Современная математика. Фундаментальные направления. Том 71, № 1 (2025). С. 147–158
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.956
DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-147-158
EDN: VFGYMJ

О ГЛОБАЛЬНО ГЛАДКИХ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ РЕШЕНИЯХ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О. С. Розанова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Найден класс нестрого гиперболических систем квазилинейных уравнений с осциллирующими решениями задачи Коши, глобально гладкими по времени в некоторой открытой окрестности нулевого стационарного состояния. Для таких систем период колебания решений не зависит от начальной точки лагранжевой траектории. Обсуждается также вопрос о возможности построения этих систем в физическом контексте, и с этой точки зрения изучаются нерелятивистские и релятивистские уравнения холодной плазмы.

Ключевые слова: нестрого гиперболические системы, квазилинейные уравнения, задача Коши, осциллирующие решения, лагранжева траектория, уравнения холодной плазмы.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор выражает благодарность В. В. Быкову за обсуждение различных аспектов изохронных колебаний. Поддержано грантом РНФ 23-11-00056 через Российский университет дружбы народов.

Для цитирования: *О. С. Розанова.* О глобально гладких осциллирующих решениях нестрого гиперболических систем// Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. **71**, № 1. С. 147–158. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-147-158

1. Введение

Рассмотрим нестрого гиперболическую систему

$$\mathbf{Y}_t + \mathbb{A}(x, \mathbf{Y})\, \mathbf{Y}_x = \mathbf{S}(x, \mathbf{Y}), \quad \mathbb{A} = Q(x, \mathbf{Y})\, \mathbb{I}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{Y}(t,x) = (Y_1, \dots, Y_n)^T$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_n)^T$, $i = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}$ — единичная матрица размера $n \times n$, $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $Q(x, \mathbf{0}) = 0$, $\mathbf{S}(x, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, с начальными условиями

$$\mathbf{Y}\Big|_{t=0} = \mathbf{Y}^0(x) \in C^2(\mathbb{R}). \tag{1.2}$$

Предполагается, что функции $Q(x, \mathbf{Y})$ и $\mathbf{S}(x, \mathbf{Y})$ являются C^1-гладкими по всем своим аргументам.

Система (1.1) является промежуточным математическим объектом между квазилинейными гиперболическими уравнениями общего вида, где $\mathbb{A}$ — произвольная $n \times n$ матрица с n вещественными различными собственными значениями, и системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительно, динамика решения может быть полностью описана поведением вдоль одной лагранжевой характеристики $x = x(t)$, которая управляется системой $n+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Q(x, \mathbf{Y}), \quad \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{S}(x, \mathbf{Y}). \tag{1.3}$$

Можно сказать, что это несколько упрощает исследование нестрого гиперболической системы (1.1) за счет того, что можно использовать результаты и методы, относящиеся к теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Интерес к изучению нестрого гиперболических систем обусловлен тем, что к ним сводятся некоторые важные многомерные радиально-симметричные модели физики полупроводников и холодной плазмы. Эти модели описываются уравнениями Эйлера—Пуассона с отталкивающей силой и ненулевым постоянным фоном плотности $c > 0$:

$$\mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\nabla\Psi, \quad \rho_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{V}) = 0, \quad \Delta\Psi = c - \rho, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{V}$, $\rho > 0$ и Ψ — скорость, плотность электронов и потенциал электрического поля, соответственно; они зависят от времени $t \geqslant 0$ и точки $x \in \mathbb{R}^d$.

Для

$$\mathbf{V} = F(t, r)\mathbf{r}, \quad \nabla\Psi = \mathbf{E} = G(t, r)\mathbf{r}, \quad \rho = \rho(t, r),$$

где $\mathbf{r} = (x_1, \ldots, x_d)$, $r = |\mathbf{r}|$, систему можно свести к

$$G_t + Fr\, G_r = F - dFG, \qquad F_t + Fr\, F_r = -F^2 - G, \tag{1.5}$$

(подробнее см. в [19]). Мы видим, что система (1.5) является частным случаем системы (1.1). Она имеет нулевое постоянное равновесие $G = F = 0$, и естественно предположить, что вблизи этого равновесия существуют решения, которые также являются гладкими во времени. Достаточно легко показать, что при размерности 1 это действительно так [11, 22].

Однако в многомерном случае ситуация совершенно иная. Было обнаружено, что помимо размерности 1 существует только одна пространственная размерность 4, для которой существует окрестность нулевого равновесия, соответствующая глобально гладким решениям (размер этой окрестности был найден точно в [21]). В остальных размерностях любое сколь угодно малое возмущение общего вида положения равновесия приводит к его разрушению за конечное время. Однако, если возмущение выбрано специальным образом так, чтобы начальные данные лежали на некотором подмногообразии меньшей размерности (соответствующем так называемым *простым волнам*, при которых $F = F(G)$), содержащем начало координат, то глобально гладкое решение все равно может быть получено [19].

