

УДК 517.956.25

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-125-146

EDN: UQKNFN

ЛОКАЛЬНЫЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

Л. М. КОЖЕВНИКОВА^{1,2}¹Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия²Елабужский Институт Казанского Федерального университета, Елабуга, Россия

Аннотация. В работе рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка с переменными показателями нелинейностей и локально суммируемой правой частью. Установлено свойство устойчивости и как следствие доказано существование локального ренормализованного решения задачи Дирихле в произвольной неограниченной области.

Ключевые слова: квазилинейное эллиптическое уравнение, переменный показатель роста, неограниченная область, задача Дирихле, устойчивость решения, локальное ренормализованное решение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Л. М. Кожевникова. Локальные ренормализованные решения эллиптических уравнений с переменными показателями в неограниченных областях // Соврем. мат. Фундамент. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 125–146. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-125-146>

ВВЕДЕНИЕ

Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка с переменным ростом и локально суммируемой функцией f рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + b(x, u) = f, \quad x \in \Omega, \quad (0.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (0.2)$$

Понятие ренормализованных решений является мощным инструментом для изучения широких классов вырождающихся эллиптических уравнений с данными в виде меры. Первоначальное определение приведено в работе [6] для уравнения

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) = \mu \quad (0.3)$$

и распространено М.-Ф. Бидо-Верон [4] в локальную и очень полезную форму для уравнения с p -лапласианом, поглощением и мерой Радона μ :

$$-\Delta_p u + |u|^{p_0-2} u = \mu, \quad p \in (1, n), \quad 0 < p-1 < p_0. \quad (0.4)$$

В частности, М.-Ф. Бидо-Верон доказала существование в пространстве $\mathbb{R}^n$ локального ренормализованного решения уравнения (0.4) с $\mu \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. В монографии [13] Л. Верон обобщил понятие локального ренормализованного решения для уравнения со степенными нелинейностями вида

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + b(x, u, \nabla u) = \mu.$$

Следует отметить, что в работе [10] доказана эквивалентность α -супергармонических функций и локально ренормализованных решений уравнения (0.3) в случае неотрицательных мер Радона μ .

В настоящей работе понятие локального ренормализованного решения адаптируется на уравнение (0.1) с переменными показателями роста. В качестве примера можно привести уравнение

$$-\Delta_{p(x)} u + |u|^{p_0(x)-2} u = f, \quad 0 < p(\cdot) - 1 < p_0(\cdot), \quad f \in L_{1,\text{loc}}(\bar{\Omega}).$$

Автором установлено свойство устойчивости локальных ренормализованных решений задачи (0.1), (0.2). Следствием результата устойчивости является теорема существования локального ренормализованного решения задачи (0.1), (0.2) в произвольной неограниченной области Ω .

1. ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА, СОБОЛЕВА С ПЕРЕМЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

В этом разделе будут приведены необходимые сведения из теории пространств с переменными показателями. Пусть $Q \subseteq \Omega$ (Q может совпадать с Ω).

Обозначим

$$L_{\infty}^{+}(Q) = \{p \in L_{\infty}(Q) \mid 1 \leq p_{-} \leq p_{+} < +\infty\},$$

где $p_{-} = \operatorname{vrai} \inf_{x \in Q} p(x)$, $p_{+} = \operatorname{vrai} \sup_{x \in Q} p(x)$. Пусть $p(\cdot) \in L_{\infty}^{+}(Q)$, определим лебегово пространство $L_{p(\cdot)}(Q)$ с переменным показателем как множество измеримых на Q вещественнозначных функций v таких, что:

$$\rho_{p(\cdot),Q}(v) = \int_Q |v(x)|^{p(x)} dx < \infty,$$

с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q)} = \|v\|_{p(\cdot),Q} = \inf \left\{ k > 0 \mid \rho_{p(\cdot),Q}(v/k) \leq 1 \right\}.$$

Для $v \in L_{p(\cdot)}(Q)$ справедливы следующие соотношения:

$$\|v\|_{p(\cdot),Q}^{p_{-}} - 1 \leq \rho_{p(\cdot),Q}(v) \leq \|v\|_{p(\cdot),Q}^{p_{+}} + 1.$$

Ввиду выпуклости имеет место неравенство:

$$|y + z|^{p(x)} \leq 2^{p_{+}-1}(|y|^{p(x)} + |z|^{p(x)}), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad x \in Q. \quad (1.1)$$

При $p_{-} > 1$ справедливо неравенство Юнга:

$$|zy| \leq |y|^{p(x)} + |z|^{p'(x)}, \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad p'(\cdot) = \frac{p(\cdot)}{p(\cdot) - 1}, \quad x \in Q, \quad (1.2)$$

и неравенство Гельдера

$$\left| \int_Q u(x)v(x) dx \right| \leq 2 \|u\|_{p'(\cdot),Q} \|v\|_{p(\cdot),Q}, \quad u \in L_{p'(\cdot)}(Q), \quad v \in L_{p(\cdot)}(Q). \quad (1.3)$$

Определим пространство Соболева с переменным показателем

$$W_{p(\cdot)}^1(Q) = \{v \in L_{p(\cdot)}(Q) \mid |\nabla v| \in L_{p(\cdot)}(Q)\}$$

с нормой

$$\|v\|_{p(\cdot),Q}^1 = \|v\|_{p(\cdot),Q} + \|\nabla v\|_{p(\cdot),Q}.$$

Пространство $\dot{W}_{p(\cdot)}^1(Q)$ определим как пополнение пространства $C_0^{\infty}(Q)$ по норме $\|\cdot\|_{W_{p(\cdot)}^1(Q)}$. Пространства $L_{p(\cdot)}(Q)$, $W_{p(\cdot)}^1(Q)$, $\dot{W}_{p(\cdot)}^1(Q)$ являются сепарабельными, банаховыми и рефлексивными для $p_{-} > 1$ (см. [7, Ch. 3, §3.2, §3.4, §8.1]).

Интересная особенность пространства Соболева с переменным показателем

$$\dot{W}_{p(\cdot)}^1(Q) = \{v \in \dot{W}_1^1(Q) : \rho_{p(\cdot), Q}(|\nabla v|) < \infty\}$$

заключается в том, что гладкие функции не плотны в нем без дополнительных предположений о степени $p(\cdot)$. Это было отмечено В. В. Жиковым [2] в связи с эффектом Лаврентьева. Однако, если модуль непрерывности показателя $p(\cdot)$ удовлетворяет логарифмическому условию:

$$|p(x) - p(y)| \leq -\frac{K}{\ln|x - y|}, \quad x, y \in Q, \quad |x - y| \leq \frac{1}{2},$$

то гладкие функции плотны в пространстве $\dot{W}_{p(\cdot)}^1(Q)$.

В настоящей работе предполагаем, что $p \in C^+(\overline{Q}) = \{p \in C(\overline{Q}) \mid 1 < p_- \leq p_+ < +\infty\}$, где $p_- = \inf_{x \in \overline{Q}} p(x)$, $p_+ = \sup_{x \in \overline{Q}} p(x)$. Для двух ограниченных функций $q(\cdot), r(\cdot) \in C(\overline{Q})$ будем писать $q(\cdot) < r(\cdot)$, если $\inf_{x \in \overline{Q}} (r(x) - q(x)) > 0$.

Лемма 1.1 (см. [8]). Пусть Q ограничена, $p(\cdot), q(\cdot) \in C^+(\overline{Q})$, $p_+ < n$, $q(\cdot) < p^*(\cdot) = \frac{np(\cdot)}{n - p(\cdot)}$. Тогда имеет место непрерывное и компактное вложение $W_{p(\cdot)}^1(Q) \hookrightarrow L_{q(\cdot)}(Q)$.

2. ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ

Условие P. Предполагаем, что функции

$$a(x, s) = (a_1(x, s), \dots, a_n(x, s)) : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad b(x, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (0.1), каратеодориевы. Пусть существуют неотрицательная функция $\Phi \in L_{p'(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, положительные числа $\widehat{a}, \overline{a}$ такие, что при п.в. $x \in \Omega$, для всех $s, t \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$|a(x, s)| \leq \widehat{a} \left(|s|^{p(x)-1} + \Phi(x) \right); \quad (2.1)$$

$$(a(x, s) - a(x, t)) \cdot (s - t) > 0, \quad s \neq t; \quad (2.2)$$

$$a(x, s) \cdot s \geq \overline{a} |s|^{p(x)}. \quad (2.3)$$

Здесь $s \cdot t = \sum_{i=1}^n s_i t_i$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $t = (t_1, \dots, t_n)$.

Кроме того, пусть существуют неотрицательная функция $\Phi_0 \in L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, непрерывная неубывающая функция $\widehat{b} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, положительное число $\overline{b}$ такие, что при п.в. $x \in \Omega$, для всех $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства:

$$|b(x, s_0)| \leq \widehat{b}(|s_0|) \Phi_0(x); \quad (2.4)$$

$$b(x, s_0) s_0 \geq \overline{b} |s_0|^{p_0(x)+1}, \quad p(\cdot) - 1 < p_0(\cdot). \quad (2.5)$$

При этом предполагаем, что функции $p, p_0 \in C^+(\overline{\Omega})$ и $p_+ < n$.

Следуя [3, 12], введем обозначения: $q_0(\cdot) = \frac{p^*(\cdot)}{p'_+}$, $q_3(\cdot) = \frac{q_0(\cdot)}{p(\cdot) - 1}$, $q_1(\cdot) = \frac{q_0(\cdot)}{q_0(\cdot) + 1} p(\cdot)$, $q_2(\cdot) = \frac{q_0(\cdot)}{q_0(\cdot) + 1} p'(\cdot)$, $q_4(\cdot) = \frac{p_0(\cdot)}{1 + p_0(\cdot)} p'(\cdot)$, где $p'_+ = \frac{p_-}{p_- - 1}$. Пусть выполнено дополнительное условие

$$p(\cdot) - 1 < q_0(\cdot). \quad (2.6)$$

Тогда можно определить $q'_2(\cdot) = \frac{q_0(\cdot) p(\cdot)}{q_0(\cdot) + 1 - p(\cdot)}$.

Определим срезку $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\text{Lip}_0(\mathbb{R})$ обозначим пространство всех липшицевых непрерывных функций на $\mathbb{R}$, производная которых имеет компактный носитель.

