Современная математика. Фундаментальные направления. Том 71, № 1 (2025). С. 96–109
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.95
DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-96-109
EDN: UBQDHV

СУЩЕСТВОВАНИЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ СТАЦИОНАРНОЙ АЛЬФА-МОДЕЛИ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЕ РАСТВОРОВ ПОЛИМЕРОВ

А. В. Звягин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В статье исследуется краевая задача для одной математической модели, описывающей движение водных растворов полимеров. На основе аппроксимационно-топологического метода исследуется существование слабых решений изучаемой задачи. Рассматривается случай движения среды как в ограниченной области двумерного или трехмерного пространства, так и в неограниченной области.

Ключевые слова: движение растворов полимеров, альфа-модель, аппроксимационно-топологический метод, слабое решение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10026, `https://rscf.ru/project/23-71-10026/`.

Для цитирования: *А. В. Звягин.* Существование слабых решений стационарной альфа-модели, описывающей движение растворов полимеров// Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. **71**, № 1. С. 96–109. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-96-109`

1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3,$ — ограниченная область границей $\partial\Omega$ класса C^2. Рассматривается следующая краевая задача:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \nu\Delta v - 2\varkappa \operatorname{Div}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial \mathcal{E}(v)}{\partial x_i}\right) + \operatorname{grad} p = f, \quad x \in \Omega; \tag{1.1}$$

$$u = (I - \alpha^2\Delta)^{-1} v, \quad x \in \Omega; \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega; \qquad v|_{\partial\Omega} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $v(x)$ — вектор-функция скорости, $u(x)$ — вектор-функция модифицированной скорости движения частицы среды, определяемая равенством (1.2), $p(x)$ — функция давления, $f(x)$ — плотность внешних сил, $\nu > 0$ — кинематический коэффициент вязкости, а $\varkappa > 0$ — время запаздывания (время релаксации деформаций), $\alpha > 0$ — скалярный параметр, $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$ — тензор скоростей деформации, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)$, $\operatorname{Div} A$ — дивергенция тензора A, т. е. вектор

$$\operatorname{Div} A = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{1j}(t,x)}{\partial x_j}, \cdots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{nj}(t,x)}{\partial x_j}\right).$$

Изучаемая в работе задача описывает стационарное движение растворов полимеров. Данная модель имеет реологическое (определяющее тип жидкости) соотношение вида

$$\sigma = 2\nu\mathcal{E} + 2\varkappa\frac{d\mathcal{E}}{dt},$$

где σ — девиатор тензора напряжений. Данная модель также получила название *модель Кельвина—Фойгта* (см. работы [4, 9, 20–22]). Группа ученых из Санкт-Петербурга провела эксперименты и доказала, что именно данное реологическое соотношение описывают течение слабо концентрированных водных растворов полимеров, например, растворов полиэтиленоксида и полиакриламида, растворов полиакриламида и гуаровой смолы [2, 12]. Поэтому рассматриваемую модель также часто называют моделью движения водных растворов полимеров.

Также отметим, что первая теоретическая модель движения водных растворов полимеров, учитывающая их релаксационные свойства, была сформулирована в работе Я. И. Войткунского, В. Б. Амфилохиева и В. А. Павловского [3]. Авторы исходили из варианта модели максвелловского типа для вязкоупругой жидкости. Затем в работе В. А. Павловского [12] эта модель была упрощена и использовалась для описания турбулентного пограничного слоя в предельном случае малых времен релаксации. Поэтому рассматриваемую модель также часто называют *моделью Павловского* (см. [13]).

Краевая задача (1.1)–(1.3) является *альфа-моделью* I класса. Альфа-модели представляют собой своего рода регуляризованные приближенные системы, которые зависят от некоторого положительного параметра α, причем регуляризация осуществляется путем некоторой фильтрации вектора скорости, который стоит в аргументе нелинейного члена. Параметр α отражает ширину шкалы пространственной фильтрации для модифицированной скорости. В качестве ядра фильтрации наиболее часто используют оператор Гельмгольца $I - \alpha^2\Delta$. Выбор такого оператора связан с его хорошими математическими свойствами. Идея использования такого рода аппроксимаций впервые возникла в работе Ж. Лере [19] (в данной работе Ж. Лере использовал общий вид ядра фильтрации) для доказательства существования слабого решения системы уравнений Навье—Стокса. С одной стороны, интерес к изучению альфа-моделей связан с изучением исходных моделей, с другой стороны, в последнее время альфа-модели стали изучаться как независимые системы и применяться к исследованию эффектов турбулентности для потоков жидкости и в численных исследованиях. Альфа-модели представляют больший интерес для прикладных ученых, производства и промышленности, чем исходные модели, ввиду более простого численного исследования.

Однако большая часть работ по исследованию разрешимости альфа-моделей посвящена моделям движения идеальной или ньютоновской жидкости (см. [16–18]). Только за последние несколько лет появились работы, посвященные альфа-моделям для неньютоновской жидкости (см. [5–7]). Данная работа продолжает исследования разрешимости альфа-моделей для неньютоновских жидкостей, а именно, для модели, описывающей движение водных растворов полимеров.

