

УДК 517.956.35, 537.84

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-176-193

EDN: VLOCPJ

О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ МГД И УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ВАКУУМЕ

Ю. Л. ТРАХИНИН

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

Аннотация. Мы рассматриваем результаты о корректности задачи со свободной границей (интерфейсом), где граница отделяет идеально проводящую невязкую жидкость (например, плазму) от вакуума. Течение жидкости регулируется уравнениями идеальной сжимаемой магнитогидродинамики (МГД). В отличие от классической постановки, когда вакуумное магнитное поле подчиняется системе div-rot домаксвелловской динамики, мы не пренебрегаем током смещения в вакуумной области и рассматриваем уравнения Максвелла для электрических и магнитных полей. С граничными условиями на интерфейсе это образует нелинейную гиперболическую задачу с характеристической свободной границей. Постановка этой задачи свободного интерфейса исходит из релятивистской постановки, где током смещения в вакууме нельзя пренебречь. Мы также кратко обсуждаем недавний результат, показывающий стабилизирующий эффект поверхностного натяжения.

Ключевые слова: уравнения идеальной сжимаемой магнитогидродинамики, задача со свободной границей, ток смещения, уравнения Максвелла, нелинейная гиперболическая задача, корректность.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено в Институте математики им. С. Л. Соболева в рамках государственного контракта (проект № ФВНФ-2022-0008).

Для цитирования: Ю. Л. Трахинин. О корректности задачи со свободной границей для уравнений идеальной сжимаемой МГД и уравнений Максвелла в вакууме // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 176–193. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-176-193>

1. ВВЕДЕНИЕ

Система уравнений идеальной сжимаемой МГД [9], описывающая движение сжимаемой невязкой идеально проводящей жидкости (например, плазмы) в магнитном поле, имеет вид

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \text{div}(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \text{div}(\rho v \otimes v - H \otimes H) + \nabla q = 0, \\ \partial_t H - \nabla \times (v \times H) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathcal{E} + \frac{1}{2}|H|^2) + \text{div}(\rho \mathcal{E} v + p v + H \times (v \times H)) = 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь ρ обозначает плотность, $v = (v_1, v_2, v_3)^\top$ — скорость плазмы, $H = (H_1, H_2, H_3)^\top$ — магнитное поле, $p = p(\rho, S)$ — давление, $q = p + \frac{1}{2}|H|^2$ — полное давление, S — энтропия, $\mathcal{E} = \epsilon + \frac{1}{2}|v|^2$ — полная энергия и $\epsilon = \epsilon(\rho, S)$ — внутренняя энергия. С уравнением состояния, $\rho = \rho(p, S)$, и первым принципом термодинамики, (1.1) является замкнутой системой, например, для неизвестного $U = U(t, x) = (q, v^\top, H^\top, S)^\top \in \mathbb{R}^8$. Система (1.1) должна быть дополнена ограничением на дивергенцию

$$\operatorname{div} H = 0 \quad (1.2)$$

с начальными данными $U|_{t=0} = U_0$. Легко видеть, что равенство (1.2) выполняется для всех $t > 0$, если оно справедливо при $t = 0$.

Принимая во внимание (1.2), перепишем (1.1) в неконсервативной форме

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho a^2} \left\{ \frac{dq}{dt} - H \cdot \frac{dH}{dt} \right\} + \operatorname{div} v = 0, & \rho \frac{dv}{dt} - (H \cdot \nabla)H + \nabla q = 0, \\ \frac{dH}{dt} - (H \cdot \nabla)v - \frac{1}{\rho a^2} \left\{ \frac{dq}{dt} - H \cdot \frac{dH}{dt} \right\} H = 0, & \frac{dS}{dt} = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $a = a(p, S) = (\rho_p(p, S))^{-1/2}$ — скорость звука, а $d/dt = \partial_t + (v \cdot \nabla)$. Отметим, что для 2-мерных плоских течений, когда пространственные переменные $x = (x_1, x_2)$, скорость $v = (v_1, v_2)^\top$ и магнитное поле $H = (H_1, H_2)^\top$ имеют только две компоненты, МГД-систему также можно переписать в неконсервативной форме (1.3). Ниже мы будем рассматривать по умолчанию 3-мерный случай, если не указано иное. Но следует иметь в виду, что все векторы в (1.3) являются 2-мерными для 2-мерного случая.

Уравнения (1.3) образуют симметричную систему

$$A_0(U) \partial_t U + \sum_{i=1}^d A_i(U) \partial_i U = 0, \quad (1.4)$$

где

$$A_0(U) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho a^2} & 0 & -\frac{1}{\rho a^2} H^\top & 0 \\ 0 & \rho I_d & O_d & 0 \\ -\frac{1}{\rho a^2} H & O_d & I_d + \frac{1}{\rho a^2} H \otimes H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_i(U) := \begin{pmatrix} \frac{v_i}{\rho a^2} & \mathbf{e}_i^\top & -\frac{v_i}{\rho a^2} H^\top & 0 \\ \mathbf{e}_i & \rho v_i I_d & -H_i I_d & 0 \\ -\frac{v_i}{\rho a^2} H & -H_i I_d & v_i I_d + \frac{v_i}{\rho a^2} H \otimes H & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_i \end{pmatrix}, \quad i = \overline{1, d}.$$

Здесь d — размерность пространства ($d = 3$ или $d = 2$), O_m и I_m обозначают нулевую и единичную матрицы порядка m , соответственно, $\mathbf{e}_i := (\delta_{i1}, \dots, \delta_{id})^\top$, а δ_{ij} обозначает дельта-функцию Кронекера. Система (1.4) является гиперболической, если матрица A_0 положительно определена, т. е.

$$\rho > 0, \quad \rho_p > 0. \quad (1.5)$$

Задачи интерфейса плазма—вакуум для идеальных уравнений МГД возникают при математическом моделировании удержания плазмы магнитными полями (см., например, [2]). В астрофизике задача интерфейса плазма—вакуум может быть использована для моделирования движения звезды или солнечной короны с учетом магнитных полей. В классической постановке задачи интерфейса плазма—вакуум [2, 7] плазма описывается гиперболическими уравнениями

МГД (1.1)/(1.3), тогда как в области вакуума рассматривается эллиптическая система *домаксвелловской динамики*

$$\nabla \times h = 0, \quad \operatorname{div} h = 0, \quad (1.6)$$

описывающая вакуумное магнитное поле $h = (h_1, h_2, h_3)^\top$. То есть током смещения $(1/c) \partial_t E$ пренебрегают не только при выводе нерелятивистских уравнений МГД (см., например, [9]), но и в уравнениях Максвелла в вакууме, где $E = (E_1, E_2, E_3)^\top$ — электрическое поле в вакууме, а c — скорость света. Тогда из

$$\nabla \times E = -\frac{1}{c} \partial_t h, \quad \operatorname{div} E = 0$$

следует, что вакуумное электрическое поле E является вторичной переменной, которая может быть вычислена из магнитного поля $\mathcal{H}$. Напомним, что плазменное электрическое поле E^+ также является вторичной переменной, поскольку в идеальной МГД

$$E^+ = -\frac{1}{c} v \times H. \quad (1.7)$$

В релятивистской постановке током смещения $(1/c) \partial_t E$ нельзя пренебречь, и мы имеем уравнения Максвелла

$$\frac{1}{c} \partial_t h + \nabla \times E = 0, \quad \frac{1}{c} \partial_t E - \nabla \times h = 0, \quad \operatorname{div} h = 0, \quad \operatorname{div} E = 0 \quad (1.8)$$

в области вакуума, тогда как в области плазмы вместо системы (1.1) рассматриваются уравнения релятивистской магнитной гидродинамики (РМГД). Задача о релятивистском интерфейсе плазма—вакуум для случая специальной теории относительности впервые была изучена в [22].

Если, в отличие от классической постановки задачи о границе раздела плазма—вакуум в нерелятивистской МГД [2, 7, 16, 21], не пренебрегать током смещения $\varepsilon \partial_t E$ в вакуумной области, то нам снова придется рассматривать полную систему уравнений Максвелла

$$\varepsilon \partial_t h + \nabla \times E = 0, \quad \varepsilon \partial_t E - \nabla \times h = 0, \quad (1.9)$$

$$\operatorname{div} h = 0, \quad \operatorname{div} E = 0, \quad (1.10)$$

где система (1.9)–(1.10) записана в безразмерной форме [10], а положительная константа $\varepsilon \ll 1$, являющаяся отношением характерной (средней) скорости потока плазмы к скорости света c , является малым (но *фиксированным*) параметром в нерелятивистской постановке. Бездивергентные уравнения (1.10) представляют собой ограничения на начальные данные $V|_{t=0} = V_0$ для вакуумного неизвестного $V = V(t, x) = (h^\top, E^\top)^\top \in \mathbb{R}^6$. Вакуумные уравнения Максвелла (1.9) переписываются в виде симметричной гиперболической системы:

$$\varepsilon \partial_t V + \sum_{i=1}^3 B_i \partial_i V = 0, \quad (1.11)$$

где

$$B_i = \begin{pmatrix} 0_3 & b_i \\ b_i^\top & 0_3 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку нас в первую очередь интересует корректность задачи о свободной границе для гиперболических систем (1.4) и (1.11), а не устойчивость стационарных решений этой задачи, как, например, в классической работе [2], геометрия плазменных и вакуумных областей не так важна. Поэтому для технической простоты мы предполагаем, что свободный интерфейс $\Gamma(t)$, разделяющий плазменные и вакуумные области $\Omega^\pm(t)$, имеет вид графика:

$$\Gamma(t) = \{x_1 = \varphi(t, x')\}, \quad x' = (x_2, x_3), \quad \Omega^\pm(t) = \{\pm(x_1 - \varphi(t, x')) > 0\}.$$

