

УДК 517.954, 517.956.226, 517.982

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-194-212

EDN: VPSNGM

ОБ УСРЕДНЕНИИ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА—БИЦАДЗЕ В ПОЛУПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ С ТРЕТЬИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ НА ГРАНИЦЕ ПОЛОСТЕЙ. ДОКРИТИЧЕСКИЙ, КРИТИЧЕСКИЙ И ЗАКРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАИ

Г. А. ЧЕЧКИН

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Институт математики с компьютерным центром Уфимского федерального исследовательского
центра РАН, Уфа, Россия*

Аннотация. Рассмотрена задача для уравнения Лаврентьева—Бицадзе в полуперфорированной модельной области, имеющей характерный размер микронеоднородностей ε , с краевым условием третьего рода на границе полостей (условием Фурье), которое имеет в коэффициентах в качестве множителя малый параметр ε^α , и условием Дирихле на внешней части границы. Для этой задачи построена усреднённая задача и доказана сходимость решений исходной задачи к решению усреднённой в трёх случаях. Докритический (субкритический) случай $\alpha > 1$ характеризуется тем, что диссипация на границе полостей пренебрежимо мала, в критическом случае $\alpha = 1$ в уравнении из-за диссипации появляется потенциал, а в закритическом (суперкритическом) случае $\alpha < 1$ диссипация играет главную роль, она приводит к вырождению решения всей задачи.

Ключевые слова: уравнение Лаврентьева—Бицадзе, усреднение, перфорированная область.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор очень признателен анонимному рецензенту за внимательное прочтение работы. Замечания и рекомендации уважаемого рецензента помогли существенно улучшить изложение результатов и исправить досадные неточности.

Для цитирования: Г. А. Чечкин. Об усреднении уравнения Лаврентьева—Бицадзе в полуперфорированной области с третьим краевым условием на границе полостей. Докритический, критический и закритический случаи // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 194–212. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-194-212>

ВВЕДЕНИЕ

Асимптотический анализ задач в микронеоднородных средах является важной частью теории дифференциальных уравнений. Такие задачи возникают во многих прикладных областях, таких как материаловедение, современное производство композиционных материалов с различными свойствами, строительство, нефтеразработка, ракетостроение и др., а также в естественных науках, таких как химия, физика, биология, биофизика и биохимия, геология и др. Эти исследования приводят к математическим моделям, включающим уравнения и краевые условия с малыми параметрами, характеризующими размеры микронеоднородностей. Часто рассматриваются уравнения в перфорированных или полуперфорированных областях, которые требуют применения

методов асимптотического анализа, теории усреднения, теории пограничного слоя и т. д. Случай уравнения Стокса рассмотрен в [25, 26, 29, 30, 33]. Модельные задачи для оператора Лапласа с различными граничными условиями на границе полостей рассмотрены в работах [4, 5, 12, 13, 27, 28]. Краевые условия третьего рода рассматривались в работах [2, 3, 22–24]. Интересные результаты получены для сходимости аттракторов в перфорированных областях. В работах [14, 16] рассмотрена ситуация случайных полостей. Двумерное уравнение Навье—Стокса изучено в [1, 20]. В этих работах доказана слабая сходимость аттракторов. Сильная сходимость доказана в [15]. Уравнения Гинзбурга—Ландау изучены в [17–19]. В этих работах рассмотрены докритический, критический и закритический случаи.

В работах [7, 8] моделировались задачи, связанные с изучением физико-химических свойств струи газа в камере сгорания и сопле жидкостного реактивного двигателя.

В настоящей работе рассматривается уравнение переменного типа Лаврентьева—Бицадзе в полуперфорированной области. В соответствии с моделью предполагается, что перфорация находится только в «эллиптической» части области, а в «гиперболической» она отсутствует, как, впрочем, и правая часть уравнения в «гиперболической» части области предполагается равной нулю.

Доказательство существования и единственности решения такой задачи в полуперфорированной области можно найти в [7]. Отметим, что вопросы существования и единственности решений задач для уравнения Лаврентьева—Бицадзе поднимались ранее. В работе [32] изучалась смешанная задача для такого уравнения. Там установлена нормальная разрешимость задачи в весовых пространствах, весами при этом являются степени расстояния до угловых точек области. Отметим также, что в случае, когда область, в которой рассматривается задача, является односвязной (например, она может быть конформно отображена на полукруг), однозначная разрешимость в Соболевском пространстве W_2^1 установлена в [9].

В работе строится усреднённая задача (аналогично см. [7]) и доказывается оценка отклонения решения исходной задачи от решения усреднённой задачи в интегральной норме.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для простоты будем рассматривать двумерную область. В многомерном случае потребуется более сложный анализ уравнения в «гиперболической» части области.

Рассматривается уравнение вида

$$-u_{yy}^\varepsilon - (\operatorname{sign} y) u_{xx}^\varepsilon = f(x, y)$$

в полуперфорированной области D_ε , перфорированная часть которой расположена в полуплоскости $y > 0$ и имеет локально периодическую структуру с характерным размером ε , а часть, лежащая в нижней полуплоскости $y < 0$, имеет однородную структуру. На внешней границе области выставлено однородное условие Дирихле, тогда как на границе полостей выставлено краевое условие третьего рода (условие Фурье) с параметром ε^α , отвечающим за диссипацию энергии. Исследуется асимптотическое поведение решения при стремлении малого параметра ε к нулю. Полагаем, что $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и обращается в ноль при $y < 0$.

Выделяются три различных случая: $\alpha > 1$ (*докритический*, или *субкритический* случай), $\alpha = 1$ (*критический* случай) и $\alpha < 1$ (*закритический*, или *суперкритический* случай).

Перейдём к строгому определению области и краевой задачи в этой области.

Определим сначала перфорированную часть области. Пусть D^1 — полукруг, лежащий в полуплоскости $y > 0$, граница области ∂D^1 состоит из двух частей Γ_0 и Γ , где Γ_0 — является частью окружности единичного радиуса с центром в точке $(x = 1, y = 0)$, а Γ — отрезок $[0, 2]$ на оси абсцисс $y = 0$. Обозначим

$$J^\varepsilon = \left\{ j \in \mathbb{Z}^2 : \operatorname{dist}(\varepsilon j, \Gamma_0) \geq \varepsilon\sqrt{2}, \operatorname{dist}(\varepsilon j, \Gamma) \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

$$\square \equiv \left\{ (\xi, \eta) : -\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} < \eta < \frac{1}{2} \right\}.$$

Задавая 1-периодическую по ξ и η гладкую функцию $\Phi(x, y, \xi, \eta)$ такую, что $\Phi|_{(\xi, \eta) \in \partial \square} \geq \text{const} > 0$, $\Phi(x, y, 0, 0) < 0$, $\nabla_{\xi\eta} \Phi \neq 0$ при $(\xi, \eta) \in \square \setminus \{0\}$, определяем

$$Q_j^\varepsilon = \left\{ (x, y) \in \varepsilon(\square + j) \mid \Phi\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) \leq 0 \right\}, \quad j \in \mathbb{Z}^2,$$

и строим перфорированную область следующим образом:

$$D_\varepsilon^1 = D^1 \setminus \bigcup_{j \in J^\varepsilon} Q_j^\varepsilon.$$

В соответствии с приведённой конструкцией, граница области D_ε^1 состоит из Γ_0 , Γ , которые формируют внешнюю границу области, и границы «дырок», которую мы обозначим $S_\varepsilon = (\partial D_\varepsilon^1) \cap D$. Также обозначим

$$\tilde{D}_\varepsilon^1 = D^1 \setminus \bigcup_{j \in J^\varepsilon} (\varepsilon(\square + j)),$$

т. е. тонкий слой около границы области без перфорации.

Обозначим также

$$S(x, y) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{T}^2 \mid \Phi(x, y, \xi, \eta) = 0\}, \quad \omega(x, y) = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{T}^2 \mid \Phi(x, y, \xi, \eta) > 0\}.$$

Здесь $\mathbb{T}^2$ — 2-мерный тор. Далее мы будем опускать буквы (x, y) в обозначении ячейки периодичности и границы полости, будем писать S и ω , соответственно.