Работа организована следующим образом. Второй раздел посвящен описанию используемых функциональных пространств, введению определения слабого решения для изучаемой краевой задачи и формулировке основного результата работы. В третьем разделе вводится аппроксимационная задача и изучается ее разрешимость. Для этого в пункте 3.1 доказываются необходимые априорные оценки решений аппроксимационной задачи, а в пункте 3.2 применяется теория топологической степени Лере—Шаудера для вполне непрерывных векторных полей. В четвертом разделе доказывается предельный переход к решению исходной задачи. Пятый раздел посвящен обобщению полученных результатов на случай неограниченной области Ω.

2. Постановка задачи и формулировка результатов

Через $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ будем обозначать пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω; $\mathcal{V} = \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$ — подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega)^n$; H — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $L_2(\Omega)^n$; V — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$; X — замыкание $\mathcal{V}$ по норме пространства $W_2^3(\Omega)^n$.

Определение 2.1. Пусть $f \in V^*$. *Слабым решением* краевой задачи (1.1)–(1.3) называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in X$ равенству:

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \int\limits_\Omega f \varphi \, dx.$$

Здесь через $\Delta_\alpha : V \to V^*$ обозначим оператор $\Delta_\alpha = (J + \alpha^2 A)$, где $J = PI$, I — тождественный оператор, P — оператор Лере. В силу [10, лемма 4.4.4] оператор Δ_α обратим. Применив проектор Лере $P : L_2(\Omega)^n \to H$ к обеим частям равенства $v = (I - \alpha^2 \Delta) u$, выразим из последнего равенства u: $u = (J + \alpha^2 A)^{-1} v = \Delta_\alpha^{-1} v$.

Одним из основных результатов данной работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ и $n = 2, 3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача* (1.1)–(1.3) *имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.*

Доказательство данной теоремы 2.1 состоит из нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики, разработанного профессором В. Г. Звягиным (см. [8]), доказывается существование слабых решений исследуемой задачи. Для этого вводится семейство вспомогательных задач, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$, доказываются априорные оценки решений и на основе теории топологической степени Лере—Шаудера доказывается существование слабых решений вспомогательной задачи. Далее для доказательства разрешимости исходной задачи на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход.

Полученный результат можно обобщить на случай неограниченной области.

Теорема 2.2. *Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$ и $n = 2, 3$. Тогда для любого $f \in V^*$ краевая задача* (1.1)–(1.3) *имеет хотя бы одно слабое решение $v_* \in V$.*

Доказательство данной теоремы 2.2 приведено в разделе 5.

3. Аппроксимационная задача

Рассмотрим следующую аппроксимационную задачу с малым параметром.

Задача 3.1. Пусть $f \in V^*$. Найти функцию $v \in X$, удовлетворяющую для любого $\varphi \in X$ равенству:

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla (\Delta v) : \nabla (\Delta \varphi) \, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx -$$
$$- \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \int\limits_\Omega f \varphi \, dx. \tag{3.1}$$

Здесь ε — некоторое фиксированное положительное число.

Для исследования аппроксимационной задачи перейдем к операторной трактовке. Определим операторы A, N, B_1, B_2, B_3 с помощью следующих равенств:

$$A : V \to V^*, \quad \langle Av, \varphi \rangle = \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx, \quad v, \varphi \in V;$$

$$N : X \to X^*, \quad \langle Nv, \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi)\, dx, \quad v, \varphi \in X;$$

$$B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*, \quad \langle B_1(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega)^n,\ \varphi \in V;$$

$$B_2 : V \to X^*, \quad \langle B_2(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V,\ \varphi \in X;$$

$$B_3 : V \to X^*, \quad \langle B_3(v), \varphi\rangle = \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx, \quad v \in V,\ \varphi \in X.$$

Замечание 3.1. Заметим, что V вложено в $L_4(\Omega)^n$ для $n = 2, 3$, значит, B_1 можно рассматривать и как отображение $B_1 : V \to V^*$, а поскольку X вложено в V, то операторы A, B_i, $i = 1, 2, 3$, можно рассматривать и как отображения $A, B_1, B_2, B_3 : X \to X^*$. При этом, чтобы не нагромождать обозначения, будем использовать одну и ту же букву для обозначения операторов, определенных одной и той же формулой, но действующих в разных функциональных пространствах, когда из контекста ясно, в каких функциональных пространствах действуют операторы в данном месте текста.

В силу произвольности $\varphi \in X$ в задаче 3.1 равенство (3.1) эквивалентно следующему операторному уравнению:

$$\varepsilon N v + \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v) = f. \tag{3.2}$$

Таким образом, каждое решение задачи 3.1 является решением операторного уравнения (3.2) и обратно.

Также введём операторы при помощи следующих равенств:

$$L_\varepsilon : X \to X^*, \quad L_\varepsilon(v) = \varepsilon N v;$$
$$K : X \to X^*, \quad K(v) = \nu A v - B_1(v) - \varkappa B_2(v) - \varkappa B_3(v).$$

В этих обозначениях уравнение (3.2) записывается в виде:

$$L_\varepsilon(v) + K(v) = f. \tag{3.3}$$

Для дальнейшего нам необходимо исследовать свойства операторов $A, L_\varepsilon, B_1, B_2, B_3, K$.

