если эта группа транзитивно действует на M, т. е. любую точку из M можно перевести в любую другую точку этого многообразия некоторым преобразованием из группы G.

Свойство однородности $M^7 \subset \mathbb{C}^4$ везде ниже обсуждается в локальном смысле. Оно понимается как наличие на такой поверхности алгебры Ли $\mathfrak{g}(M)$ голоморфных (касательных к M) векторных полей, имеющей вблизи обсуждаемой точки Q поверхности ранг, равный 7.

Без ограничения общности точку Q можно считать началом координат пространства $\mathbb{C}^4$, но при обсуждении уравнений конкретных поверхностей приходится иногда отказываться от такого соглашения. Голоморфные векторные поля вида

$$Z = a(z)\frac{\partial}{\partial z_1} + b(z)\frac{\partial}{\partial z_2} + c(z)\frac{\partial}{\partial z_3} + d(z)\frac{\partial}{\partial z_4}$$

в этом пространстве будем записывать в форме

$$Z = (a(z), b(z), c(z), d(z)).$$

Здесь $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ — вектор комплексных координат в $\mathbb{C}^4$, а компоненты поля Z — голоморфные функции вблизи точки Q.

Касание полем Z вещественной гиперповерхности M 4-мерного комплексного пространства означает, что

$$\operatorname{Re}(Z(\Phi))|_M \equiv 0. \tag{2.1}$$

В этом тождестве $\Phi(z,\bar{z})$ — определяющая функция поверхности M, заданная и имеющая ненулевой дифференциал вблизи точки Q.

Важной для нас является теорема Фробениуса (см., например, [3]) о размерности орбит (или интегральных поверхностей) алгебр векторных полей. В соответствии с этой теоремой, орбита 7-мерной алгебры $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей является вещественной гиперповерхностью в $\mathbb{C}^4$, если в точке Q (как и во всех близких к ней точках) значения полей из $\mathfrak{g}$ образуют вещественную гиперплоскость в этом пространстве (или, упрощенно говоря, алгебра имеет в данной точке ранг, равный 7). Для каждой из получаемых ниже 7-мерных алгебр мы обсуждаем их орбиты после проверки условия на ранг, не комментируя эту проверку отдельными пояснениями.

Определение 2.2. Пусть вещественно-аналитическая гиперповерхность M пространства $\mathbb{C}^{n+1}$ задается вблизи точки Q (перенесенной в начало координат) уравнением

$$\operatorname{Im} z_{n+1} = F(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n, \operatorname{Re} z_{n+1}) \text{ с условиями } F(0) = 0,\ dF(0) = 0. \tag{2.2}$$

Если при этом матрица Гессе поверхности (2.2), т. е. эрмитова матрица

$$H = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z_k \partial \bar{z}_j}\right)(0), \quad k, j \in \{1, \dots, n\}, \tag{2.3}$$

является вырожденной (невырожденной), то поверхность M называется *вырожденной* (*невырожденной*) *по Леви* в обсуждаемой точке Q.

Определение 2.3. Если Γ — многообразие в $\mathbb{R}^n$, то $M = \Gamma + i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ называется *трубкой*, или *трубчатым многообразием* над Γ.

3. Алгебры Ли размерности 7 и их абелевы подалгебры

Количество вещественных 7-мерных алгебр Ли, представляющих интерес в обсуждаемой задаче об однородности в качестве алгебр с минимально возможной размерностью, является очень большим. Приведем здесь два утверждения, относящиеся к 7-мерным алгебрам.

Теорема 3.1 (основной результат работы [26], Theorem 5.1)**.** *Класс вещественных 7-мерных разрешимых (неразложимых) алгебр Ли состоит из 939 семейств алгебр.*

Разложение этого класса на подклассы алгебр, имеющих нильрадикалы размерностей 4, 5, 6, 7, соответственно, описывается разложением

$$939 = (8 + 188 + 594 + 149).$$

Замечание 3.1. Учитывая еще разложимые (разрешимые и неразрешимые) алгебры Ли и список из 7 типов неразложимых неразрешимых алгебр, можно говорить о 1325 типах 7-мерных вещественных алгебр Ли.

Для самого большого подсемейства алгебр из теоремы 3.1 изучение задачи о невырожденных не сводимых к трубкам орбитах фактически завершается в данной статье. В упоминавшейся серии работ [5,10,11,13,14] такие орбиты изучены в связи с максимальной размерностью и количеством абелевых подалгебр такой размерности, содержащихся в изучаемых алгебрах.

Наиболее общим фактом, доказанным в последнее время, является следующее утверждение.

Теорема 3.2 (см. [14])**.** *Пусть в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ $(n \geqslant 3)$ задана $(2n+1)$-мерная вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей. Если эта алгебра имеет полный ранг вблизи некоторой точки Q и содержит $(2n-1)$-мерную абелеву подалгебру, то голоморфно однородная вещественная гиперповерхность, содержащая Q и являющаяся орбитой алгебры $\mathfrak{g}$, вырождена по Леви.*

Следствие 3.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная 7-мерная алгебра голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, содержащая 5-мерную абелеву подалгебру. Тогда все 7-мерные орбиты $\mathfrak{g}$ вырождены по Леви.*

Обозначим через $A_{7,4}$ множество алгебр из списка [24], у которых максимальная размерность абелевых подалгебр равна 4.

С помощью компьютерных алгоритмов (см. [5]) установлено, что из 594 типов алгебр работы [24] большинство имеет либо 5-мерные абелевы подалгебры, либо три различных 4-мерных абелевых подалгебры. В работах [11,14] для алгебр Ли, обладающих одним из этих двух свойств, доказана вырожденность или трубчатость всех орбит в $\mathbb{C}^4$.

В связи с этим основной содержательный интерес в обсуждаемой задаче представляют лишь 104 типа алгебр из [24]:

– 66 типов из них содержат две 4-мерных абелевых подалгебры;

– 33 типа содержат единственную 4-мерную абелеву подалгебру;
– 5 типов содержат лишь 3-мерные абелевы подалгебры.

При этом в работе [10] изучен случай двух 4-мерных абелевых подалгебр; исследования орбит 7-мерных алгебр Ли из [24] с единственной 4-мерной абелевой подалгеброй в настоящее время завершаются. Предварительный вывод из этих исследований заключается в том, что алгебрам Ли из семейства $A_{7,4}$ соответствуют не более 42 семейств (типов) Леви-невырожденных голоморфно однородных гиперповерхностей в $\mathbb{C}^4$, не сводимых к трубкам.

В настоящей статье мы обсуждаем пять типов 7-мерных алгебр Ли из [24], содержащих лишь 3-мерные абелевы подалгебры.

Замечание 3.2. Среди 188 типов алгебр Ли с 5-мерными нильрадикалами также имеются алгебры, содержащие лишь 3-мерные абелевы подалгебры. 4-мерные нильрадикалы восьми типов алгебр Ли из [26] автоматически оказываются абелевыми идеалами.

4. Коммутационные соотношения в обсуждаемых алгебрах Ли

К пяти типам изучаемых в этой статье алгебр Ли относятся алгебры $[7,[6,12],1,1]$ (один тип) и $[7,[6,16],1,k]$ $(k=1,2,3,4)$ (четыре типа). Таблицы коммутационных соотношений (в некоторых канонических базисах) для этих алгебр приведены ниже.