Как было недавно показано, во всех случаях, когда период лагранжевой траектории $x(t)$ зависит от начальной точки траектории, различные траектории обязательно пересекаются и решение разрушается. А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 1.1. *Предположим, что отображение $x \mapsto X(t)$ ($\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$) непрерывно, а траектория $X(t)$ (нетривиально) периодична по $t \geqslant 0$ для всех $x_0 \in \mathbb{R}$ с периодом $T(x_0)$, который непрерывно зависит от x_0, $X(0) = x_0$. Тогда, если $T(x)$ не является константой, существуют x_1 и x_2 из $\mathbb{R}$ такие, что $X_1(t_*) = X_2(t_*)$ для некоторого $t_* > 0$, где $X_i(t)$ — траектория такая, что $X_i(0) = x_i$, $i = 1, 2$.*

Лемма доказана в [20]. Фактически, это более общая формулировка леммы 2.2 из [3]. Этот результат также известен физикам в контексте проблемы разрушения плазменных колебаний.

Другими словами, только в случае, когда период лагранжевой траектории $x(t)$ не зависит от начальной точки траектории $x(0)$, можно надеяться найти окрестность нулевого равновесия, для которой существуют глобально гладкие решения. Для задач, связанных с физикой холодной плазмы, случаи изохронных колебаний крайне редки. По-видимому, они возможны только в нерелятивистском случае с фоном постоянной плотности [20] в размерностях 1 и 4 (для радиально-симметричных решений).

Однако можно рассматривать квазилинейные нестрого гиперболические системы вне физического контекста, то есть изучать, какими свойствами должны обладать Q и S_i, чтобы система (1.1) имела изохронные колебания.

Напомним, что система ОДУ называется *изохронной*, если ее фазовое пространство имеет открытую полномерную область, где все ее решения являются периодическими с одним и тем же периодом, независимо от начальных данных.

Определение 1.1. Будем говорить, что система (1.1) является *изохронной колебательной*, если характеристическая система (1.3) является изохронной.

В частности, это означает, что каждая из характеристик $x(t)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, является периодической с тем же периодом.

В этой статье мы сначала показываем, что изохронная колебательная система имеет окрестность тривиального стационарного состояния в C^1-норме, соответствующей глобально гладким по времени решениям задачи Коши. Затем мы предлагаем правила, позволяющие генерировать нестрого гиперболические изохронные колебательные системы. Затем мы обсуждаем возможность получения гладких решений для уравнений холодной плазмы в нерелятивистском и релятивистском случаях.

2. Глобально гладкие решения

Мы собираемся доказать следующую теорему.

Теорема 2.1. *Система* (1.1) *является изохронно колебательной тогда и только тогда, когда существует окрестность U точки $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ в C^1-норме такая, что решение задачи Коши* (1.1), (1.2) *с начальными данными из U сохраняет начальную гладкость при всех $t > 0$.*

Доказательство. Система (1.1) является гиперболической, поэтому она имеет локальное решение по времени, такое же гладкое, как и начальные данные, а разрушение обусловлено либо неограниченностью самих компонент решения, либо неограниченностью их первых производных [5]. Компоненты решения являются периодическими, поэтому нам нужно изучить поведение производных. Для этого мы дифференцируем (1.1) по x и получаем следующее матричное уравнение Риккати для вектора $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T = ((Y_1)_x, \dots, (Y_n)_x)^T$:

$$(y_i)_t + Q\,\mathbb{I}\,(y_i)_x = -(Q_x + \sum_{j=1}^{n} Q_{Y_j}\, y_j)\, y_i + \sum_{j=1}^{n} (S_i)_{Y_j}\, y_i + (S_i)_x, \quad i, j = 1, \dots, n, \tag{2.1}$$

с начальными данными $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)^T = ((Y_1^0)_x, \dots, (Y_n^0)_x)^T$. □

Ключевым моментом в изучении поведения производных является теорема Радона [13, 17].

Теорема 2.2 (теорема Радона). *Матричное уравнение Риккати*

$$\dot{W} = M_{21}(t) + M_{22}(t)W - WM_{11}(t) - WM_{12}(t)W, \tag{2.2}$$

где $W = W(t)$ — $(n \times m)$-матрица, M_{21} — $(n \times m)$-матрица, M_{22} — $(m \times m)$-матрица, M_{11} — $(n \times n)$-матрица, M_{12} — $(m \times n)$-матрица, эквивалентно однородному линейному матричному уравнению

$$\dot{Y} = M(t)Y, \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

где $Y = Y(t)$ — $(n \times (n+m))$-матрица M — $((n+m) \times (n+m))$-матрица, в следующем смысле.

Пусть на некотором интервале $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ матричная функция $Y(t) = \begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix}$, где Q — $(n \times n)$-матрица, P — $(n \times m)$-матрица, является решением (2.3) *с начальными данными*

$$Y(0) = \begin{pmatrix} \mathbb{I} \\ W_0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbb{I}$ — единичная $(n \times n)$-матрица, W_0 — постоянная $(n \times m)$-матрица, и $\det Q \neq 0$ на $\mathcal{J}$. Тогда $W(t) = P(t)Q^{-1}(t)$ — решение уравнение (2.2) *при $\mathcal{J}$ с $W(0) = W_0$.*

Систему (2.1) можно переписать вдоль характеристик в виде (2.2) при $W = \mathbf{y}$, с $M_{11} = Q_x$, $M_{12} = (Q_{Y_1}, \dots, Q_{Y_n})$, $M_{21} = ((S_1)_x, \dots, (S_n)_x)^T$, и $(n \times n)$-матрицей $M_{22} = (S_i)_{Y_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, т. е.