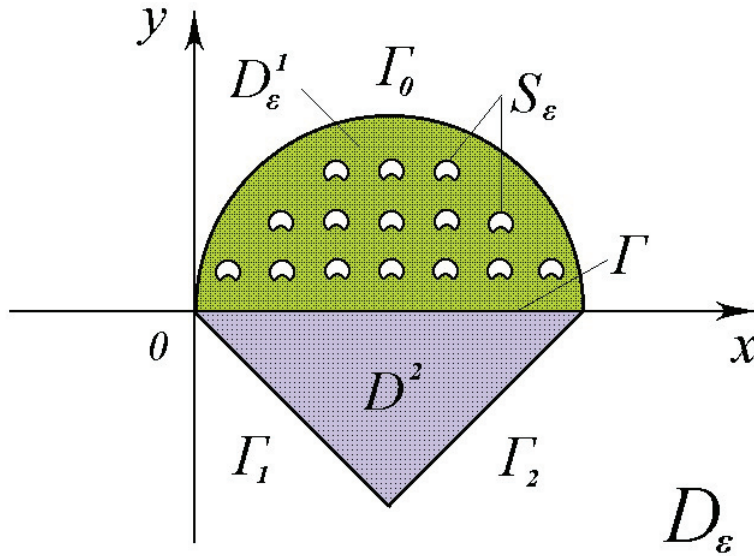


Рис. 1. Двумерная полуперфорированная область

FIG. 1. Two-dimensional partially perforated domain

Замечание 1.1. Следует отметить, что перфорация области подходит непосредственно к оси $\{y = 0\}$. Поэтому ожидается влияние перфорации на эффективное поведение решения в окрестности интерфейса Γ .

Теперь остаётся добавить к «эллиптической» области D_ε^1 «гиперболическую» часть D^2 , которую мы определяем как часть полуплоскости $y < 0$, ограниченную сверху отрезком Γ , а снизу — отрезками прямых («характеристик» уравнения) $\Gamma_1 := \{(x, y) : x = -y, x \in [0, 1]\}$ и $\Gamma_2 := \{(x, y) : x = y + 2, x \in [1, 2]\}$. Итак, построена область $D_\varepsilon = D_\varepsilon^1 \cup (\text{int } \Gamma) \cup D^2$ (см. рис. 1).

Рассматривается задача

$$\begin{cases} -u_{yy}^\varepsilon - (\operatorname{sign} y)u_{xx}^\varepsilon = f(x, y) & \text{в } D_\varepsilon, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon^\alpha q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon = 0 & \text{на } S_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $n_\varepsilon\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$ — внутренняя нормаль к границе включений. Предполагается, что коэффициент q является неотрицательной достаточно гладкой функцией в D^1 , а также 1-периодической по третьему и четвёртому аргументу. Будем исследовать асимптотическое поведение решения $u^\varepsilon(x, y)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Решение краевой задачи (1.1) может быть разбито на две части. Сначала мы решаем уравнение в «гиперболической» части D^2 . В этой области функция $u(x, y) = F(x + y) + G(x - y)$, где $F(s)$ и $G(t)$ — произвольные достаточно гладкие функции. С учётом краевых условий на Γ_1 получаем, что $F(0) + G(2x) = 0$ и, следовательно, $G \equiv 0$, а $F(0) = 0$. Такое решение иницирует на «интерфейсе» Γ между «эллиптической» и «гиперболической» частями области D_ε условие $u_x = u_y$. Решая отдельно краевую задачу для уравнения Пуассона в области D_ε^1 вида

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon = -f(x, y) & \text{в } D_\varepsilon^1, \\ u^\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_0, \\ u_x^\varepsilon = u_y^\varepsilon & \text{на } \Gamma, \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon^\alpha q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon = 0 & \text{на } S_\varepsilon, \end{cases} \quad (1.2)$$

получаем условия для однозначного нахождения функции $F(s)$ (см. аналогично [32]).

Введём обозначения пространств

$$W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1) := \left\{ u : \int_{D_\varepsilon^1} \left(|\nabla^2 u|^2 \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} + |\nabla u|^2 \rho_1^{\delta_1-2} \rho_2^{\delta_2-2} + u^2 \rho_1^{\delta_1-4} \rho_2^{\delta_2-4} \right) dx dy < +\infty \right\},$$

$$W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0) := \left\{ u : u \in W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1), u = 0 \text{ на } \Gamma_0, u_x = u_y \text{ на } \Gamma, u_x^\varepsilon = u_y^\varepsilon \text{ на } \Gamma, \frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} = -\varepsilon^\alpha q u \text{ на } S_\varepsilon \right\},$$

где $\delta_j \in (0, 1/2]$, $j = 1, 2$, $\rho_1 = \rho_1(x, y)$ — расстояние до начала координат, $\rho_2 = \rho_2(x, y)$ — расстояние до точки $(2, 0)$, здесь $|\nabla^2 u|^2$ — сумма квадратов обобщённых частных производных второго порядка, а равенства $u_x = u_y$ и $\frac{\partial u}{\partial n_\varepsilon} = -\varepsilon^\alpha q u$ понимаются в смысле следов функций.

Пусть $u \in W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1)$. Обозначим $v_1 = \rho_1^{\frac{\delta_1}{2}} \rho_2^{\frac{\delta_1}{2}} u$, $v_2 = \rho_1^{\frac{\delta_1}{2}-1} \rho_2^{\frac{\delta_1}{2}-1} u$. Ясно, что $v_1 \in W_2^2(D_\varepsilon^1)$, $v_2 \in H^1(D_\varepsilon^1)$. В силу классической теоремы о следе $v_1 \in W_2^1(\Gamma)$, $v_2 \in L_2(\Gamma)$, и следовательно,

$$\int_{\Gamma} |\nabla u|^2 \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} dx < \infty, \quad \int_{\Gamma} u^2 \rho_1^{\delta_1-2} \rho_2^{\delta_2-2} dx < \infty. \quad (1.3)$$

Решение задачи (1.2) понимается как элемент пространства $W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)$, который удовлетворяет уравнению задачи (1.2) почти всюду, а граничные значения понимаются в смысле следов.

Замечание 1.2. В работе [32] изучалась задача (1.2) в однородной области без перфорации с целью решения модели Лаврентьева—Бицадзе для смешанной задачи. Там установлена нормальная разрешимость задачи (1.2) в весовых пространствах, весами при этом являются степени расстояния до точек $(0, 0)$ и $(2, 0)$.

Принципиальным же является вопрос об однозначной разрешимости (которая в общем случае не следует из нормальной). Доказательство однозначной разрешимости в пространстве $W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)$ с некоторыми $\delta_1, \delta_2 \in (0, 1/2]$ для перфорированной области с условием Неймана на границе полостей проведено в [7]. Доказательство для задачи с третьим краевым условием на границе полостей совершенно аналогично доказательству из [7], которое опирается на лемму Хопфа—Олейник (см. [11]), а также на вложение $W_{\delta_1 \delta_2}^2(D_\varepsilon^1, \Gamma_0) \hookrightarrow C(\overline{D_\varepsilon^1})$ (см. [7, предложение 1]), доказательство которого опирается на результаты из [6, 10], и мы его здесь не приводим.

Умножим уравнение задачи на u^ε и проинтегрируем по частям. Запишем это равенство:

$$\int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy + \varepsilon^\alpha \int_{S_\varepsilon} q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) (u^\varepsilon)^2 ds - \int_{\Gamma} u_x^\varepsilon u^\varepsilon dx = \int_{D_\varepsilon^1} f u^\varepsilon dx dy. \quad (1.4)$$

Здесь u_x^ε понимается в смысле следа функции. При этом (см. (1.3))

$$\int_{\Gamma} |u_x^\varepsilon u^\varepsilon| dx \leq \int_{\Gamma} |u_x^\varepsilon|^2 \rho_1^{\delta_1} \rho_2^{\delta_2} dx + \int_{\Gamma} |u^\varepsilon|^2 \rho_1^{-\delta_1} \rho_2^{-\delta_2} dx < \infty.$$

2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Для того, чтобы перейти к рассмотрению вопросов усреднения, предварительно мы должны получить априорные оценки решений задачи (1.2). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Решение u^ε задачи (1.2) удовлетворяет неравенству*

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)} \leq K,$$

где константа $K > 0$ не зависит от ε .