Определение 2.1. Пусть область Ω ограничена. Измеримая конечная почти всюду функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *ренормализованным решением* задачи (0.1), (0.2) с $f \in L_1(\Omega)$, если выполняются следующие условия:

а) $T_k(u) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$ при любом $k > 0$;

- b) $b(x, u) \in L_1(\Omega)$;
- c) $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot)}(\Omega)$, $1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot)$;
- d) $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot)}(\Omega)$, $1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot)$;
- e) для любой функции $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$ и любой $\varphi \in W_{r(\cdot)}^1(\Omega)$, $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$, такой, что $\varphi h(u) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$, имеем

$$\int_{\Omega} (b(x, u) - f)h(u)\varphi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot (\nabla u h'(u)\varphi + \nabla \varphi h(u)) dx = 0. \quad (2.7)$$

Определим $L_{\infty, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $\dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega})$ как пространства, состоящие из функций v , определенных в Ω , для которых при любой ограниченной $Q \subsetneq \Omega$ имеет место принадлежность $v \in L_{\infty}(Q)$, $L_1(Q)$, $\dot{V}_{p(\cdot)}^1(Q) = \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega) \cap W_{p(\cdot)}^1(Q)$, соответственно.

Определение 2.1-loc. Измеримая конечная почти всюду функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *локальным ренормализованным решением* задачи (0.1), (0.2) с $f \in L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, если выполняются следующие условия:

- a-loc) $T_k(u) \in \dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\overline{\Omega})$ при любом $k > 0$;
- b-loc) $b(x, u) \in L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$;
- c-loc) $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot)$;
- d-loc) $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot)$;
- e-loc) для любой функции $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$ и любой $\varphi \in W_{r(\cdot)}^1(\Omega)$, $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$ с компактным носителем такой, что $\varphi h(u) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$, справедливо тождество (2.7).

Отметим, что в работе [3] впервые для уравнения с $p(\cdot)$ -ростом было сформулировано определение ренормализованного решения и доказано его существование.

Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (0.1), (0.2). Для любого $k > 0$ имеем

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{\Omega: |u| \leq k\}} \nabla u \in (L_{p(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}))^n. \quad (2.8)$$

Применяя (1.1), из неравенства (2.1) выводим оценку:

$$|a(x, s)|^{p'(x)} \leq \widehat{A}|s|^{p(x)} + \Psi(x) \quad (2.1')$$

с неотрицательной функцией $\Psi \in L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$. Из (2.8), (2.1') следует, что для любого $k > 0$

$$\chi_{\{\Omega: |u| \leq k\}} a(x, \nabla u) = \chi_{\{\Omega: |u| \leq k\}} a(x, \nabla T_k(u)) \in (L_{p'(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}))^n. \quad (2.9)$$

Замечание 2.1. Каждый интеграл в (2.7) корректно определен. Пусть $\text{supp } \varphi \cap \Omega = K$. Несложно проверить, что $q_2'(\cdot) \geq n$, поэтому справедливы вложения $W_{r(\cdot)}^1(K) \subset W_{q_2(\cdot)}^1(K) \subset W_n^1(K) \subset C(\overline{K})$. Действительно, первое слагаемое конечно благодаря условию b-loc), $f \in L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$ и принадлежности $h(u)\varphi \in L_{\infty}(K)$. Поскольку $\text{supp } h' \subseteq [-M, M]$ для некоторого $M > 0$, то второе слагаемое может быть записано в виде

$$\int_K a(x, \nabla u) \cdot (\nabla u h'(u)\varphi + \nabla \varphi h(u)) dx = \int_K a(x, \nabla T_M(u)) \cdot \nabla T_M(u) h'(u) \varphi dx + \int_K a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi h(u) dx.$$

Благодаря (2.8), (2.9) и принадлежности $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$, $\varphi \in C(\overline{K})$ первый интеграл определен и конечен. Поскольку $a(x, \nabla u) \in (L_{q(\cdot)}(K))^n$ для любого $q(\cdot) < q_2(\cdot)$ и $\nabla \varphi \in (L_{r(\cdot)}(K))^n$ для любого $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$, получаем, что произведение $a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi h(u)$ интегрируемо в K .

В настоящей работе доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия P , последовательность функций $\{f_{\xi}\}_{\xi \in \mathbb{N}} \subset L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$ сходится к f в $L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, и $\{u_{\xi}\}_{\xi \in \mathbb{N}}$ — последовательность локальных ренормализованных решений задачи

$$-\text{div } a(x, \nabla u) + b(x, u) = f_{\xi}, \quad x \in \Omega, \quad (2.10)$$

с краевым условием (0.2). Тогда существует подпоследовательность последовательности $\{u_\xi\}_{\xi \in \mathbb{N}}$ (обозначим ее так же), сходящаяся почти всюду к локальному ренормализованному решению задачи (0.1), (0.2).

Следствием теоремы 2.1 является теорема 2.2.

Теорема 2.2. Пусть $f \in L_{1,\text{loc}}(\bar{\Omega})$, выполнены условия P , тогда существует локальное ренормализованное решение задачи (0.1), (0.2).

В работе [11] в пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрено нелинейное анизотропное эллиптическое уравнение вида (0.1) с переменными показателями нелинейностей и локально интегрируемой функцией f . Ф. Мохтари доказано существование локального слабого решения u уравнения (0.1) в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для сравнения сформулируем результат регулярности градиента для изотропного уравнения. При дополнительном ограничении $p(\cdot) > 2 - 1/n$ установлена локальная суммируемость ∇u с показателем $1 \leq q(\cdot) < \frac{(p(\cdot) - 1)n}{n - 1}$, а также при дополнительном ограничении $p(\cdot) > 1 + 1/p_0(\cdot)$ установлена локальная суммируемость ∇u с показателем $1 \leq q(\cdot) < \frac{p_0(\cdot)p(\cdot)}{1 + p_0(\cdot)} = q_4(\cdot)(p(\cdot) - 1)$. Заметим, что в настоящей работе аналогичные оценки установлены в утверждении 3.2 (см. (3.17)), причем оценка с показателем $q_4(\cdot)$ получена без дополнительных ограничений.

3. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Меру Лебега измеримого множества Q будем обозначать $\text{meas}(Q)$. Через $D^+(\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство функций $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с положительными значениями внутри компактного носителя. Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Утверждение 3.1. Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (0.1), (0.2), положим $\hat{R}_0 = \sup_{x \in \bar{\Omega}} \frac{p_0(x)p(x)}{p_0(x) + 1 - p(x)}$. Тогда для любых $\alpha < 0$, $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ справедливы оценки

$$\int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \phi^R dx \leq C_1 \left(\int_{\Omega} (1 + \Phi^{p'(x)} + |f|) \phi^R dx + \int_{\Omega} |\nabla \phi|^R dx \right), \quad R > \hat{R}_0, \quad (3.1)$$

$$\int_{\Omega} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \phi^R dx \leq C_2 \left(\int_{\Omega} (1 + \Phi^{p'(x)} + |f|) \phi^R dx + \int_{\Omega} |\nabla \phi|^R dx \right), \quad R > \hat{R}_0, \quad (3.2)$$

с постоянными $C_1(\hat{a}, \bar{a}, \bar{b}, n, R, \sup \phi, p, p_0)$, $C_2(\hat{a}, \bar{a}, \bar{b}, \alpha, n, R, \sup \phi, p, p_0)$, не зависящими от u .

Доказательство. Пусть $\rho > 0$, $\alpha < 0$ и $h(\varrho) = (1 - (|\varrho| + 1)^\alpha) \text{sign } \varrho$, $h_\rho(\varrho) = h(T_\rho(\varrho))$, $\varrho \in \mathbb{R}$, тогда $h'_\rho(\varrho) = |\alpha| (|T_\rho(\varrho)| + 1)^{\alpha-1} \chi_{\{|\varrho| < \rho\}}$. Положив в (2.7) $h = h_\rho$, применяя оценку (2.1), для $\varphi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ будем иметь

$$\begin{aligned} |\alpha| \int_{\Omega} (|T_\rho(u)| + 1)^{\alpha-1} a(x, \nabla u) \cdot \nabla T_\rho(u) \varphi dx + \int_{\Omega} b(x, u) \varphi h_\rho(u) dx = \\ = - \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi h_\rho(u) dx + \int_{\Omega} \varphi f h_\rho(u) dx \leq \\ \leq \hat{a} \int_{\Omega} |\nabla T_\rho(u)|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| dx + \int_{\{\Omega: |u| > \rho\}} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| dx + \hat{a} \int_{\Omega} \Phi |\nabla \varphi| dx + \int_{\Omega} \varphi |f| dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Далее, используя (1.2), выводим

$$I = \hat{a} \int_{\Omega} |\nabla T_\rho(u)|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| dx \leq \frac{|\alpha| \bar{a}}{2} \int_{\Omega} |\nabla T_\rho(u)|^{p(x)} (|T_\rho(u)| + 1)^{\alpha-1} \varphi dx +$$

$$+ C_3(\alpha, \widehat{a}, \overline{a}) \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{p(x)} (|T_{\rho}(u)| + 1)^{(1-\alpha)(p(x)-1)} \varphi^{1-p(x)} dx.$$

Положим $-\alpha^* = \inf_{\Omega} \frac{p_0(x)}{p(x)-1} - 1 > 0$ и $\tau_{\alpha}(x) = \frac{p_0(x)}{(p(x)-1)(1-\alpha)} > 1$ для $\alpha \in (\alpha^*, 0)$. Снова применяя (1.2), получаем

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{|\alpha|\overline{a}}{2} \int_{\Omega} |\nabla T_{\rho}(u)|^{p(x)} (|T_{\rho}(u)| + 1)^{\alpha-1} \varphi dx + \\ &+ \varepsilon \int_{\Omega} (|T_{\rho}(u)| + 1)^{p_0(x)} \varphi dx + C_4(\varepsilon, \alpha, \widehat{a}, \overline{a}) \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{p(x)\tau'_{\alpha}(x)} \varphi^{1-p(x)\tau'_{\alpha}(x)} dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Соединяя (3.3), (3.4), применяя (2.3), (2.5), выводим неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{|\alpha|}{2} \int_{\Omega} (|T_{\rho}(u)| + 1)^{\alpha-1} |\nabla T_{\rho}(u)|^{p(x)} \varphi dx + \int_{\Omega} |b(x, u)| \varphi |h_{\rho}(u)| dx \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \varphi dx + C_4 \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^{p(x)\tau'_{\alpha}(x)} \varphi^{1-p(x)\tau'_{\alpha}(x)} dx + \\ &+ \int_{\{\Omega: |u| > \rho\}} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| dx + \widehat{a} \int_{\Omega} \Phi |\nabla \varphi| dx + \int_{\Omega} \varphi |f| dx. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ввиду условия c-loc $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, поэтому

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\{\Omega: |u| > \rho\}} |\nabla u|^{p(x)-1} |\nabla \varphi| dx = 0. \quad (3.6)$$

Выполняя предельный переход при $\rho \rightarrow \infty$ в (3.5) с учетом (3.6), устанавливаем неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{|\alpha|}{2} \int_{\Omega} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \varphi dx + \int_{\Omega} |b(x, u)| \varphi |h(u)| dx \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \varphi dx + C_4 \int_{\Omega} \left(\frac{|\nabla \varphi|}{\varphi} \right)^{p(x)\tau'_{\alpha}(x)} \varphi dx + \widehat{a} \int_{\Omega} \Phi |\nabla \varphi| dx + \int_{\Omega} \varphi |f| dx. \end{aligned}$$