$$\begin{pmatrix} \dot q \\ \dot y_1 \\ \dots \\ \dot y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_x & Q_{Y_1} & \dots & Q_{Y_n} \\ (S_1)_x & (S_1)_{Y_1} & \dots & (S_1)_{Y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (S_n)_x & (S_n)_{Y_1} & \dots & (S_n)_{Y_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} q \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1^0 \\ \dots \\ y_n^0 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Это система линейных уравнений с периодическими коэффициентами, которую можно изучать с помощью теории Флоке (например, [4, раздел 2.4]). Согласно этой теории, для фундаментальной матрицы $\Psi(t)$ ($\Psi(0) = \mathbb{I}$) существует постоянная матрица $\mathcal{M}$, возможно, с комплексными коэффициентами, такая, что $\Psi(T) = e^{T\mathcal{M}}$, где T — период коэффициентов. Собственные значения матрицы монодромии $e^{T\mathcal{M}}$ называются *характеристическими множителями* системы. Если среди характеристических множителей есть такие, что их абсолютные значения больше единицы, то решение (2.4) не является периодическим и колебания компонент решения в основном имеют экспоненциально растущую амплитуду (см. [4, теорема 2.53]). В частности, это означает, что нулевое решение (2.4) неустойчиво по Ляпунову. Таким образом, компонента q, начиная с 1, за конечное время превращается в ноль, а решение (2.1) разрушается.

Если решение (2.4) периодическое, то при $y_i^0 = 0$, $i = 1, \dots, n$, компонента $q \equiv 1$ и можно найти $(y_1^0, \dots, y_n^0)$ по крайней мере в окрестности нуля, так что $q(t) > 0$ в пределах периода. Это подразумевает существование окрестности нулевого равновесия в C^1-норме такой, что решение из этой окрестности сохраняет глобальную гладкость по t.

Мы показываем, что решение (2.4) является периодическим тогда и только тогда, когда система (1.3) является изохронной. Для этой цели мы используем следующий результат, который фактически является обобщением на многомерный случай предложения из [8, с. 8].

Предложение 2.1. *Пусть*

$$\dot X_i = \mathcal{N}_i(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T, \quad i = 1, \dots, n, \quad \mathcal{N} = (\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n)^T \in C^2(\mathbb{R}), \tag{2.5}$$

— система с неотрицательным интегралом энергии $E(\mathbf{X}) = h = \mathrm{const}$, и существует единственная точка $\overline{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^n$ такая, что $E(\overline{\mathbf{X}}) = 0$. Пусть $\mathbf{Z}(t, h)$, $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ — периодическое решение, соответствующее фиксированному уровню $h > 0$ с периодом $T(h)$. Тогда решения системы

$$\dot x_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathcal{N}_i(\mathbf{Z}(t, h))}{\partial X_j}\, x_j, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.6}$$

являются $T(h)$-периодическими тогда и только тогда, когда $T'(h) = 0$.

Доказательство. Прежде всего, заметим, что $\mathbf{Z}_h$ является решением системы (2.6) с любыми начальными данными $\mathbf{X}^0$ для системы (2.5). Найдем условие периодичности для $\mathbf{Z}_h$, т. е. $\mathbf{Z}_h(t, h) = \mathbf{Z}_h(t + T(h), h)$.

Обозначим через $\mathbf{Z}'_k$, $k = 1, 2$, производные по первому и второму аргументам, соответственно. Поскольку $\mathbf{Z}(t, h) = \mathbf{Z}(t + T(h), h)$, то

$$\mathbf{Z}_h(t, h) = \frac{d\,\mathbf{Z}(t, h)}{d\,h} = \frac{d\,\mathbf{Z}(t + T(h), h)}{d\,h} = \mathbf{Z}'_1(t + T(h), h)\, T'(h) + \mathbf{Z}'_2(t + T(h), h).$$

Заметим, что $\mathbf{Z}'_1(t + T(h), h) = \mathbf{Z}_t(t + T(h), h) = \mathcal{N}(\mathbf{Z}(t, h)) \neq 0$ тождественно, и $\mathbf{Z}'_2(t + T(h), h) = \mathbf{Z}_h(t + T(h), h)$. Таким образом, если $T'(h) \neq 0$, то $\mathbf{Z}_h(t + T(h), h) \neq \mathbf{Z}_h(t, h)$, и наоборот. Это доказывает предложение. □

Для завершения доказательства теоремы 2.1 достаточно отметить, что систему (1.3) можно рассматривать как систему (2.5) при $\mathbf{X} = (Q, S_1, \dots, S_n)^T$, а систему (2.4) рассматривать как систему (2.6) при $\mathbf{x} = (q, y_1, \dots, y_n)^T$.

Замечание 2.1. Подчеркнем, что требование существования нулевого равновесия системы (1.1) является существенным. Без этого требования, даже если система (1.3) имеет изохронное положение равновесия, глобально гладких решений может вообще не быть. Действительно, рассмотрим уравнение Хопфа с потенциалом

$$Y_t + YY_x = -x, \quad Y = Y(t,x).$$

Система характеристик (1.3) имеет вид

$$\dot{x} = Y, \quad \dot{Y} = -x,$$

совпадает с уравнениями гармонического осциллятора и имеет изохронный центр в начале координат. Тем не менее, вдоль характеристик производная $y = Y_x$ удовлетворяет уравнению $\dot{y} = -y^2 - 1$ и, очевидно, стремится к $-\infty$ при любых начальных условиях.