Задача со свободной границей завершается граничными условиями

$$\partial_t \varphi = v \cdot N, \quad (1.12)$$

$$q = \frac{1}{2} (|h|^2 - |E|^2), \quad (1.13)$$

$$E \cdot \tau_2 = \varepsilon h_3 \partial_t \varphi, \quad E \cdot \tau_3 = -\varepsilon h_2 \partial_t \varphi, \quad (1.14)$$

$$H \cdot N = 0, \quad h \cdot N = 0 \quad (1.15)$$

на свободном интерфейсе $\Gamma(t)$, где

$$N = (1, -\partial_2 \varphi, -\partial_3 \varphi)^\top, \quad \tau_2 = (\partial_2 \varphi, 1, 0)^\top, \quad \tau_3 = (\partial_3 \varphi, 0, 1)^\top.$$

Условие (1.12) означает, что интерфейс движется вместе с движением жидкости, тогда как условие (1.13) исходит из баланса нормальных напряжений на интерфейсе. Для понимания смысла условия (1.13) следует также отметить, что релятивистское полное давление $q = p + \frac{1}{2}(|H|^2 - |E^+|^2)$, где плазменное электрическое поле E^+ задается как (1.7), т. е. член $\frac{1}{2}|E^+|^2$ просто опускается в (1.13) в условиях нерелятивистской МГД. Условия (1.14) исходят из условий скачка [2, 7] для электрического поля. А именно, для законов сохранения

$$\partial_t(\varepsilon H^\pm) + \nabla \times E^\pm = 0 \quad \text{в } \Omega^\pm(t),$$

при $H^+ = H$, $H^- = h$, $E^+ = -\varepsilon(v \times H)$ (ср. (1.7)) и $E^- = E$, условия перехода имеют вид (см. [2])

$$N \times [E] = \varepsilon \partial_t \varphi [H] \quad \text{на } \Gamma(t),$$

при $[E] = E|_\Gamma^+ - E|_\Gamma$, $[H] = H|_\Gamma - h|_\Gamma$. Учитывая (1.12) и (1.15), исключаем из них скорость и магнитное поле плазмы:

$$N \times E = \varepsilon h \partial_t \varphi \quad \text{на } \Gamma(t). \quad (1.16)$$

Первое условие в (1.16) есть не что иное, как второе условие в (1.15), тогда как остальные два граничных условия в (1.16) совпадают с (1.14). Наконец, как и в [22], можно показать, что условия (1.15) — это просто граничные ограничения на начальные данные

$$U|_{t=0} = U_0, \quad V|_{t=0} = V_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0 \quad (1.17)$$

для задачи (1.4), (1.11)–(1.14).

Как было отмечено выше, постановка задачи (1.4), (1.11)–(1.14), (1.17) (с ограничениями (1.2), (1.10), (1.15)) исходит из релятивистской постановки [22] задачи свободного интерфейса. В классической постановке [2, 7, 16, 21], где пренебрегают током смещения $\varepsilon \partial_t E$ и рассматривают эллиптическую систему (1.6) в области вакуума, влияние вакуумного электрического поля E , напротив, по умолчанию не учитывается. Локальная по времени корректность классической задачи свободного интерфейса с граничными условиями (1.12), (1.13) (с $E \equiv 0$) и (1.15) была доказана в [16] при условии, что *условие нелинейности* $|H \times h| \neq 0$ выполняется в каждой точке начального интерфейса $\Gamma(0)$ (см. также обзор [17] и имеющуюся там библиографию). Наконец, отметим, что доказательство корректности классической задачи свободного интерфейса при условии знака типа Тейлора $\left(N \cdot \nabla \left(q - \frac{1}{2}|h|^2\right)\right)|_{\Gamma(0)}$ (которое является альтернативным условием корректности [23]) все еще остается открытой проблемой. Корректность при условии знака типа Тейлора доказана в [27] пока только для частного случая $h \equiv 0$.

Целью данной статьи является обзор существующих результатов по корректности задачи (1.4), (1.11)–(1.14), (1.17) и ее 2-мерной версии, полученных в [3, 4, 10, 18, 25]. Кроме того, мы приводим недавний результат [26], показывающий стабилизирующий эффект поверхностного натяжения на корректность линеаризации задачи (1.4), (1.11)–(1.14), (1.17), в которой граничное условие (1.13) заменено на

$$q = \frac{1}{2}(|h|^2 - |E|^2) + \mathfrak{s} \mathcal{H}(\varphi), \quad (1.18)$$

где $\mathfrak{s} \geq 0$ — постоянный коэффициент поверхностного натяжения, $\mathcal{H}(\varphi)$ — удвоенная средняя кривизна $\Gamma(t)$, определяемая как

$$\mathcal{H}(\varphi) := \nabla' \cdot \left(\frac{\nabla' \varphi}{\sqrt{1 + |\nabla' \varphi|^2}} \right), \quad \text{где } \nabla' := \begin{pmatrix} \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что влияние поверхностного натяжения становится особенно важным при моделировании течений жидких металлов [13]. То есть, для краткости мы называем задачу (1.4), (1.11)–(1.14), (1.17) задачей на интерфейсе плазма–вакуум, но на самом деле сжимаемая невязкая идеально проводящая жидкость, описываемая уравнениями МГД (1.11), не обязательно является плазмой и, в частности, может быть жидким металлом.

План остальной части этой статьи следующий. В разделе 2 мы сводим задачу со свободной границей (1.4), (1.11)–(1.14), (1.17) к задаче в фиксированных областях. В разделе 3 мы описываем так называемую вторичную симметризацию уравнений Максвелла в вакууме и формулируем эквивалентную задачу с фиксированной границей с характеристиками постоянной кратности. В разделе 4 мы записываем линеаризованную задачу, связанную с нелинейной задачей с фиксированной границей, и обсуждаем существующие результаты для нее. Наконец, в разделе 5 мы обсуждаем недавние результаты для 2-мерной линейной и нелинейной задачи МГД–Максвелла со свободным интерфейсом.

2. УПРОЩЕННАЯ НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА В ФИКСИРОВАННЫХ ОБЛАСТЯХ

Мы сводим задачу со свободной границей (1.4), (1.11)–(1.14) к эквивалентной задаче с фиксированной границей, вводя новые неизвестные $U_{\sharp}(t, x) := U(t, \Phi(t, x), x')$ и $V_{\sharp}(t, x) := V(t, \Phi(t, x), x')$, которые являются гладкими в полупространствах $\mathbb{R}_{\pm}^3 = \{\pm x_1 > 0, x' \in \mathbb{R}^2\}$, где

$$\Phi(t, x) := x_1 + \chi(x_1)\varphi(t, x'), \quad (2.1)$$

а $\chi \in C_0^\infty(-1, 1)$ — срезающая функция, которая удовлетворяет $\|\chi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 1/2$ и равна 1 в малой окрестности начала координат. Требование $\partial_1 \Phi > 0$ невырожденности замены переменных выполняется для решений с $\|\varphi\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \leq 1$. Последнее верно, если, не теряя общности, мы рассматриваем начальные данные, удовлетворяющие $\|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq 1/2$, и время T в нашей теореме существования достаточно мало.

Замена переменных (2.1) сводит задачу со свободной границей (1.4), (1.11)–(1.14) к следующей задаче с фиксированной границей:

$$\mathbb{L}_+(U, \Phi) := L_+(U, \Phi)U = 0 \quad \text{в } [0, T] \times \mathbb{R}_3^+, \quad (2.2a)$$

$$\mathbb{L}_-(V, \Phi) := L_-(\Phi)V = 0 \quad \text{в } [0, T] \times \mathbb{R}_3^-, \quad (2.2b)$$

$$\mathbb{B}(U, V, \varphi) = 0 \quad \text{на } [0, T] \times \Gamma, \quad (2.2c)$$

$$U|_{t=0} = U_0, \quad V|_{t=0} = V_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad (2.2d)$$

где мы опустили нижний индекс « $\sharp$ » для удобства, $\Gamma = \{0\} \times \mathbb{R}^2$ — плоскость $x_1 = 0$, а

$$L_+(U, \Phi) := A_0(U)\partial_t + \tilde{A}_1(U, \Phi)\partial_1 + \sum_{k=2}^3 A_k(U)\partial_k, \quad L_-(\Phi) := \varepsilon\partial_t + \tilde{B}_1(\Phi)\partial_1 + \sum_{k=2}^3 B_k\partial_k,$$

$$\mathbb{B}(U, V, \varphi) := \begin{pmatrix} \partial_t \varphi - v \cdot N \\ E \cdot \tau_2 - \varepsilon h_3 \partial_t \varphi \\ E \cdot \tau_3 + \varepsilon h_2 \partial_t \varphi \\ q - \frac{1}{2}|h|^2 + \frac{1}{2}|E|^2 \end{pmatrix},$$

с

$$\tilde{A}_1(U, \Phi) := \frac{1}{\partial_1 \Phi} (A_1(U) - \partial_t \Phi A_0(U) - \partial_2 \Phi A_2(U) - \partial_3 \Phi A_3(U)),$$

$$\tilde{B}_1(\Phi) = \frac{1}{\partial_1 \Phi} (B_1 - \varepsilon \partial_t \Phi I_3 - \partial_2 \Phi B_2 - \partial_3 \Phi B_3).$$

Следующие предложения были доказаны в [3, 10, 22] при условиях (1.2), (1.10) и (1.15).

Предложение 2.1. Пусть начальные данные (2.2d) удовлетворяют условиям

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = 0, \quad (2.3)$$

$$H_N|_{x_1=0} = 0, \quad (2.4)$$

где

$$\mathcal{H} = (H_N, H_2 \partial_1 \Phi, H_3 \partial_1 \Phi), \quad H_N = H_1 - H_2 \partial_2 \Phi - H_3 \partial_3 \Phi.$$

Если задача (2.2) имеет достаточно гладкое решение (U, V, φ) , то это решение удовлетворяет (2.3) и (2.4) для всех $t \in [0, T]$.