Лемма 3.1. *Для оператора A имеют место следующие свойства:*

1. *Оператор $A : V \to V^*$ непрерывен, и для него имеет место оценка*

$$\|Av\|_{V^*} \leqslant \|v\|_V. \tag{3.4}$$

2. *Оператор $A : X \to X^*$ вполне непрерывен.*

Доказательство.

1. Достаточно показать ограниченность линейного оператора A. По определению имеем

$$|\langle Av, \varphi\rangle| = \left| \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi\, dx \right| \leqslant \|v\|_V \|\varphi\|_V.$$

Отсюда и следует неравенство (3.4) и непрерывность оператора A.

2. Докажем вполне непрерывность оператора A, действующего из X в X^*. Из первого пункта этой леммы имеем, что оператор $A : V \to V^*$ непрерывен, а в композиции отображений $X \subset V \xrightarrow{A} V^* \subset X^*$ первое вложение вполне непрерывно. Учитывая, что отображение A и последнее вложение непрерывны, получаем, что отображение $A : X \to X^*$ вполне непрерывно. ☐

Лемма 3.2. *Оператор $L_\varepsilon = \varepsilon N : X \to X^*$ непрерывен, обратим, и для него имеет место оценка*

$$||L_\varepsilon v||_{X^*} = ||(\varepsilon N) v||_{X^*} \leqslant \varepsilon \|v\|_X. \tag{3.5}$$

Кроме того, обратный оператор $L_\varepsilon^{-1} = (\varepsilon N)^{-1} : X^* \to X$ *непрерывен.*

Доказательство. В силу линейности оператора L_ε для доказательства его непрерывности достаточно показать его ограниченность. Имеем

$$|\langle(\varepsilon N)v, \varphi\rangle| = \left|\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi) dx\right| \leqslant \varepsilon\|v\|_X\|\varphi\|_X.$$

Отсюда и следует оценка (3.5). Таким образом, оператор $L_\varepsilon : X \to X^*$ ограничен и, следовательно, непрерывен.

Для доказательства обратимости воспользуемся проекционной теоремой из [14, с. 28]. Приведем её формулировку.

Теорема 3.1 (проекционная теорема)**.** *Пусть* W — *сепарабельное вещественное гильбертово пространство (с нормой* $\|\cdot\|_W$*), и пусть* $a(u,v)$ — *непрерывная билинейная форма на* $W \times W$*, которая коэрцитивна, т. е. существует* $\alpha > 0$*, такое что*

$$a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_W^2 \qquad \forall u \in W.$$

Тогда для каждого l *из* W^* — *пространства, сопряженного к* W*, — существует один и только один элемент* $u \in W$*, такой что*

$$a(u,v) = \langle l, v\rangle \qquad \forall v \in W.$$

Для того чтобы применить данную теорему, нам достаточно показать, что непрерывная билинейная форма

$$a(u,v) = \langle(\varepsilon N)u, v\rangle = \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta u) : \nabla(\Delta v)\, dx$$

коэрцитивна.

Действительно, для любого $v \in X$ имеем, что

$$a(v,v) = \langle(\varepsilon N)v, v\rangle = \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v)\, dx = \varepsilon\|v\|_X^2 \geqslant \varepsilon\|v\|_X^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Отсюда следует, что $L_\varepsilon : X \to X^*$ — изоморфизм.

Итак, имеем линейный непрерывный оператор εN, который отображает все банахово пространство X на все банахово пространство X^* взаимно-однозначно. Отсюда по теореме Банаха следует, что существует линейный непрерывный оператор L_ε^{-1}, обратный оператору L_ε, отображающий X^* на X. □

Лемма 3.3. *Для отображения* B_1 *имеют место следующие свойства:*

1. *Отображение* $B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*$ *непрерывно, и для него имеет место оценка*
$$\|B_1(v)\|_{V^*} \leqslant C_0\|v\|_{L_4(\Omega)^n}^2. \tag{3.6}$$
2. *Для любой функции* $v \in X$ *функция* $B_1(v) \in X^*$*, а отображение* $B_1 : X \to X^*$ *вполне непрерывно.*

Доказательство.

1. Для любых $v \in L_4(\Omega)$ и $\varphi \in V$, используя неравенство Гельдера, получим

$$|\langle B_1(v), \varphi\rangle| = \left|\sum_{i,j=1}^n \int\limits_\Omega (\Delta_\alpha^{-1}v)_i v_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\, dx\right| \leqslant \sum_{i,j=1}^n \left(\int\limits_\Omega |(\Delta_\alpha^{-1}v)_i v_j|^2\, dx\right)^{\frac12} \left(\int\limits_\Omega \left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n \left(\int\limits_\Omega |(\Delta_\alpha^{-1}v)_i|^4\, dx\right)^{\frac14} \left(\int\limits_\Omega |v_j|^4\, dx\right)^{\frac14} \|\varphi\|_V \leqslant C_0\|v\|_{L_4(\Omega)^n}^2\|\varphi\|_V = C_0\|v\|_{L_4(\Omega)^n}^2\|\varphi\|_V.$$

Откуда следует неравенство (3.6). Отметим, что здесь мы воспользовались следующей известной оценкой (см. [1, 15]):

$$\|\Delta_\alpha^{-1}v\|_{L_p(\Omega)^n} = \|(I - \alpha^2\Delta)^{-1}v\|_{L_p(\Omega)^n} \leqslant C\|v\|_{L_p(\Omega)^n}, \quad p > 1.$$