Применяя (2.5), выводим

$$\begin{aligned} &\frac{|\alpha|}{2} \int_{\Omega} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \varphi dx + \overline{b} \int_{\Omega} |u|^{p_0(x)} \varphi |h(u)| dx \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \varphi dx + C_4 \int_{\Omega} \left(\frac{|\nabla \varphi|}{\varphi} \right)^{p(x)\tau'_{\alpha}(x)} \varphi dx + \widehat{a} \int_{\Omega} \Phi |\nabla \varphi| dx + \int_{\Omega} \varphi |f| dx. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для $\alpha \in (\alpha^*, 0]$ рассмотрим функцию $R_{\alpha}(x) = \frac{p_0(x)p(x)}{p_0(x) + 1 - p(x) + \alpha(p(x) - 1)} : K \rightarrow \mathbb{R}^+$, где $K = \text{supp } \varphi \cap \Omega$. Обозначим $\widehat{R}_{\alpha} = \max_{x \in K} R_{\alpha}(x)$. Очевидно, $\widehat{R}_{\alpha}$ непрерывна, монотонно не возрастает по $\alpha \in (\alpha^*, 0]$ и ограничена снизу $\widehat{R}_0$. Для любого $\alpha \in (\alpha^*, 0)$ найдем $\widehat{R}_{\alpha}$ и зафиксируем $R > \widehat{R}_{\alpha}$.

Положим $\varphi = \phi^R$, тогда из (3.7) следует неравенство

$$\begin{aligned} &\frac{|\alpha|}{2} \int_{\Omega} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \phi^R dx + \overline{b} \int_{\Omega} |u|^{p_0(x)} \phi^R |h(u)| dx \leq \\ &\leq \varepsilon \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \phi^R dx + C_4 \int_{\Omega} (\phi^R + R^R |\nabla \phi|^R) dx + \widehat{a} R \int_{\Omega} \Phi |\nabla \phi| \phi^{R-1} dx + \int_{\Omega} \phi^R |f| dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Далее, применяя неравенство (1.2), пользуясь очевидным неравенством $R' < p'(x)$, устанавливаем

$$R \int_{\Omega} \Phi |\nabla \phi| \phi^{R-1} dx \leq \int_{\Omega} \left(R^R |\nabla \phi|^R + \Phi^{R'} \phi^R \right) dx \leq \int_{\Omega} \left(R^R |\nabla \phi|^R + \Phi^{p'(x)} \phi^R + \phi^R \right) dx. \quad (3.9)$$

Соединяя (3.8), (3.9), устанавливаем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \phi^R dx + \int_{\Omega} |u|^{p_0(x)} \phi^R |h(u)| dx \leq \\ & \leq \varepsilon C_5 \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \phi^R dx + C_6 \int_{\Omega} \left(R^R |\nabla \phi|^R + \phi^R (1 + |f| + \Phi^{p'(x)}) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Для $|u| \geq 1$ справедлива оценка $|h(u)| = 1 - (|u| + 1)^{\alpha} \geq 1 - 2^{\alpha} > 0$. Тогда имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \phi^R dx \leq 2^{p_0+1} \int_{\Omega} (|u|^{p_0(x)} + 1) \phi^R dx \leq \\ & \leq 2^{p_0+} \int_{\{ \Omega: |u| \geq 1 \}} |u|^{p_0(x)} \phi^R dx + 2^{p_0+} \int_{\{ \Omega: |u| < 1 \}} \phi^R dx \leq \frac{2^{p_0+}}{1 - 2^{\alpha}} \int_{\Omega} |u|^{p_0(x)} \phi^R |h(u)| dx + 2^{p_0+} \int_{\Omega} \phi^R dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Соединяя (3.10), (3.11), выбирая $\varepsilon > 0$ достаточно малым, устанавливаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} \phi^R dx + \int_{\Omega} (|u| + 1)^{p_0(x)} \phi^R dx \leq \\ & \leq C_7 \int_{\Omega} \left(R^R |\nabla \phi|^R + \phi^R (1 + |f| + \Phi^{p'(x)}) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Отсюда следует неравенство (3.1) и неравенство (3.2) для $\alpha \in (\alpha^*, 0)$; для $\alpha \leq \alpha^*$ неравенство (3.2) также справедливо. $\square$

Введем обозначения: $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < r\}$, $\Omega(r) = \Omega \cap B(r)$, $r > 0$. Будем рассматривать срезающую функцию $\phi_r \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$: $\phi_r(\varrho) = 0$ при $\varrho > r + 1$ и $\phi_r(\varrho) = 1$ при $0 \leq \varrho \leq r$.

Утверждение 3.2. Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (0.1), (0.2), тогда для любых $r, k > 0$ верны оценки

$$\int_{\Omega(r)} (|u| + 1)^{p_0(x)} dx \leq D_1, \quad (3.13)$$

$$\int_{\Omega(r)} (|u| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_2(\alpha), \quad \alpha < 0, \quad (3.14)$$

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |u| \geq k\}) \leq D_1 k^{-p_0-}. \quad (3.15)$$

Кроме того, $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{s(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq s(\cdot) < q_3(\cdot)$, и справедлива оценка

$$\int_{\Omega(r)} |u|^{(p(x)-1)s(x)} dx \leq D_3; \quad (3.16)$$

$|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{\sigma(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq \sigma(\cdot) < q_2(\cdot)$, и справедлива оценка

$$\int_{\Omega(r)} |\nabla u|^{(p(x)-1)\sigma(x)} dx \leq D_4, \quad (3.17)$$

а также $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{\sigma(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq \sigma(\cdot) < q_4(\cdot)$, и справедлива оценка (3.17).

Здесь константы $D_1 - D_4$, зависят от N , где N — набор $\hat{a}, \bar{a}, \bar{b}, n, \Omega(r+1), p, p_0, \|\Phi\|_{p'(\cdot), \Omega(r+1)}, \|f\|_{1, \Omega(r+1)}$, не зависящий от u .

Доказательство. Перепишем оценки (3.1), (3.2) с $\phi(x) = \phi_r(|x|)$ и фиксированным R , получим неравенства: (3.13), (3.14). Из оценки (3.13) следует неравенство (3.15).

Пусть $\alpha \in (1-p_-, 0)$ и $v = (1+|u|)^\beta$, $\beta = (\alpha + p_- - 1)/p_- > 0$. Поскольку $\beta p(x) < p(x) - 1 < p_0(x)$, ввиду оценки (3.13) имеем

$$\int_{\Omega(r)} v^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega(r)} (1+|u|)^{p_0(x)} dx \leq D_1. \quad (3.18)$$

Тогда $\nabla v = \beta(1+|u|)^{\beta-1} \nabla u \operatorname{sign} u$ и, согласно (3.14), справедливы неравенства

$$\int_{\Omega(r)} |\nabla v|^{p(x)} dx \leq \beta^{p_-} \int_{\Omega(r)} (1+|u|)^{(\beta-1)p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega(r)} (1+|u|)^{\alpha-1} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_5. \quad (3.19)$$

Соединяя (3.18), (3.19), выводим оценку

$$\|v\|_{p(\cdot), \Omega(r)}^1 \leq D_6,$$

из которой, ввиду леммы 1.1, получаем

$$\|v\|_{q(\cdot)(p(\cdot)-1), \Omega(r)} \leq D_7, \quad 1 \leq q(\cdot) < \frac{p^*(\cdot)}{p(\cdot) - 1}.$$

Отсюда для любого $\alpha \in (1-p_-, 0)$ следует неравенство

$$\int_{\Omega(r)} |u|^{\beta q(x)(p(x)-1)} dx \leq \int_{\Omega(r)} (|u|+1)^{\beta q(x)(p(x)-1)} dx \leq D_3. \quad (3.20)$$

Пусть $s(\cdot) < q_3(\cdot)$, найдем $s(\cdot) < t(\cdot) < q_3(\cdot)$, тогда $\inf_{\Omega} (q_3(x) - t(x)) = a > 0$. Положим $t(x) = \frac{p^*(x)(\alpha + p_- - 1)}{p_-(p(x) - 1)}$, тогда $a = |\alpha| \inf_{\Omega} \frac{p^*(x)}{p_-(p(x) - 1)}$. Поскольку $s(x) < t(x) = \frac{p^*(x)\beta}{p(x) - 1}$, то ввиду (3.20) оценка (3.16) установлена.

Далее, применяя неравенство (1.2), для $1 \leq \sigma(x) < p'(x)$ имеем:

$$\int_{\Omega(r)} |\nabla u|^{(p(x)-1)\sigma(x)} dx \leq \int_{\Omega(r)} |\nabla u|^{p(x)} (|u|+1)^{\alpha-1} dx + \int_{\Omega(r)} (|u|+1)^{\frac{(1-\alpha)\sigma(x)}{p'(x)-\sigma(x)}}. \quad (3.21)$$

Первый интеграл в (3.21) оценивается благодаря (3.14), а второй с помощью (3.16) при условии $\frac{(1-\alpha)\sigma(x)}{p'(x)-\sigma(x)} < q_0(x)$, которое выполняется для $1 \leq \sigma(x) < \frac{p'(x)q_0(x)}{1-\alpha+q_0(x)}$ при малых $\alpha < 0$.

Кроме того, второй интеграл можно оценить с помощью (3.13) при условии $\frac{(1-\alpha)\sigma(x)}{p'(x)-\sigma(x)} < p_0(x)$,

которое выполняется для $1 \leq \sigma(x) < \frac{p'(x)p_0(x)}{1-\alpha+p_0(x)}$ при малых $\alpha < 0$. Таким образом, оценка (3.17) установлена. $\square$

Следует отметить, что в случае ограниченной области Ω глобальные оценки вида (3.16), (3.17) для энтропийного решения установлены в [12, Proposition 3.2, 3.6, Corollary 3.5, 3.7].

Утверждение 3.3. Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (0.1), (0.2), тогда при всех $k, r > 0, m \geq 0$ справедлива оценка

$$\int_{\{\Omega(r): |u| \geq k+m\}} |b(x, u)| dx + \frac{1}{k} \int_{\{\Omega(r): m \leq |u| < k+m\}} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_7, \quad (3.22)$$

с константой $D_7(N)$, не зависящей от u .