Предложение 2.2. Пусть начальные данные (2.2d) удовлетворяют условиям

$$\operatorname{div} \mathfrak{h} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{e} = 0, \quad (2.5)$$

$$h_N|_{x_1=0} = 0, \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} h_N &= h_1 - h_2 \partial_2 \Phi - h_3 \partial_3 \Phi, \quad \mathfrak{h} = (h_N, h_2 \partial_1 \Phi, h_3 \partial_1 \Phi), \\ \mathfrak{e} &= (E_N, E_2 \partial_1 \Phi, E_3 \partial_1 \Phi), \quad E_N = E_1 - E_2 \partial_2 \Phi - E_3 \partial_3 \Phi. \end{aligned}$$

Если задача (2.2) имеет достаточно гладкое решение (U, V, φ) со свойством

$$\partial_t \varphi \leq 0, \quad (2.7)$$

то это решение удовлетворяет (2.5) и (2.6) для всех $t \in [0, T]$. Если задача (2.2) с двумя дополнительными граничными условиями

$$\operatorname{div} \mathfrak{h}|_{x_1=0} = 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div} \mathfrak{e}|_{x_1=0} = 0 \quad (2.8)$$

имеет достаточно гладкое решение (U, V, φ) со свойством

$$\partial_t \varphi > 0, \quad (2.9)$$

то это решение снова удовлетворяет (2.5) и (2.6) для всех $t \in [0, T]$.

Можно показать, что граничная матрица $\tilde{A}_1(U, \Phi)|_{x_1=0}$ на границе Γ имеет одно положительное и одно отрицательное собственное значение, а остальные равны нулю. Это означает, что граница Γ является *характеристикой*, и в соответствии с числом входящих/исходящих характеристик гиперболическая система (2.2a) в полупространстве $\mathbb{R}_+^3$ требует одного граничного условия на Γ . Для уравнений Максвелла (2.2b) граничная матрица $B = B(\varphi) := \tilde{B}_1(\Phi)|_{x_1=0}$ имеет собственные значения

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(B) &= -\varepsilon \partial_t \varphi - \sqrt{1 + (\partial_2 \varphi)^2 + (\partial_3 \varphi)^2}, & \lambda_{3,4}(B) &= -\varepsilon \partial_t \varphi, \\ \lambda_{5,6}(B) &= -\varepsilon \partial_t \varphi + \sqrt{1 + (\partial_2 \varphi)^2 + (\partial_3 \varphi)^2}. \end{aligned}$$

Если выполнено (2.7), то матрица B имеет два отрицательных собственных значения (напомним, что $\varepsilon \ll 1$). Это означает, что гиперболическая система (2.2b) в $\mathbb{R}_+^3$ требует двух граничных условий на Γ , т. е. при предположении (2.7) мы имеем правильное количество граничных условий в (2.2c), поскольку первое условие в (2.2c) необходимо для определения функции φ .

Если выполнено (2.9), то матрица B имеет четыре отрицательных собственных значения. То есть правильное число граничных условий равно шести, и в задаче (2.2) отсутствуют два граничных условия. Однако, если, как было предложено в [22], мы дополним (2.2c) дополнительными граничными условиями (2.8), что позволяет доказать (2.5), то у нас будет правильное число граничных условий и для случая (2.9). Дополняя нашу задачу условиями

$$\operatorname{div} \mathfrak{h} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{e} = 0 \quad \text{на} \quad [0, T] \times \Gamma \cap \{\partial_t \varphi > 0\}, \quad (2.10)$$

приходим к задаче (2.2), (2.10), которая корректно сформулирована по числу граничных условий.

3. ВТОРИЧНАЯ СИММЕТРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ВАКУУМЕ

Мы задаем разное количество граничных условий на разных участках границы Γ . То есть граница является неравномерно характеристической. Для преодоления этой трудности в [3] было предложено ввести такую новую неизвестную в вакуумной области, что граница становится характеристикой постоянной кратности. С другой стороны, существует альтернативный способ, предполагающий применение так называемой *вторичной симметризации* [19, 20, 22] к симметричной гиперболической системе вакуумных уравнений Максвелла. Эта симметризация, предложенная в [22], позволяет свести нелинейную задачу (2.2), (2.10) к задаче с характеристиками

постоянной кратности и вывести априорную оценку энергии [3, 10, 22] для линеаризованной задачи, связанной с (2.2), (2.10).

Забудем на минуту нашу нелинейную начально-краевую задачу (2.2), (2.10) и рассмотрим просто линейную систему (1.11) вакуумных уравнений Максвелла во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Для системы (1.11) в $\mathbb{R}^3$ вместе с очевидным тождеством

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} |V|^2 = 0$$

(для $|V| \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$) мы имеем следующие три дополнительных интеграла сохранения (сохранение импульса поля в вакууме):

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} h \times E = 0.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} \{|V|^2 + \nu_1(h_2 E_3 - h_3 E_2) + \nu_2(h_3 E_1 - h_1 E_3) + \nu_3(h_1 E_2 - h_2 E_1)\} = 0 \quad (3.1)$$

где ν_1, ν_2 и ν_3 — произвольные константы.

Последнее энергетическое тождество переписывается как

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathcal{B}_0 V \cdot V) = 0,$$

где

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \nu_3 & -\nu_2 \\ 0 & 1 & 0 & -\nu_3 & 0 & \nu_1 \\ 0 & 0 & 1 & \nu_2 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & -\nu_3 & \nu_2 & 1 & 0 & 0 \\ \nu_3 & 0 & -\nu_1 & 0 & 1 & 0 \\ -\nu_2 & \nu_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь ν_i — произвольные функции $\nu_i(t, x)$. С учетом условий на дивергенцию (1.10) из системы (1.11) следует, что

$$\varepsilon \mathcal{B}_0 \partial_t V + \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_0 B_j \partial_j V + R_1 \operatorname{div} h + R_2 \operatorname{div} E = 0 \quad (3.2)$$

для некоторых произвольных векторов $R_1 \in \mathbb{R}^6$ и $R_2 \in \mathbb{R}^6$. Мы можем выбрать векторы R_1 и R_2 так, что (3.2) переписется как новая симметричная система

$$\varepsilon \mathcal{B}_0 \partial_t V + \sum_{j=1}^3 \mathcal{B}_j \partial_j V = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_2 & -\nu_1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \nu_3 & 0 & -\nu_1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ 0 & 0 & 1 & \nu_2 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \nu_3 & 0 & -\nu_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} -\nu_2 & \nu_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_3 & -\nu_2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\nu_2 & \nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \nu_3 & -\nu_2 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B}_3 = \begin{pmatrix} -\nu_3 & 0 & \nu_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\nu_3 & \nu_2 & 1 & 0 & 0 \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\nu_3 & 0 & \nu_1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -\nu_3 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}.$$

Система (3.3) эквивалентна (1.11), и она снова является гиперболической, если $\mathcal{B}_0 > 0$, т. е.

$$|\nu| < 1 \quad (3.4)$$

для вектор-функции $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$.

Используя условия на дивергенцию (2.5) и отсылая читателя за техническими подробностями к [3, 10], мы получаем следующий аналог вторичной симметризации (3.3) для системы (2.2b):

$$\varepsilon \mathcal{B}_0(\nu) \partial_t V + \tilde{\mathcal{B}}_1(\nu, \Phi) \partial_1 V + \sum_{k=2}^3 \mathcal{B}_k(\nu) \partial_k V = 0 \quad \text{в } [0, T] \times \mathbb{R}_3^-, \quad (3.5)$$

где

$$\tilde{\mathcal{B}}_1(\nu, \Phi) = \frac{1}{\partial_1 \Phi} (\mathcal{B}_1(\nu) - \varepsilon \partial_t \Phi \mathcal{B}_0(\nu) - \partial_2 \Phi \mathcal{B}_2(\nu) - \partial_3 \Phi \mathcal{B}_3(\nu)).$$

Теперь зададим $\nu(t, x)$ в соответствии с выбором, сделанным в [3, 10] для соответствующей линеаризованной задачи:

$$\nu = \varepsilon v^-, \quad (3.6)$$

где $v^- = v^-(t, x) := v(t, -x_1, x')$. Поскольку ε — малый параметр, условие гиперболичности (3.4) выполняется для такого ν . Мы можем показать, что гладкие решения (3.5) удовлетворяют условиям на дивергенцию (2.5) для всех $t \in [0, T]$, если они были истинны при $t = 0$ (см. доказательство в [3, 15]). Это означает эквивалентность задачи (2.2), (2.10) и задачи (2.2a), (2.2c), (2.2d), (3.5).

С обозначениями

$$\mathfrak{B}_k(v^-) := \mathcal{B}_k(\varepsilon v^-), \quad k = 0, 2, 3, \quad \mathfrak{B}_1(v^-, \Phi) := \tilde{\mathcal{B}}_1(\varepsilon v^-, \Phi), \quad (3.7)$$

система (3.5) переписывается в виде

$$\mathbb{L}_-(v^-, V, \Phi) := L_-(v^-, \Phi) V = 0 \quad \text{в } [0, T] \times \mathbb{R}_3^-, \quad (3.8)$$

где

$$L_-(v^-, \Phi) := \varepsilon \mathfrak{B}_0(v^-) \partial_t + \mathfrak{B}_1(v^-, \Phi) \partial_1 + \mathfrak{B}_2(v^-) \partial_2 + \mathfrak{B}_3(v^-) \partial_3.$$

Используя первое граничное условие в (2.2c), вычисляем собственные значения граничной матрицы $\mathcal{B} = \mathcal{B}(v|_{x_1=0}, \varphi) := \mathfrak{B}_1(v^-, \Phi)|_{x_1=0}$:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}(\mathcal{B}) &= -\sqrt{1 + (\partial_2 \varphi)^2 + (\partial_3 \varphi)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \lambda_{3,4}(\mathcal{B}) = 0, \\ \lambda_{5,6}(\mathcal{B}) &= \sqrt{1 + (\partial_2 \varphi)^2 + (\partial_3 \varphi)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

Это означает, что гиперболическая система (3.8) требует два граничных условия на Γ . Следовательно, задача (2.2a), (2.2c), (2.2d), (3.8) имеет правильное количество граничных условий в (2.2c) независимо от знака $\partial_t \varphi$. С этого момента мы будем рассматривать начально-краевую задачу (2.2a), (2.2c), (2.2d), (3.8), для которой граница является характеристикой постоянной кратности.