Покажем непрерывность отображения $B_1 : L_4(\Omega)^n \to V$. Для произвольных v^m, $v^0 \in L_4(\Omega)^n$ имеем

$$|\langle B_1(v^m),\varphi\rangle - \langle B_1(v^0),\varphi\rangle| = \Big|\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^m \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1}v^0)_i v_j^0 \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_\alpha^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)^n}\Big\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\Big\|_{L_2(\Omega)^n} \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi\|_V \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_\alpha^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)^n} =$$
$$= \|\varphi\|_V\Big(\sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^0 + (\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^0 - (\Delta_\alpha^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)^n}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \|\varphi\|_V\Big(\sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)^n} + \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_\alpha^{-1}v^m)_i v_j^0 - (\Delta_\alpha^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)^n}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_1\|\varphi\|_V\Big(\sum_{j=1}^n \|\Delta_\alpha^{-1}v^m\|_{L_4(\Omega)^n}\|v_j^m - v_j^0\|_{L_4(\Omega)^n} + \sum_{j=1}^n \|\Delta_\alpha^{-1}(v^m - v^0)\|_{L_4(\Omega)^n}\|v_j^0\|_{L_4(\Omega)^n}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_1\|\varphi\|_V\Big(\sum_{j=1}^n \|v^m\|_{L_4(\Omega)^n}\|v_j^m - v_j^0\|_{L_4(\Omega)^n} + \sum_{j=1}^n \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n}\|v_j^0\|_{L_4(\Omega)^n}\Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_1(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n}\|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n}\|v^0\|_{L_4(\Omega)^n})\|\varphi\|_V =$$
$$= C_1(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n})\|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n}\|\varphi\|_V.$$

Таким образом,

$$\|B_1(v^m) - B_1(v^0)\|_{V^{-1}} \leqslant C_1(\|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)^n})\|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n}.$$

Полагая $v^m \to v^0$ в $L_4(\Omega)^n$, получаем, что отображение $B_1 : L_4(\Omega)^n \to V^*$ является непрерывным.

2. Так как в силу теоремы вложения Соболева мы имеем компактное вложение $X \subset L_4(\Omega)^n$ для $n = 2, 3$, то имеем: $X \subset L_4(\Omega)^n \xrightarrow{B_1} V^* \subset X^*$, где первое вложение вполне непрерывно, а отображение B_1 и последнее вложение — непрерывны. Таким образом получили, что для любой функции $v \in X$ функция $B_1(v) \in X^*$, а отображение $B_1 : X \to X^*$ вполне непрерывно. □

Лемма 3.4. *Для операторов B_2 и B_3 имеют место следующие свойства:*

1. *Для $i = 2, 3$ операторы $B_i : V \to X^*$ непрерывны, и для них имеет место оценка*
$$\|B_i(v)\|_{X^*} \leqslant C_2\|v\|_V^2. \tag{3.7}$$
2. *Для $i = 2, 3$ и любой функции $v \in X$ значения $B_i(v) \in X^*$, а отображения $B_i : X \to X^*$ вполне непрерывны.*

Доказательство. Мы докажем данную лемму для оператора B_2. Доказательство в случае оператора B_3 полностью аналогично.

1. Для любых $v \in V$, $\varphi \in X$ в силу определения оператора B_2 имеем

$$|\langle B_2(v),\varphi\rangle| = \Big|\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\,dx\Big| \leqslant \sum_{i,j,k=1}^n \|v_k\|_{L_4(\Omega)}\Big\|\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Big\|_{L_2(\Omega)}\Big\|\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i\partial x_k}\Big\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$
$$\leqslant C_3\|v\|_{L_4(\Omega)^n}\|v\|_V\|\varphi\|_X \leqslant C_4\|v\|_V^2\|\varphi\|_X.$$

Отсюда и следует требуемая оценка (3.7).

Покажем непрерывность отображения $B_2 : V \to X^*$. Для произвольных $v^m, v^0 \in V$ имеем:

$$| \langle B_2(v^m), \varphi \rangle - \langle B_2(v^0), \varphi \rangle| = \left| \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \left\| \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \right\|_{L_4(\Omega)} \leqslant \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \|\varphi\|_X.$$

Преобразуем правую часть неравенства следующим образом:

$$\sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} = \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} + v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} + \sum_{i,j,k=1}^n \left\| v_k^m \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} - v_k^0 \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_{4/3}(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i,j,k=1}^n \|v_k^m\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial v_i^m}{\partial x_j} - \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)} + \sum_{i,j,k=1}^n \left\| \frac{\partial v_i^0}{\partial x_j} \right\|_{L_2(\Omega)} \|v_k^m - v_k^0\|_{L_4(\Omega)} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \|v^m\|_{L_4(\Omega)^n} \|v^m - v^0\|_V + C_5 \|v^0\|_V \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)^n} \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \left(\|v^m\|_V + \|v^0\|_V \right) \|v^m - v^0\|_V.$$

Отсюда следует, что

$$\|B_2(v^m) - B_2(v^0)\|_{X^*} \leqslant C_6 \left(\|v^m\|_V + \|v^0\|_V \right) \|v^m - v^0\|_V.$$

Итак, если последовательность $\{v^m\} \subset V$ сходится к некоторой предельной функции $v^0 \in V$, то из последнего неравенства следует непрерывность отображения $B_2 : V \to X^*$.