Уточним на примере алгебры $[7,[6,12],1,1]$, что, по сложившейся традиции, нетривиальными значениями $[e_j,e_k]$ заполняется только правая верхняя часть таблицы, соответствующая неравенствам $j<k$; элементы ее левой нижней части $(j>k)$ определяются условием антикоммутативности $[e_j,e_k]=-[e_k,e_j]$, но в таблицу не заносятся; диагональные коммутаторы $[e_k,e_k]$ равны нулю в силу того же условия антикоммутативности. Эти нулевые значения также не вносятся в таблицу.

Таб. 1. Коммутационные соотношения в алгебре Ли $[7,[6,12],1,1]$

Tab. 1. Commutation relations in the Lie algebra $[7,[6,12],1,1]$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1							$7e_1$
e_2					e_1		$5e_2$
e_3				$-e_1$		e_2	$4e_3$
e_4					e_2	e_3	$3e_4$
e_5						e_4	$2e_5$
e_6							e_6
e_7							

Вторая таблица, описывающая общим образом коммутационные соотношения в алгебрах $[7,[6,16],1,k]$ $(k=1,2,3,4)$, состоит из двух частей. В ее левой части содержится описание нильпотентной 6-мерной алгебры Ли $[6,16]$, являющейся идеалом в любой из алгебр четырех обсуждаемых типов. В четырех столбцах правой части по отдельности выписаны значения коммутаторов $[e_j,e_7]$, $j=1,\dots,6$ для этих четырех типов алгебр.

Таб. 2. Коммутационные соотношения в алгебрах Ли $[7,[6,16],1,k]$, $k=1,2,3,4$

Tab. 2. Commutation relations in the Lie algebras $[7,[6,16],1,k]$, $k=1,2,3,4$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	$e_7^{(1)}$	$e_7^{(2)}$	$e_7^{(3)}$	$e_7^{(4)}$
e_1							$(2m+3)e_1$	$2e_1$	e_1	$2e_1$
e_2					e_1		$(m+3)e_2$	e_2	$2e_2$	e_2
e_3				$-e_1$		e_2	$(m+2)e_3$	e_3	e_3	e_3
e_4						e_3	$(m+1)e_4$	e_4		e_4
e_5						e_4	me_5	e_5	$-e_5$	e_2+e_5
e_6							e_6		εe_1+e_6	

Отметим, что тип $[7,[6,16],1,1]$ содержит однопараметрическое семейство алгебр Ли с параметром $m \in \mathbb{R}$ (в оригинальной работе [24] этот параметр обозначен символом «a»); в тип $[7,[6,16],1,3]$ входят две алгебры Ли, отвечающие значениям параметра $\varepsilon = \pm 1$; каждый из трех остальных типов $[7,[6,12],1,1]$, $[7,[6,16],1,2]$ и $[7,[6,16],1,4]$ представлен единственной алгеброй Ли.

Замечание 4.1. У каждой алгебры Ли из пяти представленных типов помимо абелева идеала $I_3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ имеется еще три абелевы подалгебры $I'_3 = \langle e_1, e_2, e_4 \rangle$, $I''_3 = \langle e_1, e_3, e_5 \rangle$ и $I'''_3 = \langle e_1, e_2, e_6 \rangle$.

5. Схема изучения невырожденных орбит

Схема изучения невырожденных орбит 7-мерных алгебр Ли с 3-мерными абелевыми идеалами повторяет, в целом, аналогичный двухшаговый подход, описанный, например, в [10] для случая 4-мерных абелевых подалгебр:

– на 1-м шаге схемы строится «каноническая» реализация абстрактных алгебр Ли в виде алгебр векторных полей в $\mathbb{C}^4$;
– на 2-м шаге эти реализации интегрируются.

Одним из главных отличий случая, изучаемого в данной статье, от уже использованных утверждений является сведение обсуждений не к трем, а к двум основным случаям.

Предложение 5.1 (аналог леммы 7.1 из [9]). *Пусть невырожденная по Леви гиперповерхность M является орбитой 7-мерной алгебры $\mathfrak{g}_7$ голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, а сама эта алгебра содержит 3-мерную абелеву подалгебру $\mathfrak{h}_3$. Тогда произвольный (упорядоченный) базис e_1, e_2, e_3 подалгебры $\mathfrak{h}_3$ можно привести голоморфной заменой координат к одному из двух видов*:

1. $e_1 = (0,0,0,1), \quad e_2 = (0,0,1,0), \quad e_3 = (0,1,0,0)$;
2. $e_1 = (0,0,0,1), \quad e_2 = (0,0,1,0), \quad e_3 = (0,0,c_3(z_1,z_2), d_3(z_1,z_2))$.

Доказательство. Одно ненулевое векторное поле в пространстве $\mathbb{C}^n$ любой размерности n можно превратить, например, в дифференцирование по переменной z_n (выпрямить) в силу известных утверждений из теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В случае невырожденной гиперповерхности M многомерного комплексного пространства второе ненулевое векторное поле, касательное к M и коммутирующее с первым полем, можно превратить в дифференцирование по еще одной комплексной переменной, в соответствии с обсуждениями работ [11, 16]. В этих же работах объясняется и упрощение третьего поля из тройки коммутирующих полей. □

Использование коммутационных соотношений позволяет далее упростить (в каждом из двух случаев предложения 5.1) весь базис обсуждаемой алгебры Ли и привести его к некоторому «каноническому виду».

Отметим, что первый шаг описанной схемы естественно разбить еще на два этапа.

– На первом этапе реализуются в виде векторных полей в $\mathbb{C}^4$ базисные элементы 6-мерной нильпотентной подалгебры, имеющейся у всех алгебр работы [24].
– В случае успешной реализации первого этапа на втором этапе для каждого из пяти типов алгебр обсуждается возможность реализации базисного элемента e_7 в виде векторного поля в $\mathbb{C}^4$, удовлетворяющего коммутационным соотношениям в рассматриваемой алгебре.

Отметим, что для конкретной алгебры первый шаг схемы может оказаться противоречивым как на первом ее этапе, так и на втором.

Замечание 5.1. В [1] описанная схема голоморфной реализации эффективно использована при описании орбит разложимых 7-мерных алгебр Ли, не являющихся предметом данной статьи.

6. Реализация алгебры $[7,[6,12],1,1]$ векторными полями

Для алгебры $[7,[6,12],1,1]$ реализация первого шага описанной выше схемы приводит к следующим утверждениям.

Предложение 6.1. *Пусть* 7*-мерная алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *голоморфных векторных полей в* $\mathbb{C}^4$ *имеет структуру абстрактной алгебры Ли* $[7,[6,12],1,1]$ *и тройка полей* e_1, e_2, e_3 *имеет выпрямленный вид случая* 1 *из предложения* 5.1. *Тогда все* 7*-мерные орбиты этой алгебры могут быть только вырожденными по Леви.*

Доказательство. Доказательство повторяет технические приемы, использованные в серии работ [5, 10, 11, 13, 14]. Уточним, что первыми их реализовали авторы статьи [16].