4. ПРОСТАЯ АПРИОРНАЯ ОЦЕНКА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Пусть

$$(\dot{U}(t, x), \dot{V}(t, x), \dot{\varphi}(t, x')) \quad (4.1)$$

— заданная достаточно гладкая вектор-функция, где $\dot{U} = (\dot{q}, \dot{v}^\top, \dot{H}^\top, \dot{S})^\top$, $\dot{V} = (\dot{h}^\top, \dot{E})^\top$ и

$$\|\dot{U}\|_{W_\infty^3(\Omega_T^\pm)} + \|\dot{V}\|_{W_\infty^3(\Omega_T^-)} + \|\dot{\varphi}\|_{W_\infty^4(\Gamma_T)} \leq K,$$

где $K > 0$ — константа,

$$\Omega_T^\pm := (-\infty, T] \times \mathbb{R}_\pm^3, \quad \Gamma_T := (-\infty, T] \times \Gamma.$$

Здесь и далее все обозначения с «кружком» типа $\dot{U}$ будут относиться к базовому состоянию (4.1). Следуя [3, 10, 22], мы также предполагаем, что базовое состояние (4.1) удовлетворяет условиям гиперболичности (1.5), первым трем граничным условиям в (2.2c), уравнениям для H и h , содержащимся в (2.2a) и (2.2b), ограничениям (2.3)–(2.6) при $t = 0$ и неравенству $\|\dot{\varphi}\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \leq 1$.

Линеаризованные операторы для задачи (2.2a), (2.2c), (2.2d), (3.8) имеют вид:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}'_+(\dot{U}, \dot{\Phi})(U, \Phi) &:= \frac{d}{d\theta} \mathbb{L}_+(\dot{U} + \theta U, \dot{\Phi} + \theta \Phi) \Big|_{\theta=0}, \\ \mathbb{L}'_-(\dot{W}, \dot{\Phi})(W, \Phi) &:= \frac{d}{d\theta} \mathbb{L}_-(\dot{W} + \theta W, \dot{\Phi} + \theta \Phi) \Big|_{\theta=0}, \\ \mathbb{B}'(\dot{U}, \dot{V}, \dot{\varphi})(U, V, \varphi) &:= \frac{d}{d\theta} \mathbb{B}(\dot{U} + \theta U, \dot{V} + \theta V, \dot{\varphi} + \theta \varphi) \Big|_{\theta=0},\end{aligned}$$

где $\dot{\Phi}(t, x) := x_1 + \chi(x_1)\dot{\varphi}(t, x')$, $\dot{W} := (\dot{V}^\top, \dot{v}^-)^\top$, $W := (V^\top, v^-)^\top$ и $\dot{v}^- = \dot{v}^-(t, x) := \dot{v}(t, -x_1, x')$. Линеаризованные операторы могут быть легко вычислены. Например, линеаризованные внутренние уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbb{L}'_+(\dot{U}, \dot{\Phi})(U, \Phi) &= \mathbb{L}'_{e+}(\dot{U}, \dot{\Phi})U - \frac{L_+(\dot{U}, \dot{\Phi})\Phi}{\partial_1 \dot{\Phi}} \partial_1 \dot{U}, \\ \mathbb{L}'_-(\dot{W}, \dot{\Phi})(W, \Phi) &= \mathbb{L}'_{e-}(\dot{W}, \dot{\Phi})W - \frac{L_-(\dot{v}^-, \dot{\Phi})\Phi}{\partial_1 \dot{\Phi}} \partial_1 \dot{V},\end{aligned}\tag{4.2}$$

где

$$\mathbb{L}'_{e+}(\dot{U}, \dot{\Phi})U := L_+(\dot{U}, \dot{\Phi})U + \mathcal{C}_+(\dot{U}, \dot{\Phi})U, \quad \mathbb{L}'_{e-}(\dot{W}, \dot{\Phi})W := L_-(\dot{v}^-, \dot{\Phi})V + \mathcal{C}_-(\dot{V}, \dot{\Phi})v^-,$$

а конкретный вид матриц $\mathcal{C}_\pm$ не представляет интереса (см. [3, 10, 22]).

Линеаризованные внутренние уравнения содержат производные возмущения интерфейса φ . Для получения стандартных линейных гиперболических систем мы сначала переходим к «хорошим неизвестным Алианака» [1]

$$\dot{U} = (\dot{q}, \dot{v}^\top, \dot{H}^\top, \dot{S})^\top := U - \frac{\Psi}{\partial_1 \dot{\Phi}} \partial_1 \dot{U}, \quad \dot{V} = (\dot{h}^\top, \dot{E})^\top := V - \frac{\Psi}{\partial_1 \dot{\Phi}} \partial_1 \dot{V},\tag{4.3}$$

где $\Psi(t, x) := \chi(x_1)\varphi(t, x')$. В обозначениях (4.3) операторы в (4.2) переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}'_+(\dot{U}, \dot{\Phi})(U, \Phi) &= \mathbb{L}'_{e+}(\dot{U}, \dot{\Phi})\dot{U} + \frac{\Psi}{\partial_1 \dot{\Phi}} \partial_1 \mathbb{L}_+(\dot{U}, \dot{\Phi}), \\ \mathbb{L}'_-(\dot{W}, \dot{\Phi})(W, \Phi) &= \mathbb{L}'_{e-}(\dot{W}, \dot{\Phi})\dot{W} + \frac{\Psi}{\partial_1 \dot{\Phi}} \partial_1 \mathbb{L}_-(\dot{W}, \dot{\Phi}),\end{aligned}\tag{4.4}$$

где $\dot{W} := (\dot{V}^\top, \dot{v}^-)^\top$ и $\dot{v}^- = \dot{v}^-(t, x) := \dot{v}(t, -x_1, x')$. Затем мы отбрасываем члены нулевого порядка в Ψ в (4.4), которые в последующем нелинейном анализе будут рассматриваться как величины погрешности на каждом шаге итерации Нэша—Мозера. Это дает нам следующую окончательную форму нашей линеаризованной задачи для $(\dot{U}, \dot{V}, \varphi)$:

$$L_+(\dot{U}, \dot{\Phi})\dot{U} + \mathcal{C}_+(\dot{U}, \dot{\Phi})\dot{U} = f \quad \text{в } \Omega_T^+, \tag{4.5a}$$

$$L_-(\dot{v}^-, \dot{\Phi})\dot{V} + \mathcal{C}_-(\dot{V}, \dot{\Phi})\dot{v}^- = 0 \quad \text{в } \Omega_T^-, \tag{4.5b}$$

$$\mathbb{B}'(\dot{U}, \dot{V}, \dot{\varphi})(\dot{U}, \dot{V}, \varphi) = 0 \quad \text{на } \Gamma_T, \tag{4.5c}$$

$$(\dot{U}, \dot{V}, \varphi)|_{t<0} = 0, \tag{4.5d}$$

где

$$\mathbb{B}'(\dot{U}, \dot{V}, \dot{\varphi})(\dot{U}, \dot{V}, \varphi) := \begin{pmatrix} (\partial_t + \dot{v}' \cdot \nabla' - \partial_1(\dot{v} \cdot \dot{N}))\varphi - \dot{v} \cdot \dot{N} \\ \dot{E} \cdot \dot{\tau}_2 - \varepsilon(\partial_t \dot{\varphi})\dot{h}_3 - \varepsilon \partial_t(\dot{h}_3 \varphi) + \partial_2(\dot{E}_1 \varphi) \\ \dot{E} \cdot \dot{\tau}_3 + \varepsilon(\partial_t \dot{\varphi})\dot{h}_2 + \varepsilon \partial_t(\dot{h}_2 \varphi) + \partial_3(\dot{E}_1 \varphi) \\ \dot{q} - \dot{h} \cdot \dot{h} + \dot{E} \cdot \dot{E} + [\partial_1 \dot{q}] \varphi \end{pmatrix},$$

$$\dot{v}' = (\dot{v}_2, \dot{v}_3)^\top, \quad \nabla' = (\partial_2, \partial_3)^\top, \quad \dot{N} = (1, -\partial_2 \dot{\varphi}, -\partial_3 \dot{\varphi})^\top,$$

$$\dot{\tau}_2 = (\partial_2 \dot{\varphi}, 1, 0)^\top, \quad \dot{\tau}_3 = (\partial_3 \dot{\varphi}, 0, 1)^\top, \quad [\partial_1 \dot{q}] = (\partial_1 \dot{q})|_\Gamma - (\dot{h} \cdot \partial_1 \dot{h})|_\Gamma + (\dot{E} \cdot \partial_1 \dot{E})|_\Gamma.$$

Предположение о том, что базовое состояние (4.1) удовлетворяет уравнению для h , содержащемуся в (2.2b), использовалось при записи второго и третьего граничных условий в (4.5c) (см. [3, 10, 22]). Более того, мы предполагаем, что заданный исходный член f обращается в нуль в прошлом и рассматриваем случай нулевых начальных данных, что является обычным предположением. Случай ненулевых начальных данных откладывается до построения так называемого приближенного решения (см., например, [16]) в нелинейном анализе.