Доказательство. В равенстве (1.4) рассмотрим третье слагаемое в левой части. Имеем

$$\int_{\Gamma} u_x^\varepsilon u^\varepsilon dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\partial ((u^\varepsilon)^2)}{\partial x} dx \equiv 0.$$

Далее, используя стандартную технику интегральных оценок, учитывая неравенство для следов

$$\int_{S_\varepsilon} q (u^\varepsilon)^2 ds \leq C \int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy$$

и неравенство типа Фридрихса

$$\int_{D_\varepsilon^1} (u^\varepsilon)^2 dx dy \leq C \int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy,$$

получаем необходимую оценку. Теорема доказана. $\square$

3. УСРЕДНЕНИЕ В «ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ» ЧАСТИ ОБЛАСТИ И ОЦЕНКИ

Этот раздел посвящён изучению асимптотического поведения решений уравнения Пуассона $\Delta u^\varepsilon = -f(x, y)$ в области D_ε^1 с краевыми условиями $u^\varepsilon = 0$ на Γ_0 , $u_x^\varepsilon = u_y^\varepsilon$ на Γ и $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon^\alpha q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^\varepsilon = 0$ на S_ε .

В последующих пунктах отдельно разберёмся с докритическим, критическим и закритическим случаями.

3.1. Критический случай $\alpha = 1$.

3.1.1. Формальная асимптотическая процедура. Выпишем ведущие члены асимптотического разложения решения $u^\varepsilon(x)$ задачи (1.2) в виде

$$u^\varepsilon(x, y) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1 \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^2 u^2 \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^3 u^3 \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) + \dots \quad (3.1)$$

Подставляя выражение (3.1) в уравнение (1.2), принимая во внимание соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \zeta \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \zeta(x, y, \xi, \eta) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} \zeta(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \zeta \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \zeta(x, y, \xi, \eta) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \eta} \zeta(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\eta=\frac{y}{\varepsilon}}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

получаем в области D_ε^1 равенство

$$\begin{aligned}
-f(x, y) = \Delta_{xy} u^\varepsilon(x, y) \cong \Delta_{xy} u^0(x, y) + \varepsilon \left(\Delta_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\
+ 2 \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\Delta_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\
+ \varepsilon^2 \left(\Delta_{xy} u^2(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + 2\varepsilon \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^2(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\
+ \left(\Delta_{\xi\eta} u^2(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon^3 \left(\Delta_{xy} u^3(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\
+ 2\varepsilon^2 \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^3(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon \left(\Delta_{\xi\eta} u^3(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \dots \quad (3.3)
\end{aligned}$$

Аналогично, подставляя (3.1) в граничные условия задачи (1.2), получаем на S_ε соотношение

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^\varepsilon \cong (\nabla_{xy} u^0, n_\varepsilon) + \varepsilon q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^0 + \varepsilon (\nabla_{xy} u^1, n_\varepsilon) + \\
+ \left(\nabla_{\xi\eta} u^1 \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^2 q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^1 + \varepsilon^2 (\nabla_{xy} u^2, n_\varepsilon) + \varepsilon \left(\nabla_{\xi\eta} u^2 \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \\
+ \varepsilon^3 q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^2 + \varepsilon^3 (\nabla_{xy} u^3, n_\varepsilon) + \varepsilon^2 \left(\nabla_{\xi\eta} u^3 \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^4 q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^3 + \dots \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Заметим, что нормальный вектор n_ε имеет вид

$$n_\varepsilon \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) = \tilde{n}(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon n'_\varepsilon(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, \quad (3.5)$$

где $\tilde{n}$ — нормаль к $S(x, y) = \{\xi, \eta \mid \Phi(x, y, \xi, \eta) = 0\}$,

$$n'_\varepsilon = n' + O(\varepsilon).$$

Можно увидеть, что

$$\begin{aligned}
n_\varepsilon \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \equiv \frac{\nabla_{xy} \Phi(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})}{|\nabla_{xy} \Phi(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})|} = \left(\frac{\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)}{|\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)|} + \varepsilon \frac{\nabla_{xy} \Phi(x, y, \xi, \eta)}{|\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)|} - \right. \\
\left. - \varepsilon \nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta) \frac{(\nabla_{xy} \Phi(x, y, \xi, \eta), \nabla_{\xi\eta} \Phi(x, \xi))}{|\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)|^3} + O(\varepsilon^2) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Поэтому, $\tilde{n}(x, y, \xi, \eta) = \frac{\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)}{|\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)|},$

$$n'(x, y, \xi, \eta) = \frac{\nabla_{xy} \Phi(x, y, \xi, \eta)}{|\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)|} - \nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta) \frac{(\nabla_{xy} \Phi(x, y, \xi, \eta), \nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta))}{|\nabla_{\xi\eta} \Phi(x, y, \xi, \eta)|^3}.$$

Собирая члены порядка ε^{-1} в (3.3) и порядка ε^0 в (3.4), получаем задачу на ячейке периодичности

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) = 0 & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = -(\nabla_{xy}(u^0(x, y)), \tilde{n}) & \text{на } S(x, y), \end{cases} \quad (3.6)$$

которая рассматривается в классе 1-периодических по ξ и η функций; здесь x и y — параметры.

Условием разрешимости задачи является равенство

$$\int_S (\nabla_{xy} u^0(x, y), \tilde{n}) \, d\sigma = 0,$$

которое выполняется автоматически. Решение этой задачи является первым корректором в (3.1).

На следующем шаге собираем члены порядка ε^0 в (3.3) и порядка ε^1 в (3.4). Имеем

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} u^2(x, y, \xi, \eta) = -f(x, y) - \Delta_{xy} u^0(x, y) - 2(\nabla_{\xi\eta}, \nabla_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta)) & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = -(\nabla_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta), \tilde{n}) - (\nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta), n') - \\ - (\nabla_{xy} u^0(x, y), n') - q(x, y, \xi, \eta) u^0(x, y) & \text{на } S(x, y). \end{cases} \quad (3.7)$$

1-периодическое по ξ и η решение этой задачи является следующим членом разложения решения $u^\varepsilon(x, y)$.

Из структуры задачи (3.6) естественно искать решение $u^1(x, y, \xi, \eta)$ в виде

$$u^1(x, y, \xi, \eta) = (\nabla_{xy} u^0(x, y), M(x, y, \xi, \eta)),$$

где 1-периодические по ξ и η функции $M(x, y, \xi, \eta) = (M_1(x, y, \xi, \eta), M_2(x, y, \xi, \eta))$ являются классическими решениями задач

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} M_i(x, y, \xi, \eta) = 0 & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial M_i(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = -\tilde{n}_i & \text{на } S(x, y). \end{cases} \quad (3.8)$$

Здесь x и y играют роль параметров.

Теперь перепишем задачу (3.7) в виде

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta_{\xi\eta} u^2(x, y, \xi, \eta) &= -f(x, y) - \Delta_{xy} u^0(x, y) - \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right) - \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial y^2} \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} - \\ &\quad - 2 \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial x} + \frac{\partial^2 M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta \partial y} \right) - \\ &\quad - 2 \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial x} + \frac{\partial^2 M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta \partial y} \right) & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} &= - \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x \partial y} (M_1(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_2 + M_2(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_1) - \\ &\quad - \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x^2} M_1(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_1 - \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial y^2} M_2(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_2 - \\ &\quad - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} \tilde{n}_1 + \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} \tilde{n}_2 \right) - \\ &\quad - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} \tilde{n}_1 + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} \tilde{n}_2 \right) - \\ &\quad - q(x, y, \xi, \eta) u^0(x, y) - \\ &\quad - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} n'_1 + \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} n'_2 \right) - \\ &\quad - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} n'_1 + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} n'_2 \right) - \\ &\quad - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} n'_1 - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} n'_2 & \text{на } S(x, y). \end{aligned} \right.$$

Записываем условие разрешимости этой задачи и с помощью формулы Гаусса—Остроградского, имея в виду самосопряжённость предельного оператора (подробнее см. [22]), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x} \right) - Q(x, y) u^0(x, y) = -|\square \cap \omega| f. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь скобками $\langle \cdot \rangle$ обозначен интеграл $\int_{\square \cap \omega} \cdot d\xi d\eta$ по ячейке периодичности, 1-периодические по ξ и η функции $M_i(x, y, \xi, \eta)$ являются решениями ячеечных задач (3.8), а также

$$Q(x, y) = \int_S q(x, y, \xi, \eta) d\sigma.$$

Применяя методы из [11], можно показать, что матрица этого уравнения является положительно определённой (см. аналогично [22]).