3. Построение изохронных колебательных систем

История изучения изохронных систем обыкновенных дифференциальных уравнений очень долгая. Со времен Пуанкаре известно, что если система имеет изохронное положение равновесия, то ее можно линеаризовать (см., например [18]). Однако на практике найти преобразование, позволяющее линеаризовать систему, порой гораздо сложнее, чем найти альтернативные способы доказательства ее изохронности. Для систем на плоскости есть результаты такого рода. Их можно применять к системам, возникающим естественным образом (как это произошло в случае с системой (1.5)). Изохронную систему естественного происхождения найти сложно, но, если речь идет о проектировании изохронных систем, не имеющих никакого отношения к реальной физике, то вопрос решается достаточно просто.

Например, мы можем взять систему, соответствующую линейному осциллятору $\dot{X}_1 = X_2$, $\dot{X}_2 = -X_1$, и рассмотреть обратимое гладкое преобразование $X_1 = F_1(Z_1, Z_2), X_2 = F_2(Z_1, Z_2)$ такое, что $F_1(0,0) = F_2(0,0) = 0$. Тогда изохронным центром будет начало новой системы

$$\dot{Z}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad \dot{Z}_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} (F_1)_1 & (F_1)_2 \\ (F_2)_1 & (F_2)_2 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_1 = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} F_2 & (F_1)_2 \\ -F_1 & (F_2)_2 \end{pmatrix}, \qquad \Delta_2 = \mathrm{Det}\begin{pmatrix} (F_1)_1 & F_2 \\ (F_2)_1 & -F_1 \end{pmatrix},$$

где $(F_i)_j$ — производная $F_i(Z_1, Z_2)$ по компоненте j, $i, j = 1, 2$.

Формально мы можем выбрать любую изохронную систему обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве (1.3) и построить на ее основе систему (1.1). Если построенная таким образом система имеет тривиальное решение, то она удовлетворяет всем необходимым требованиям.

Например, книга [2] посвящена различным методам построения изохронных систем. Таким образом, если не привязываться к физике, изохронных систем оказывается довольно много, тогда как «*...в реальном мире примеры чисто изохронного поведения довольно редки — иначе жизнь была бы довольно скучной*» [2]. В то же время, даже в задаче N тел можно построить явное аналитическое решение, получив изохронные колебания специальным подбором потенциала. Среди физически содержательных задач отметим также случаи изохронности для так называемых PDM-осцилляторов [16]. Критерий изохронности гамильтоновой системы с одной степенью свободы был получен в [1, 9].

3.1. Однородные левые части. Мы сосредоточимся на частном случае, когда система (1.3) имеет вид

$$\dot{x} = Q(x, \mathbf{Y}), \quad \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{S}(\mathbf{Y}).$$

Здесь вторая часть $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{S}(\mathbf{Y})$ отделена от всей системы, а поведение $x(t)$ наследуется от $\mathbf{Y}$. Этот случай можно в некоторой степени применить к колебаниям холодной плазмы.

Пусть вектор $\mathbf{Y}$ состоит из двух компонент ($n = 2$). В этом случае нам нужно изучить проблему центра на плоскости, и есть много результатов по изохронности (см., например, [7, 10, 12, 14, 18] и содержащуюся там библиографию). В частности, критерий Сабатини [23] очень полезен для двумерных систем, которые можно свести к уравнению Льенара

$$\ddot{z} + f(z)\dot{z} + g(z) = 0. \tag{3.1}$$

Например, системы

$$\dot{Y}_1 = Y_2, \quad \dot{Y}_2 = -g(Y_1) - f(Y_1)Y_2$$

и

$$\dot{Y}_1 = Y_2 - F(Y_1), \quad \dot{Y}_2 = -g(Y_1), \quad F(x) = \int\limits_0^x f(s)\,ds.$$

Справедлива следующая теорема [23].

Теорема 3.1. *Пусть функции f, g — аналитические, g — нечетная, $f(0) = g(0) = 0$, $g'(0) > 0$. Тогда $\mathcal{O} = (y, \dot{y}) = (0, 0)$ является центром тогда и только тогда, когда f — нечетная, и является изохронным центром для (3.1) тогда и только тогда, когда*

$$\tau(z) := \left(\int\limits_0^z sf(s)ds\right)^2 - z^3(g(z) - g'(0)z) = 0.$$

4. Примеры

4.1. Как стабилизировать нерелятивистские радиальные колебания в любых размерностях? Рассмотрим систему (1.5), описывающую радиально-симметричные нерелятивистские плазменные колебания в d-мерном пространстве. Переименуем r в x и G, F в Y_1, Y_2, соответственно. Таким образом, система (1.3) здесь имеет вид

$$\dot{x} = xY_2, \quad \dot{Y}_1 = Y_2 - dY_1Y_2, \quad \dot{Y}_2 = -Y_1 - Y_2^2. \tag{4.1}$$

Последние два уравнения сводятся к

$$\ddot{Y}_2 + (2 + d)\,Y_2\,\dot{Y}_2 + Y_2 + d\,Y_2^3 = 0,$$

что является уравнением Льенара, поэтому мы можем применить теорему 3.1. Мы видим, что

$$\tau(Y_2) := ((2 + d)^2 - 9d)\,\frac{Y_2^6}{2},$$

поэтому $\tau(Y_2) = 0$ подразумевает $d = 1$ или $d = 4$.