2. Для доказательства утверждения этого пункта мы уже имеем: $X \subset V \xrightarrow{B_2} X^*$. Здесь первое вложение вполне непрерывно, а отображение B_2 непрерывно. Таким образом, для любой функции $v \in X$ получим, что функция $B_2(v) \in X^*$, а отображение $B_2 : X \to X^*$ вполне непрерывно. □

Лемма 3.5. *Оператор $K : X \to X^*$ — вполне непрерывен.*

Доказательство. Вполне непрерывность оператора $K : X \to X^*$ следует из вполне непрерывности операторов $A : X \to X^*$ по лемме 3.1; $B_1 : X \to X^*$ по лемме 3.3; $B_2 : X \to X^*$ по лемме 3.4; $B_3 : X \to X^*$ по лемме 3.4. □

3.1. Априорные оценки. Вместе с уравнением (3.3) мы будем рассматривать следующее семейство операторных уравнений

$$L_\varepsilon(v) + \lambda K(v) = \lambda f, \quad \lambda \in [0, 1], \tag{3.8}$$

которое совпадает с (3.3) при $\lambda = 1$.

Теорема 3.2. *Если $v \in X$ — решение операторного уравнения* (3.8) *для некоторого $\lambda \in [0, 1]$, то для него имеет место оценка*

$$\varepsilon \|v\|_X^2 \leqslant C_7, \tag{3.9}$$

где $C_7 = \dfrac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}$. Более того, при $\lambda = 1$ имеет место оценка

$$\nu \|v\|_V^2 \leqslant C_8, \tag{3.10}$$

где $C_8 = \dfrac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}$.

Доказательство. Пусть $v \in X$ — решение (3.8), тогда для него при любом $\varphi \in X$ имеет место равенство

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta \varphi)\, dx - \lambda \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \lambda \nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi\, dx -$$

$$- \lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx - \lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \lambda \int\limits_\Omega f\varphi\, dx. \tag{3.11}$$

Заметим, что

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx + \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = 2 \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k\, \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx =$$

$$= -2 \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx - 2 \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx = -2 \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx.$$

Тогда (3.11) можно переписать в виде

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx - \lambda \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \lambda\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx +$$

$$+ 2\lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx = \lambda \int\limits_\Omega f\varphi\, dx.$$

Поскольку последнее равенство имеет место при всех $\varphi \in X$, то оно имеет место и при $\varphi = v$:

$$\varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v)\, dx - \lambda \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx + \lambda\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v\, dx +$$

$$+ 2\lambda\varkappa \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx = \lambda \int\limits_\Omega f v\, dx. \tag{3.12}$$

Преобразуем слагаемые в левой части (3.12) следующим образом:

$$\nu \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla v\, dx = \nu \|v\|_V^2; \quad \varepsilon \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v) : \nabla(\Delta v)\, dx = \varepsilon \|v\|_X^2;$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i \frac{\partial (v_j v_j)}{\partial x_i}\, dx = -\frac{1}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial (\Delta_\alpha^{-1} v)_i}{\partial x_i} v_j v_j\, dx = 0;$$

$$2 \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\, dx = 2 \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v)\, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial\left(\mathcal{E}_{ij}(v)\mathcal{E}_{ij}(v)\right)}{\partial x_k}\, dx = - \int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_k}\, \mathcal{E}_{ij}(v)\mathcal{E}_{ij}(v)\, dx = 0.$$

Здесь мы воспользовались симметричностью тензора скоростей деформаций $\mathcal{E}$.

Заметим, что правую часть равенства (3.12) можно оценить сверху

$$\lambda \int\limits_\Omega f v\, dx \leqslant \lambda \|f\|_{V^*} \|v\|_V \leqslant \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\delta} + \lambda \frac{\delta \|v\|_V^2}{2}.$$

Здесь мы воспользовались неравенством Коши:

$$bc \leqslant \frac{\delta b^2}{2} + \frac{c^2}{2\delta}.$$

Таким образом, для $\delta = \nu$ получили

$$\varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda\nu \|v\|_V^2 \leqslant \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} + \lambda \frac{\nu \|v\|_V^2}{2},$$

$$\varepsilon \|v\|_X^2 + \lambda \frac{\nu \|v\|_V^2}{2} \leqslant \lambda \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu},$$

$$\varepsilon\|v\|_X^2 \leqslant \lambda\frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu} \leqslant \frac{\|f\|_{V^*}^2}{2\nu}.$$

Аналогично при $\lambda = 1$ получаем:

$$\nu\|v\|_V^2 \leqslant \frac{\|f\|_{V^*}^2}{\nu}.$$

Отсюда и следуют требуемые оценки (3.9) и (3.10). □

3.2. Существование решений аппроксимационной задачи.

Теорема 3.3. *Операторное уравнение* (3.3) *имеет хотя бы одно решение* $v \in X$.