Покажем, что случай

$$e_1 = (0,0,0,1)\,,\ e_2 = (0,0,0,1)\,,\ e_3 = (0,0,0,1) \tag{6.1}$$

невозможен при допущении существования невырожденной орбиты у обсуждаемой 7-мерной алгебры $\mathfrak{g}$. Из четырех коммутационных соотношений таблицы 1

$$[e_1, e_4] = 0,\ [e_2, e_4] = 0,\ [e_1, e_6] = 0,\ [e_2, e_6] = 0$$

следует, что компоненты полей e_4, e_6 могут зависеть только от переменных z_1, z_2. Еще из двух соотношений

$$[e_3, e_4] = -e_1,\ [e_3, e_6] = e_2$$

получаем тогда упрощенный вид полей

$$\begin{aligned} e_4 &= (a_4(z_1), b_4(z_1), c_4(z_1), -z_2 + d_4(z_1)),\\ e_6 &= (a_6(z_1), b_6(z_1), z_2 + c_6(z_1), d_6(z_1)). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Для поля e_5 получаем из соотношений $[e_1, e_5] = 0$, $[e_2, e_5] = e_1$, $[e_3, e_5] = 0$ аналогичное упрощение до вида

$$e_5 = (a_5(z_1), b_5(z_1), c_5(z_1), z_3 + d_5(z_1)). \tag{6.3}$$

Теперь в рамках первого случая обсудим два подслучая, связанные с возможным обращением в нуль компоненты $a_4(z_1)$ поля e_4.

В подслучае 1.1 при $a_4(z_1) \neq 0$ вблизи обсуждаемой точки можно (пользуясь леммой о линеаризации из [12]) привести поле e_4 к виду

$$e_4 = (1, 0, 0, -z_2) \tag{6.4}$$

с сохранением вида (6.1), (6.2), (6.3) упрощенных формул для остальных рассмотренных выше полей e_1, e_2, e_3, e_5, e_6.

Но с учетом формулы (6.4) из соотношений $[e_4, e_5] = e_2$, $[e_4, e_6] = e_3$ следует, что первые компоненты полей e_5 и e_6 могут быть только константами. Этот вывод противоречит еще одному коммутационному соотношению $[e_5, e_6] = e_4$ из таблицы 1, так как первая компонента поля e_4 из формулы (6.4) равна единице, а у коммутатора $[e_5, e_6]$ она тождественно нулевая.

Это означает, что в подслучае 1.1 реализации алгебры $[7,[6,12],1,1]$, допускающие хотя бы одну невырожденную орбиту в пространстве $\mathbb{C}^4$, невозможны.

Переходим к подслучаю 1.2, в котором $a_4(z_1) \equiv 0$. Здесь можно воспользоваться еще одним стандартным соображением о вырожденности по Леви (и даже о голоморфной вырожденности) орбиты 7-мерной алгебры голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, у которой шесть базисных полей имеют тождественно нулевую первую компоненту (см., например, [11]).

В силу этого соображения одна из двух компонент $a_5(z_1)$ либо $a_6(z_1)$ полей из формул (6.2) и (6.3) обязательно отлична от нуля (при допущении существования невырожденной орбиты у обсуждаемой 7-мерной алгебры). В каждом из этих двух случаев рассуждения, аналогичные описанным выше, также приводят к противоречиям. □

С учетом предложения 6.1 все реализации алгебры $[7,[6,12],1,1]$ в виде алгебр векторных полей в $\mathbb{C}^4$, допускающие невырожденные по Леви орбиты, возможны только в рамках случая 2 из предложения 5.1. Поэтому результат обсуждений случая 2 является итоговым для всех возможных интересующих нас реализаций алгебры $[7,[6,12],1,1]$. Сформулируем этот результат следующим образом.

Теорема 6.1. *Пусть алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *голоморфных векторных полей в* $\mathbb{C}^4$ *имеет структуру абстрактной алгебры Ли* $[7,[6,12],1,1]$. *Если* $\mathfrak{g}$ *имеет полный ранг вблизи некоторой точки* Q

и хотя бы одну невырожденную орбиту в $\mathbb{C}^4$, *содержащую точку* Q, *то голоморфной заменой координат базис этой алгебры можно привести к виду* ($q, r \in \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0,0,0,1)\,,\\
e_2 &= (0,0,1,0)\,,\\
e_3 &= (0,0,-z_1,z_2)\,,\\
e_4 &= (0,1,0,0)\,,\\
e_5 &= \left(0,-z_1,z_2+\frac{1}{3}z_1^3,z_3+qz_1^5\right),\\
e_6 &= \left(1,0,-z_1z_2-5qz_1^4,\frac{1}{2}z_2^2+rz_1^6\right),\\
e_7 &= (z_1,3z_2,5z_3,7z_4)\,.
\end{aligned} \tag{6.5}$$

Доказательство. В случае 2 предложения 5.1 тройка полей e_1, e_2, e_3 имеет вид

$$e_1=(0,0,0,1)\,,\ e_2=(0,0,0,1)\,,\ e_3=(0,0,c_3(z_1,z_2),d_3(z_1,z_2))\,. \tag{6.6}$$

При этом в силу коммутационных соотношений $[e_1,e_4]=[e_2,e_4]=0$ компоненты поля e_4 могут зависеть только от переменных z_1, z_2.

Предположим сначала, что две первые компоненты $a_4(z_1,z_2)$ и $b_4(z_1,z_2)$ этого поля тождественно равны нулю (в некоторой окрестности обсуждаемой точки $Q\in\mathbb{C}^4$). В совокупности с аналогичными тождествами для базисных полей e_1, e_2, e_3 это означало бы в силу условия (2.1) независимость определяющей функции любой орбиты обсуждаемой 7-мерной алгебры от переменных z_3, z_4. Для Леви-невырожденной гиперповерхности такое невозможно, следовательно,

$$(a_4(z_1,z_2),b_4(z_1,z_2)\neq(0,0).$$

При выполнении этого условия мы можем голоморфной заменой переменных z_1, z_2 превратить поле e_4 в

$$e_4=(0,1,c_4(z_1,z_2),d_4(z_1,z_2)). \tag{6.7}$$

После еще одной замены переменных $z_3^*=z_3+\varphi(z_1,z_2)$, $z_4^*=z_4+\psi(z_1,z_2)$ с функциями $\varphi(z_1,z_2)$, $\psi(z_1,z_2)$, удовлетворяющими условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}+c_4(z_1,z_2)=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial z_2}+d_4(z_1,z_2)=0,$$

поле e_4 выпрямляется до состояния $e_4=(0,1,0,0)$.

Поля e_1, e_2, e_3 при этом сохранят свой вид (6.6), но из соотношения $[e_3,e_4]=-e_1$ с упрощенным полем e_4 теперь легко получить условия

$$\frac{\partial c_3}{\partial z_2}=0,\quad \frac{\partial d_3}{\partial z_2}=1.$$

В силу этих условий можно считать, что компоненты $c_3(z_1,z_2)$ и $d_3(z_1,z_2)$ упрощаются до вида $c_3(z_1)$ и $z_2+d_3(z_1)$ соответственно.

Обсудим теперь возможные упрощения полей e_5 и e_6 обсуждаемой алгебры, вытекающие из коммутационных соотношений таблицы 1.