Мы изучаем следующий вопрос: какую зависящую от скорости силу $\mathbf{F}(\mathbf{V}, r)$ следует добавить в правую часть первого уравнения (1.4), чтобы обеспечить изохронность колебаний и, следовательно, возможность существования глобально гладких возмущений тривиального стационарного состояния в произвольной размерности? Легко видеть, что нам необходимо откалибровать коэффициенты системы (4.1) в зависимости от d.

Прежде всего, обозначим $L(x, Y_2) = \dfrac{1}{r}\mathbf{F}(\mathbf{V}, r)|_{r=x} = \dfrac{1}{r}\mathbf{F}(rY_2, r)|_{r=x}$. Тогда (4.1) примет вид

$$\dot{x} = xY_2, \quad \dot{Y}_1 = Y_2 - dY_1Y_2, \quad \dot{Y}_2 = -Y_1 - Y_2^2 - L(x, Y_2).$$

Стандартные вычисления показывают, что для получения уравнения Льенара нам нужно потребовать $L = L(Y_2)$, и если требуется получить $\tau(Y_2) = 0$, то нужно положить $L = \gamma Y_2^2$, $\gamma = \mathrm{const}$. В этом случае $\tau(Y_2) = 0$, если γ является корнем квадратного уравнения

$$(2(1 - \gamma) + d)^2 - 9d(1 - \gamma) = 0,$$

то есть $\gamma = 1 - d$ или $\gamma = 1 - \dfrac{d}{4}$. Соответствующий член силы равен

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}, r) = \gamma\,\frac{|\mathbf{V}|^2}{r}.$$

Возникает соблазн интерпретировать этот член как нечто вроде аэродинамического трения, но это не так, поскольку трение направлено против скорости и должно быть пропорционально $-\mathbf{V}|\mathbf{V}|$. Более того, наличие трения всегда связано с затуханием интеграла энергии, что несовместимо с существованием центра на плоскости (G, F). В действительности этот калибровочный член не имеет физического смысла и означает лишь то, что скорость должна быть специально замедлена или увеличена на разных стадиях колебаний.

4.2. Можно ли стабилизировать релятивистские колебания в $1D$? Система уравнений Эйлера—Пуассона, описывающая поведение релятивистской холодной плазмы в $\mathbb{R}$ с фоном переменной плотности в случае отталкивания имеет следующий вид [6]:

$$P_t + (V \cdot \nabla)P = -E, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0, \qquad E = c(x) - \rho, \qquad V = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}}.$$

Здесь x и t — безразмерные координаты в пространстве и времени, соответственно. Переменная P описывает импульс электрона, V — скорость электрона, E — функция, характеризующая электрическое поле, $\rho > 0$ — плотность электронов. Фиксированная C^1-гладкая функция $c(x) > 0$ — фон плотности, или так называемый допинг-профиль. В простейшем случае $c(x) = 1$.

Используя эту систему, приходим к уравнениям, описывающим плоские одномерные релятивистские плазменные колебания

$$P_t + V\,P_x + E = 0, \qquad E_t + V\,E_x - V c(x) = 0, \qquad V = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}} \tag{4.2}$$

с начальными условиями

$$P(x,0) = P_0(x), \qquad E(x,0) = E_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Таким образом, вдоль характеристик $x = x(t)$ решение $(V(x(t)), E(x(t)))$ начиная с точки $x_0 \in \mathbb{R}$ подчиняется системе ОДУ

$$\dot{x} = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}}, \qquad \dot{P} = -E, \qquad \dot{E} = c(x)\frac{P}{\sqrt{1+P^2}} \tag{4.4}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0, \qquad P(0) = P_0(x_0), \qquad E(0) = E_0(x_0).$$

Докажем несколько предложений, позволяющих понять свойства простых релятивистских колебаний.

Предложение 4.1. *В случае постоянного допинг-профиля $c(x) = c_0 > 0$ любое нетривиальное классическое решение задачи Коши* (4.2), (4.3)*, которое не является простой волной $P = P(E)$, разрушается за конечное время.*

Доказательство. Из двух последних уравнений (4.4) имеем

$$\ddot{P} + c_0 \frac{P}{\sqrt{1+P^2}} = 0, \tag{4.5}$$

что является частным случаем уравнения Льенара (3.1). Легко видеть, что $\tau(P) \neq 0$, поэтому теорема 3.1 подразумевает, что колебания P не изохронны. Из первых уравнений (4.4) заключаем, что колебания $x(t)$ также не изохронны. Таким образом, из леммы 1.1 заключаем, что характеристики обязательно пересекаются и решение разрушается за конечное время для общих начальных данных. В [22] показано, что для простой волны можно выбрать окрестность начала координат $P = G = 0$, соответствующую гладкому решению. □

Рассмотрим аналог системы (1.4) с силой такой, что первое уравнение принимает вид

$$P_t + (V \cdot \nabla)P = -E + \mathcal{L},$$

где $\mathcal{L}$ — внешняя сила. Мы предполагаем, что $\mathcal{L}'(0) = 0$, $\mathcal{L}'(P)$ — нечетное число, чтобы сохранить колебательный характер системы под воздействием внешней силы.