Далее подставляем анзац (3.1) в краевое условие задачи (1.2) на Γ и приравниваем члены с соответствующими степенями ε ; приходим к усреднённой (предельной) задаче вида

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x} \right) - \\ - Q(x, y) u^0(x, y) = -|\square \cap \omega| f & \text{в } D^1, \\ u_x^0 = \left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle u_y^0 + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle u_x^0 & \text{на } \Gamma, \\ u^0 = 0 & \text{на } \Gamma_0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Замечание 3.1. Отметим, что функции $M_i\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$ не определены во всей области D^1 . Применяя технику симметрического продолжения (см. [31, теорема 8.1]), можно продолжить функции $M(x, y, \xi, \eta)$ во внутренность полостей, сохраняя регулярность этих функций. За продолженными функциями сохраняем те же обозначения.

Замечание 3.2. Отметим интересную особенность краевого условия задачи (3.10) на Γ . В усреднённой задаче нормальная составляющая косой производной перешла в конормальную, тогда как касательная составляющая осталась без изменений.

Имеет место теорема.

Теорема 3.1. Пусть $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и пусть $q(x, y, \xi, \eta)$ — достаточно гладкая неотрицательная функция, 1-периодическая по ξ и η . Тогда для достаточно малых ε задача (1.2) имеет единственное решение, которое удовлетворяет оценке

$$\|u^0 + \varepsilon u^1 - u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq K_1 \sqrt{\varepsilon}, \quad (3.11)$$

где u^0 и u^1 — решения задач (3.10) и (3.6) соответственно, а константа K_1 не зависит от ε .

Замечание 3.3. На самом деле в теореме 3.1 условие неотрицательности $q(x, y, \xi, \eta) \geq 0$ может быть заменено на более слабое $Q(x, y) \geq 0$.

3.1.2. Вспомогательные утверждения. В этом пункте сформулируем леммы из [2, 21, 22], которые нам понадобятся в дальнейшем анализе.

Лемма 3.1. Если выполнены условия теоремы 3.1, то имеет место неравенство

$$\int_{D_\varepsilon^1} |\nabla v|^2 dx dy + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) v^2 ds \geq C_1 \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)}^2$$

для любой $v \in H^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)$ с константой C_1 , не зависящей от ε .

Лемма 3.2. Если

$$|\square \cap \omega| Q(x, y) - \int_S q(x, y, \xi, \eta) d\sigma \equiv 0,$$

то

$$\left| \frac{1}{|\square \cap \omega|} \int_{D_\varepsilon^1} Q v \, dx dy - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) v \, ds \right| \leq C_2 \varepsilon \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}$$

для любой $v(x) \in H^1(D_\varepsilon^1, \Gamma_0)$; константа C_2 не зависит от ε .

Лемма 3.3. Пусть y_ε — решение задачи

$$\begin{cases} -\Delta y_\varepsilon = h^\varepsilon(x, y) & \text{в } D_\varepsilon^1, \\ y_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) y_\varepsilon = 0 & \text{на } S_\varepsilon, \end{cases}$$

где функция $h^\varepsilon(x, y) = f(x, y)$ для $(x, y) \in \tilde{D}_\varepsilon^1$ и равна 0 в остальных случаях. Тогда

$$\|y_\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \leq C_3 \varepsilon.$$

3.1.3. Основная оценка.

Доказательство теоремы 3.1. Для обоснования построенной формальной асимптотики необходимо оценить невязку

$$\|u^0 + \varepsilon u^1 - u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}.$$

Продолжим функции $M_i(x, y, \xi, \eta)$ в слой $\tilde{D}_\varepsilon^1$ (см. замечание 1.1) и подставим

$$z_\varepsilon\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) = u^0(x, y) + \varepsilon \chi^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^1\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) - u^\varepsilon(x, y)$$

в уравнение (1.2). Здесь $\chi^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right)$ — гладкая срезающая функция $0 \leq \chi^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) \leq 1$, такая что $\chi^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) = 0$ при $x \in \tilde{D}_\varepsilon^1$ и $\chi^\varepsilon\left(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) = 1$ при $\text{dist}(x, \tilde{D}_\varepsilon^1) \geq \text{dist}(S_\varepsilon, \tilde{D}_\varepsilon^1)$; более того, $|\nabla_{\xi\eta} \chi^\varepsilon(\xi, \eta)|$ и $|\Delta_{\xi\eta} \chi^\varepsilon(\xi, \eta)|$ равномерно ограничены. Имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{xy} \left(z_\varepsilon\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) \right) &= \Delta_{xy} u^0(x, y) + \varepsilon \chi^\varepsilon(\xi, \eta) \Delta_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ &+ 2 \left(\chi^\varepsilon(\xi, \eta) \nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ &+ 2 \left(\nabla_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta), \nabla_{\xi\eta} \chi^\varepsilon(\xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\chi^\varepsilon(\xi, \eta) \Delta_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon} \left(u^1(x, y, \xi, \eta) \Delta_{\xi\eta} \chi^\varepsilon(\xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \frac{2}{\varepsilon} \left(\nabla_\xi \chi^\varepsilon(\xi, \eta), \nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} - \Delta_{xy} u^\varepsilon(x, y). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Принимая во внимание равенства

$$\Delta_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) = 0 \quad \text{в } D_\varepsilon^1 \setminus \tilde{D}_\varepsilon^1, \quad \Delta_{xy} u^\varepsilon(x) = -f(x) \quad \text{в } D_\varepsilon^1,$$

$$\begin{aligned} &2 \left(\nabla_{xy}, \chi^\varepsilon(\xi, \eta) \nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta) \right) = \\ &= 2 \chi^\varepsilon(\xi, \eta) \left(\left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x \partial y} + \right. \\ &+ \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial y^2} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial y \partial \eta} \right) \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} + \\ &+ \left. \left(\frac{\partial^2 M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial x \partial \xi} + \frac{\partial^2 M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial y \partial \eta} \right) \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

и (3.9), можно переписать (3.12) в области $D_\varepsilon^1 \setminus \tilde{D}_\varepsilon^1$ (см. аналогично [22]). Также мы поступаем с выражением $\frac{\partial z_\varepsilon(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})}{\partial n_\varepsilon}$ на S_ε . Далее, имея в виду, что

$$z_\varepsilon\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) \equiv 0$$

на Γ_0 , умножаем полученное уравнение из (3.12) на $v(x, y)$ и интегрируем по области D_ε^1 . После применения формулы Грина получаем

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon^1} \Delta_{xy} \left(z_\varepsilon \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \right) v(x, y) \, dx dy &= \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} v \, ds - \int_{D_\varepsilon^1} \nabla z_\varepsilon \nabla v \, dx dy = \\ &= \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^\varepsilon v \, ds + \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial n_\varepsilon} v \, ds + \\ &+ \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \left(\nabla_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) v(x, y) \, ds + \\ &+ \varepsilon \int_{S_\varepsilon} \left(\nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta), n'_\varepsilon(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, ds + \\ &+ \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi}, \tilde{n}^1(x, y, \xi, \eta) \right) + \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta}, \tilde{n}^2(x, y, \xi, \eta) \right) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi}, \tilde{n}^1(x, y, \xi, \eta) \right) + \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta}, \tilde{n}^2(x, y, \xi, \eta) \right) \right) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, ds - \\ &\quad - \int_{D_\varepsilon^1} \nabla z_\varepsilon \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \nabla v(x, y) \, dx dy. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Теперь, используя (3.13) и граничное условие из (3.10), оцениваем