Заметим, что мы можем рассматривать однородные уравнения в системе (4.5b) (с нулевыми исходными членами) и однородные граничные условия (4.5c). Это возможно, поскольку, следуя [3, 10, 22], линеаризованная задача с неоднородными вакуумными уравнениями и неоднородными граничными условиями может быть сведена к задаче (4.5). Более того, процесс сведения линеаризованной задачи к задаче с однородными вакуумными уравнениями и однородными граничными условиями, описанный в [3, 22], организован таким образом, что решения редуцированной задачи (4.5) автоматически удовлетворяют следующим линейным версиям ограничений (2.3)–(2.6):

$$\operatorname{div} \dot{\mathcal{H}} = 0 \quad \text{в } \Omega_T^+, \quad (4.6)$$

$$\operatorname{div} \dot{\mathbf{h}} = 0, \quad \operatorname{div} \dot{\mathbf{e}} = 0 \quad \text{в } \Omega_T^-, \quad (4.7)$$

$$\dot{H}_N = \dot{H}_2 \partial_2 \varphi + \dot{H}_3 \partial_3 \varphi - \varphi \partial_1 (\dot{H} \cdot \dot{N}) \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (4.8)$$

$$\dot{h}_N = \dot{h}_2 \partial_2 \varphi + \dot{h}_3 \partial_3 \varphi - \varphi \partial_1 (\dot{h} \cdot \dot{N}) \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (4.9)$$

где

$$\dot{\mathcal{H}} = (\dot{H}_N, \dot{H}_2 \partial_1 \dot{\Phi}, \dot{H}_3 \partial_1 \dot{\Phi})^\top, \quad \dot{H}_N = \dot{H}_1 - \dot{H}_2 \partial_2 \dot{\Phi} - \dot{H}_3 \partial_3 \dot{\Phi}, \quad \dot{H}_N|_\Gamma = (\dot{H} \cdot \dot{N})|_\Gamma,$$

$$\dot{\mathbf{h}} = (\dot{h}_N, \dot{h}_2 \partial_1 \dot{\Phi}, \dot{h}_3 \partial_1 \dot{\Phi})^\top, \quad \dot{h}_N = \dot{h}_1 - \dot{h}_2 \partial_2 \dot{\Phi} - \dot{h}_3 \partial_3 \dot{\Phi}, \quad \dot{h}_N|_\Gamma = (\dot{h} \cdot \dot{N})|_\Gamma,$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\dot{E}_N, \dot{E}_2 \partial_1 \dot{\Phi}, \dot{E}_3 \partial_1 \dot{\Phi})^\top, \quad \dot{E}_N = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 \partial_2 \dot{\Phi} - \dot{E}_3 \partial_3 \dot{\Phi}.$$

Далее мы используем $A \underset{a_1, \dots, a_m}{\lesssim} B$ для обозначения того, что $A \leq C(a_1, \dots, a_m)B$ при заданных параметрах $a_1, \dots, a_m$, где мы обозначаем через C некоторую универсальную положительную константу, а через $C(\cdot)$ некоторую положительную константу, зависящую от величин, перечисленных в скобках. Следуя стандартным рассуждениям энергетического метода, примененным к симметричным гиперболическим системам (4.5a) и (4.5b), получаем

$$I(t) + \int_{\Gamma_t} \mathcal{Q} \lesssim_K \|f\|_{L_2(\Omega_T^+)}^2 + \|\dot{U}\|_{L^2(\Omega_t^+)} + \|\dot{V}\|_{L^2(\Omega_t^-)}, \quad (4.10)$$

где

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}_+^3} A_0(\dot{U}) \dot{U} \cdot \dot{U} + \int_{\mathbb{R}_-^3} \mathfrak{B}_0(\dot{v}) \dot{V} \cdot \dot{V}, \quad \mathcal{Q} = -(\tilde{A}_1(\dot{U}, \dot{\Phi}) \dot{U} \cdot \dot{U})|_\Gamma + \frac{1}{\varepsilon} (\mathfrak{B}_1(\dot{v}^-, \dot{\Phi}) \dot{V} \cdot \dot{V})|_\Gamma.$$

В частности,

$$(\tilde{A}_1(\dot{U}, \dot{\Phi}) \dot{U} \cdot \dot{U})|_\Gamma = 2q \dot{v}_N|_\Gamma, \quad (4.11)$$

где $\dot{v}_N = \dot{v}_1 - \dot{v}_2 \partial_2 \dot{\Phi} - \dot{v}_3 \partial_3 \dot{\Phi}$ (очевидно, $\dot{v}_N|_\Gamma = (\dot{v} \cdot \dot{N})|_\Gamma$).

Благодаря выбору (3.6) с использованием граничных условий и (4.8)–(4.9), в [3, 10, 22] было показано, что квадратичная форма $\mathcal{Q}$ приводится к виду

$$\mathcal{Q} = \partial_t (\dot{\mu} \varphi \dot{E}_N) + \partial_2 (\dot{\mu} \varphi (\dot{E}_2 \partial_t \dot{\varphi} - \dot{h} \cdot \dot{\tau}_3)) + \partial_3 (\dot{\mu} \varphi (\dot{E}_3 \partial_t \dot{\varphi} + \dot{h} \cdot \dot{\tau}_2)) + \mathcal{L} \quad \text{на } \Gamma, \quad (4.12)$$

где $\dot{\mu} = 2(\dot{E}_1 + \varepsilon \dot{v}_2 \dot{h}_3 - \varepsilon \dot{v}_3 \dot{h}_2)$ и $\mathcal{L}$ — это сумма членов типа $\text{coeff } \dot{q} \varphi$, $\text{coeff } \dot{v}_N \varphi$, $\text{coeff } \dot{h}_i \varphi$, $\text{coeff } \dot{E}_i \varphi$, $\text{coeff } \varphi^2$. Здесь и далее coeff — это общий коэффициент, который зависит от базового состояния (4.1), точная форма которого не представляет интереса и может меняться от строки к строке.

Из (4.10) и (4.12) выводим энергетическое неравенство

$$I(t) + \int_{\Gamma} \dot{\mu} \varphi \dot{E}_N + \int_{\Gamma_t} \mathcal{L} \lesssim_K \|f\|_{L_2(\Omega_T^+)}^2 + \|\dot{U}\|_{L^2(\Omega_t^+)} + \|\dot{V}\|_{L^2(\Omega_t^-)} + \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_t)}^2. \quad (4.13)$$

Как мы видим, нам не удастся замкнуть априорную оценку в L^2 , но подготовительное энергетическое неравенство (4.13) имело решающее значение в [3, 10] (см. также [22] для релятивистского случая) для замкнутой оценки в H^1 . Точнее, поскольку граница Γ является характеристической, естественная функциональная настройка обеспечивается анизотропными весовыми пространствами Соболева H_*^m , см. [6, 14] (мы также ссылаемся на [12] и имеющуюся там библиографию), и базовая априорная оценка в [3, 10, 22] была замкнута в H_*^1 .

Для удобства читателя определим здесь пространства H_*^m . Введем символ D_*^α :

$$D_*^\alpha := \partial_t^{\alpha_0} (\sigma \partial_1)^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \cdots \partial_d^{\alpha_d} \partial_1^{\alpha_{d+1}}, \quad \langle \alpha \rangle := |\alpha| + \alpha_{d+1}, \quad |\alpha| := \sum_{i=0}^{d+1} \alpha_i,$$

где $\alpha := (\alpha_0, \dots, \alpha_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+2}$ ($d = 3$ и $d = 2$ для 3-мерного и 2-мерного случаев, соответственно), $\sigma = \sigma(x_1)$ — возрастающая гладкая функция на $[0, +\infty)$ такая, что $\sigma(x_1) = x_1$ при $0 \leq x_1 \leq 1/2$ и $\sigma(x_1) = 1$ при $x_1 \geq 1$. Для любого целого числа $m \in \mathbb{N}$ и интервала $I \subset \mathbb{R}$ функциональное пространство $H_*^m(I \times \Omega)$ определяется как

$$H_*^m(I \times \Omega) := \{u \in L^2(I \times \Omega) : D_*^\alpha u \in L^2(I \times \Omega) \text{ для } \langle \alpha \rangle \leq m\},$$

с нормой $\|\cdot\|_{H_*^m(I \times \Omega)}$:

$$\|u\|_{H_*^m(I \times \Omega)}^2 := \sum_{\langle \alpha \rangle \leq m} \|D_*^\alpha u\|_{L^2(I \times \Omega)}^2.$$

Для краткости мы будем писать $\|u\|_{m,*,t} := \|u\|_{H_*^m(\Omega_t)}$. По определению имеем

$$H^m(I \times \Omega) \hookrightarrow H_*^m(I \times \Omega) \hookrightarrow H^{\lfloor m/2 \rfloor}(I \times \Omega) \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}, \quad I \subset \mathbb{R}.$$

Отметим также, что $H_*^1(\Omega_t)$ совпадают с $H_{\tan}^1(\Omega_t)$, где $H_{\tan}^m(\Omega_t)$ — так называемые конормальные пространства Соболева [3, 25].

Для системы (4.5b) граница Γ также характеристична, но потеря контроля над производными в нормальном направлении может быть компенсирована использованием линейаризованных дивергентных ограничений (4.7) (более подробно см. в [10, 22]). Поэтому для вакуумного неизвестного $\dot{V}$ мы можем использовать обычные нормы Соболева. Отсылая читателя к [3, 10] за доказательством, здесь мы просто представим основную априорную оценку, полученную для линейаризованной задачи (4.5).