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени Лере—Шаудера для вполне непрерывных векторных полей. В силу априорной оценки (3.9) все решения семейства уравнений (3.8)

$$L_\varepsilon(v) + \lambda K(v) = \lambda f, \quad \text{где} \quad \lambda \in [0,1],$$

лежат в шаре B_R радиуса $R = C_7 + 1$ с центром в нуле. И, следовательно, все решения семейства уравнений $v = \lambda L_\varepsilon^{-1}[f - K(v)] = 0$, где $\lambda \in [0,1]$, лежат в том же шаре B_R. В силу леммы 3.5 отображение $[f - K(\cdot)] : X \to X^*$ является вполне непрерывным. А из леммы 3.2 следует, что оператор $L_\varepsilon^{-1} : X^* \to X$ непрерывен.

Таким образом, отображение $L_\varepsilon^{-1}[f - K(\cdot)] : X \to X$ вполне непрерывно. Тогда отображение $G : [0,1] \times X \to X$, $G(\lambda, v) = \lambda L_\varepsilon^{-1}[f - K(v)]$ вполне непрерывно по совокупности переменных λ и v.

Из вышесказанного имеем, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi(\lambda, v) = v - G(\lambda, v)$ невырождено на границе шара B_R. Следовательно, для него определена степень Лере—Шаудера $\deg_{LS}(\Phi, B_R, 0)$. По свойству гомотопической инвариантности степени получим, что

$$\deg_{LS}(\Phi(0,\cdot), B_R, 0) = \deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0).$$

Вспомним, что $\Phi(0,\cdot) = I$ и выполнено равенство $\deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1$. Отсюда

$$\deg_{LS}(\Phi(1,\cdot), B_R, 0) = 1.$$

Таким образом, получили, что существует хотя бы одно решение $v \in X$ уравнения

$$v + L_\varepsilon^{-1}[f - K(v)] = 0$$

и, следовательно, уравнения (3.3). □

Поскольку существует решение $v \in X$ уравнения (3.3), то из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача (3.1) имеет хотя бы одно слабое решение $v \in X$.

4. Доказательство разрешимости в ограниченной области краевой задачи (1.1)–(1.3)

В силу теоремы 3.3 при каждом ε задача 3.1 имеет слабое решение. Рассмотрим сходящуюся к нулю последовательность ε_m. Покажем, что полученная последовательность решений v_m задачи 3.1 будет сходиться к слабому решению краевой задачи (1.1)–(1.3). Для этого положим в (3.1) $\varepsilon_m = \dfrac{1}{m}$. В силу выбора последовательность $\{\varepsilon_m\}$ сходится к нулю при $m \to \infty$. В силу теоремы 3.3 при каждом ε_m существует $v_m \in X \subset V$ — слабое решение аппроксимационной задачи 3.1. Таким образом, каждое v_m удовлетворяет уравнению:

$$\varepsilon_m \int\limits_\Omega \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\,dx - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \nu\int\limits_\Omega \nabla v_m : \nabla\varphi\,dx -$$

$$- \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial(v_m)_i}{\partial x_j}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx - \varkappa\int\limits_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (v_m)_k \frac{\partial(v_m)_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2\varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\,dx = \int\limits_\Omega f\varphi\,dx. \qquad (4.1)$$

В силу существования априорной оценки (3.10) (и в силу рефлексивности пространства V) $\{v_m\}$ будет слабо сходиться к некоторому элементу $v_* \in V$. Тогда при $m \to \infty$ в силу определения слабой сходимости

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v_m : \nabla \varphi \, dx \to \nu \int\limits_{\Omega} \nabla v_* : \nabla \varphi \, dx.$$

Далее заметим:

$$\lim_{m\to\infty} \left| \varepsilon_m \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\, dx \right| = \lim_{m\to\infty} \sqrt{\varepsilon_m} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\, dx \right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sqrt{\varepsilon_m} \lim_{m\to\infty} \left| \sqrt{\varepsilon_m} \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla\left(\Delta\varphi\right)\, dx \right|.$$

Без ограничения общности в силу оценки (3.9) теоремы 3.2 получаем:

$$\varepsilon_m \int\limits_{\Omega} \nabla(\Delta v_m) : \nabla(\Delta\varphi)\, dx \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Так как V вполне непрерывно вложено в $L_4(\Omega)^n$ для $n = 2, 3$, учитывая оценку (3.10), без ограничения общности можно считать, что $v_m \to v_*$ сильно в $L_4(\Omega)^n$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (\Delta_\alpha^{-1} v_m)_i (v_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx \to \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (\Delta_\alpha^{-1} v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx.$$

В оставшихся интегралах имеем

$$\varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \to \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx,$$

$$\varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_m)_k \frac{\partial (v_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx \to \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx.$$

Действительно, здесь последовательность v_m сходится к v_* сильно в $L_4(\Omega)^n$, а $\nabla(v_m)$ сходится к ∇v_* слабо в $L_2(\Omega)^n$. Поэтому их произведение сходится слабо к $v_* \nabla v_*$ в $L_{4/3}(\Omega)^n$.

Таким образом, переходя в равенстве (4.1) к пределу при $m \to +\infty$, получим, что предельная функция v_* удовлетворяет равенству

$$\nu \int\limits_{\Omega} \nabla v_* : \nabla \varphi\, dx - \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} (\Delta_\alpha^{-1} v_*)_i (v_*)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx - \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx -$$

$$- \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (v_*)_k \frac{\partial (v_*)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k}\, dx = \int\limits_{\Omega} f \varphi\, dx.$$

Вспоминаем, что $v_* \in V$. Это и завершает доказательство теоремы 2.1.