Из четверки соотношений

$$[e_1,e_5]=0,\ [e_2,e_5]=e_1,\ [e_1,e_6]=0,\ [e_2,e_6]=0$$

следует, что компоненты поля e_6 могут зависеть только от пары переменных z_1, z_2, а у поля e_5 лишь в последней компоненте появляется отличная от этой пары переменная z_3:

$$e_5=(a_5(z_1,z_2),b_5(z_1,z_2),c_5(z_1,z_2),z_3+d_5(z_1,z_2)),\quad e_6=(a_6(z_1,z_2),b_6(z_1,z_2),c_6(z_1,z_2),d_6(z_1,z_2)).$$

Два соотношения $[e_4,e_5]=e_2$ и $[e_4,e_6]=e_3$ превращаются с учетом выпрямленного вида e_4 в

$$\frac{\partial}{\partial z_2}(a_5,b_5,c_5,d_5)=(0,0,1,0),\quad \frac{\partial}{\partial z_2}(a_6,b_6,c_6,d_6)=(0,0,c_3,z_2+d_3).$$

Еще два соотношения $[e_3, e_5] = 0$, $[e_3, e_6] = e_2$ означают справедливость следующих четырех условий:

$$\begin{gathered} a_5(z_1, z_2)c_3'(z_1) = 0, \quad -a_5(z_1, z_2)d_3'(z_1) + b_5(z_1, z_2) = c_3(z_1), \\ -a_6(z_1, z_2)c_3'(z_1) = 1, \quad -a_6(z_1, z_2)d_3'(z_1) + b_6(z_1, z_2) = 0. \end{gathered} \tag{6.8}$$

Из этих уравнений вытекают равенства

$$a_5(z_1, z_2) \equiv 0, \quad b_5(z_1, z_2) = c_3(z_1)$$

и независимость функций

$$a_6 = -\frac{1}{c_3'(z_1)} \neq 0, \quad b_6 = a_6 d_3'(z_1)$$

от переменной z_2. После таких упрощений поле e_6 принимает вид

$$e_6 = (a_6(z_1), a_6(z_1), c_6(z_1, z_2), d_6(z_1, z_2)).$$

Пользуясь неравенством $a_6(z_1) \neq 0$, можно за счет голоморфной замены переменной z_1 сделать этот ненулевой коэффициент единичной константой. Тогда в силу упрощения соотношений (6.8) получим

$$c_3'(z_1) = -1, \quad c_3(z_1) = -z_1 + C_3, \quad b_6(z_1) = d_3'(z_1).$$

Используя еще сдвиг $z_1^* = z_1 + C_3$, выпишем полученные промежуточные результаты упрощения базисных полей алгебры:

$$\begin{gathered} e_3 = (0, 0, -z_1, z_2 + d_3(z_1)), \\ e_5 = (0, -z_1, z_2 + c_5(z_1), d_5(z_1), \\ e_6 = \left(1, d_3'(z_1), -z_1 z_2 + c_6(z_1), \frac{1}{2}z_2^2 + z_2 d_3(z_1) + d_6(z_1)\right). \end{gathered}$$

Заметим теперь, что в рамках 6-мерного нильрадикала $[6, 12]$ изучаемой алгебры осталось не рассмотренным лишь одно коммутационное соотношение $[e_5, e_6] = e_4$. Связанные с ним несложные выкладки (которые мы опускаем) приводят к следующему виду шести базисных полей этой нильпотентной алгебры:

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & (0, 0, 0, 1)\,, \\ e_2 & = & (0, 0, 1, 0)\,, \\ e_3 & = & (0, 0, -z_1, z_2 + d_3(z_1))\,, \\ e_4 & = & (0, 1, 0, 0)\,, \\ e_5 & = & (0, -z_1, z_2 + c_5(z_1), z_3 + d_5(z_1))\,, \\ e_6 & = & \left(1, d_3'(z_1), -z_1 z_2 + c_6(z_1), \dfrac{1}{2}z_2^2 + z_2 d_3(z_1) + d_6(z_1)\right), \end{array} \tag{6.9}$$

где

$$c_5'(z_1) + d_3'(z_1) = z_1^2, \quad c_6(z_1) = -z_1 d_3(z_1) - d_5'(z_1).$$

Для завершения доказательства теоремы 6.1 остается рассмотреть коммутаторы всех полей из базиса (6.9) с полем e_7, которое должно удовлетворять всем оставшимся соотношениям из таблицы 1. Голоморфные функции, являющиеся компонентами этого поля, определяются из пошагового рассмотрения этих соотношений. Например, коммутаторы поля e_7 с тройкой выпрямленных полей e_1, e_2, e_4 дают, в силу таблицы 1, следующую структуру этого поля:

$$e_7 = (a_7(z_1), 3z_2 + b_7(z_1), 5z_3 + c_7(z_1), 7z_4 + d_7(z_1)).$$

Конкретный вид функций a_7, b_7, c_7, d_7 и итоговая уточненная информация о компонентах $d_3(z_1)$, $d_5(z_1)$, $d_6(z_1)$ базиса (6.9) определяются из оставшихся коммутационных соотношений

$$[e_3, e_7] = 4e_3, \quad [e_5, e_7] = 2e_5, \quad [e_6, e_7] = e_6.$$

Достаточно утомительные выкладки перехода к итоговым формулам (6.5) для алгебры $[7, [6, 12], 1, 1]$ мы здесь не приводим. Отметим лишь, что их смысл заключается в выписывании и исследовании системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенной относительно производных нескольких неизвестных функций $a_k(z_1)$, $b_k(z_1)$, $c_k(z_1)$, $d_k(z_1)$. $\square$

Замечание 6.1. В отличие от доказанной теоремы, для других алгебр из списка [24] даже доведение базисов их нильрадикалов до состояния, аналогичного (6.9), оказывается возможным далеко не всегда. Противоречия часто возникают и на этапе перехода от реализованного 6-мерного нильрадикала ко всей 7-мерной алгебре.

7. Реализации и запреты для алгебр с нильрадикалом $[6,16]$

Схема изучения голоморфных реализаций, описанная выше на примере алгебры $[7,[6,12],1,1]$, применяется и для семейства алгебр $[7,[6,16],1,k]$ $(k=1,2,3,4)$. Так, в случае 1 предложения 5.1 голоморфные реализации 6-мерной алгебры $[6,16]$ описываются следующим утверждением.

Предложение 7.1. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ имеет структуру абстрактной алгебры Ли $[7,[6,16],1,k]$, $k\in\{1,2,3,4\}$. Если эта алгебра имеет полный ранг вблизи некоторой точки Q, а поля e_1, e_2, e_3 выпрямлены, то заменой координат в пространстве $\mathbb{C}^4$ базис 6-мерного нильпотентного идеала этой алгебры можно привести к виду $(C_k, D_k\in\mathbb{C})$*

$$\begin{aligned}
e_1 &= (0,0,0,1)\,,\\
e_2 &= (0,0,1,0)\,,\\
e_3 &= (0,1,0,0)\,,\\
e_4 &= \Big(0,-z_1,-\Big(\frac{1}{2}z_1^2+C_4\Big),-z_2+D_4\Big)\,,\\
e_5 &= \Big(0,\frac{1}{2}z_1^2+C_4,\frac{1}{3}z_1^3+C_5,z_3-D_4z_1+D_5\Big)\,,\\
e_6 &= (1,0,z_2,0)\,.
\end{aligned}\tag{7.1}$$

Доказательство этого факта является чисто техническим, его детали мы здесь не приводим.