Предложение 4.2. *Никакая зависящая от импульса* (и *скорости*) *сила $\mathcal{L}(P)$ такая, что $\mathcal{L}'(0) = 0$ и $\mathcal{L}'(P)$ нечетна, не может сделать колебания* (1.4) *изохронными в случае постоянного допинг-профиля.*

Доказательство. Рассмотрим соответствующий аналог (4.5):

$$\ddot{P} + \mathcal{L}'(P)\dot{P} + c_0 \frac{P}{\sqrt{1+P^2}} = 0.$$

Таким образом,

$$\tau(P) = \left(\int\limits_0^P s\mathcal{L}'(s)\,ds\right)^2 - c_0\,P^4\,\frac{1-\sqrt{1+P^2}}{\sqrt{1+P^2}}.$$

Так как $1-\sqrt{1+P^2}<0$ и $c_0>0$, то $\tau>0$ для всех нетривиальных P. □

В [20] было доказано, что в случае нерелятивистских колебаний холодной плазмы система характеристик изохронна (и, следовательно, глобально гладкие решения возможны только для постоянного допинг-профиля). Далее, как следует из предложения 4.1, релятивистские колебания холодной плазмы для постоянного допинг-профиля в основном разрушаются. Поэтому возникает вопрос: можно ли найти переменную $c(x)$ такую, чтобы колебания не разрушались? Другими словами, может ли система (4.4) быть изохронной для некоторой $c(x)$? Следующее предложение утверждает, что ответ отрицательный.

Предложение 4.3. *Для любого гладкого допинг-профиля $c(x)>0$, $x\in\mathbb{R}$, любое нетривиальное классическое решение задачи Коши (4.2), (4.3) разрушается за конечное время.*

Доказательство. Из (4.4) имеем

$$E(x(t)) = \int\limits_{x_0}^{x} c(\xi)\,d\xi + E_0(x_0), \quad P^2=\frac{(\dot x)^2}{1-(\dot x)^2}, \quad \ddot x = \frac{1}{(1+P^2)^{\frac32}}\,\dot P,$$

поэтому

$$\ddot x = -E(x)\,(1-(\dot x)^2)^{\frac32}. \tag{4.6}$$

Заметим, что $|\dot x|<1$. Предположим для простоты, что $x=0$ — точка равновесия.

Если обозначить $\dot x = s(x)$ и $z(x)=s^2$, то получим

$$z' = -2E(x)\,(1-z)^{\frac32},$$

и

$$1-(\dot x)^2 = 1-z = \frac{1}{\Phi^2(x)}, \quad \Phi(x) = -\int\limits_0^x E(\xi)d\xi + E_0 + (1+P_0^2)^{\frac32}, \quad \Phi'(x) = -E(x), \quad \Phi''(x)=c(x).$$

Вместе с (4.6) это влечёт

$$\ddot x = \frac{\Phi'(x)}{\Phi^3(x)}, \tag{4.7}$$

что соответствует плоской гамильтоновой системе с гамильтонианом $\mathcal{V}$ таким, что $g(x)=\mathcal{V}'=-\dfrac{\Phi'(x)}{\Phi^3(x)}$.

1. Если предположить, что $g(x)$ является *нечетной* и аналитичной в окрестности $x=0$, то мы можем воспользоваться теоремой 3.1 и вычислить

$$\tau(x) = -x^3\left(-\frac{\Phi'(x)}{\Phi^3(x)} - K\,x\right), \quad K = -\left(\frac{\Phi'(x)}{\Phi^3(x)}\right)'\Big|_{x=0} > 0.$$

Таким образом, $\tau(x)=0$ тогда и только тогда, когда

$$\Phi(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{K\,x^2+M}}, \quad M=\mathrm{const}.$$

Заметим, что в этом случае $\dfrac{\Phi'(x)}{\Phi^3(x)} = -Kx$, поэтому уравнение (4.7) линейно и инвариантно относительно сдвига x_0. Учитывая сдвиг начальной точки в x_0, имеем

$$c(x) = \pm\frac{K(M-2K(x-x_0)^2)}{(M+K(x-x_0)^2)^{\frac52}}.$$

Однако мы видим, что $c(x)$ не может быть положительной для всех $x \in \mathbb{R}$. Более того, для обеспечения изохронности $c(x)$ должна зависеть от начальной точки траектории, что противоречит требованию, чтобы допинг-профиль был функцией только пространственной координаты.

2. Известно, что предположение о нечетности $g(x)$ не является необходимым для существования изохронного центра гамильтоновой системы. Таким образом, мы можем воспользоваться общим результатом [9] для класса непрерывных функций g.

Мы называем C^1-диффеоморфизм H открытого интервала $J \subseteq \mathbb{R}$ на себя *инволюцией*, если

$$H^{-1} = H, \quad 0 \in J, \quad H(0) = 0, \quad H'(0) = -1.$$

Это означает, что график функции $y = H(x)$ симметричен относительно главной диагонали $y = x$.