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_\varepsilon^1} \nabla z_\varepsilon \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) \nabla v(x, y) \, dx dy + \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) z_\varepsilon \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) v(x, y) \, ds \right| &\leq \\ &\leq \varepsilon \left| \int_{S_\varepsilon} q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^1 \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) v(x, y) \, ds \right| + \\ &+ \left| \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q \left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon} \right) u^0(x, y) v(x, y) \, ds - \frac{1}{|\square \cap \omega|} \int_{D_\varepsilon^1 \setminus \tilde{D}_\varepsilon^1} Q(x, y) u^0(x, y) v(x, y) \, dx dy \right| + \\ &+ \left| \int_{\tilde{D}_\varepsilon^1} \Delta_{xy} u^0(x, y) v(x, y) \, dx dy \right| + \left| \varepsilon \int_{D_\varepsilon^1} \chi^\varepsilon(\xi, \eta) \Delta_{xy} u^1(x, y, \xi, \eta) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, dx dy \right| + \\ &+ \left| \int_{S_\varepsilon} \left(\frac{\partial u^0(x, y)}{\partial n_\varepsilon} + \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi}, \tilde{n}^1(x, y, \xi, \eta) \right) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta}, \tilde{n}^2(x, y, \xi, \eta) \right) \right) + \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi}, \tilde{n}^1(x, y, \xi, \eta) \right) + \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta}, \tilde{n}^2(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, ds \Big| + \\
& + \left| \int_{D_\varepsilon^1 \setminus \tilde{D}_\varepsilon^1} \left(\left(\frac{1}{|\square \cap \omega|} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left\langle 1 + \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \right] - \right. \right. \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \right] \Big) + \left(\frac{1}{|\square \cap \omega|} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left\langle \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right] - \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right) \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right] \Big) + \left(\frac{1}{|\square \cap \omega|} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left\langle \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \right] - \right. \\
& - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \right] \Big) + \left(\frac{1}{|\square \cap \omega|} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left\langle 1 + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right] - \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \right) \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right] \right) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, dxdy - \\
& - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} (\nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta), n'_\varepsilon(x, y, \xi, \eta)) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, ds \Big| + \left| \int_{\tilde{D}_\varepsilon^1} f(x, y) v(x, y) \, dxdy \right| + \\
& + \left| \int_{D_\varepsilon^1 \setminus \tilde{D}_\varepsilon^1} (\chi^\varepsilon(\xi, \eta) - 1) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right) + \right. \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \right) \Big) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, dxdy \Big| + \\
& + \left| \int_{D_\varepsilon^1} \frac{1}{\varepsilon} (u^1(x, y, \xi, \eta) \Delta_{\xi\eta} \chi^\varepsilon(\xi, \eta)) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, dxdy + \right. \\
& + \left. \int_{D_\varepsilon^1} \frac{2}{\varepsilon} (\nabla_{\xi\eta} \chi^\varepsilon(\xi, \eta), \nabla_{\xi\eta} u^1(x, y, \xi, \eta)) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} v(x, y) \, dxdy \right| + \\
& + O(\varepsilon) \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 + I_9 + O(\varepsilon) \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Используя лемму 3.2, оцениваем

$$\begin{aligned}
I_2 & = \left| \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^0(x, y) v(x, y) \, ds - \frac{1}{|\square \cap \omega|} \int_{D_\varepsilon^1 \setminus \tilde{D}_\varepsilon^1} Q(x, y) u^0(x, y) v(x, y) \, dxdy \right| \leq \\
& \leq C_4 \varepsilon \|u^0\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}.
\end{aligned}$$

Члены I_1 и I_4 удовлетворяют

$$|I_1| + |I_4| \leq C_5 \varepsilon \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}.$$

Тождество $I_5 \equiv 0$ следует из граничных условий задачи (3.6). Для оценки слагаемого I_6 применяем технику доказательства леммы 3.2 (см. [22]). Получаем

$$|I_6| \leq C_6 \varepsilon \|\mathcal{D}^2 u^0(x, y)\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)};$$

здесь мы использовали C^1 -гладкость функции $f(x, y)$. Учитывая лемму 3.3, можно считать, что функция $f(x)$ равна нулю в слое $\tilde{D}_\varepsilon^1$. Поэтому $I_7 = 0$. Слагаемое I_3 оценивается следующим образом:

$$I_3 \leq C_7 \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}.$$

Из свойств срезающей функции $\chi^\varepsilon(\xi, \eta)$ следует, что

$$|I_8| + |I_9| \leq C_8 \sqrt{\varepsilon} \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}.$$

Подставляя $v = u^0 + \varepsilon \chi^\varepsilon u^1 - u^\varepsilon$ в (3.14) и учитывая полученные выше оценки, с помощью леммы 3.1 и очевидной оценки $\|\varepsilon u^1(1 - \chi^\varepsilon)\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \leq C_9 \sqrt{\varepsilon}$ получаем (3.11). Теорема доказана. $\square$

3.2. Докритический случай $\alpha > 1$.

3.2.1. *Формальная процедура и главная оценка.* Подставляем выражение

$$\begin{aligned} u^\varepsilon(x, y) = & u^0(x, y) + \varepsilon^{\alpha-1} u^{1,-1}\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \varepsilon u^{0,1}\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^\alpha u^{1,0}\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \\ & + \varepsilon^2 u^{0,2}\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{\alpha+1} u^{1,1}\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \dots + \varepsilon^{k\alpha+l} u^{k,l}\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) + \dots \end{aligned}$$

в уравнение (1.2). С учетом (3.2) выводим

$$\begin{aligned} -f(x, y) = & \Delta_{xy} u^\varepsilon(x, y) \cong \\ \cong & \Delta_{xy} u^0(x, y) + \varepsilon^{\alpha-1} \left(\Delta_{xy} u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + 2\varepsilon^{\alpha-2} \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + \varepsilon^{\alpha-3} \left(\Delta_{\xi\eta} u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon \left(\Delta_{xy} u^{0,1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + 2 \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^{0,1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\Delta_{\xi\eta} u^{0,1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + \varepsilon^\alpha \left(\Delta_{xy} u^{1,0}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + 2\varepsilon^{\alpha-1} \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^{1,0}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + \varepsilon^{\alpha-2} \left(\Delta_{\xi\eta} u^{1,0}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon^2 \left(\Delta_{xy} u^{0,2}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + \varepsilon^2 \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^{0,2}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \left(\Delta_{\xi\eta} u^{0,2}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + \varepsilon^{\alpha+1} \left(\Delta_{xy} u^{1,1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + 2\varepsilon^\alpha \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^{1,1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + \varepsilon^{\alpha-1} \left(\Delta_{\xi\eta} u^{1,1}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \dots + \varepsilon^{k\alpha+l} \left(\Delta_{xy} u^{k,l}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \\ & + 2\varepsilon^{k\alpha+l-1} \left(\nabla_{xy}, \nabla_{\xi\eta} u^{k,l}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \varepsilon^{k\alpha+l-2} \left(\Delta_{\xi\eta} u^{k,l}(x, y, \xi, \eta) \right) \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}} + \dots \quad (3.15) \end{aligned}$$

Аналогично на S_ε получаем

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial n_\varepsilon} + \varepsilon^\alpha q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^\varepsilon \cong \left(\nabla_{xy} u^0, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^\alpha q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^0 + \varepsilon^{\alpha-1} \left(\nabla_{xy} u^{1,-1}, n_\varepsilon \right) + \\ & + \varepsilon^{\alpha-2} \left(\nabla_{\xi\eta} u^{1,-1} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{2\alpha-1} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^{1,-1} + \varepsilon \left(\nabla_{xy} u^{0,1}, n_\varepsilon \right) + \\ & + \left(\nabla_{\xi\eta} u^{0,1} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{\alpha+1} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^{0,1} + \varepsilon^\alpha \left(\nabla_{xy} u^{1,0}, n_\varepsilon \right) + \\ & + \varepsilon^{\alpha-1} \left(\nabla_{\xi\eta} u^{1,0} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{2\alpha} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^{1,0} + \\ & + \varepsilon^2 \left(\nabla_{xy} u^{0,2}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon \left(\nabla_{\xi\eta} u^{0,2} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{\alpha+2} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^{0,2} + \\ & + \varepsilon^{\alpha+1} \left(\nabla_{xy} u^{1,1}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^\alpha \left(\nabla_{\xi\eta} u^{1,1} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{2\alpha+1} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^{1,1} + \dots + \\ & + \varepsilon^{k\alpha+l} \left(\nabla_{xy} u^{k,l}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{k\alpha+l-1} \left(\nabla_{\xi\eta} u^{k,l} \Big|_{\xi=\frac{x}{\varepsilon}, \eta=\frac{y}{\varepsilon}}, n_\varepsilon \right) + \varepsilon^{(k+1)\alpha+l} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^{k,l} + \dots \quad (3.16) \end{aligned}$$

Используя (3.5) и собирая слагаемые с соответствующими степенями ε в (3.15) и (3.16), приходим к следующим вспомогательным задачам:

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta) = 0 & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = 0 & \text{на } S(x, y), \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} u^{1,0}(x, y, \xi, \eta) = -2(\nabla_{\xi\eta}, \nabla_{xy} u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta)) & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^{1,0}(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = -(\nabla_{xy} u^{1,-1}(x, y, \xi, \eta), \tilde{n}) & \text{на } S(x, y) \end{cases} \quad (3.18)$$

и задаче (3.6) для $u^{0,1}(x, y, \xi, \eta)$, решения которых рассматриваются в классе 1-периодических по ξ и η функций.