Дальнейшие попытки «присоединить» поле e_7 к такому набору приводят при $k=2$ и при $k=4$ к противоречию. В самом деле, при таких k поле $e_7=(a_7(z),b_7(z),c_7(z),d_7(z))$ должно подчиняться шести коммутационным соотношениям, зафиксированным в последнем столбце таблицы 2 и связанным с коммутаторами $[e_k,e_7]$ $(k=1,\dots,6)$. При этом из соотношений

$$[e_1,e_7]=2e_1,\ [e_2,e_7]=e_2,\ [e_3,e_7]=e_3,\ [e_6,e_7]=0$$

выводится упрощенный вид поля

$$e_7=(A_7,z_2+B_7,z_3+B_7z_1+C_7,2z_4+D_7)$$

с некоторыми комплексными константами A_7, B_7, C_7, D_7.

Тогда из $[e_4,e_7]=e_4$ следует, что компонента A_7 поля e_7 — нулевая константа. Шесть нулевых компонент (в первом столбце) у семи базисных полей означают независимость определяющей функции орбиты от переменных z_2, z_3, z_4. Форма Леви такой поверхности оказывается тождественно нулевой, что является крайней («сильной») степенью ее вырожденности.

Предложение 7.2. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$ имеет структуру абстрактной алгебры* $[7,[6,16],1,k]$ *при $k=1$ или $k=3$. Если эта алгебра имеет полный ранг вблизи некоторой точки Q, а поля e_1, e_2, e_3 выпрямлены, то с точностью до голоморфных преобразований базис такой алгебры описывается следующим образом*:

1. *в формулах* (7.1) *константы C_4, D_4, C_5, D_5 необходимо положить равными нулю*;
2. *при $k=1$ поле e_7 имеет вид*

$$e_7=(z_1,(m+2)z_2,(m+3)z_3,(2m+3)z_4+D_7)\,,$$

а при $k=3$

$$e_7=(z_1,z_2,2z_3,z_4+\varepsilon z_1).$$

Аналогичными рассуждениями показывается, что и во втором случае предложения 5.1 алгебры $[7,[6,16],1,2]$ и $[7,[6,16],1,4]$ не допускают голоморфных реализаций с невырожденными орбитами в пространстве $\mathbb{C}^4$. Содержательный интерес здесь представляет следующее утверждение об алгебрах Ли с нильрадикалом $[6,16]$.

Предложение 7.3. *В рамках случая 2 предложения 5.1 базисы алгебр Ли $[7,[6,16],1,1]$ и $[7,[6,16],1,3]$, допускающих реализации с Леви-невырожденными орбитами в $\mathbb{C}^4$, описываются с точностью до голоморфных замен координат следующими формулами:*

$$[7,[6,16],1,3]: \quad \begin{array}{rcl} e_1 &=& (0,0,0,1)\,, \\ e_2 &=& (0,0,1,0)\,, \\ e_3 &=& (0,0,-z_1,z_2)\,, \\ e_4 &=& (0,1,0,0)\,, \\ e_5 &=& \left(0,-z_1,\dfrac{1}{3}z_1^3, z_3-\dfrac{1}{2}D_3z_1^2\right), \\ e_6 &=& \left(1,0,-z_1(z_2-D_3),\dfrac{1}{2}(z_2^2-D_3^2)\right), \\ e_7 &=& (z_1,0,2z_3,z_4+\varepsilon z_1)\,; \end{array} \tag{7.2}$$

в случае $[7,[6,16],1,1]$ шесть первых полей описываются теми же формулами (7.2), а

$$e_7=\left(z_1,(m+1)z_2,(m+3)z_3-\frac{1}{2}(m+1)D_3z_1^2,(2m+3)z_4+(m+1)D_3^2z_1+D_7\right).$$

8. Интегрирование полученных реализаций

Интегрирование полученных алгебр с базисами, полиномиально зависящими от переменных, представляет собой трудоемкую процедуру. Поэтому для реализованного в пространстве $\mathbb{C}^4$ семейства $[7,[6,16],1,k]$, $(k=1,3)$ ниже приводятся лишь результаты такого интегрирования. В то же время пример описания орбит реализации алгебры $[7,[6,12],1,1]$ при значениях параметров $q=r=0$ мы рассмотрим более детально.

Теорема 8.1. *С точностью до голоморфных замен координат все невырожденные орбиты в пространстве $\mathbb{C}^4$ алгебр $[7,[6,16],1,k]$ $(k=1,3)$ описываются следующими формулами:*

$$y_4=Cy_1^{\alpha}+T_j, \quad \alpha\neq 0,$$
$$y_4=C\ln y_1+T_j,$$
$$y_4=\varepsilon y_1\ln y_1+T_j, \quad \varepsilon=\pm 1,$$

где $j=1,2$,

$$T_1=-\frac{3}{2y_1^3}(x_1y_2-y_3)^2-\frac{3A}{y_1^2}(x_1y_2-y_3)-\frac{1}{2y_1}\left(3A^2-(B-y_2)^2\right),$$
$$T_2=Kx_1y_2-\frac{L}{2}y_1y_2+\frac{1}{6}y_1y_2^2+\frac{y_2}{2y_1}\left(y_3+Lx_1^2-x_1^2y_2\right),$$

A, B, C, K, L — некоторые вещественные константы.

Замечание 8.1. Приведенная формулировка подразумевает положительность координаты $y_1=\operatorname{Im} z_1$ для всех точек, лежащих на предъявленных в теореме орбитах. При обсуждении локальных свойств этих гиперповерхностей вблизи выделенной точки Q приходится считать эту точку отличной от начала координат пространства $\mathbb{C}^4$.

Уточним еще, что первое уравнение из формулировки теоремы соответствует при различных значениях показателя α алгебрам из семейства $[7,[6,16],1,1]$ при $m\neq -3/2$, соответственно, в первом $(j=1)$ и втором $(j=2)$ случаях предложения 5.1. Значение $m=-3/2$ обращает в нуль коэффициент при переменной z_4 поля e_7 из предложений 7.2 и 7.3. Этому значению соответствует второе уравнение из формулировки теоремы (также в двух случаях $j=1,2$). Третье уравнение описывает (в двух случаях) орбиты алгебр $[7,[6,16],1,3]$.

Пример. Обсудим орбиты алгебры (6.5) с параметрами $q=r=0$. Пусть $\Phi(z,\bar z)=0$ — искомое уравнение какой-либо из таких орбит.

Уравнения (2.1), отвечающие полям e_1, e_2, e_4 из набора (6.5), означают, что искомая функция Φ не зависит от переменных x_2, x_3, x_4. А система оставшихся четырех уравнений (после перехода к вещественным переменным $x_k = \operatorname{Re} z_k$, $y_k = \operatorname{Im} z_k$) имеет вид

$$-y_1\frac{\partial\Phi}{\partial y_3} + y_2\frac{\partial\Phi}{\partial y_4} = 0, \qquad -y_1\frac{\partial\Phi}{\partial y_2} + \left(y_2 + x_1^2 y_1 - \frac{1}{3}y_1^3\right)\frac{\partial\Phi}{\partial y_3} + y_3\frac{\partial\Phi}{\partial y_4} = 0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - (x_1y_2 + x_2y_1)\frac{\partial\Phi}{\partial y_3} + x_2y_2\frac{\partial\Phi}{\partial y_4} = 0, \quad x_1\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial\Phi}{\partial y_1} + 3y_2\frac{\partial\Phi}{\partial y_2} + 5y_3\frac{\partial\Phi}{\partial y_3} + 7y_4\frac{\partial\Phi}{\partial y_4} = 0.$$

Заметим, что третье уравнение системы содержит фрагмент, представляющий собой левую часть первого уравнения системы, умноженную на x_2. За счет такого наблюдения можно заменить это уравнение на более простое:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1} - x_1y_2\frac{\partial\Phi}{\partial y_3} = 0.$$

Далее можно воспользоваться пошаговым решением отдельных уравнений этой системы. Так, решение первого ее уравнения имеет вид

$$\Phi(x_1, y_1, y_2, y_3, y_4) = F(x_1, y_1, y_2, y_1y_4 + y_2y_3)$$

с произвольной аналитической функцией F.