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$T_{k,m}(\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\varrho| < m, \\ \varrho - m \operatorname{sign} \varrho & \text{при } m \leq |\varrho| < k+m, \\ k \operatorname{sign} \varrho & \text{при } |\varrho| \geq k+m. \end{cases}$$

Положив в (2.7) $h(u) = T_{k,m}(u)$, $\varphi = \phi_r$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\{\Omega: m \leq |u| < k+m\}} \phi_r a(x, \nabla u) \cdot \nabla u dx + \int_{\{\Omega: m \leq |u|\}} b(x, u) T_{k,m}(u) \phi_r dx + \\ & + \int_{\{\Omega: m \leq |u|\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi_r T_{k,m}(u) dx = \int_{\{\Omega: m \leq |u|\}} T_{k,m}(u) \phi_r f dx. \end{aligned}$$

Далее, используя (2.3), (2.5), выводим

$$\begin{aligned} & \bar{a} \int_{\{\Omega: m \leq |u| < k+m\}} \phi_r |\nabla u|^{p(x)} dx + k \int_{\{\Omega: |u| \geq k+m\}} \phi_r |b(x, u)| dx \leq \\ & \leq k \int_{\{\Omega: |u| \geq m\}} \phi_r |f| dx + k \hat{a} \int_{\{\Omega: |u| \geq m\}} \left(|\nabla u|^{p(x)-1} + \Phi(x) \right) |\nabla \phi_r| dx \leq \\ & \leq k \|f\|_{1, \Omega(r+1)} + k \hat{a} \int_{\Omega} \left(|\nabla u|^{p(x)-1} + \Phi(x) \right) |\nabla \phi_r| dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Соединяя последнее неравенство с (3.17), получаем оценку (3.22).

В частности, из (3.22) при $m = 0$ имеем оценку

$$\int_{\{\Omega(r): |u| \geq k\}} |b(x, u)| dx + \frac{1}{k} \int_{\{\Omega(r): |u| < k\}} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_7. \quad (3.24)$$

□

Утверждение 3.4. Пусть u — локальное ренормализованное решение задачи (0.1), (0.2), тогда для любых $k, r > 0$ верны неравенства

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |\nabla u| \geq k\}) \leq D_8(N) k^{-\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \frac{p_0 - p_-}{p_0 - 1}. \quad (3.25)$$

Доказательство. Из оценки (3.24) выводим

$$\int_{\{\Omega(r): |u| < k\}} |\nabla u|^{p(x)} dx \leq D_7 k, \quad k > 0. \quad (3.26)$$

Положим $\Phi(k, h) = \text{meas} \{\Omega(r) : |u| \geq k, |\nabla u|^{p(x)} \geq h\}$, $k, h > 0$. Выше установлено (см. (3.15)), что

$$\Phi(k, 0) \leq D_1 k^{-p_0-}. \quad (3.27)$$

Поскольку функция $h \rightarrow \Phi(k, h)$ невозрастающая, то для $k, h > 0$ справедливы неравенства

$$\Phi(0, h) \leq \frac{1}{h} \int_0^h \Phi(0, \varrho) d\varrho \leq \Phi(k, 0) + \frac{1}{h} \int_0^h (\Phi(0, \varrho) - \Phi(k, \varrho)) d\varrho. \quad (3.28)$$

Отметим, что

$$\Phi(0, \varrho) - \Phi(k, \varrho) = \text{meas} \{\Omega : |u| < k, |\nabla u|^{p(x)} \geq \varrho\}.$$

Поэтому из (3.26) следует, что

$$\int_0^\infty (\Phi(0, \varrho) - \Phi(k, \varrho)) d\varrho \leq D_7 k. \quad (3.29)$$

Теперь, соединяя (3.27)–(3.29), получаем неравенство

$$\Phi(0, h) \leq D_1 k^{-p_0-} + D_7 k/h.$$

Выбирая $k = h^{\frac{1}{p_0-+1}}$, добиваемся неравенства $\Phi(0, h) < D_8 h^{-\frac{p_0}{p_0-+1}}$. Отсюда, ввиду справедливости вложения $\{\Omega(r) : |\nabla u|^{p(x)} \geq h\} \supset \{\Omega(r) : |\nabla u| \geq h^{1/p-}\}$, устанавливаем оценку

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |\nabla u| \geq h^{1/p-}\}) \leq D_8 h^{-\gamma_0/p-}, \quad h \geq 1,$$

из которой следует (3.25). $\square$

Лемма 3.1. Пусть $B = L_{p(\cdot)}(Q)$ или $B = W_{p(\cdot)}^1(Q)$, $v^j, j \in \mathbb{N}$, v — такие функции из B , что $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ограничена в B и

$$v^j \rightarrow v \quad \text{н.в. в } Q, \quad j \rightarrow \infty, \quad (3.30)$$

тогда

$$v^j \rightharpoonup v \quad \text{слабо в } B, \quad j \rightarrow \infty.$$

Лемма 3.2. Пусть функции $v^j, j \in \mathbb{N}$, $v \in L_\infty(Q)$ такие, что $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ограничена в $L_\infty(Q)$ и имеет место сходимость (3.30), тогда

$$v^j \xrightarrow{*} v \quad \text{слабо в } L_\infty(Q), \quad j \rightarrow \infty.$$

Если, кроме того, $h^j, j \in \mathbb{N}$, h — такие функции из $L_{p(\cdot)}(Q)$, что

$$h^j \rightarrow h \quad \text{сильно в } L_{p(\cdot)}(Q), \quad j \rightarrow \infty,$$

то

$$v^j h^j \rightarrow v h \quad \text{сильно в } L_{p(\cdot)}(Q), \quad j \rightarrow \infty.$$

Лемма 3.3 (см. [5, лемма 2]). Пусть $\text{meas}(Q) < \infty$, $\gamma : Q \rightarrow [0, +\infty]$ — измеримая функция такая, что $\text{meas}(\{x \in Q : \gamma(x) = 0\}) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$\int_{Q'} \gamma(x) dx < \delta, \quad Q' \subset Q,$$

влечет $\text{meas}(Q') < \varepsilon$.

Ниже будет использоваться теорема Витали в следующей форме (см. [1, гл. III, §6, теорема 15]).

Лемма 3.4. Пусть $v^j, j \in \mathbb{N}$, v — измеримые функции в области Q , $\text{meas}(Q) < \infty$, такие, что имеет место сходимость (3.30), $s = 1$ или $p(\cdot)$ и интегралы

$$\int_Q |v^j(x)|^s dx, \quad j \in \mathbb{N},$$

равностепенно абсолютно непрерывны, тогда

$$v^j \rightarrow v \quad \text{сильно в } L_s(Q), \quad j \rightarrow \infty.$$

Лемма 3.5 (см. [9, Theorem 13.47]). Пусть $v^j, j \in \mathbb{N}$, $v \in L_1(Q)$ такие, что $v^j, v \geq 0$ н.в. в Q , имеет место сходимость (3.30) и

$$\int_Q v^j(x) dx \rightarrow \int_Q v(x) dx, \quad j \rightarrow \infty,$$

тогда

$$v^j \rightarrow v \quad \text{сильно в } L_1(Q), \quad j \rightarrow \infty.$$

Определение 3.1. Пусть область Ω ограничена. Измеримая конечная почти всюду функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *ренормализованным решением* задачи (0.1), (0.2) с $f \in L_1(\Omega)$, если выполняются условия: а)–д) и для любой функции $w \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$ такой, что

$$\text{существуют } k > 0, \quad w^{+\infty}, w^{-\infty} \in W_{r(\cdot)}^1(\Omega), \quad r(\cdot) > q'_2(\cdot),$$

$$\begin{cases} w = w^{+\infty} \text{ почти всюду при } u > k, \\ w = w^{-\infty} \text{ почти всюду при } u < -k, \end{cases} \quad (3.31)$$

справедливо равенство

$$\int_{\Omega} (b(x, u) - f)w dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w dx = 0. \quad (3.32)$$

Определение 3.1-loc. Измеримая конечная почти всюду функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется *локальным ренормализованным решением* задачи (0.1), (0.2) с $f \in L_{1,loc}(\overline{\Omega})$, если выполняются условия a-loc)–d-loc) и для любой функции $w \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$ с компактным носителем и свойствами (3.31) справедливо равенство (3.32).

Замечание 3.1. Каждый интеграл в (3.32) корректно определен. Пусть $\text{supp } w \cap \Omega = K$. Первое слагаемое в левой части конечно благодаря условию b-loc), $f \in L_{1,loc}(\overline{\Omega})$ и принадлежности $w \in L_{\infty}(K)$. Второе слагаемое можно записать

$$\int_{\{K: u < -k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w dx + \int_{\{K: u > k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w dx + \int_{\{K: |u| \leq k\}} a(x, \nabla u) \cdot \nabla w dx.$$

С одной стороны, из условия c-loc) и неравенства (2.1) следует, что $a(x, \nabla u) \in (L_{q(\cdot)}(K))^n$ для любого $q(\cdot) < q_2(\cdot)$; с другой стороны, $\nabla w = \nabla w^{-\infty}$ п.в. на множестве $\{K : u < -k\}$, поэтому $\nabla w \in (L_{r(\cdot)}(\{K : u < -k\}))^n$ для любого $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$ и, следовательно, произведение $a(x, \nabla u) \cdot \nabla w$ интегрируемо на $\{K : u < -k\}$. Таким же образом доказывается интегрируемость $a(x, \nabla u) \cdot \nabla w$ на $\{K : u > k\}$. Наконец, благодаря (2.9) и принадлежности $w \in W_{p(\cdot)}^1(K)$ произведение $a(x, \nabla u) \cdot \nabla w$ интегрируемо на $\{K : |u| \leq k\}$.

Теорема 3.1. Определения 2.1-loc, 3.1-loc эквивалентны.

Эквивалентность определений 2.1, 3.1 в случае данных в виде общей меры доказана в [3], эквивалентность определений 2.1-loc, 3.1-loc устанавливается аналогично.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1, НАЧАЛО

В этом разделе будут получены некоторые априорные оценки и свойства сходимости последовательности $\{u_{\xi}\}$.

Согласно определению 2.1-loc, для любой функции $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$ и любой $\varphi \in W_{q(\cdot)}^1(\Omega)$, $r(\cdot) > q_2'(\cdot)$ с компактным носителем такой, что $\varphi h(u) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$, решение u_{ξ} удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega} (b(x, u_{\xi}) - f_{\xi})h(u_{\xi})\varphi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u_{\xi}) \cdot (\nabla u_{\xi} h'(u_{\xi})\varphi + \nabla \varphi h(u_{\xi})) dx = 0. \quad (4.1)$$

Кроме того, согласно определению 3.1-loc для любой функции $w \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega) \cap L_{\infty}(\Omega)$ с компактным носителем и со свойствами (3.31) справедливо равенство

$$\int_{\Omega} (b(x, u_{\xi}) - f_{\xi})w dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u_{\xi}) \cdot \nabla w dx = 0. \quad (4.2)$$

Шаг 1: априорные оценки. Здесь $r > 0$ — произвольное фиксированное.