Теорема 4.1. *Пусть $H : J \to J$ — инволюция, $\omega > 0$, и определим*

$$V(x) = \frac{\omega}{8}\,(x - H(x))^2, \quad x \in J. \tag{4.8}$$

Тогда начало координат является изохронным центром для $\ddot{x} = -g(x)$, где $g(x) = V'(x)$, с тем же периодом $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

Наоборот, пусть g непрерывно в окрестности $0 \in \mathbb{R}$, $g(0) = 0$ и предположим, что $g'(0) > 0$ и начало координат является изохронным центром для $\ddot{x} = -g(x)$. Тогда существуют открытый интервал J, $0 \in J$, который является подмножеством области определения g, и инволюция $H : J \to J$, такая, что (4.8) выполняется при

$$V(x) = \int\limits_0^x g(s)ds, \qquad \omega = \sqrt{g'(0)}.$$

В статье [9] содержится множество примеров для H. В нашем случае (4.7) мы имеем

$$M - \frac{1}{2\Phi^2(x)} = -\frac{\omega}{8}\,(x - H(x))^2, \quad M = \frac{1}{2\Phi^2(0)} > 0, \quad \Phi(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2M + \frac{\omega}{4}\,(x - x_0 - H(x - x_0))^2}}.$$

Таким образом, в этом случае $c(x)$ снова зависит от начальной точки траектории и не удовлетворяет требованиям. Таким образом, доказательство завершено. $\square$

5. Обсуждение

1. Если колебательная система изохронна, это фактически означает, что она имеет дополнительный первый интеграл. В контексте гамильтоновых систем это свойство называется *суперинтегрируемостью* и имеет многочисленные приложения [15].

2. Представленные здесь методы могут быть распространены на системы уравнений в частных производных для $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ вида

$$(Y_i)_t + \sum_{j=0}^{m} a_j(\mathbf{Y}, \mathbf{x})(Y_i)_{x_j} = S_i(\mathbf{Y}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{5.1}$$

$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$, $\mathbf{a}(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$. В частности, при $n = 1$ это одно уравнение. Динамика вдоль характеристик определяется системой $n + m$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}), \quad \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}). \tag{5.2}$$

Если равновесие (5.2) является изохронным, то вполне вероятно, что глобально гладкие решения (5.1) могут быть найдены вблизи нулевого устойчивого состояния.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трещев Д. В.* Об изохронности// Тр. МИАН. — 2023. — *322*. — С. 206–232.
2. *Calogero F.* Isochronous systems. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2008.
3. *Carrillo J. A., Shu R.* Existence of radial global smooth solutions to the pressureless Euler–Poisson equations with quadratic confinement// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2023. — *247*. — 73.
4. *Chicone C.* Ordinary differential equations with applications. — New York: Springer, 1999.
5. *Dafermos C. M.* Hyperbolic conservation laws in continuum physics. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2016.

6. *Davidson R. C.* Methods in nonlinear plasma theory. — New York: Acad. Press, 1972.
7. *Dong G., Liu C., Yang J.* On the topology of isochronous centers of hamiltonian differential systems// Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. — 2019. — *29*, № 6. — 1950099.
8. *Gasull A.* On isochronous Hill equations// Workshop on Periodic Orbits, Bellaterra, CRM, Feb. 7–9, 2024. — https://www.gsd.uab.cat/new?controller=publications&task=download&ID=slides.pdf-7955f73fa05752ccdb4225feda1aac57.pdf&OD=slides.pdf)
9. *Gorni G., Zampieri G.* Global isochronous potentials// Qual. Theory Dyn. Syst. — 2013. — *12*, № 2. — С. 407–416.
10. *Hill J. M., Lloyd N. G., Pearson J. M.* Algorithmic derivation of isochronicity conditions// Nonlinear Anal. — 2007. — *67*, № 1. — С. 52–69.
11. *Engelberg S., Liu H., Tadmor E.* Critical thresholds in Euler–Poisson equations// Indiana Univ. Math. J. — 2001. — *50*. — С. 109–157.
12. *Fernandes W., Romanovski V. G., Sultanova M., Tang Y.* Isochronicity and linearizability of a planar cubic system// J. Math. Anal. Appl. — 2017. — *450*, № 1. — С. 795–813.
13. *Freiling G.* A survey of nonsymmetric Riccati equations// Linear Algebra Appl. — 2002. — *351-352*. — С. 243–270.
14. *Kovačić I.* Nonlinear isochronous oscillators// В сб.: «Nonlinear Oscillations». — Cham: Springer, 2020. — С. 189–222.
15. *Miller W. Jr, Post S., Winternitz P.* Classical and quantum superintegrability with applications// J. Phys. A: Math. Theor. — 2013. — *46*. — 423001.
16. *Mustafa O.* Isochronous n-dimensional nonlinear PDM-oscillators: linearizability, invariance and exact solvability// Eur. Phys. J. Plus. — 2021. — *136*. — 249.
17. *Reid W. T.* Riccati differential equations. — New York: Academic Press, 1972.
18. *Romanovski V. G., Shafer D. S.* The center and cyclicity problems: A computational algebra approach. — Boston: Birkhauser, 2009.
19. *Rozanova O. S.* On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler–Poisson equations// Phys. D. Nonlinear Phenom. — 2023. — *443*. — 133578.
20. *Rozanova O. S.* The repulsive Euler–Poisson equations with variable doping profile// Phys. D. Nonlinear Phenom. — 2024. — *444*. — 134454.
21. *Rozanova O. S.* Criterion of singularity formation for radial solutions of the pressureless Euler–Poisson equations in exceptional dimension// J. Math. Anal. Appl. — 2025. — *548*, № 2. — 129394.
22. *Rozanova O. S., Chizhonkov E. V.* On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma// Z. Angew. Math. Phys. — 2021. — *72*, № 1. — 13.
23. *Sabatini M.* On the period function of Liénard systems// J. Differ. Equ. — 1999. — *152*. — С. 467–487.