Обозначая ее аргументы в последнем равенстве через t_1, t_2, t_3, t_4 соответственно, можно переписать три оставшихся уравнения системы в виде

$$-t_2\frac{\partial F}{\partial t_3} + \left(t_3^2 + t_1^2t_2t_3 - \frac{1}{3}t_2^3t_3\right)\frac{\partial F}{\partial t_4} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t_1} - t_1t_3^2\frac{\partial F}{\partial t_4} = 0, \quad t_1\frac{\partial F}{\partial t_1} + t_2\frac{\partial F}{\partial t_2} + 3t_3\frac{\partial F}{\partial t_3} + 8t_4\frac{\partial F}{\partial t_4} = 0.$$

Решая далее первое уравнение полученной системы, естественно перейти к очередному сокращенному набору переменных

$$s_1 = t_1, \quad s_2 = t_2, \quad s_3 = 2t_3^3 + 3t_1^2t_2t_3^2 - t_2^3t_3^2 + 6t_2t_4$$

и к функции $F(t_1, t_2, t_3, t_4) = G(s_1, s_2, s_3)$.

Одно из двух остающихся уравнений превращается теперь в $\dfrac{\partial G}{\partial s_1} = 0$, а последнее уравнение исходной системы принимает вид

$$s_2\frac{\partial G}{\partial s_2} + 9s_3\frac{\partial G}{\partial s_3} = 0.$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем уравнения орбит в виде

$$(6y_1^2y_4 + 6y_1y_2y_3 + 2y_2^3) + (3x_1^2y_1y_2^2 - y_1^3y_2^2) = Cy_1^9, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{8.1}$$

Вычисляя гессиан этой вещественной гиперповерхности 4-мерного комплексного пространства, несложно убедиться, что в точках общего положения это многообразие является невырожденным по Леви.

Замечание 8.2. Мы рассмотрели здесь самый простой случай базиса (6.5), элементы которого содержат переменную z_1 не более чем в третьей степени. В общих ситуациях базисные поля содержат слагаемые z_1^4, z_1^5, z_1^6, что существенно усложняет процедуру «ручного» интегрирования соответствующих алгебр. В то же время использование пакета Maple и команды `pdsolve` (не гарантирующей, вообще говоря, получения всех решений системы уравнений в частных производных) также приводит к полиномиальным орбитам алгебр (6.5). Отметим, что девятая степень полиномов сохраняется и при компьютерном интегрировании этих алгебр.

Замечание 8.3. При пошаговом решении систем, подобных (7.2), важна очередность рассмотрения их отдельных уравнений. Произвольный порядок интегрирования таких уравнений не гарантирует получение окончательного ответа.

Замечание 8.4. Получение координатного представления однородного многообразия (по ассоциированной с ним алгебре Ли) может оказаться весьма затруднительным. В ряде работ о классификации таких многообразий (см., например, [15]) авторы ограничиваются только информацией о соответствующих этим многообразиям алгебрах.

9. О «простой» однородности орбит в пространстве $\mathbb{C}^4$

Важный класс однородных вещественных гиперповерхностей в пространствах $\mathbb{C}^n$ составляют «просто однородные» многообразия, размерность которых совпадает с размерностью их (полных) алгебр симметрий.

В $\mathbb{C}^3$ имеется только одна (см. [8]) нетрубчатая просто однородная (Леви-невырожденная) гиперповерхность

$$(y_3 - x_2 y_1)^2 + y_1^2 y_2^2 = y_1.$$

Она является орбитой (единственной) неразложимой неразрешимой 5-мерной алгебры Ли. Сама эта алгебра содержит лишь 2-мерную абелеву подалгебру, в отличие от других 5-мерных алгебр Ли, у которых абелевы подалгебры имеют размерности не меньше 3.

В связи с наличием в пространстве $\mathbb{C}^3$ «просто однородной» гиперповерхности, являющейся орбитой алгебры Ли с экстремально малой размерностью максимальных абелевых подалгебр, естественно предположить существование аналогичных многообразий в пространствах $\mathbb{C}^n$ больших размерностей. На примере 7-мерных алгебр Ли из списка [24] это предположение подтверждается.

Теорема 9.1. *При* $j = 1$, $\varepsilon = 1$, $A = B = 0$ *орбита алгебры* [7,[6,16]1,3] *имеет дискретный голоморфный стабилизатор и не сводится голоморфными преобразованиями к трубчатым гиперповерхностям.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения опирается на технику локальных нормальных форм Мозера (см. [18]) и вычисление (например, в пакете символьной математики Maple) младших многочленов нормального уравнения

$$y_4 = \frac{1}{2y_1} y_2^2 - \frac{3}{2y_1^3}(y_3 - x_1 y_2)^2 + y_1 \ln y_1 \tag{9.1}$$

обсуждаемой поверхности M (в какой-либо точке этой поверхности).

Для дальнейших обсуждений удобно использовать замену переменных $z^* = -iz$, переводящую $y_k = \operatorname{Im} z_k$ в $x_k^* = \operatorname{Re} z_k^*$ $(k = 1, 2, 3)$. Этой заменой уменьшается количество мнимых единиц в выкладках и, тем самым, несколько упрощаются вычисления. Для удобства таких вычислений сделаем еще одно растяжение $z_3 = z_3^*/\sqrt{3}$ и обозначим символом B число $\sqrt{3}$.

После этих договоренностей разложение определяющей функции поверхности M в ряд Тейлора (вблизи начальной точки $Q(i, 0, 0, 0) \in M \subset \mathbb{C}^4$), получаемое с помощью символьных вычислений, примет вид

$$y_4 = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x_1, y_1, x_2, x_3), \tag{9.2}$$

где каждый F_k — это однородный многочлен степени k от своих переменных. В частности,

$$F_1 = 2x_1, \quad F_2 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2, \quad F_3 = -x_1 x_2^2 + 3x_1 x_3^2 - 2By_1 x_2 x_3 - \frac{1}{3} x_1^3.$$

Последующие стандартные шаги приведения обсуждаемого уравнения к нормальной форме описаны как в работе [18], так и во многих статьях, использующих эту форму (см., например, [2, 6, 7]). Отметим легко получающийся из приведенной формулы для F_2 канонический вид

$$\langle z, z \rangle = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 \tag{9.3}$$

эрмитовой компоненты правой части уравнения (9.2), т. е. формы Леви поверхности M. Уточним еще, что здесь, в отличие от обсуждений начала статьи, через z обозначается вектор из трех комплексных координат (z_1, z_2, z_3) и, соответственно, $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$.