Ввиду сходимости

$$f_{\xi} \rightarrow f \text{ в } L_{1,loc}(\overline{\Omega}), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (4.3)$$

существует положительная константа c_r такая, что

$$\|f_{\xi}\|_{1,\Omega(r)} \leq c_r, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.4)$$

Применяя оценки утверждения 3.1 с $\phi = \phi_r$ (см. (3.1), (3.2)), учитывая (4.4), выводим оценки:

$$\int_{\Omega(r)} (|u_{\xi}| + 1)^{p_0(x)} dx \leq D_1, \quad \xi \in \mathbb{N}, \quad (4.5)$$

и для любого $\alpha < 0$

$$\int_{\Omega(r)} (|u_\xi| + 1)^{\alpha-1} |\nabla u_\xi|^{p(x)} dx \leq D_2, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Согласно утверждению 3.2, для любых $k, r > 0$ справедливо неравенство (см. (3.15))

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |u_\xi| \geq k\}) \leq D_1 k^{-p_0-}, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

Кроме того, для $1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot)$ справедлива оценка (см. (3.16))

$$\int_{\Omega(r)} |u_\xi|^{(p(x)-1)q(x)} dx \leq D_3, \quad \xi \in \mathbb{N}; \quad (4.8)$$

а для $1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot)$ (или $q_4(\cdot)$) — оценка (см. (3.17))

$$\int_{\Omega(r)} |\nabla u_\xi|^{(p(x)-1)q(x)} dx \leq D_4, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Таким же образом, как в утверждении 3.3, получаем оценку (см. (3.24))

$$\int_{\{\Omega(r): |u_\xi| \geq k\}} |b(x, u_\xi)| dx + \frac{1}{k} \int_{\{\Omega(r): |u_\xi| < k\}} |\nabla u_\xi|^{p(x)} dx \leq D_7, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

Из оценки (4.10) ввиду произвольности $k > 0$ устанавливаем неравенство

$$\|b(x, u_\xi)\|_{1, \Omega(r)} \leq D_7, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.11)$$

Далее, из оценки (4.10), пользуясь неравенством (2.1'), выводим

$$\int_{\Omega(r)} |\nabla T_k(u_\xi)|^{p(x)} dx \leq D_7 k, \quad k > 0, \quad \xi \in \mathbb{N}, \quad (4.12)$$

$$\int_{\Omega(r)} |a(x, \nabla T_k(u_\xi))|^{p'(x)} dx \leq D_9 k, \quad k \geq 1, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

Далее, согласно утверждению 3.4, для любых $k, r > 0$ справедливо неравенство (см. (3.25))

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |\nabla u_\xi| \geq k\}) \leq D_8 k^{-\gamma_0}, \quad \gamma_0 = \frac{p_0 - p_-}{p_0 - 1}. \quad (4.14)$$

Здесь и ниже константы D_i не зависят от ξ, k .

Шаг 2: сходимость подпоследовательности $\{u_\xi\}$ почти всюду.

Из оценок (4.7), (4.14) имеем

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |u_\xi| \geq h\}) \rightarrow 0 \quad \text{равномерно по } \xi, \quad h \rightarrow \infty, \quad (4.15)$$

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |\nabla u_\xi| \geq h\}) \rightarrow 0 \quad \text{равномерно по } \xi, \quad h \rightarrow \infty. \quad (4.16)$$

Установим сходимость по подпоследовательности:

$$u_\xi \rightarrow u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.17)$$

Пусть $\alpha \in (1 - p_-, 0)$, рассмотрим последовательность $v_\xi = (1 + |u_\xi|)^\beta$, $\beta = (\alpha + p_- - 1)/p_- > 0$. Согласно (4.5), (4.6), справедливы оценки

$$\int_{\Omega(r)} |v_\xi|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega(r)} (1 + |u_\xi|)^{p_0(x)} dx \leq D_1, \quad (4.18)$$

$$\int_{\Omega(r)} |\nabla v_\xi|^{p(x)} dx \leq \beta^{p_-} \int_{\Omega(r)} (1 + |u_\xi|)^{(\beta-1)p(x)} |\nabla u_\xi|^{p(x)} dx \leq \int_{\Omega(r)} (1 + |u_\xi|)^{\alpha-1} |\nabla u_\xi|^{p(x)} dx \leq D_2. \quad (4.19)$$

Рассмотрим также последовательности $v'_\xi = (1 + u_\xi^+)^{\beta}$, $v''_\xi = (1 + u_\xi^-)^{\beta}$. Очевидно, что $|\nabla v'_\xi| \leq \beta(1 + |u_\xi|)^{(\alpha-1)/p-} |\nabla u_\xi|$, $|\nabla v''_\xi| \leq \beta(1 + |u_\xi|)^{(\alpha-1)/p-} |\nabla u_\xi|$. Из оценок (4.18), (4.19) следует ограниченность последовательностей v'_ξ, v''_ξ в пространстве $W_{p(\cdot)}^1(\Omega(r))$ и, ввиду компактности вложения в пространство $L_{p(\cdot)}(\Omega(r))$, имеет место сильная сходимость в $L_{p(\cdot)}(\Omega(r))$ и сходимость $v'_\xi \rightarrow v'$, $v''_\xi \rightarrow v''$ п.в. в Ω . Тогда сходимость (4.17) доказана. Применяя лемму Фату и сходимость (4.17), из оценок (4.5), (4.11) выводим $|u|^{p_0(x)}$, $b(x, u) \in L_{1, \text{loc}}(\bar{\Omega})$.

Из (4.17) следует, что для любого $k > 0$

$$T_k(u_\xi) \rightarrow T_k(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

Кроме того, из сходимости (4.17) вытекает сходимость локально по мере, а значит, и фундаментальность $\{u_\xi\}$ локально по мере:

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |u_\xi - u_\eta| \geq \nu\}) \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi, \eta \rightarrow \infty \quad \text{для любых } \nu, r > 0. \quad (4.21)$$

Из оценки (4.12) следует ограниченность последовательности $\{T_k(u_\xi)\} \subset \dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$ в пространстве $W_{p(\cdot)}^1(\Omega(r))$ при фиксированных $k, r > 0$. Тогда можно выделить слабо сходящуюся в $W_{p(\cdot)}^1(\Omega(r))$ подпоследовательность $T_k(u_\xi) \rightharpoonup v_k$, $\xi \rightarrow \infty$, причем $v_k \in \dot{V}_{p(\cdot)}^1(\Omega(r))$. Из сходимости (4.20) следует равенство $v_k = T_k(u) \in \dot{V}_{p(\cdot)}^1(\Omega(r))$. Таким образом, доказана сходимость

$$T_k(u_\xi) \rightharpoonup T_k(u) \quad \text{в } \dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.22)$$

Шаг 3: сходимость подпоследовательности $\{\nabla u_\xi\}$ почти всюду.

Сначала установим сходимость

$$\nabla u_\xi \rightarrow \nabla u \quad \text{локально по мере, } \xi \rightarrow \infty. \quad (4.23)$$

Для $\nu, \theta, h, r > 0$ рассмотрим множество

$$E_{\nu, \theta, h}(r) = \{\Omega(r) : |u_\xi - u_\eta| < \nu, |\nabla u_\xi| \leq h, |\nabla u_\eta| \leq h, |u_\xi| < h, |u_\eta| < h, |\nabla(u_\xi - u_\eta)| \geq \theta\}.$$

Поскольку справедливо включение

$$\begin{aligned} \{\Omega(r) : |\nabla(u_\xi - u_\eta)| \geq \theta\} &\subset \{\Omega(r) : |\nabla u_\xi| > h\} \cup \{\Omega(r) : |\nabla u_\eta| > h\} \cup \\ &\cup \{\Omega(r) : |u_\xi - u_\eta| \geq \nu\} \cup \{\Omega(r) : |u_\xi| \geq h\} \cup \{\Omega(r) : |u_\eta| \geq h\} \cup E_{\nu, \theta, h}(r), \end{aligned}$$

то в силу (4.15)-(4.16) выбором h добьемся неравенств

$$\text{meas} \{\Omega(r) : |\nabla(u_\xi - u_\eta)| \geq \theta\} < 4\varepsilon + \text{meas} E_{\nu, \theta, h}(r) + \text{meas} \{\Omega(r) : |u_\eta - u_\xi| \geq \nu\}, \quad \xi, \eta \in \mathbb{N}. \quad (4.24)$$

По условию монотонности (2.2) и известному факту, что непрерывная функция на компакте достигает наименьшего значения, найдется $\gamma(x) > 0$ п.в. в $\Omega(r)$ такая, что $\text{meas}(\{x \in \Omega(r) : \gamma(x) = 0\}) = 0$, и при $|s| \leq h$, $|t| \leq h$, $|s - t| \geq \theta$ справедливо неравенство

$$(a(x, s) - a(x, t)) \cdot (s - t) \geq \gamma(x), \quad x \in \Omega(r). \quad (4.25)$$

Запишем равенство (4.2) дважды для u_ξ, u_η с f_ξ и f_η , соответственно, и вычтем из первого второе, получим

$$\int_{\Omega} (a(x, \nabla u_\xi) - a(x, \nabla u_\eta)) \cdot \nabla w dx = \int_{\Omega} (f_\xi - f_\eta - b(x, u_\xi) + b(x, u_\eta)) w dx.$$

Подставляя пробную функцию $w = T_\nu(u_\xi - u_\eta) \phi_r(|x|) \phi_h(|u_\xi|) \phi_h(|u_\eta|)$, $w^{+\infty} = w^{-\infty} = 0$, устанавливаем соотношение

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (a(x, \nabla u_\xi) - a(x, \nabla u_\eta)) \cdot \nabla (T_\nu(u_\xi - u_\eta) \phi_r(|x|) \phi_h(|u_\xi|) \phi_h(|u_\eta|)) dx = \\ &= \int_{\Omega} (-b(x, u_\xi) + b(x, u_\eta) + f_\xi - f_\eta) T_\nu(u_\xi - u_\eta) \phi_r(|x|) \phi_h(|u_\xi|) \phi_h(|u_\eta|) dx. \end{aligned}$$