Из (3.17) получаем, что функция $u^{1,-1}$ не зависит от ξ . Фактически можно взять $u^{1,-1} \equiv 0$. Тогда $u^{1,0} \equiv 0$ решает задачу (3.18).

На следующем шаге собираем слагаемые порядка ε^0 в (3.15) и порядка ε^1 в (3.16). Получаем

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} u^{0,2}(x, y, \xi, \eta) = -f(x, y) - \Delta_{xy} u^0(x, y) - 2(\nabla_{\xi\eta}, \nabla_{xy} u^{0,1}(x, y, \xi, \eta)) & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^{0,2}(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = -(\nabla_{xy} u^{0,1}(x, y, \xi, \eta), \tilde{n}) - (\nabla_{\xi\eta} u^{0,1}(x, y, \xi, \eta), n') - & \\ -(\nabla_{xy} u^0(x, y), n') & \text{на } S(x, y). \end{cases} \quad (3.19)$$

Представляя $u^{0,1}(x, y, \xi, \eta) = (\nabla_{xy} u^0(x, y), M(x, y, \xi, \eta))$, где 1-периодические компоненты вектор-функции $M(x, y, \xi, \eta) = (M_1(x, y, \xi, \eta), M_2(x, y, \xi, \eta))$ являются решениями задач (3.8), выведем из (3.19) следующую задачу:

$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} u^{0,2}(x, y, \xi, \eta) = -f(x, y) - \Delta_{xy} u^0(x, y) - \\ - 2 \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} \right) - \\ - 2 \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} - 2 \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial y^2} \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} - \\ - 2 \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial x} + \frac{\partial^2 M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta \partial y} \right) - \\ - 2 \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi \partial x} + \frac{\partial^2 M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta \partial y} \right) & \text{в } \omega, \\ \frac{\partial u^{0,2}(x, y, \xi, \eta)}{\partial \tilde{n}} = - \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x \partial y} (M_1(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_2 + M_2(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_1) - \\ - \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial x^2} M_1(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_1 - \frac{\partial^2 u^0(x, y)}{\partial y^2} M_2(x, y, \xi, \eta) \tilde{n}_2 - \\ - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} \tilde{n}_1 + \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} \tilde{n}_2 \right) - \\ - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial x} \tilde{n}_1 + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial y} \tilde{n}_2 \right) - \\ - q(x, y, \xi, \eta) u^0(x, y) - \\ - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} \left(\frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} n'_1 + \frac{\partial M_1(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} n'_2 \right) - \\ - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} \left(\frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \xi} n'_1 + \frac{\partial M_2(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta} n'_2 \right) - \\ - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial x} n'_1 - \frac{\partial u^0(x, y)}{\partial y} n'_2 & \text{на } S(x, y). \end{cases}$$

Действуя так же, как и в пункте 3.1.1, записываем условие разрешимости и применяем те же рассуждения, что и в пункте 3.1.1. В результате получаем усреднённую (предельную) задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u^0}{\partial x} \right) = -|\square \cap \omega| f & \text{в } D^1, \\ u_x^0 = \left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle u_y^0 + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle u_x^0 & \text{на } \Gamma, \\ u^0 = 0 & \text{на } \Gamma_0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Предельное поведение решения задачи (1.2) в этом случае определяется следующей теоремой.

Теорема 3.2. *Предположим, что $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, и пусть $q(x, y, \xi, \eta)$ — достаточно гладкая неотрицательная функция, 1-периодическая по ξ и η . Тогда для достаточно малых ε задача (1.2) имеет единственное решение, которое удовлетворяет неравенству*

$$\|u^0 + \varepsilon u^{0,1} - u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \leq K_2 \max(\varepsilon^{\alpha-1}, \sqrt{\varepsilon}),$$

где u^0 и $u^{0,1}$ — решения задач (3.20) и (3.6), соответственно, с константой K_2 , не зависящей от ε .

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1 и основано на следующей лемме (см. аналогично [22]).

Лемма 3.4. *Для любой $v \in H^1(D_\varepsilon^1)$*

$$\left| \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) u^0(x, y) v(x, y) ds \right| \leq C_{10} \varepsilon^{-1} \|u^0\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \|v\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}.$$

3.3. Закритический случай $\alpha < 1$.

3.3.1. *Теорема усреднения.* Следующая теорема описывает предельное поведение решения.

Теорема 3.3. *Если $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ и $q(x, y, \xi, \eta)$ — достаточно гладкая положительная функция, 1-периодическая по ξ и η , то для всех достаточно малых ε задача (1.2) имеет единственное решение, удовлетворяющее оценке*

$$\|u^\varepsilon\|_{L_2(D_\varepsilon^1)} \leq K_3 \max(\varepsilon^{\frac{1-\alpha}{2}}, \sqrt{\varepsilon}), \quad (3.21)$$

где K_3 не зависит от ε .

Доказательство теоремы 3.3. Записываем интегральное тождество задачи (1.2), из которого с помощью неравенства Коши—Буняковского получаем равномерную ограниченность семейства $u^\varepsilon(x)$ в $H^1(D_\varepsilon^1)$. Действительно,

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}^2 &\leq C_{11} \left| \int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon(x, y)|^2 dx dy + \varepsilon^\alpha \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon)^2(x, y) ds \right| = \\ &= \left| \int_{D_\varepsilon^1} f(x, y) u^\varepsilon(x, y) dx dy \right| \leq \|f\|_{L_2(D_\varepsilon^1)} \|u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)} \leq C_{12}. \quad (3.22)$$

Если выполняются условия теоремы, то $Q(x, y)$ — строго положительная функция, которая удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon^1} (u^\varepsilon)^2 dx dy &\leq \frac{C_{13}}{|\square \cap \omega|} \int_{D_\varepsilon^1} Q(x, y) (u^\varepsilon)^2 dx dy = C_{13} \left\{ \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon)^2 ds + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{|\square \cap \omega|} \int_{D_\varepsilon^1} Q(x, y) (u^\varepsilon)^2 dx dy - \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon)^2 ds \right\} \leq \\ &\leq C_{13} \left\{ \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon)^2 ds + \varepsilon \|u^\varepsilon\|_{H^1(D_\varepsilon^1)}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Это неравенство может быть легко доказано с использованием шагов доказательства леммы 3.2 (см. [22]). С другой стороны, имеем

$$\left| \varepsilon \int_{S_\varepsilon} q\left(x, y, \frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon}\right) (u^\varepsilon)^2 ds \right| = \varepsilon^{1-\alpha} \left| \int_{D_\varepsilon^1} f(x, y) u^\varepsilon dx dy - \int_{D_\varepsilon^1} |\nabla u^\varepsilon|^2 dx dy \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon^{1-\alpha} \|f\|_{L_2(D_\varepsilon^1)} \|u^\varepsilon\|_{L_2(D_\varepsilon^1)} + O(\varepsilon^{1-\alpha}).$$

Используя последние оценки с учётом (3.22), выводим (3.21). Теорема доказана. $\square$

4. ПРЕДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА ВО ВСЕЙ ОБЛАСТИ

Чтобы завершить построение предельной задачи во всей области, надо вспомнить, что в «гиперболической» области решение имеет вид $F(x+y)$, которое, в свою очередь, инициирует на «интерфейсе» Γ условие $u_x = u_y$. После усреднения изменилась задача в «эллиптической» части области, а значит, и условие на «интерфейсе». Кроме того, в критическом случае $\alpha = 1$ в задаче появляется дополнительный потенциал, и она во всей области принимает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial x} \right) - \\ - Q(x, y) u_+^0(x, y) = -|\square \cap \omega| f & \text{в } D^1, \\ \frac{\partial^2 u_-^0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_-^0}{\partial x^2} = 0 & \text{в } D^2, \\ u^0 = 0 & \text{на } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ \left(1 - \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \right) (u_+^0)_x - \left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle (u_+^0)_y = (u_-^0)_x - (u_-^0)_y & \text{на } \Gamma, \\ [u^0] = 0 & \text{на } \Gamma. \end{array} \right.$$

В докритическом случае $\alpha > 1$ задача имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \xi} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left\langle 1 + \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial y} + \left\langle \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle \frac{\partial u_+^0}{\partial x} \right) = -|\square \cap \omega| f & \text{в } D^1, \\ \frac{\partial^2 u_-^0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_-^0}{\partial x^2} = 0 & \text{в } D^2, \\ u^0 = 0 & \text{на } \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \\ \left(1 - \left\langle \frac{\partial M_2}{\partial \eta} \right\rangle \right) (u_+^0)_x - \left\langle 1 + \frac{\partial M_1}{\partial \eta} \right\rangle (u_+^0)_y = (u_-^0)_x - (u_-^0)_y & \text{на } \Gamma, \\ [u^0] = 0 & \text{на } \Gamma. \end{array} \right.$$

Здесь $u^0 = u_-^0$ в «гиперболической» части и $u^0 = u_+^0$ в «эллиптической» части области D_ε . Символом $[\cdot]$ обозначается скачок функции.