Теорема 4.1. Пусть базовое состояние (4.1) удовлетворяет всем предположениям выше. Пусть также выполняется условие неколлинеарности

$$|\dot{H}_2 \dot{h}_3 - \dot{H}_3 \dot{h}_2| \geq \delta > 0 \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (4.14)$$

где δ — фиксированная константа. Тогда существует положительная константа $\dot{E}_1^*$ такая, что если основное состояние удовлетворяет условию $|\dot{E}_1| < \dot{E}_1^*$ на Γ_T , то для всех $f \in H_*^1(\Omega_T)$, которые обращаются в нуль в прошлом, любое решение $(\dot{U}, \dot{V}, \varphi) \in H_*^1(\Omega_T) \times H^1(\Omega_T) \times H^{3/2}(\Gamma_T)$ задачи (4.5) подчиняется априорной оценке

$$\|\dot{U}\|_{1,*,T} + \|\dot{V}\|_{H^1(\Omega_T)} + \|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma_T)} \lesssim_{K,T,\delta} \|f\|_{1,*,T}. \quad (4.15)$$

Напомним, что, как было доказано в [16], классическая задача свободного интерфейса, в которой не учитывается влияние вакуумного электрического поля, корректно поставлена при условии, что начальные данные удовлетворяют условию неколлинеарности (4.14). Отметим, что условие неколлинеарности появляется как условие эллиптичности символа интерфейса (это означает, что граничные условия (4.8) и (4.9) разрешены относительно $\partial_t \varphi$ и $\nabla' \varphi$). С другой стороны, в [10] было показано, что несмотря на то, что ε является малым параметром в нерелятивистской постановке, достаточно большое вакуумное электрическое поле может сделать плоский интерфейс сильно неустойчивым, т. е. линейаризованная задача с постоянным коэффициентом, связанная с (4.5), может быть некорректно поставлена, если невозмущенное вакуумное электрическое поле достаточно велико. То есть условия неколлинеарности недостаточно, и вакуумное электрическое поле E играет решающую роль для корректности неклассической задачи.

Как мы видим, априорная оценка (4.15) была доказана в предположении, что нормальная компонента невозмущенного вакуумного электрического поля достаточно мала. Но этого предположения достаточно только для корректности. К сожалению, по техническим причинам невозможно найти необходимое и достаточное условие корректности для общего случая невозмущенного течения как аналитически, так и численно (численной проверкой условия Крайса—Лопатинского [8] для линеаризованной задачи с постоянным коэффициентом). Это было сделано в [24] только для случая идеальной *несжимаемой* МГД. Точнее, для задачи несжимаемой МГД—Максвелла о свободном интерфейсе в [24] было показано, что плоский интерфейс плазма—вакуум $x_1 = 0$ является *сильно неустойчивым*, т. е. соответствующая линеаризованная задача с постоянным коэффициентом является некорректной тогда и только тогда, когда

$$\dot{E}_1^2 > \frac{|\dot{H}|^2 + |\dot{h}|^2 - \sqrt{(|\dot{H}|^2 + |\dot{h}|^2)^2 - 4|\dot{H} \times \dot{h}|^2}}{2} \quad (4.16)$$

для невозмущенного потока. Легко видеть, что как только условие неколлинеарности (4.14) нарушается (т. е. $\dot{H} \times \dot{h} = 0$), выполняется неравенство (4.16) и линеаризованная задача с постоянными коэффициентами в несжимаемой МГД становится некорректной. Более того, если коэффициенты этой задачи удовлетворяют противоположному строгому неравенству

$$\dot{E}_1^2 < \frac{|\dot{H}|^2 + |\dot{h}|^2 - \sqrt{(|\dot{H}|^2 + |\dot{h}|^2)^2 - 4|\dot{H} \times \dot{h}|^2}}{2}, \quad (4.17)$$

то в [11] была выведена априорная оценка в L^2 с помощью «несжимаемой» адаптации метода симметризатора Крайса [8].

Если учесть влияние поверхностного натяжения, т. е. заменить граничное условие (1.13) на (1.18), то в линеаризованной задаче (4.5) последнее граничное условие в (4.5с) следует заменить на

$$\dot{q} - \dot{h} \cdot \dot{h} + \dot{E} \cdot \dot{E} + [\partial_1 \dot{q}] \varphi - \mathfrak{s} \nabla' \cdot (\dot{B} \nabla' \varphi) = 0 \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (4.18)$$

где $\dot{B}$ — положительно определенная матрица, определяемая как (см. [29])

$$\dot{B} := \frac{I_2}{|\dot{N}|} - \frac{\nabla' \dot{\varphi} \otimes \nabla' \dot{\varphi}}{|\dot{N}|^3}.$$

В этом случае вместо (4.13) справедливо следующее энергетическое неравенство:

$$\begin{aligned} I(t) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\mathfrak{s} |\nabla' \varphi|^2}{|\dot{N}|^3} + \dot{\mu} \varphi \dot{E}_N \right\} + \int_{\Gamma_t} \mathcal{L} &\lesssim_K \\ &\lesssim_K \|f\|_{L^2(\Omega_T^+)} + \|\dot{U}\|_{L^2(\Omega_t^+)} + \|\dot{V}\|_{L^2(\Omega_t^-)} + \|(\varphi, \nabla' \varphi)\|_{L^2(\Gamma_t)}^2, \end{aligned} \quad (4.19)$$

выведенное в [26]. То есть, как и в случае $\mathfrak{s} = 0$, мы не можем замкнуть априорную оценку в L^2 .

Дифференцируя линеаризованную задачу (4.5) по t , x_2 и x_3 и применяя рассуждения, аналогичные тем, что были применены к доказательству неравенства (4.19), удастся замкнуть априорную оценку в H^1 . А именно, следующая теорема была доказана в [26].

Теорема 4.2. Пусть базовое состояние (4.1) удовлетворяет сформулированным выше предположениям, а исходный член $f \in H_*^1(\Omega_T^+)$ обращается в нуль в прошлом. Пусть задача (4.5), в которой последнее граничное условие (4.5с) заменено на (4.18), имеет решение $(\dot{U}, \dot{V}, \varphi) \in H_*^1(\Omega_T^+) \times H^1(\Omega_T^-) \times H^1(\Gamma_T)$, причем $\nabla' \varphi \in H^1(\Gamma_T)$. Тогда это решение подчиняется априорной оценке

$$\|\dot{U}\|_{1,*T} + \|\dot{V}\|_{H^1(\Omega_T^-)} + \|(\varphi, \nabla' \varphi)\|_{H^1(\Gamma_T)} \lesssim_{K,T} \|f\|_{1,*T}. \quad (4.20)$$

Другими словами, стабилизирующий эффект поверхностного натяжения на эволюцию свободного интерфейса был проверен в [26]. Действительно, в теореме 4.2 не предполагается никаких условий корректности, таких как (4.14) или (4.17) для невозмущенного потока.

В то же время, доказательство локальной по времени корректности исходной нелинейной задачи свободного интерфейса при $\mathfrak{s} = 0$ или $\mathfrak{s} \neq 0$ все еще остается открытой проблемой. Фактически, с помощью априорных оценок (4.15) и (4.20), выведенных для линеаризованной задачи (при $\mathfrak{s} = 0$ или $\mathfrak{s} \neq 0$ соответственно), можно доказать (стандартными рассуждениями — см., например, [16]) единственность гладкого решения нелинейной задачи. Более того, мы считаем, что, имея доказательство существования гладких решений линейной задачи, разрешимость нелинейной задачи можно доказать модифицированной итерационной схемой Нэша—Мозера (как, например, в [16, 28, 29]). То есть отсутствие доказательства существования решений линеаризованной задачи теперь является главным препятствием к доказательству локальной корректности нелинейной задачи. Обратим внимание, что классический аргумент двойственности [5] не может быть напрямую применен к линейной задаче (4.5) (или ее аналогу при $\mathfrak{s} \neq 0$), поскольку для нее мы не можем замкнуть априорную оценку в L^2 .

5. ЛОКАЛЬНАЯ ПО ВРЕМЕНИ КОРРЕКТНОСТЬ 2-МЕРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ

Что касается 2-мерной версии нелинейной задачи (2.2a), (2.2c), (2.2d), (3.8), ее локальная по времени корректность была недавно доказана в [18]. Давайте теперь рассмотрим 2-мерный случай. То есть, следуя [4], мы предполагаем, что все величины не зависят от x_3 , тогда как $v_3 = H_3 = h_3 = 0$. Это подразумевает, что $E_1 = E_2 = 0$ для всех $t > 0$, если это верно при $t = 0$. Предполагая последнее, мы имеем $E = (0, 0, E_3)$. Немного злоупотребляя обозначениями, пусть ниже $E := E_3$ будет скалярным неизвестным. Таким образом, мы рассматриваем 2-мерные плоские МГД-течения, т. е. когда пространственные переменные $x = (x_1, x_2)$, скорость $v = (v_1, v_2)^T$ и магнитное поле $H = (H_1, H_2)^T$ имеют только две компоненты. В области вакуума нашими неизвестными являются магнитное поле $h = (h_1, h_2)^T$ и скалярная функция E .

Для неизвестного $U \in \mathbb{R}^6$ 2-мерная МГД-система записывается в симметричной форме (1.4), с $d = 2$. Двумерные уравнения Максвелла

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t h_1 + \partial_2 E = 0, \\ \varepsilon \partial_t h_2 - \partial_1 E = 0, \\ \varepsilon \partial_t E - \partial_1 h_2 + \partial_2 h_1 = 0 \end{cases}$$

для $V = (h^T, E)^T \in \mathbb{R}^3$ также образуют симметричную гиперболическую систему

$$\varepsilon \partial_t V + B_1 \partial_1 V + B_2 \partial_2 V = 0 \quad (5.1)$$

с условием на дивергенцию

$$\partial_1 h_1 + \partial_2 h_2 = 0 \quad (5.2)$$

на начальных данных для (5.1), где

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Движущийся интерфейс теперь представляет собой кривую $\Gamma(t) = \{x_1 = \varphi(t, x_2)\}$ и $N = (1, -\partial_2 \varphi)^T$. Для 2-мерного случая граничные условия (1.12)–(1.14) на $\Gamma(t)$ имеют вид

$$\partial_t \varphi = v_1 - v_2 \partial_2 \varphi, \quad q = \frac{1}{2} (|h|^2 - E^2), \quad E = -\varepsilon h_2 \partial_t \varphi. \quad (5.3)$$

Граничные условия

$$H_1 = H_2 \partial_2 \varphi \quad \text{и} \quad h_1 = h_2 \partial_2 \varphi \quad (5.4)$$

на $\Gamma(t)$ не включены в (1.12), поскольку они являются всего лишь граничными ограничениями на начальных данных. Таким образом, задача на интерфейсе плазма—вакуум в 2-мерном случае является задачей со свободной границей для МГД-системы (1.4) (с $d = 2$) в области $\Omega^+(t) = \{x_1 > \varphi(t, x_2)\}$ и уравнений Максвелла (5.1) в области $\Omega^-(t) = \{x_1 < \varphi(t, x_2)\}$ с граничными условиями (5.3) на свободном интерфейсе $\Gamma(t)$ и начальными данными (1.17), которые должны удовлетворять условиям на дивергенцию (1.2) и (5.2) в $\Omega^+(0)$ и $\Omega^-(0)$, соответственно, а также граничным ограничениям (5.4) на $\Gamma(0)$.