Используя оценки (4.4), (4.11), выводим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (a(x, \nabla u_{\xi}) - a(x, \nabla u_{\eta})) \cdot \nabla (T_{\nu}(u_{\xi} - u_{\eta}) \phi_r(|x|) \phi_h(|u_{\xi}|) \phi_h(|u_{\eta}|)) dx \leq \\ & \leq \nu (\|b(x, u_{\xi})\|_{1, \Omega(r+1)} + \|b(x, u_{\eta})\|_{1, \Omega(r+1)} + \|f_{\xi}\|_{1, \Omega(r+1)} + \|f_{\eta}\|_{1, \Omega(r+1)}) \leq D_{10} \nu. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Далее, применяя (4.25), устанавливаем

$$\begin{aligned} & \int_{E_{\nu, \theta, h}(r)} \gamma(x) dx \leq \int_{E_{\nu, \theta, h}(r)} (a(x, \nabla u_{\xi}) - a(x, \nabla u_{\eta})) \cdot \nabla (u_{\xi} - u_{\eta}) dx \leq \\ & \leq \int_{\{\Omega: |u_{\xi} - u_{\eta}| < \nu\}} \phi_r(|x|) \phi_h(|u_{\xi}|) \phi_h(|u_{\eta}|) (a(x, \nabla u_{\xi}) - a(x, \nabla u_{\eta})) \cdot \nabla (u_{\xi} - u_{\eta}) dx. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Соединяя (4.26), (4.27), применяя (1.2), (4.12), (4.13), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{E_{\nu, \theta, h}(r)} \gamma(x) dx \leq \int_{\{\Omega(r+1): |u_{\xi}| < h+1, |u_{\eta}| < r+1\}} (|a(x, \nabla u_{\xi})| + |a(x, \nabla u_{\eta})|) |T_{\nu}(u_{\xi} - u_{\eta})| dx + \\ & + \int_{\{\Omega(r+1): h < |u_{\eta}| < h+1, |u_{\xi}| < h+1\}} (|a(x, \nabla u_{\xi})| + |a(x, \nabla u_{\eta})|) |\nabla u_{\eta}| |T_{\nu}(u_{\xi} - u_{\eta})| dx + \\ & + \int_{\{\Omega(r+1): h < |u_{\xi}| < h+1, |u_{\eta}| < h+1\}} (|a(x, \nabla u_{\xi})| + |a(x, \nabla u_{\eta})|) |\nabla u_{\xi}| |T_{\nu}(u_{\xi} - u_{\eta})| dx + D_{10}(r) \nu \leq \\ & \leq \nu (3\rho(|a(x, \nabla T_{h+1}(u_{\xi}))|)_{p'(\cdot), \Omega(r+1)} + 3\rho(|a(x, \nabla T_{h+1}(u_{\eta}))|)_{p'(\cdot), \Omega(r+1)} + \\ & + 2\rho(|\nabla T_{h+1}(u_{\xi})|)_{p(\cdot), \Omega(r+1)} + 2\rho(|\nabla T_{h+1}(u_{\eta})|)_{p(\cdot), \Omega(r+1)} + D_{11}(r)) \leq D_{12}(r, h) \nu. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Для произвольных $\theta, \delta > 0$ при фиксированных h, r выбором ν из (4.28) устанавливаем неравенство

$$\int_{E_{\nu, \theta, h}(r)} \gamma(x) dx < \delta.$$

Применяя лемму 3.3, для любых $\theta, \varepsilon > 0$ выводим

$$\text{meas}(E_{\nu, \theta, h}(r)) < \varepsilon. \quad (4.29)$$

Кроме того, согласно (4.21) можно выбрать $\xi_0(\nu, r, \varepsilon)$ такое, что

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |u_{\xi} - u_{\eta}| \geq \nu\}) < \varepsilon, \quad \xi, \eta \geq \xi_0. \quad (4.30)$$

Соединяя (4.24), (4.29), (4.30), в итоге для любых $\theta, \varepsilon > 0$ выводим неравенство

$$\text{meas}(\{\Omega(r) : |\nabla(u_{\xi} - u_{\eta})| \geq \theta\}) < 6\varepsilon, \quad \xi, \eta \geq \xi_0.$$

Отсюда следует локальная фундаментальность по мере последовательности $\{\nabla u_{\xi}\}$, это влечет сходимость (4.23), а также сходимость по подпоследовательности:

$$\nabla u_{\xi} \rightarrow \nabla u \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.31)$$

Далее, несложно установить сходимость

$$\nabla T_k(u_{\xi}) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.32)$$

Из непрерывности $a(x, s)$ по $s \in \mathbb{R}^n$ и сходимости (4.32) следует сходимость

$$a(x, \nabla T_k(u_{\xi})) \rightarrow a(x, \nabla T_k(u)) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.33)$$

Отсюда, благодаря оценке (4.13), по лемме 3.1 имеем сходимость

$$a(x, \nabla T_k(u_{\xi})) \rightharpoonup a(x, \nabla T_k(u)) \quad \text{слабо в } (L_{p'(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}))^n, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.34)$$

Шаг 4: сильные сходимости

$$|u_\xi|^{p(x)-1} \rightarrow |u|^{p(x)-1} \quad \text{в } L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}), \quad 1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (4.35)$$

$$|\nabla u_\xi|^{p(x)-1} \rightarrow |\nabla u|^{p(x)-1} \quad \text{в } (L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}))^n, \quad 1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot) \text{ (или } q_4(\cdot)), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (4.36)$$

$$a(x, \nabla u_\xi) \rightarrow a(x, \nabla u) \quad \text{в } (L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}))^n, \quad 1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot) \text{ (или } q_4(\cdot)), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (4.37)$$

$$b(x, u_\xi) \rightarrow b(x, u) \quad \text{в } L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (4.38)$$

Применяя лемму Фату и сходимости (4.17), (4.31), из оценок (4.8), (4.9) выводим принадлежность $|u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq q(\cdot) < q_3(\cdot)$, $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega})$, $1 \leq q(\cdot) < q_2(\cdot)$ (или $q_4(\cdot)$).

Применяя неравенства (1.1), (2.1) и неравенство Юнга, для любого измеримого множества $Q \subset \Omega(r)$ и любого $\epsilon > 0$ устанавливаем неравенства

$$\begin{aligned} \int_Q |a(x, \nabla u_\xi)|^{q(x)} dx &\leq \widehat{a}^{q+} 2^{q+1} \int_Q \left(|\nabla u_\xi|^{(p(x)-1)q(x)} + \Phi^{q(x)}(x) \right) dx \leq \\ &\leq \epsilon \int_{\Omega(r)} |\nabla u_\xi|^{(p(x)-1)\widehat{q}(x)} dx + C(\epsilon) \text{meas}(Q) + D_{13} \int_Q \Phi^{q(x)}(x) dx, \end{aligned} \quad (4.39)$$

где $1 \leq q(\cdot) < \widehat{q}(\cdot) < q_2(\cdot)$.

Поскольку $q_2(\cdot) < p'(\cdot)$, то $\Phi \in L_{q(\cdot)}(\Omega(r))$, $q(\cdot) < q_2(\cdot)$. Учитывая абсолютную непрерывность второго интеграла в правой части (4.39), применяя оценку (4.9), для любого $\epsilon > 0$ найдем такое $\delta(\epsilon)$, что: для любого Q такого, что $\text{meas}(Q) < \delta(\epsilon)$, выполнено неравенство

$$\int_Q |a(x, \nabla u_\xi)|^{q(x)} dx \leq \epsilon, \quad \forall \xi \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что последовательности $\{|\nabla u_\xi|^{(p(x)-1)q(x)}\}$, $\{|a(x, \nabla u_\xi)|^{q(x)}\}$ имеют равномерно абсолютно непрерывные интегралы по множеству $\Omega(r)$. По лемме 3.4 имеют место сходимости (4.36), (4.37). Сходимость (4.35) устанавливается аналогично, с помощью оценки (4.8).

Запишем оценку (3.23) для u_ξ, f_ξ для $k = 1$:

$$\begin{aligned} \bar{a} \int_{\{\Omega(r): \rho \leq |u_\xi| < 1+\rho\}} |\nabla u_\xi|^{p(x)} dx + \int_{\{\Omega(r): |u_\xi| \geq 1+\rho\}} |b(x, u_\xi)| dx &\leq \\ \leq \int_{\{\Omega(r+1): |u_\xi| \geq \rho\}} |f_\xi| dx + \widehat{a} \int_{\{\Omega(r+1): |u_\xi| \geq \rho\}} \left(|\nabla u_\xi|^{p(x)-1} + \Phi(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Ввиду того, что $f_\xi, |\nabla u_\xi|^{p(x)-1}$ сходятся сильно в $L_{1, \text{loc}}(\overline{\Omega})$, и абсолютной непрерывности интеграла в правой части последнего неравенства, учитывая (4.15), для любого $\epsilon > 0$ можно выбрать достаточно большое $\tilde{\rho}(\epsilon) > 1$ такое, что для $\rho \geq \tilde{\rho}$ справедлива оценка:

$$\bar{a} \int_{\{\Omega(r): \rho \leq |u_\xi| < 1+\rho\}} |\nabla u_\xi|^{p(x)} dx + \int_{\{\Omega(r): |u_\xi| \geq 1+\rho\}} |b(x, u_\xi)| dx < \frac{\epsilon}{2}. \quad (4.40)$$

Для любого измеримого множества $Q \subset \Omega(r)$ имеем

$$\int_Q |b(x, u_\xi)| dx \leq \int_{\{Q: |u_\xi| < \rho+1\}} |b(x, u_\xi)| dx + \int_{\{\Omega(r): |u_\xi| \geq \rho+1\}} |b(x, u_\xi)| dx. \quad (4.41)$$

Применяя (2.4), выводим:

$$\int_{\{Q: |u_\xi| < \rho+1\}} |b(x, u_\xi)| dx \leq \widehat{b}(\rho+1) \int_Q \Phi_0(x) dx.$$

Ввиду того, что $\Phi_0 \in L_1(Q)$, и абсолютной непрерывности интеграла в правой части последнего неравенства, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\alpha(\varepsilon)$, что для любого Q такого, что $\text{meas } Q < \alpha(\varepsilon)$, выполнено неравенство

$$\int_{\{Q: |u_\xi| < \rho+1\}} |b(x, u_\xi)| dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \xi \in \mathbb{N}. \quad (4.42)$$

Объединяя (4.40)–(4.42), устанавливаем

$$\int_Q |b(x, u_\xi)| dx < \varepsilon \quad \forall Q \text{ такого, что } \text{meas } Q < \alpha(\varepsilon), \quad \xi \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{b(x, u_\xi)\}$ имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы по множеству $\Omega(r)$. По лемме 3.4 устанавливаем сходимость

$$b(x, u_\xi) \rightarrow b(x, u) \quad \text{в } L_1(\Omega(r)), \quad \xi \rightarrow \infty,$$

для любого $r > 0$. Сходимость (4.38) доказана.

Доказательство теоремы будет продолжено в разделе 6.

5. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Чтобы доказать сильную сходимость срезов в $\dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$, установим вспомогательные леммы.