5. Случай неограниченной области

Рассмотрим теперь задачу (1.1)–(1.3) в случае, когда Ω — произвольная область в пространстве $\mathbb{R}^n, n = 2, 3$, возможно, неограниченная. Аналогично случаю с ограниченной областью для задачи (1.1)–(1.3) вводятся понятия слабого решения (аналогично определению 2.1) и аппроксимационной задачи (аналогично задаче 3.1).

Определение 5.1. Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, и $f \in V^*$. *Слабым решением* краевой задачи (1.1)–(1.3) называется функция $v \in V$, удовлетворяющая для любого $\varphi \in \mathcal{V}$ равенству

$$\nu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \\ - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx. \tag{5.1}$$

Задача 5.1. Пусть Ω — произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, и $f \in V^*$. Найти функцию $v \in X$, удовлетворяющую для любого $\varphi \in \mathcal{V}$ равенству:

$$\varepsilon \int_\Omega \nabla (\Delta v) : \nabla (\Delta \varphi) \, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \nu \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx - \\ - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n v_k \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx. \tag{5.2}$$

Для доказательства теоремы 2.2 обозначим через Ω_m пересечение Ω с шаром B_m с центром в нуле радиуса m в пространстве $\mathbb{R}^n, m = 1, 2, \ldots$ Введем новые обозначения.

Через $L_p(\Omega_m)^n, 1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество всех измеримых функций $u : \Omega_m \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-й степенью. $\mathfrak{D}(\Omega_m)^n$ — пространство функций на Ω_m со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω_m; $\mathcal{V}(\Omega_m) = \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega_m)^n, \operatorname{div} v = 0\}$ — подмножество соленоидальных функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega_m)^n$; $V(\Omega_m)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega_m)$ по норме пространства $W_2^1(\Omega_m)^n$; $X(\Omega_m)$ — замыкание $\mathcal{V}(\Omega_m)$ по норме пространства $W_2^3(\Omega_m)^n$.

Аналогично введем обозначения $V(B_k)$ и $L_4(B_k)$, где B_k — шар с центром в нуле и радиусом k.

Следуя [11, с. 117], можно рассмотреть сужение f на $\Omega_m : f|_{\Omega_m} \in V^*(\Omega_m)$, которое задается формулой

$$\langle f|_{\Omega_m}, \varphi \rangle = \langle f, \tilde{\varphi} \rangle,$$

где φ — произвольная функция из $\mathcal{V}$, а $\tilde{\varphi}$ — продолжение φ нулем на все Ω. Очевидно,

$$||f|_{\Omega_m}||_{V^*(\Omega_m)} \leqslant ||f||_{V^*(\Omega)}.$$

На каждой области Ω_m рассмотрим задачу 5.1. Заменим в (5.2) f на $f|_{\Omega_m}$, и пусть $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$. По теореме 2.1 эти задачи имеют хотя бы одно решение v_m. Обозначим через $\tilde{v}_m$ продолжение v_m нулем на все Ω. По теореме 3.2 нормы $||\tilde{v}_m||_{V(\Omega)} = ||v_m||_{V(\Omega_m)}$ равномерно ограничены. Поэтому при $m \to \infty$ без ограничения общности можно считать, что $\tilde{v}_m \rightharpoonup \tilde{v}_0$ слабо в V. Покажем, что $\tilde{v}_0$ есть решение задачи (5.1).

Возьмем произвольное $\varphi \in \mathcal{V}$. При некотором k носитель φ лежит в Ω_k. Обозначим через v_m^* продолжение $\tilde{v}_m$ нулем за пределы Ω, суженное на B_k. Ясно, что $v_m^* \to v_0^*$ слабо в $V(B_k)$, и значит, сильно в $L_4(B_k)$.

Поэтому все слагаемые (5.2) с $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$ и $v = \tilde{v}_m$

$$\frac{1}{m} \int_\Omega \nabla (\Delta \tilde{v}_m) : \nabla (\Delta \varphi) \, dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} \tilde{v}_m)_i (\tilde{v}_m)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \nu \int_\Omega \nabla \tilde{v}_m : \nabla \varphi \, dx - \\ - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_m)_k \frac{\partial (\tilde{v}_m)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_m)_k \frac{\partial (\tilde{v}_m)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

сходятся к соответствующим слагаемым (5.1):

$$- \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} \tilde{v}_0)_i (\tilde{v}_0)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \nu \int_\Omega \nabla \tilde{v}_0 : \nabla \varphi \, dx - \varkappa \int_\Omega \sum_{i,j,k=1}^n (\tilde{v}_0)_k \frac{\partial (\tilde{v}_0)_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx -$$

$$- \varkappa \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j,k=1}^{n} (\tilde{v}_0)_k \frac{\partial (\tilde{v}_0)_j}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x_i \partial x_k} \, dx = \int\limits_{\Omega} f \varphi \, dx,$$

причем без ограничения общности в силу оценки (3.9) теоремы 3.2 получаем:

$$\frac{1}{m} \int\limits_{\Omega} \nabla \left(\Delta(\tilde{v}_m) \right) : \nabla \left(\Delta \varphi \right) \, dx \to 0 \quad \text{при } m \to \infty.$$