В закритическом случае $\alpha < 1$ решение в эллиптической части стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Условие согласования на интерфейсе Γ сразу влечёт в пределе $F \equiv 0$. Таким образом, решение исходной задачи для уравнения Лаврентьева—Бицадзе во всей области стремится к нулю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бекмаганбетов К. А., Толеубай А. М., Чечкин Г. А. Об аттракторах системы уравнений Навье—Стокса в двумерной пористой среде // Пробл. мат. анализа. — 2022. — 115. — С. 15–28. — DOI: 10.1007/s10958-022-05814-y.
2. Беляев А. Г., Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А. Асимптотическое поведение решения краевой задачи в перфорированной области с осциллирующей границей // Сиб. мат. ж. — 1998. — 39, № 4. — С. 730–754.
3. Беляев А. Г., Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А. Усреднение в перфорированной области с осциллирующим третьим краевым условием // Мат. сб. — 2001. — 192, № 7. — С. 3–20.
4. Егер В., Олейник О. А., Шамаев А. С. О задаче усреднения для уравнения Лапласа в частично перфорированной области // Докл. РАН. — 1993. — 333, № 4. — С. 424–427.

5. Егер В., Олейник О. А., Шамаев А. С. Об асимптотике решений краевой задачи для уравнения Лапласа в частично перфорированной области с краевыми условиями третьего рода на границах полостей// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1997. — 58. — С. 187–223.
6. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1967. — 16. — С. 209–292.
7. Кондратьев В. А., Чечкин Г. А. Усреднение уравнения Лаврентьева—Бицадзе в полуперфорированной области// Дифф. уравн. — 2002. — 38, № 10. — С. 1390–1396.
8. Кондратьев В. А., Чечкин Г. А. Об асимптотике решений уравнения Лаврентьева—Бицадзе в полуперфорированной области// Дифф. уравн. — 2003. — 39, № 5. — С. 645–655.
9. Моисеев Е. И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром. — М.: Изд-во Моск. ун-в., 1988.
10. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей. — М.: Наука, 1991.
11. Олейник О. А. Лекции об уравнениях с частными производными: учебник. — М.: Изд-во Моск. ун-в., 2024.
12. Олейник О. А., Шамаев А. С. Об усреднении решений краевой задачи для уравнения Лапласа в частично перфорированной области с условием Дирихле на границе полостей// Докл. РАН. — 1994. — 337, № 2. — С. 168–171.
13. Олейник О. А., Шапошникова Т. А. О задаче усреднения в частично перфорированной области со смешанными краевыми условиями на границе полостей// Дифф. уравн. — 1995. — 31, № 7. — С. 1140–1150.
14. Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzhov V. V. «Strange term» in homogenization of attractors of reaction–diffusion equation in perforated domain// Chaos, Solitons Fractals. — 2020. — 140. — 110208. — DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110208.
15. Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzhov V. V. Application of Fatou’s lemma for strong homogenization of attractors to reaction–diffusion systems with rapidly oscillating coefficients in orthotropic media with periodic obstacles// Mathematics. — 2023. — 11, № 6. — 1448. — DOI: 10.3390/math11061448.
16. Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzhov V. V. Homogenization of attractors to reaction–diffusion system in a medium with random obstacles// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2024. — 44, № 11. — С. 3474–3490. — DOI: 10.3934/dcds.2024066.
17. Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzhov V. V., Tolemis A. A. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: critical case// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2023. — 3. — С. 11–27. — DOI: 10.31489/2023M3/11-27.
18. Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzhov V. V., Tolemis A. A. Attractors of Ginzburg–Landau equations with oscillating terms in porous media. Homogenization procedure// Appl. Anal. — 2024. — 103, № 1. — С. 29–44. — DOI: 10.1080/00036811.2023.2173182.
19. Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzhov V. V., Tolemis A. A. Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2024. — 2. — С. 40–56. — DOI: 10.31489/2024M2/40-56.
20. Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Toleubay A. M. Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2022. — 3. — С. 35–50. — DOI: 10.31489/2022M3/35-50.
21. Chechkin G. A., Friedman A., Piatnitski A. L. The boundary value problem in domains with very rapidly oscillating boundary// J. Math. Anal. Appl. — 1999. — 231, № 1. — С. 213–234.
22. Chechkin G. A., Piatnitski A. L. Homogenization of boundary-value problem in a locally periodic perforated domain// Appl. Anal. — 1999. — 71, № 1-4. — С. 215–235.
23. Cioranescu D., Donato P. On a Robin problem in perforated domains// В сб.: «Homogenization and Applications to Material Sciences». — Tokyo: Gakkōtoshō, 1997. — С. 123–136.
24. Cioranescu D., Saint Jean Paulin J. Truss structures, Fourier conditions and eigenvalue problems// В сб.: «Boundary Variation». — Berlin–New York: Springer, 1992. — С. 6–12.
25. Ene H. I., Sanchez-Palencia E. Equations et phénomènes de surface por l’écoulement dans un modèle de milieu poreux// J. Mécan. — 1975. — 14. — С. 73–108.
26. Jäger W., Mikelić A. On the flow conditions at the boundary between a porous medium and an impermeable solid// В сб.: «Progress in partial differential equations». — London: Longman Sci. Tech., 1994. — С. 145–161.
27. Jäger W., Mikelić A. On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4). — 1996. — 23, № 3. — С. 403–465.

28. Jäger W., Mikelić A. Homogenization of the Laplace equation in a partially perforated domain// В сб.: «Homogenization: In Memory of Serguei Kozlov». — River Edge: World Sci. Publ., 1999. — С. 259–284.
29. Larson R. E., Higdon J. J. L. Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part I — axial flow// J. Fluid Mech. — 1986. — 178. — С. 449–472.
30. Larson R. E., Higdon J. J. L. Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part II — traverse flow// J. Fluid Mech. — 1986. — 166. — С. 119–136.
31. Lions J.-L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. I. — Paris: Dunod, 1968.
32. Osher S. Boundary value problems for equations of mixed type I. The Lavrent'ev–Bitsadze model// Commun. Part. Differ. Equ. — 1977. — 2, № 5. — С. 499–547.
33. Saffman P. G. On the boundary conditions at the interface of a porous medium// Stud. Appl. Math. — 1971. — 1. — С. 93–101.

Г. А. Чечкин

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Институт математики с компьютерным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия

E-mail: chechkin@mech.math.msu.su

UDC 517.954, 517.956.226, 517.982

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-194-212

EDN: VPSNGM

On homogenization of the Lavrent'ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain with the third boundary condition on the boundary of the cavities.

Subcritical, critical and supercritical cases

G. A. Chechkin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

Abstract. For the Lavrent'ev–Bitsadze equation in a partially perforated model domain with a characteristic size of microinhomogeneities ε , we consider the problem with the third-kind boundary condition on the boundary of the cavities (the Fourier condition), which has a small parameter ε^α as a multiplier in the coefficients, and the Dirichlet condition on the outer part of the boundary. For this problem, we construct a homogenized problem and prove the convergence of the solutions of the original problem to the solution of the homogenized problem in three cases. The subcritical case with $\alpha > 1$ is characterized by the fact that dissipation at the boundary of the cavities is negligibly small, in the critical case with $\alpha = 1$ a potential appears in the equation due to dissipation, and in the supercritical case with $\alpha < 1$ the dissipation plays the major role, it leads to degeneracy of the solution of the entire problem.