Будем использовать функции вещественной переменной ϱ от одного вещественного параметра $m > 0$:

$$G_m(\varrho) = \begin{cases} 0, & |\varrho| > 2m, \\ \frac{\varrho + 2m}{m}, & -2m \leq \varrho < -m, \\ 1, & |\varrho| \leq m, \\ \frac{2m - \varrho}{m}, & m < \varrho \leq 2m, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\tau_m(\varrho) = T_{m,m}(\varrho).$$

Для положительных вещественных чисел m, ξ обозначим через $\omega(m, \xi)$ любую величину такую, что

$$\limsup_{m \rightarrow +\infty} \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} |\omega(m, \xi)| = 0.$$

А через $\omega_m(\xi)$ обозначим величину такую, что при фиксированном m

$$\limsup_{\xi \rightarrow +\infty} |\omega_m(\xi)| = 0.$$

Лемма 5.1. Пусть $\{u_\xi\}$ — последовательность локальных ренормализованных решений задачи (2.10), (0.2) такая, что имеют место сходимости (4.3), (4.17), (4.22), (4.31), (4.37), (4.38). Тогда для любых $m > 0$ и $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\frac{1}{m} \int_{\{\Omega: m \leq |u_\xi| < 2m\}} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla u_\xi \phi dx = \omega(m, \xi). \quad (5.2)$$

Доказательство. Зафиксируем m , и пусть ξ стремится к бесконечности. Ввиду сходимости (4.17), непрерывности и ограниченности функции $\tau_m(\varrho)$, по лемме 3.2 имеем

$$\tau_m(u_\xi) \rightarrow \tau_m(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (5.3)$$

$$\tau_m(u_\xi) \xrightarrow{*} \tau_m(u) \quad \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (5.4)$$

Очевидно,

$$\tau_m(u) \rightarrow 0 \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Ввиду ограниченности последовательности функций $\{\tau_m(\varrho)\}_{m=1}^\infty$, по лемме 3.2 имеем

$$\tau_m(u) \xrightarrow{*} 0 \quad \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.6)$$

Теперь в равенстве (4.1) возьмем $h = \tau_m(u_\xi)$, $\varphi = \phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$, получим

$$\begin{aligned} I_1 + I_{21} + I_{22} = & \int_{\Omega} (b(x, u_\xi) - f_\xi) \phi \tau_m(u_\xi) dx + \frac{1}{m} \int_{\{m \leq |u_\xi| < 2m\}} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla u_\xi \phi dx + \\ & + \int_{\Omega} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla \phi \tau_m(u_\xi) dx = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Поскольку $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$, благодаря сходимостям

$$a(x, \nabla u_\xi) \rightarrow a(x, \nabla u) \quad \text{сильно в } (L_{1,\text{loc}}(\overline{\Omega}))^n, \quad \xi \rightarrow 0 \quad (5.8)$$

(см. (4.37)), (5.4), (5.6) имеем

$$I_{22} = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi \tau_m(u) dx + \omega_m(\xi) = \omega(m, \xi). \quad (5.9)$$

Аналогично, используя сходимости (4.38), (4.3), (5.4), (5.6), получаем

$$I_1 = \int_{\Omega} (b(x, u) - f) \phi \tau_m(u) dx + \omega_m(\xi) = \omega(m, \xi). \quad (5.10)$$

Соединяя (5.7), (5.9)–(5.10), получаем неравенство

$$\frac{1}{m} \int_{\{\Omega: m \leq |u_\xi| < 2m\}} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla u_\xi \phi dx \leq \omega(m, \xi),$$

которое влечет (5.2). $\square$

Лемма 5.2. Пусть выполнены условия леммы 5.1, тогда для $k > 0$ и $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) \phi dx = \int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \phi dx + \omega(\xi). \quad (5.11)$$

Доказательство леммы 5.2 разобьем на две леммы.

Лемма 5.3. Пусть выполнены условия леммы 5.1, тогда для любых $k > 0$ и $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\int_{\Omega} (b(x, u) - f) T_k(u) \phi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) \phi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi T_k(u) dx = \omega(\xi). \quad (5.12)$$

Доказательство. Выберем $h(\rho) = T_k(\rho)$, $\varphi = \phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ в равенстве (4.1), получим:

$$\begin{aligned} I_1 + I_{21} + I_{22} = & \int_{\Omega} (b(x, u_\xi) - f_\xi) T_k(u_\xi) \phi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) \phi dx + \\ & + \int_{\Omega} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla \phi T_k(u_\xi) dx = 0. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Согласно (4.20), по лемме 3.2 имеет место сходимость

$$T_k(u_\xi) \xrightarrow{*} T_k(u) \quad \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (5.14)$$

Применяя (5.14), (5.8), устанавливаем:

$$I_{22} = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi T_k(u) dx + \omega(\xi). \quad (5.15)$$

Благодаря (4.38), (4.3), (5.14) устанавливаем

$$I_1 = \int_{\Omega} (b(x, u) - f) T_k(u) \phi dx + \omega(\xi). \quad (5.16)$$

Соединяя (5.13), (5.15), (5.16), выводим (5.12). $\square$

Лемма 5.4. Пусть выполнены условия леммы 5.1, тогда для любых $k > 0$ и $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\int_{\Omega} (b(x, u) - f) T_k(u) \phi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \phi dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi T_k(u) dx = 0. \quad (5.17)$$

Доказательство. Ввиду сходимости (4.17), непрерывности и ограниченности функции $G_m(\varrho)$, по лемме 3.2 имеем

$$\begin{aligned} G_m(u_\xi) &\rightarrow G_m(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty, \\ G_m(u_\xi) &\overset{*}{\rightharpoonup} G_m(u) \quad \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \quad \xi \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ввиду ограниченности функции $G_m(\varrho)$ по лемме 3.2 имеем

$$G_m(u) \rightarrow 1 \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.19)$$

$$G_m(u) \overset{*}{\rightharpoonup} 1 \quad \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.20)$$

Выберем $w = T_k(u) G_m(u_\xi) \phi$, $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ в качестве тестовой функции в равенстве (4.2), полагая $w^{+\infty} = w^{-\infty} = 0$; получим:

$$\begin{aligned} I_1 + I_{21} + I_{22} + I_{23} &= \int_{\Omega} (b(x, u_\xi) - f_\xi) T_k(u) \phi G_m(u_\xi) dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla u_\xi T_k(u) \phi G'_m(u_\xi) dx + \\ &+ \int_{\Omega} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla T_k(u) \phi G_m(u_\xi) dx + \int_{\Omega} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla \phi T_k(u) G_m(u_\xi) dx = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Благодаря неравенству (4.13) имеет место оценка:

$$\int_{\Omega(r)} |a(x, \nabla T_{2m}(u_\xi)) G_m(u_\xi)|^{p'(x)} dx \leq m D_{13}.$$

Из непрерывности $a(x, s)$ по $s \in \mathbb{R}^n$, $G_m(s_0)$ по $s_0 \in \mathbb{R}$ и сходимостей (4.17), (4.32) следует сходимость

$$a(x, \nabla T_{2m}(u_\xi)) G_m(u_\xi) \rightarrow a(x, \nabla T_{2m}(u)) G_m(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Отсюда, по лемме 3.1 имеем сходимость

$$a(x, \nabla T_{2m}(u_\xi)) G_m(u_\xi) \rightharpoonup a(x, \nabla T_{2m}(u)) G_m(u) \quad \text{слабо в } (L_{p'(\cdot), \text{loc}}(\overline{\Omega}))^n, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (5.22)$$

Поскольку $a(x, \nabla u_\xi) G_m(u_\xi) = a(x, \nabla T_{2m}(u_\xi)) G_m(u_\xi)$, применяя (5.22), (5.20), для $m > k$ имеем

$$I_{22} = \int_{\Omega} a(x, \nabla T_{2m}(u)) \cdot \nabla T_k(u) \phi G_m(u) dx + \omega_m(\xi) = \int_{\Omega} a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \phi dx + \omega(m, \xi). \quad (5.23)$$

Применяя сходимости (5.8), (5.18), (5.20), получаем

$$I_{23} = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi T_k(u) G_m(u) dx + \omega_m(\xi) = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \phi T_k(u) dx + \omega(m, \xi). \quad (5.24)$$

По лемме 5.1 имеем

$$|I_{21}| \leq \frac{k}{m} \int_{\{\Omega: m \leq |u_\xi| < 2m\}} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla u_\xi \phi dx = \omega(m, \xi). \quad (5.25)$$

Применяя сходимости (4.38), (4.3), (5.18), (5.20), получаем

$$I_1 = \int_{\Omega} (b(x, u) - f) T_k(u) \phi G_m(u) dx + \omega_m(\xi) = \int_{\Omega} (b(x, u) - f) T_k(u) \phi dx + \omega(m, \xi). \quad (5.26)$$

Соединяя (5.21), (5.23)–(5.26), устанавливаем (5.17), поскольку все слагаемые в (5.17) не зависят от ξ и m . $\square$

Для получения (5.11) достаточно вычесть (5.17) из (5.12). Лемма 5.2 доказана.

6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1, ФИНАЛ

В этом разделе мы завершаем доказательство теоремы 2.1. Напомним, что $\{u_\xi\}$ — подпоследовательность ренормализованных решений задач (2.10), (0.2) такая, что имеют место сходимости (4.17), (4.22), (4.31), (4.37), (4.38).

Шаг 5: сильная сходимость срезов в $\dot{W}_{p(\cdot),\text{loc}}^1(\bar{\Omega})$.

Учитывая (4.32), (4.33), выводим

$$a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) \rightarrow a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.1)$$

Поскольку $a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi)$ неотрицательны, применяя (5.11), (6.1), для $\phi \in D^+(\mathbb{R}^n)$ по лемме 3.5 устанавливаем

$$\phi a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) \rightarrow \phi a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{в } L_1(\Omega), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.2)$$

Отсюда следует сходимость

$$a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) \rightarrow a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{в } L_{1,\text{loc}}(\bar{\Omega}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.3)$$

Для любого измеримого множества $Q \subset \Omega(r)$, используя неравенства (1.1), (2.3), выводим

$$\begin{aligned} \int_Q |\nabla T_k(u_\xi) - \nabla T_k(u)|^{p(x)} dx &\leq 2^{p_+-1} \int_Q \left(|\nabla T_k(u_\xi)|^{p(x)} + |\nabla T_k(u)|^{p(x)} \right) dx \leq \\ &\leq D_{14} \int_Q (a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) + a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u)) dx. \end{aligned}$$

Ввиду сходимости (6.3) и абсолютной непрерывности интегралов в правой части последнего неравенства, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что:

$$\int_Q |\nabla T_k(u_\xi) - \nabla T_k(u)|^{p(x)} dx < \varepsilon \quad \forall Q \quad \text{такого, что } \text{meas}(Q) < \delta(\varepsilon).$$

Таким образом, последовательность $\{|\nabla T_k(u_\xi) - \nabla T_k(u)|^{p(x)}\}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы по множеству $\Omega(r)$. Отсюда, благодаря сходимости (4.32), по лемме 3.4 имеет место сходимость

$$\nabla T_k(u_\xi) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{в } (L_{p(\cdot),\text{loc}}(\bar{\Omega}))^n, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.4)$$

Далее, применяя неравенства (1.1), (2.1'), (2.3), выводим

$$\begin{aligned} |a(x, \nabla T_k(u_\xi)) - a(x, \nabla T_k(u))|^{p'(x)} &\leq 2^{p'_+-1} \left(|a(x, \nabla T_k(u_\xi))|^{p'(x)} + |a(x, \nabla T_k(u))|^{p'(x)} \right) \leq \\ &\leq D_{15} \left(|\nabla T_k(u_\xi)|^{p(x)} + |\nabla T_k(u)|^{p(x)} + \Psi(x) \right) \leq \\ &\leq D_{16} (a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \cdot \nabla T_k(u_\xi) + a(x, \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) + \Psi(x)). \end{aligned}$$

Отсюда, как и выше, устанавливаем, что последовательность $\{|a(x, \nabla T_k(u_\xi)) - a(x, \nabla T_k(u))|^{p'(x)}\}$ имеет равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Тогда, благодаря сходимости (4.33), по лемме 3.4 имеет место сходимость

$$a(x, \nabla T_k(u_\xi)) \rightarrow a(x, \nabla T_k(u)) \quad \text{сильно в } (L_{p'(\cdot),\text{loc}}(\bar{\Omega}))^n, \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.5)$$

Шаг 6: предельная функция — ренормализованное решение.