О. С. Розанова
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: rozanova@mech.math.msu.su

UDC 517.956
DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-147-158
EDN: VFGYMJ

On globally smooth oscillating solutions of nonstrictly hyperbolic systems

O. S. Rozanova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. A class of nonstrictly hyperbolic systems of quasilinear equations with oscillatory solutions of the Cauchy problem, globally smooth in time in some open neighborhood of the zero stationary state, is found. For such systems, the period of oscillation of solutions does not depend on the initial point of the Lagrangian trajectory. The question of the possibility of constructing these systems in a physical context is also discussed, and nonrelativistic and relativistic equations of cold plasma are studied from this point of view.

Keywords: nonstrictly hyperbolic systems, quasilinear equations, Cauchy problem, oscillatory solutions, Lagrangian trajectory, cold plasma equations.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author thanks V. V. Bykov for discussion of various aspects of isochronous oscillations. Supported by grant RSF 23-11-00056 through RUDN University.

For citation: O. S. Rozanova, "On globally smooth oscillating solutions of nonstrictly hyperbolic systems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 147–158. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-147-158

REFERENCES

1. D. V. Treschev, "Ob izokhronnosti" [On isochronicity] *Tr. MIAN* [Proc. Steklov Math. Inst.], 2023, **322**, 206–232 (in Russian).
2. F. Calogero, *Isochronous Systems*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2008.
3. J. A. Carrillo and R. Shu, "Existence of radial global smooth solutions to the pressureless Euler–Poisson equations with quadratic confinement," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2023, **247**, 73.
4. C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer, New York, 1999.
5. C. M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2016.
6. R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory*, Acad. Press, New York, 1972.
7. G. Dong, C. Liu, and J. Yang, "On the topology of isochronous centers of hamiltonian differential systems," *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 2019, **29**, No. 6, 1950099.
8. A. Gasull, "On isochronous Hill equations," *Workshop on Periodic Orbits*, Bellaterra, CRM, Feb. 7–9, 2024 (available online: https://www.gsd.uab.cat/new?controller=publications&task=download&ID=slides.pdf-7955f73fa05752ccdb4225feda1aac57.pdf&OD=slides.pdf)
9. G. Gorni and G. Zampieri, "Global isochronous potentials," *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 2013, **12**, No. 2, 407–416.
10. J. M. Hill, N. G. Lloyd, and J. M. Pearson, "Algorithmic derivation of isochronicity conditions," *Nonlinear Anal.*, 2007, **67**, No. 1, 52–69.
11. S. Engelberg, H. Liu, and E. Tadmor, "Critical thresholds in Euler–Poisson equations," *Indiana Univ. Math. J.*, 2001, **50**, 109–157.
12. W. Fernandes, V. G. Romanovski, M. Sultanova, and Y. Tang, "Isochronicity and linearizability of a planar cubic system," *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, **450**, № 1, 795–813.
13. G. Freiling, "A survey of nonsymmetric Riccati equations," *Linear Algebra Appl.*, 2002, **351-352**, 243–270.

14. I. Kovačić, "Nonlinear isochronous oscillators," In: *Nonlinear Oscillations*, Springer, Cham, pp. 189–222, 2020.
15. W. Miller Jr, S. Post, and P. Winternitz, "Classical and quantum superintegrability with applications," *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2013, **46**, 423001.
16. O. Mustafa, "Isochronous n-dimensional nonlinear PDM-oscillators: linearizability, invariance and exact solvability," *Eur. Phys. J. Plus*, 2021, **136**, 249.
17. W. T. Reid, *Riccati Differential Equations*, Academic Press, New York, 1972.
18. V. G. Romanovski and D. S. Shafer, *The Center and Cyclicity Problems: A Computational Algebra Approach*, Birkhauser, Boston, 2009.
19. O. S. Rozanova, "On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler–Poisson equations," *Phys. D. Nonlinear Phenom.*, 2023, **443**, 133578.
20. O. S. Rozanova, "The repulsive Euler–Poisson equations with variable doping profile," *Phys. D. Nonlinear Phenom.*, 2024, **444**, 134454.
21. O. S. Rozanova, "Criterion of singularity formation for radial solutions of the pressureless Euler–Poisson equations in exceptional dimension," *J. Math. Anal. Appl.*, 2025, **548**, No. 2, 129394.
22. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, "On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma," *Z. Angew. Math. Phys.*, 2021, **72**, No. 1, 13.
23. M. Sabatini, "On the period function of Liénard systems," *J. Differ. Equ.*, 1999, **152**, 467–487.

O. S. Rozanova
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `rozanova@mech.math.msu.su`