Keywords: Lavrent'ev–Bitsadze equation, homogenization, perforated domain.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author is very grateful to the anonymous reviewer for a careful reading of the work. The comments and recommendations of the respected reviewer helped to significantly improve the presentation of the results and correct annoying inaccuracies.

For citation: G. A. Chechkin, “On homogenization of the Lavrent’ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain with the third boundary condition on the boundary of the cavities. Subcritical, critical and supercritical cases,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 194–212. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-194-212>

REFERENCES

1. K. A. Bekmaganbetov, A. M. Toleubay, and G. A. Chechkin, “Ob attraktorakh sistemy uravneniy Nav’e—Stoksa v dvumernoy poristoy srede” [On attractors of the Navier–Stokes equations in a two-dimensional porous medium], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2022, **115**, 15–28, DOI: 10.1007/s10958-022-05814-y (in Russian).
2. A. G. Belyaev, A. L. Piatnitski, and G. A. Chechkin, “Asimptoticheskoe povedenie resheniya kraevoy zadachi v perforirovannoy oblasti s ostsilliruyushchey granitse” [Asymptotic behavior of the solution of a boundary-value problem in a perforated domain with oscillating boundary], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1998, **39**, No. 4, 730–754 (in Russian).
3. A. G. Belyaev, A. L. Piatnitski, and G. A. Chechkin, “Usrednenie v perforirovannoy oblasti s ostsilliruyushchim tret’im kraevym uslovиеm” [Homogenization in a perforated domain with oscillating third boundary condition], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2001, **192**, No. 7, 3–20 (in Russian).
4. W. Jäger, O. A. Oleynik, and A. S. Shamaev, “O zadache usredneniya dlya uravneniya Laplasya v chastichno perforirovannoy oblasti” [On the homogenization problem for the Laplace equation in a partially perforated domain], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1993, **333**, No. 4, 424–427 (in Russian).
5. W. Jäger, O. A. Oleynik, and A. S. Shamaev, “Ob asimptotike resheniy kraevoy zadachi dlya uravneniya Laplasya v chastichno perforirovannoy oblasti s kraevymi usloviyami tret’ego roda na granitsakh polostey” [On the asymptotics of solutions of a boundary-value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with boundary conditions of the third kind on the boundaries of the cavities], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1997, **58**, 187–223 (in Russian).
6. V. A. Kondrat’ev, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastyakh s konicheskimi i uglovymi tochkami” [Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical and angular points], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1967, **16**, 209–292 (in Russian).
7. V. A. Kondrat’ev and G. A. Chechkin, “Usrednenie uravneniya Lavrent’eva—Bitsadze v poluperforirovannoy oblasti” [Homogenization of the Lavrent’ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2002, **38**, No. 10, 1390–1396 (in Russian).
8. V. A. Kondrat’ev and G. A. Chechkin, “Ob asimptotike resheniy uravneniya Lavrent’eva—Bitsadze v poluperforirovannoy oblasti” [On the asymptotics of solutions of the Lavrent’ev–Bitsadze equation in a partially perforated domain], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2003, **39**, No. 5, 645–655 (in Russian).
9. E. I. Moiseev, *Uravneniya smeshannogo tipa so spektral’nym parametrom* [Mixed Type Equations with Spectral Parameter], Moscow Univ., Moscow, 1988 (in Russian).
10. S. A. Nazarov and B. A. Plamenevskii, *Ellipticheskie zadachi v oblastyakh s kusochno gladkoy granitse* [Elliptic Problems in Domains with Piecewise Smooth Boundary], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
11. O. A. Oleynik, *Lektsii ob uravneniyakh s chastnymi proizvodnymi: uchebnik* [Lectures on Partial Differential Equations: Textbook], Moscow Univ., Moscow, 2024 (in Russian).
12. O. A. Oleynik and A. S. Shamaev, “Ob usrednenii resheniy kraevoy zadachi dlya uravneniya Laplasya v chastichno perforirovannoy oblasti s uslovиеm Dirikhle na granitse polostey” [On homogenization of solutions of a boundary-value problem for the Laplace equation in a partially perforated domain with a Dirichlet condition on the boundary of the cavities], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **337**, No. 2, 168–171 (in Russian).
13. O. A. Oleynik and T. A. Shaposhnikova, “O zadache usredneniya v chastichno perforirovannoy oblasti so smeshannymi kraevymi usloviyami na granitse polostey” [On the homogenization problem in a partially perforated domain with mixed boundary conditions on the boundary of the cavities], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1995, **31**, No. 7, 1140–1150 (in Russian).
14. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and V. V. Chepyzhov, “«Strange term» in homogenization of attractors of reaction–diffusion equation in perforated domain,” *Chaos, Solitons Fractals*, 2020, **140**, 110208, DOI: 10.1016/j.chaos.2020.110208.

15. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and V. V. Chepyzhov, “Application of Fatou’s lemma for strong homogenization of attractors to reaction–diffusion systems with rapidly oscillating coefficients in orthotropic media with periodic obstacles,” *Mathematics*, 2023, **11**, No. 6, 1448, DOI: 10.3390/math11061448.
16. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and V. V. Chepyzhov, “Homogenization of attractors to reaction–diffusion system in a medium with random obstacles,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2024, **44**, No. 11, 3474–3490, DOI: 10.3934/dcds.2024066.
17. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, and A. A. Tolemis, “Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: critical case,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2023, **3**, 11–27, DOI: 10.31489/2023M3/11-27.
18. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, and A. A. Tolemis, “Attractors of Ginzburg–Landau equations with oscillating terms in porous media. Homogenization procedure,” *Appl. Anal.*, 2024, **103**, No. 1, 29–44, DOI: 10.1080/00036811.2023.2173182.
19. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, and A. A. Tolemis, “Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2024, **2**, 40–56, DOI: 10.31489/2024M2/40-56.
20. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and A. M. Toleubay, “Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2022, **3**, 35–50, DOI: 10.31489/2022M3/35-50.
21. G. A. Chechkin, A. Friedman, and A. L. Piatnitski, “The boundary value problem in domains with very rapidly oscillating boundary,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, **231**, No. 1, 213–234.
22. G. A. Chechkin and A. L. Piatnitski, “Homogenization of boundary-value problem in a locally periodic perforated domain,” *Appl. Anal.*, 1999, **71**, No. 1-4, 215–235.
23. D. Cioranescu and P. Donato, “On a Robin problem in perforated domains,” In: *Homogenization and Applications to Material Sciences*, Gakkōtoshō, Tokyo, 1997, pp. 123–136.
24. D. Cioranescu and J. Saint Jean Paulin, “Truss structures, Fourier conditions and eigenvalue problems,” In: *Boundary Variation*, Springer, Berlin–New York, 1992, pp. 6–12.
25. H. I. Ene and E. Sanchez-Palencia, “Equations et phénomènes de surface por l’écoulement dans un modèle de milieu poreux,” *J. Mécan.*, 1975, **14**, 73–108.
26. W. Jäger and A. Mikelić, “On the flow conditions at the boundary between a porous medium and an impermeable solid,” In: *Progress in partial differential equations*, Longman Sci. Tech., London, 1994, pp. 145–161.
27. W. Jäger and A. Mikelić, “On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4)*, 1996, **23**, No. 3, 403–465.
28. W. Jäger and A. Mikelić, “Homogenization of the Laplace equation in a partially perforated domain,” In: *Homogenization: In Memory of Serguei Kozlov*, World Sci. Publ., River Edge, 1999, pp. 259–284.
29. R. E. Larson and J. J. L. Higdon, “Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part I — axial flow,” *J. Fluid Mech.*, 1986, **178**, 449–472.
30. R. E. Larson and J. J. L. Higdon, “Microscopic flow near the surface of two-dimensional porous media. Part II — traverse flow,” *J. Fluid Mech.*, 1986, **166**, 119–136.
31. J.-L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. I*, Dunod, Paris, 1968.
32. S. Osher, “Boundary value problems for equations of mixed type I. The Lavrent’ev–Bitsadze model,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1977, **2**, No. 5, 499–547.
33. P. G. Saffman, “On the boundary conditions at the interface of a porous medium,” *Stud. Appl. Math.*, 1971, **1**, 93–101.

G. A. Chechkin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Institute of Mathematics with Computer Center of the Ufa Science Center of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

E-mail: chechkin@mech.math.msu.su