Докажем, что предельная функция u удовлетворяет определению 2.1-loc. Условия a-loc)–d-loc) определения 2.1-loc выполнены, это доказано в конце шага 2 и начале шага 4, соответственно. Докажем равенство (2.7). Пусть $h \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$ и φ с компактным носителем, $\varphi \in W_{r(\cdot)}^1(\Omega)$, $r(\cdot) > q'_2(\cdot)$, таковы, что $\varphi h(u) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$ (очевидно, что $\varphi h(u_\xi) \in \dot{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$). Поскольку h ограничена и непрерывна, ввиду сходимости (4.17), по лемме 3.2 устанавливаем

$$h(u_\xi) \rightarrow h(u) \quad \text{п.в. в } \Omega, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (6.6)$$

$$h(u_\xi) \xrightarrow{*} h(u) \quad \text{слабо в } L_\infty(\Omega), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (6.7)$$

$$\nabla \varphi h(u_\xi) \rightarrow \nabla \varphi h(u) \quad \text{сильно в } L_{r(\cdot)}(\Omega), \quad r(\cdot) > q'_2(\cdot), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.8)$$

Если $\text{supp } h' \subset [-M, M]$ для $M > 0$, то для п.в. $x \in \Omega$ имеем

$$|h(u_\xi)|^{p(x)} + |\nabla h(u_\xi)|^{p(x)} = |h(u)|^{p(x)} + |\nabla u_\xi h'(u_\xi)|^{p(x)} \leq D_{17} + D_{18} |\nabla T_M(u_\xi)|^{p(x)}.$$

Тогда, применяя оценку (4.12), получаем ограниченность последовательности $\{h(u_\xi)\}$ в пространстве $\dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega})$. Отсюда и из (6.6) по лемме 3.1 устанавливаем сходимость

$$h(u_\xi) \rightharpoonup h(u) \quad \text{слабо в } \dot{W}_{p(\cdot), \text{loc}}^1(\bar{\Omega}), \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Тогда, учитывая $\varphi \in C(\bar{K})$, $K = \text{supp } \varphi \cap \Omega$, заключаем сходимость

$$\nabla h(u_\xi) \varphi \rightharpoonup \nabla h(u) \varphi \quad \text{слабо в } L_{p(\cdot)}(\bar{\Omega}), \quad \xi \rightarrow \infty. \quad (6.9)$$

Напомним, что функции u_ξ являются локальными ренормализованными решениями уравнения (2.10) в смысле определения 2.1-loc и удовлетворяют равенству вида (4.1).

Применяя (4.38), (4.3), (6.7), устанавливаем

$$\int_{\Omega} (b(x, u_\xi) - f_\xi) h(u_\xi) \varphi dx = \int_{\Omega} (b(x, u) - f) h(u) \varphi dx + \omega(\xi). \quad (6.10)$$

Учитывая сходимости (6.5), (6.9), имеем

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla T_M(u_\xi)) \cdot \nabla h(u_\xi) \varphi dx = \int_{\Omega} a(x, \nabla T_M(u)) \cdot \nabla h(u) \varphi dx + \omega(\xi) = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla u h'(u) \varphi dx + \omega(\xi). \quad (6.11)$$

Применяя сходимости (4.37), (6.8), получаем

$$\int_{\Omega} a(x, \nabla u_\xi) \cdot \nabla \varphi h(u_\xi) dx = \int_{\Omega} a(x, \nabla u) \cdot \nabla \varphi h(u) dx + \omega(\xi). \quad (6.12)$$

Комбинируя (4.1), (6.10)–(6.12), получаем равенство (2.7). Теорема 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Для любого $\xi \in \mathbb{N}$ существует единственное глобальное ренормализованное решение задачи

$$-\text{div } a(x, \nabla u_\xi) + b(x, u_\xi) = f, \quad x \in \Omega(\xi); \quad (6.13)$$

$$u_\xi = 0, \quad x \in \partial\Omega(\xi), \quad (6.14)$$

где $f \in L_1(\Omega(\xi))$ (см., например, [3]).

Продолжим u_ξ нулем на область Ω . Очевидно, при каждом $\xi \in \mathbb{N}$ функция u_ξ является локальным ренормализованным решением задачи (0.1), (0.2) в области Ω . Тогда, согласно теореме 2.1, существует подпоследовательность последовательности $\{u_\xi\}_{\xi \in \mathbb{N}}$ (обозначим ее так же), сходящаяся почти всюду к локальному ренормализованному решению u задачи (0.1), (0.2). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
2. Жиков В. В. О вариационных задачах и нелинейных эллиптических уравнениях с нестандартными условиями роста // Пробл. мат. анализа. — 2011. — 54. — С. 23–112.
3. Кожевникова Л. М. Ренормализованные решения эллиптических уравнений с переменными показателями и данными в виде общей меры // Мат. сб. — 2020. — 211, № 12. — С. 83–122.
4. Bidaut-Veron M.-F. Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data // Adv. Nonlinear Stud. — 2003. — 3, № 1. — С. 25–63.
5. Boccardo L., Gallouët Th. Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures // Commun. Part. Differ. Equ. — 1992. — 17, № 3-4. — С. 641–655.
6. Dal Maso G., Malusa A. Some properties of reachable solutions of nonlinear elliptic equations with measure data // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1997. — 25, № 1-2. — С. 375–396.
7. Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2011.
8. Fan X. L., Zhao D. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$ // J. Math. Anal. Appl. — 2001. — 263. — С. 424–446.

9. Hewitt E., Stromberg K. Real and abstract analysis. — Berlin–Heidelberg: Springer, 1965.
10. Kilpeläinen T., Kuusi T., Tuhola-Kujanpää A. Superharmonic functions are locally renormalized solutions // Ann. Henri Poincaré. — 2011. — 28. — С. 775–795.
11. Mokhtari F. Nonlinear anisotropic elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with variable exponents and locally integrable data // Math. Methods Appl. Sci. — 2017. — 40. — С. 2265–2276.
12. Sanchón M., Urbano J. M. Entropy solutions for the $p(x)$ -laplace equation // Trans. Am. Math. Soc. — 2009. — 361, № 12. — С. 6387–6405.
13. Véron L. Local and global aspects of quasilinear degenerate elliptic equations. Quasilinear elliptic singular problems. — Hackensack: World Sci. Publ., 2017.

Л. М. Кожевникова

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия
Елабужский Институт Казанского Федерального университета, Елабуга, Россия
E-mail: kosul@mail.ru

UDC 517.956.25

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-125-146

EDN: UQKNFN

Local renormalized solutions of elliptic equations with variable exponents in unbounded domains

L. M. Kozhevnikova^{1,2}

¹*Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia*

²*Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia*

Abstract. In this paper, we consider a second-order quasilinear elliptic equation with variable nonlinearity exponents and a locally summable right-hand side. The stability property is established and, as a consequence, the existence of a local renormalized solution of the Dirichlet problem in an arbitrary unbounded domain is proved.

Keywords: quasilinear elliptic equation, variable growth exponent, unbounded domain, Dirichlet problem, stability of solution, local renormalized solution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: L. M. Kozhevnikova, “Local renormalized solutions of elliptic equations with variable exponents in unbounded domains,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 125–146. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-125-146>

REFERENCES

1. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators, Part 1: General Theory], Inostr. Lit., Moscow, 1962 (Russian translation).
2. V. V. Zhikov, “O variatsionnykh zadachakh i nelineynykh ellipticheskikh uravneniyakh s nestandartnymi usloviyami rosta” [On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions], *Probl. Mat. Analiza* [Probl. Math. Anal.], 2011, **54**, 23–112 (in Russian).

3. L. M. Kozhevnikova, “Renormalizovannye resheniya ellipticheskikh uravneniy s peremennymi pokazatelyami i dannymi v vide obshchey mery” [Renormalized solutions of elliptic equations with variable exponents and data in the form of a general measure], *Mat. Sb. [Math. Digest]*, 2020, **211**, No. 12, 83–122 (in Russian).
4. M.-F. Bidaut-Veron, “Removable singularities and existence for a quasilinear equation with absorption or source term and measure data,” *Adv. Nonlinear Stud.*, 2003, **3**, No. 1, 25–63.
5. L. Boccardo and Th. Gallouët, “Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1992, **17**, No. 3-4, 641–655.
6. G. Dal Maso and A. Malusa, “Some properties of reachable solutions of nonlinear elliptic equations with measure data,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 1997, **25**, No. 1-2, 375–396.
7. L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Růžička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2011.
8. X. L. Fan and D. Zhao, “On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, **263**, 424–446.
9. E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1965.
10. T. Kilpeläinen, T. Kuusi, and A. Tuhola-Kujanpää, “Superharmonic functions are locally renormalized solutions,” *Ann. Henri Poincaré*, 2011, **28**, 775–795.
11. F. Mokhtari, “Nonlinear anisotropic elliptic equations in $\mathbb{R}^N$ with variable exponents and locally integrable data,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2017, **40**, 2265–2276.
12. M. Sanchón and J. M. Urbano, “Entropy solutions for the $p(x)$ -laplace equation,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2009, **361**, No. 12, 6387–6405.
13. L. Véron, *Local and Global Aspects of Quasilinear Degenerate Elliptic Equations. Quasilinear Elliptic Singular Problems*, World Sci. Publ., Hackensack, 2017.

L. M. Kozhevnikova

Sterlitamak Branch of Ufa University of Science and Technology, Sterlitamak, Russia

Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia

E-mail: kosul@mail.ru