Для наших целей достаточно рассмотрения многочленов $N_{220}(z, \bar{z})$ и $N_{320}(z, \bar{z})$ из получающегося нормального уравнения, имеющих суммарные 4-ю и 5-ю степени относительно переменных z и $\bar{z}$. Эти многочлены являются, соответственно, элементами 27-мерного вещественного и 60-мерного комплексного пространств, что объясняет необходимость привлечения компьютерных вычислений при работе с ними. Для поверхности (9.1) получаемый многочлен N_{220} содержит в качестве слагаемых 20 мономов, т. е. имеет достаточно общий вид. В итоге группа всех линейных преобразований трех переменных z_1, z_2, z_3, сохраняющих пару $(\langle z, z\rangle, N_{220})$, сводится к однопараметрической группе поворотов $z_k \to e^{it} z_k$, $t \in \mathbb{R}, k = 1, 2, 3$ (очевидно сохраняющих любой многочлен N_{220}, имеющий вторую степень как по z, так и по $\bar{z}$).

С другой стороны, известны (см., например, [6,18]) голоморфные преобразования с тождественной линейной частью, сохраняющие N_{220} и нормальный вид уравнения обсуждаемой поверхности. При любом таком преобразовании

$$N^*_{320} = N_{320} + 2i \left(\langle z, a\rangle N_{220} - \langle z, z\rangle \sum_{k=1}^{3} \bar{a}_k \frac{\partial N_{220}}{\partial \bar{z}_k} \right), \ a \in \mathbb{C}^3,$$

а потому возмущения многочлена N_{320} в рамках нормальных уравнений ограничиваются видом многочлена N_{220}. В частности, многочлен N_{320} для гиперповерхности (9.1) содержит моном $z_3^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2$ с ненулевым коэффициентом. «Неполный» вид многочлена $N_{220}(z, \bar{z})$, содержащего лишь 20 мономов, не позволяет аннулировать $z_3^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2$ при возможных различных нормализациях исходного уравнения. По теореме Ежова (см. [4]) голоморфный стабилизатор обсуждаемой поверхности с сигнатурой $(+, +, -)$ формы Леви (9.3) линеаризуется в некоторых нормальных по Мозеру координатах. Сохранение еще и монома $z_3^3 \bar{z}_1 \bar{z}_2$ линейным преобразованием приводит к дискретности стабилизатора.

Невозможность сведения поверхности (9.1) голоморфными преобразованиями к трубкам следует теперь из того, что в алгебре симметрий любой трубчатой гиперповерхности пространства $\mathbb{C}^4$ имеется 4-мерная абелева подалгебра (сдвигов вдоль мнимых осей). Алгебра же $[7, [6, 12], 1, 1]$, являющаяся полной алгеброй симметрий поверхности (9.1), имеет, как отмечалось выше, лишь 3-мерные абелевы подалгебры. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Атанов А. В.* Орбиты разложимых 7-мерных алгебр Ли с $\mathfrak{sl}(2)$-подалгеброй// Уфимск. мат. ж. — 2022. — *14*, № 1. — С. 3–22.
2. *Белошапка В. К.* О размерности группы автоморфизмов аналитической гиперповерхности// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1979. — *43*, № 2. — С. 243–266.
3. *Бишоп Р. Л., Криттенден Р. Д.* Геометрия многообразий. — М.: Мир, 1967.
4. *Ежов В. В.* Линеаризация группы стабильности одного класса гиперповерхностей// Усп. мат. наук. — 1986. — *41*, № 3. — С. 181–182.
5. *Крутских В. В.* О голоморфных реализациях 7-мерных алгебр Ли// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2023. — № 4. — С. 115–128.
6. *Лобода А. В.* Однородные строго псевдовыпуклые гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$ двумерными группами изотропии// Мат. сб. — 2001. — *192*, № 12. — С. 3–24.
7. *Лобода А. В.* Аффинно-однородные вещественные гиперповерхности 3-мерного комплексного пространства// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2009. — № 2. — С. 71–91.
8. *Лобода А. В.* Голоморфно однородные вещественные гиперповерхности в $\mathbb{C}^3$// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2020. — *81*, № 2. — С. 205–280.
9. *Лобода А. В.* О задаче описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей четырехмерных комплексных пространств// Тр. МИАН. — 2020. — *311*. — С. 194–212.
10. *Лобода А. В.* О 7-мерных алгебрах Ли, допускающих Леви-невырожденные орбиты в $\mathbb{C}^4$// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2023. — *84*, № 2. — С. 205–230.
11. *Лобода А. В., Акопян Р. С., Крутских В. В.* О 7-мерных алгебрах голоморфных векторных полей в $\mathbb{C}^4$, имеющих 5-мерный абелев идеал// Дальневост. мат. ж. — 2023. — *23*, № 1. — С. 55–80.
12. *Лобода А. В., Атанов А. В.* Разложимые пятимерные алгебры Ли в задаче о голоморфной однородности в $\mathbb{C}^3$// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. — 2019. — *173*. — С. 86–115.
13. *Лобода А. В., Каверина В. К.* О вырожденности орбит нильпотентных алгебр Ли// Уфимск. мат. ж. — 2022. — *14*, № 1. — С. 57–83.
14. *Atanov A. V., Loboda A. V.* On degenerate orbits of real Lie algebras in multidimensional complex spaces// Russ. J. Math. Phys. — 2023. — *30*. — С. 432–442.
15. *Azad H., Huckleberry A., Richthofer W.* Homogeneous CR-manifolds// J. Reine Angew. Math. — 1985. — *358*. — С. 125–154.
16. *Beloshapka V. K., Kossovskiy I. G.* Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic// J. Geom. Anal. — 2010. — *20*, № 3. — С. 538–564.

17. *Cartan E.* Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes// Ann. Mat. Pura Appl. — 1932. — *11*, № 4. — C. 17–90.
18. *Chern S. S., Moser J. K.* Real hypersurfaces in complex manifolds// Acta Math. — 1974. — *133.* — C. 219–271.
19. *Doubrov B., Merker J., The D.* Classification of simply-transitive Levi non-degenerate hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$// Int. Math. Res. Not. IMRN. — 2022. — *2022*, № 19. — C. 15421–15473.
20. *Fels G., Kaup W.* Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5// Acta Math. — 2008. — *201.* — C. 1–82.
21. *Gong M. P.* Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (over algebraically closed fields and $\mathbb{R}$)// PhD Thesis. — Univ. Waterloo, 1998.
22. *Hindeleh F., Thompson G.* Seven dimensional Lie algebras with a four-dimensional nilradical// Algebras Groups Geom. — 2008. — *25*, № 3. — C. 243–265.
23. *Kruglikov B., Santi A.* On 3-nondegenerate CR manifolds in dimension 7 (I): the transitive case// ArXiv. — 2023. — 2302.04513.
24. *Parry A. R.* A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals// Master's Thesis. — Logan, 2007.
25. *Sykes D.* Homogeneous 2-nondegenerate CR manifolds of hypersurface type in low dimensions// ArXiv. — 2022. — 2202.10123.
26. *Vu A. L., Nguyen T. A., Nguyen T. T. C., Nguyen T. T. M., Vo T. N.* Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals// Commun. Algebra. — 2023. — *51*, № 5. — C. 1866–1885.

А. В. Атанов
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: atanov.cs@gmail.com

А. В. Лобода
Воронежский государственный технический университет, Воронеж, Россия
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: lobvgasu@yandex.ru

UDC 515.172.2, 512.816, 517.55
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-4-517-532
EDN: VQUHHA

On nondegenerate orbits of 7-dimensional Lie algebras containing a 3-dimensional Abelian ideal

A. V. Atanov[1] and A. V. Loboda[2,3]

[1] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*
[2] *Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia*
[3] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Abstract. This paper is related to the problem of describing homogeneous real hypersurfaces of multidimensional complex spaces as orbits of the action of Lie groups and algebras in these spaces. We study realizations in the form of algebras of holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^4$ of 7-dimensional Lie algebras containing only 3-dimensional Abelian ideals and subalgebras. Among 594 types of 7-dimensional solvable indecomposable Lie algebras containing a 6-dimensional nilradical, there are five types of such algebras. The article describes all their realizations that admit nondegenerate in the sense of Levi 7-dimensional orbits. The presence of "simply homogeneous" orbits among the constructed hypersurfaces is shown.