Замена переменных (2.1) (с $x' := x_2$) сводит задачу со свободной границей (1.4), (5.1), (5.3), (1.17) к 2-мерной версии задачи с фиксированной границей (2.2), в которой $\mathbb{R}_\pm^3$ заменяются на $\mathbb{R}_\pm^2$, линия $\Gamma = \{0\} \times \mathbb{R}$,

$$\mathbb{B}(U, V, \varphi) := \begin{pmatrix} \partial_t \varphi - v_1 + v_2 \partial_2 \varphi \\ E + \varepsilon \mathcal{H}_2 \partial_t \varphi \\ q - \frac{1}{2} |\mathcal{H}|^2 + \frac{1}{2} E^2 \end{pmatrix},$$

и т. д. (подробнее см. в [4, 25]). Более того, можно доказать 2-мерные версии предложений 2.1 и 2.2.

Для 2-мерной версии задачи (2.2) мы снова сталкиваемся с трудностями, вызванными тем, что граница неравномерно характеристична. Для преодоления этой трудности мы снова используем вторичную симметризацию. Двумерная версия вторичной симметризации (3.3) имеет вид

$$\varepsilon \mathcal{B}_0 \partial_t V + \mathcal{B}_1 \partial_1 V + \mathcal{B}_2 \partial_2 V = 0, \quad (5.5)$$

где

$$\mathcal{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\nu_2 \\ 0 & 1 & \nu_1 \\ -\nu_2 & \nu_1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ \nu_2 & -\nu_1 & -1 \\ 0 & -1 & -\nu_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} -\nu_2 & \nu_1 & 1 \\ \nu_1 & \nu_2 & 0 \\ 1 & 0 & -\nu_2 \end{pmatrix},$$

и условие гиперболичности $\mathcal{B}_0 > 0$ снова неравенство (3.4) при $\nu = (\nu_1, \nu_2)$. Мы должны сделать естественные изменения в 2-мерном аналоге системы (3.8), где выбор ν такой же, как в (3.6), а собственные значения граничной матрицы $\mathcal{B} = \mathcal{B}(v|_{x_1=0}, \varphi) := \mathfrak{B}_1(v^-, \Phi)|_{x_1=0}$ имеют вид

$$\lambda_{1,2}(\mathcal{B}) = \pm \sqrt{1 + (\partial_2 \varphi)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad \lambda_3(\mathcal{B}) = 0.$$

Гиперболическая система (3.8) (ее 2-мерная версия в $\mathbb{R}_-^2$) требует одного граничного условия на Γ . То есть, 2-мерная версия задачи (2.2a), (2.2c), (2.2d), (3.8) имеет правильное количество граничных условий в (2.2c) независимо от знака $\partial_t \varphi$. Двумерная версия линеаризованной задачи (4.5) имеет тот же вид, где теперь $\Omega_T^\pm := (-\infty, T] \times \mathbb{R}_\pm^2$,

$$\mathbb{B}'(\dot{U}, \dot{V}, \dot{\varphi})(U, V, \varphi) := \begin{pmatrix} (\partial_t + \dot{v}_2 \partial_2 - \partial_1(\dot{v} \cdot \dot{N}))\varphi - \dot{v} \cdot \dot{N} \\ \dot{E} + \varepsilon \partial_t \dot{\varphi} \dot{\mathcal{H}}_2 + \varepsilon \dot{\mathcal{H}}_2 \partial_t \varphi + \dot{b} \varphi \\ \dot{q} - \dot{\mathcal{H}} \cdot \dot{\mathcal{H}} + \dot{E} \dot{E} + [\partial_1 \dot{q}] \varphi \end{pmatrix},$$

$\dot{b} = \partial_1 \dot{E} + \varepsilon \partial_t \dot{\varphi} \partial_1 \dot{\mathcal{H}}_2$, и т. д.

Корректность 2-мерной линеаризованной задачи была недавно доказана в [25].

Теорема 5.1. Пусть базовое состояние (4.1) удовлетворяет всем сформулированным выше предположениям. Пусть также

$$|\dot{H}| + |\dot{\mathcal{H}}| \geq \delta > 0 \quad \text{на } \Gamma_T, \quad (5.6)$$

где δ — фиксированная константа. Тогда 2-мерная версия задачи (4.5) имеет единственное решение $(\dot{U}, \dot{V}, \dot{\varphi}) \in H_*^1(\Omega_T^+) \times H^1(\Omega_T^-) \times H^{3/2}(\Gamma_T)$ для всех $f \in H_*^1(\Omega_T^+)$, обращающихся в нуль в прошлом. Более того, это решение подчиняется априорной оценке

$$\|\dot{U}\|_{1,*T} + \|\dot{V}\|_{H^1(\Omega_T^-)} + \|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma_T)} \lesssim_{K,T,\delta} \|f\|_{1,*T}. \quad (5.7)$$

Условие (5.6) является 2-мерным аналогом условия неколлинеарности (4.14) в том смысле, что (5.6) также появляется как условие эллиптичности символа интерфейса, т. е. 2-мерные версии граничных ограничений (4.8) и (4.9) разрешимы для $\partial_t \varphi$ и $\partial_2 \varphi$, если выполняется (5.6). Как мы видим, в отличие от 3-мерного случая, в теореме 1.3 не требуется никаких предположений о невозмущенном вакуумном электрическом поле. Однако это вполне естественно, поскольку в 3-мерном случае нормальная компонента $\dot{E}_1$ играет дестабилизирующую роль, тогда как $\dot{E}_1$ выпадает из 2-мерной постановки. Благодаря выбору ν в (3.4) граничные условия для 2-мерной линеаризованной задачи являются диссипативными для случая постоянных коэффициентов, для которого мы можем даже замкнуть априорную оценку в L^2 (но из-за наличия членов низшего порядка априорная оценка для переменных коэффициентов замкнута в H_*^1 ; более подробно см.

в [25]). Единственность решения линеаризованной задачи следует из оценки (5.7). Доказательство существования решений снова основано на использовании априорной оценки (5.7), если мы используем аргумент с фиксированной точкой из [15] (см. [25]).

Априорная оценка (5.7) не теряет производных от исходного члена f , но (5.7) подразумевает следующую априорную оценку для линеаризованной задачи с неоднородными уравнениями Максвелла и граничными условиями [25]:

$$\|\dot{U}\|_{1,*,T} + \|\dot{V}\|_{H^1(\Omega_T^-)} + \|\varphi\|_{H^{3/2}(\Gamma_T)} \lesssim_{K,T,\delta} \|f\|_{3,*,T} + \|f^-\|_{H^3(\Omega_T^-)} + \|g\|_{H^3(\Gamma_T)}, \quad (5.8)$$

где f^- и g — исходные члены в уравнениях Максвелла и граничные условия, соответственно. Априорная оценка (5.8) *теряет производные* из исходных членов. Вот почему для компенсации этой потери производных существование гладких решений нелинейной задачи доказывается в [18] подходящими итерациями Нэша—Мозера. Отсылая читателя к [18] за подробностями, здесь мы только отметим, что решающую роль в доказательстве сходимости итераций Нэша—Мозера играют так называемые *ручные* априорные оценки в высоких нормах Соболева, выведенные для линеаризованной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alinhac S. Existence d'ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels// Commun. Part. Differ. Equ. — 1989. — 14. — С. 173–230.
2. Bernstein I., Frieman E., Kruskal M., Kulsrud R. An energy principle for hydromagnetic stability problems// Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1958. — 244. — С. 17–40.
3. Catania D., D'Abbicco M., Secchi P. Stability of the linearized MHD-Maxwell free interface problem// Commun. Pure Appl. Anal. — 2014. — 13. — С. 2407–2443.
4. Catania D., D'Abbicco M., Secchi P. Weak stability of the plasma–vacuum interface problem// J. Differ. Equ. — 2016. — 261. — С. 3169–3219.
5. Chazarain J., Piriou A. Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations. — Amsterdam : North-Holland Publ. Co., 1982.
6. Chen S. Initial boundary value problems for quasilinear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary// Front. Math. China. — 2007. — 2. — С. 87–102.
7. Goedbloed H., Keppens R., Poedts S. Magnetohydrodynamics of Laboratory and Astrophysical Plasmas. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2019.
8. Kreiss H.-O. Initial boundary value problems for hyperbolic systems// Commun. Pure Appl. Math. — 1970. — 23. — С. 277–298.
9. Landau L. D., E. Lifshitz M. Electrodynamics of Continuous Media. — Oxford: Pergamon Press, 1984.
10. Mandrik N., Trakhinin Y. Influence of vacuum electric field on the stability of a plasma–vacuum interface// Commun. Math. Sci. — 2014. — 12. — С. 1065–1100.
11. Morando A., Secchi P., Trakhinin Y., Trebeschi P. Stability of an incompressible plasma–vacuum interface with displacement current in vacuum// Math. Methods Appl. Sci. — 2020. — 43. — С. 7465–7483.
12. Morando A., Secchi P., Trebeschi P. Regularity of solutions to characteristic initial-boundary value problems for symmetrizable systems// J. Hyperbolic Differ. Equ. — 2009. — 6, № 4. — С. 753–808.
13. Samulyak R., Du J., Glimm J., Xu Z. A numerical algorithm for MHD of free surface flows at low magnetic Reynolds numbers// J. Comput. Phys. — 2007. — 226. — С. 1532–1549.
14. Secchi P. Some properties of anisotropic Sobolev spaces// Arch. Math. (Basel). — 2000. — 75. — С. 207–216.
15. Secchi P., Trakhinin Y. Well-posedness of the linearized plasma–vacuum interface problem// Interfaces Free Bound. — 2013. — 15. — С. 323–357.
16. Secchi P., Trakhinin Y. Well-posedness of the plasma–vacuum interface problem// Nonlinearity. — 2014. — 27. — С. 105–169.
17. Secchi P., Trakhinin Y., Wang T. On vacuum free boundary problems in ideal compressible magnetohydrodynamics// Bull. London Math. Soc. — 2023. — 55. — С. 2087–2111.
18. Secchi P., Trakhinin Y., Wang T. Well-posedness of the two-dimensional relativistic plasma–vacuum interface problem// *готовится в печать*.
19. Trakhinin Y. Dissipative symmetrizers of hyperbolic problems and their applications to shock waves and characteristic discontinuities// SIAM J. Math. Anal. — 2006. — 37. — С. 1988–2024.
20. Trakhinin Y. The existence of current-vortex sheets in ideal compressible magnetohydrodynamics// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2009. — 191. — С. 245–310.

21. *Trakhinin Y.* On the well-posedness of a linearized plasma–vacuum interface problem in ideal compressible MHD// *J. Differ. Equ.* — 2010. — 249. — C. 2577–2599.
22. *Trakhinin Y.* Stability of relativistic plasma–vacuum interfaces// *J. Hyperbolic Differ. Equ.* — 2012. — 9. — C. 469–509.
23. *Trakhinin Y.* On well-posedness of the plasma-vacuum interface problem: The case of non-elliptic interface symbol// *Commun. Pure Appl. Anal.* — 2016. — 15. — C. 1371–1399.
24. *Trakhinin Y.* On violent instability of a plasma–vacuum interface for an incompressible plasma flow and a nonzero displacement current in vacuum// *Comm. Math. Sci.* — 2020. — 18. — C. 321–337.
25. *Trakhinin Y.* On well-posedness of the two-dimensional MHD–Maxwell free interface problem// *Lobachevskii J. Math.* — 2024. — 45. — C. 1528–1540.
26. *Trakhinin Y.* Stabilizing effect of surface tension for the linearized MHD–Maxwell free interface problem// *ArXiv.* — 2024. — 2409.14758.
27. *Trakhinin Y., Wang T.* Well-posedness of free boundary problem in non-relativistic and relativistic ideal compressible magnetohydrodynamics// *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 2021. — 239. — C. 1131–1176.
28. *Trakhinin Y., Wang T.* Well-posedness for the free-boundary ideal compressible magnetohydrodynamic equations with surface tension// *Math. Ann.* — 2022. — 383. — C. 761–808.
29. *Trakhinin Y., Wang T.* Well-posedness for moving interfaces with surface tension in ideal compressible MHD// *SIAM J. Math. Anal.* — 2022. — 54. — C. 5888–5921.

Ю. Л. Трахинин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: trakhin@math.nsc.ru

UDC 517.956.35, 537.84

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-176-193

EDN: VLOCPJ

On well-posedness of the free boundary problem for ideal compressible MHD equations and Maxwell equations in vacuum

Yu. L. Trakhinin

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

Abstract. We survey results on the well-posedness of the free interface problem when an interface separates a perfectly conducting inviscid fluid (e.g., plasma) from a vacuum. The fluid flow is governed by the equations of ideal compressible magnetohydrodynamics (MHD). Unlike the classical statement, when the vacuum magnetic field obeys the div-curl system of pre-Maxwell dynamics, we do not neglect the displacement current in the vacuum region and consider the Maxwell equations for electric and magnetic fields. With boundary conditions on the interface this forms a nonlinear hyperbolic problem with a characteristic free boundary. The statement of this free boundary problem comes from the relativistic setting where the displacement current in vacuum cannot be neglected. We also briefly discuss the recent result showing the stabilizing effect of surface tension.

Keywords: ideal compressible magnetohydrodynamics equations, free boundary problem, displacement current, Maxwell's equations, nonlinear hyperbolic problem, well-posedness.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was carried out at the Sobolev Institute of Mathematics within the framework of a government contract (project No. FVNF-2022-0008).

For citation: Yu. L. Trakhinin, “On well-posedness of the free boundary problem for ideal compressible MHD equations and Maxwell equations in vacuum,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 176–193. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-176-193>

REFERENCES

1. S. Alinhac, “Existence d’ondes de raréfaction pour des systèmes quasi-linéaires hyperboliques multidimensionnels,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1989, **14**, 173–230.
2. I. Bernstein, E. Frieman, M. Kruskal, and R. Kulsrud, “An energy principle for hydromagnetic stability problems,” *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 1958, **244**, 17–40.
3. D. Catania, M. D’Abbicco, and P. Secchi, “Stability of the linearized MHD-Maxwell free interface problem,” *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2014, **13**, 2407–2443.
4. D. Catania, M. D’Abbicco, and P. Secchi, “Weak stability of the plasma–vacuum interface problem,” *J. Differ. Equ.*, 2016, **261**, 3169–3219.
5. J. Chazarain and A. Piriou, *Introduction to the Theory of Linear Partial Differential Equations*, North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1982.
6. S. Chen, “Initial boundary value problems for quasilinear symmetric hyperbolic systems with characteristic boundary,” *Front. Math. China*, 2007, **2**, 87–102.
7. H. Goedbloed, R. Keppens, and S. Poedts, *Magnetohydrodynamics of Laboratory and Astrophysical Plasmas*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2019.
8. H.-O. Kreiss, “Initial boundary value problems for hyperbolic systems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1970, **23**, 277–298.
9. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon Press, Oxford, 1984.
10. N. Mandrik and Y. Trakhinin, “Influence of vacuum electric field on the stability of a plasma–vacuum interface,” *Commun. Math. Sci.*, 2014, **12**, 1065–1100.
11. A. Morando, P. Secchi, Y. Trakhinin, and P. Trebeschi, “Stability of an incompressible plasma–vacuum interface with displacement current in vacuum,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2020, **43**, 7465–7483.
12. A. Morando, P. Secchi, and P. Trebeschi, “Regularity of solutions to characteristic initial-boundary value problems for symmetrizable systems,” *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2009, **6**, No. 4, 753–808.
13. R. Samulyak, J. Du, J. Glimm, and Z. Xu, “A numerical algorithm for MHD of free surface flows at low magnetic Reynolds numbers,” *J. Comput. Phys.*, 2007, **226**, 1532–1549.
14. P. Secchi, “Some properties of anisotropic Sobolev spaces,” *Arch. Math. (Basel)*, 2000, **75**, 207–216.
15. P. Secchi and Y. Trakhinin, “Well-posedness of the linearized plasma–vacuum interface problem,” *Interfaces Free Bound.*, 2013, **15**, 323–357.
16. P. Secchi and Y. Trakhinin, “Well-posedness of the plasma–vacuum interface problem,” *Nonlinearity*, 2014, **27**, 105–169.
17. P. Secchi, Y. Trakhinin, and T. Wang, “On vacuum free boundary problems in ideal compressible magnetohydrodynamics,” *Bull. London Math. Soc.*, 2023, **55**, 2087–2111.
18. P. Secchi, Y. Trakhinin, and T. Wang, “Well-posedness of the two-dimensional relativistic plasma–vacuum interface problem,” *in preparation*.
19. Y. Trakhinin, “Dissipative symmetrizers of hyperbolic problems and their applications to shock waves and characteristic discontinuities,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2006, **37**, 1988–2024.
20. Y. Trakhinin, “The existence of current-vortex sheets in ideal compressible magnetohydrodynamics,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2009, **191**, 245–310.
21. Y. Trakhinin, “On the well-posedness of a linearized plasma–vacuum interface problem in ideal compressible MHD,” *J. Differ. Equ.*, 2010, **249**, 2577–2599.
22. Y. Trakhinin, “Stability of relativistic plasma–vacuum interfaces,” *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2012, **9**, 469–509.
23. Y. Trakhinin, “On well-posedness of the plasma–vacuum interface problem: The case of non-elliptic interface symbol,” *Commun. Pure Appl. Anal.*, 2016, **15**, 1371–1399.
24. Y. Trakhinin, “On violent instability of a plasma–vacuum interface for an incompressible plasma flow and a nonzero displacement current in vacuum,” *Comm. Math. Sci.*, 2020, **18**, 321–337.
25. Y. Trakhinin, “On well-posedness of the two-dimensional MHD–Maxwell free interface problem,” *Lobachevskii J. Math.*, 2024, **45**, 1528–1540.
26. Y. Trakhinin, “Stabilizing effect of surface tension for the linearized MHD–Maxwell free interface problem,” *ArXiv*, 2409.14758, 2024.
27. Y. Trakhinin and T. Wang, “Well-posedness of free boundary problem in non-relativistic and relativistic ideal compressible magnetohydrodynamics,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2021, **239**, 1131–1176.

28. Y. Trakhinin and T. Wang, “Well-posedness for the free-boundary ideal compressible magnetohydrodynamic equations with surface tension,” *Math. Ann.*, 2022, **383**, 761–808.
29. Y. Trakhinin and T. Wang, “Well-posedness for moving interfaces with surface tension in ideal compressible MHD,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2022, **54**, 5888–5921.

Yu. L. Trakhinin

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia

E-mail: `trakhin@math.nsc.ru`