Keywords: Lie algebra, Abelian subalgebra, holomorphic vector field, homogeneous manifold, real hypersurface, degeneration in the sense of Levi.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out with financial support from the Russian Science Foundation (grant 23-21-00109).

For citation: A. V. Atanov, A. V. Loboda, "On nondegenerate orbits of 7-dimensional Lie algebras containing a 3-dimensional Abelian ideal," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 4, 517–532. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-4-517-532`

REFERENCES

1. A. V. Atanov, "Orbity razlozhimykh 7-mernykh algebr Li s $\mathfrak{sl}(2)$-podalgebroy" [Orbits of decomposable 7-dimensional Lie algebras with $\mathfrak{sl}(2)$-subalgebra], *Ufimsk. Mat. Zh.* [Ufa Math. J.], 2022, **14**, No. 1, 3–22 (in Russian).
2. V. K. Beloshapka, "O razmernosti gruppy avtomorfizmov analiticheskoy giperpoverkhnosti" [On the dimension of the automorphism group of an analytic hypersurface], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1979, **43**, No. 2, 243–266 (in Russian).
3. R. L. Bishop and R. J. Crittenden, *Geometriya mnogoobraziy* [Geometry of Manifolds], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
4. V. V. Ezhov, "Linearizatsiya gruppy stabil'nosti odnogo klassa giperpoverkhnostey" [Linearization of the stability group of one class of hypersurfaces], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1986, **41**, No. 3, 181–182 (in Russian).
5. V. V. Krutskikh, "O golomorfnykh realizatsiyakh 7-mernykh algebr Li" [On holomorphic realizations of 7-dimensional Lie algebras], *Vestn. VGU. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2023, No. 4, 115–128 (in Russian).
6. A. V. Loboda, "Odnorodnye strogo psevdovypuklye giperpoverkhnosti v $\mathbb{C}^3$ dvumernymi gruppami izotropii" [Homogeneous strictly pseudoconvex hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$ with two-dimensional isotropy groups], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2001, **192**, No. 12, 3–24 (in Russian).
7. A. V. Loboda, "Affinno-odnorodnye veshchestvennye giperpoverkhnosti 3-mernogo kompleksnogo prostranstva" [Affinely homogeneous real hypersurfaces of 3-dimensional complex space], *Vestn. VGU. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2009, No. 2, 71–91 (in Russian).
8. A. V. Loboda, "Golomorfno odnorodnye veshchestvennye giperpoverkhnosti v $\mathbb{C}^3$" [Holomorphically homogeneous real hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$], *Tr. Mosk. Mat. Ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2020, **81**, No. 2, 205–280 (in Russian).
9. A. V. Loboda, "O zadache opisaniya golomorfno odnorodnykh veshchestvennykh giperpoverkhnostey chetyrekhmernykh kompleksnykh prostranstv" [On the problem of describing holomorphically homogeneous real hypersurfaces of four-dimensional complex spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2020, **311**, 194–212 (in Russian).
10. A. V. Loboda, "O 7-mernykh algebrakh Li, dopuskayushchikh Levi-nevyrozhdennye orbity v $\mathbb{C}^4$" [On 7-dimensional Lie algebras admitting Levi-nondegenerate orbits in $\mathbb{C}^4$], *Tr. Mosk. Mat. Ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2023, **84**, No. 2, 205–230 (in Russian).
11. A. V. Loboda, R. S. Akopyan, and V. V. Krutskikh, "O 7-mernykh algebrakh golomorfnykh vektornykh poley v $\mathbb{C}^4$, imeyushchikh 5-mernyy abelev ideal" [On 7-dimensional algebras of holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^4$ having a 5-dimensional Abelian ideal], *Dal'nevost. Mat. Zh.* [Far East. Math. J.], 2023, **23**, No. 1, 55–80 (in Russian).
12. A. V. Loboda and A. V. Atanov, "Razlozhimye pyatimernye algebry Li v zadache o golomorfnoy odnorodnosti v $\mathbb{C}^3$" [Decomposable five-dimensional Lie algebras in the problem of holomorphic homogeneity

in $\mathbb{C}^3$], *Itogi Nauki i Tekhn. Sovrem. Mat. i Ee Pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2019, **173**, 86–115 (in Russian).
13. A. V. Loboda and V. K. Kaverina, "O vyrozhdennosti orbit nil'potentnykh algebr Li" [On the degeneracy of orbits of nilpotent Lie algebras], *Ufimsk. Mat. Zh.* [Ufa Math. J.], 2022, **14**, No. 1, 57–83 (in Russian).
14. A. V. Atanov and A. V. Loboda, "On degenerate orbits of real Lie algebras in multidimensional complex spaces," *Russ. J. Math. Phys.*, 2023, **30**, 432–442.
15. H. Azad, A. Huckleberry, and W. Richthofer, "Homogeneous CR-manifolds," *J. Reine Angew. Math.*, 1985, **358**, 125–154.
16. V. K. Beloshapka and I. G. Kossovskiy, "Homogeneous hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$, associated with a model CR-cubic," *J. Geom. Anal.*, 2010, **20**, No. 3, 538–564.
17. E. Cartan, "Sur la geometrie pseudoconforme des hypersurfaces de deux variables complexes," *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1932, **11**, No. 4, 17–90.
18. S. S. Chern and J. K. Moser, "Real hypersurfaces in complex manifolds," *Acta Math.*, 1974, **133**, 219–271.
19. B. Doubrov, J. Merker, and D. The, "Classification of simply-transitive Levi non-degenerate hypersurfaces in $\mathbb{C}^3$," *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2022, **2022**, No. 19, 15421–15473.
20. G. Fels and W. Kaup, "Classification of Levi degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5," *Acta Math.*, 2008, **201**, 1–82.
21. M. P. Gong, *Classification of nilpotent Lie algebras of dimension 7 (over algebraically closed fields and $\mathbb{R}$)*, PhD Thesis, Univ. Waterloo, 1998.
22. F. Hindeleh and G. Thompson, "Seven dimensional Lie algebras with a four-dimensional nilradical," *Algebras Groups Geom.*, 2008, **25**, No. 3, 243–265.
23. B. Kruglikov and A. Santi, "On 3-nondegenerate CR manifolds in dimension 7 (I): the transitive case," *ArXiv*, 2023, 2302.04513.
24. A. R. Parry, *A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals*, Master's Thesis, Logan, 2007.
25. D. Sykes, "Homogeneous 2-nondegenerate CR manifolds of hypersurface type in low dimensions," *ArXiv*, 2022, 2202.10123.
26. A. L. Vu, T. A. Nguyen, T. T. C. Nguyen, T. T. M. Nguyen, and T. N. Vo, "Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals," *Commun. Algebra*, 2023, **51**, No. 5, 1866–1885.

A. V. Atanov
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: `atanov.cs@gmail.com`

A. V. Loboda
Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `lobvgasu@yandex.ru`