Итак, $\tilde{v}_0$ удовлетворяет тождеству (5.1) при всех $\varphi \in \mathcal{V}$. Значит, $\tilde{v}_0$ является слабым решением задачи (1.1)–(1.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические граничные задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Усп. мат. наук. — 1964. — *19*, № 3. — С. 53–161.
2. *Амфилохиев В. Б., Войткунский Я. И., Мазаева Н. П., Ходорновский Я. С.* Течение полимерных растворов при наличии конвективных ускорений// Тр. Ленинград. орд. Ленина кораблестр. инст. — 1975. — *96*. — С. 3–9.
3. *Войткунский Я. И., Амфилохиев В. Б., Павловский В. А.* Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств// Тр. Ленинград. орд. Ленина кораблестр. инст. — 1970. — *69*. — С. 19–26.
4. *Звягин А. В.* О разрешимости стационарной модели движения слабых водных растворов полимеров// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2011. — № 2. — С. 103–105.
5. *Звягин А. В.* Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере// Изв. вузов. Сер. Мат. — 2016. — № 10. — С. 70–75.
6. *Звягин А. В., Звягин В. Г., Поляков Д. М.* О диссипативной разрешимости альфа-модели движения жидкости с памятью// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2019. — *59*, № 7. — С. 1243–1257.
7. *Звягин А. В., Поляков Д. М.* О разрешимости альфа-модели Джеффриса—Олдройда// Дифф. уравн. — 2016. — *52*, №6. — С. 782–787.
8. *Звягин В. Г.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *46*. — С. 92–119.
9. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Исследование начально-краевых задач для математических моделей движения жидкостей Кельвина—Фойгта// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *31*. — С. 3–144.
10. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. — М.: Красанд УРСС, 2012.
11. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
12. *Павловский В. А.* К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров// Докл. АН СССР. — 1971. — *200*, № 4. — С. 809–812.
13. *Пухначев В. В., Фроловская О. А.* О модели Войткунского—Амфилохиева—Павловского движения водных растворов полимеров// Тр. МИАН. — 2018. — *300*. — С. 176–189.
14. *Темам Р.* Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1981.
15. *Agmon S.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1962. — *15*. — С. 119–147.
16. Hecht M. W., Holm D. D., Petersen M. R., Wingate B. A. Implementation of the LANS-alpha turbulence model in a primitive equation ocean model// J. Comput. Phys. — 2008. — *227*. — С. 5691–5716.
17. *Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. S.* The Euler–Poincare models of ideal fluids with nonlinear dispersion// Phys. Rev. Lett. — 1998. — *349*. — С. 4173–4177.
18. *Lemarie-Rieusset P. G.* The Navier–Stokes problem in the 21st century. — Taylor and Francis Group, 2016.
19. *Leray J.* Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique// J. Math. Pures Appl. — 1933. — *12*. — С. 1–82.
20. *Zvyagin A. V.* Optimal feedback control in the stationary mathematical model of low concentrated aqueous polymer solutions// Appl. Anal. — 2013. — *92*, № 6. — С. 1157–1168.
21. *Zvyagin A. V.* Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative// Nonlinear Anal. — 2013. — *90*. — С. 70–85.
22. *Zvyagin A. V.* Solvability of the stationary mathematical model of one non-Newtonian fluid motion with the objective derivative// Fixed Point Theory. — 2014. — *15*, № 2. — С. 623–634.

А. В. Звягин
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: zvyagin.a@mail.ru

UDC 517.95
DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-96-109
EDN: UBQDHV

Existence of weak solutions of the stationary alpha model describing the motion of polymer solutions

A. V. Zvyagin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, we study a boundary-value problem for a mathematical model describing the motion of aqueous polymer solutions. Based on the approximation-topological method, we investigate the existence of weak solutions of the problem under study. We consider the case of medium motion both in a bounded domain of two-dimensional or three-dimensional space and in an unbounded domain.

Keywords: motion of polymer solutions, alpha model, approximation-topological method, weak solution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 23-71-10026, https://rscf.ru/project/23-71-10026/.

For citation: A. V. Zvyagin, "Existence of weak solutions of the stationary alpha model describing the motion of polymer solutions," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 96–109. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-96-109

REFERENCES

1. M. S. Agranovich and M. I. Vishik, "Ellipticheskie granichnye zadachi s parametrom i parabolicheskie zadachi obshchego vida" [Elliptic boundary-value problems with a parameter and parabolic problems of general form], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1964, **19**, No. 3, 53–161 (in Russian).
2. V. B. Amfilokhiev, Ya. I. Voytkunskii, N. P. Mazaeva, and Ya. S. Khodornovskii, "Techenie polimernykh rastvorov pri nalichii konvektivnykh uskoreniy" [Flow of polymer solutions in the presence of convective accelerations], *Tr. Leningrad. Ord. Lenina Korablestr. Inst.* [Proc. Leningrad Ord. Lenin Shipbuilding Inst.], 1975, **96**, 3–9 (in Russian).
3. Ya. I. Voytkunskii, V. B. Amfilokhiev, and V. A. Pavlovskii, "Uravneniya dvizheniya zhidkosti s uchetom ee relaksatsionnykh svoystv" [Equations of fluid motion taking into account its relaxation properties], *Tr. Leningrad. Ord. Lenina Korablestr. Inst.* [Proc. Leningrad Ord. Lenin Shipbuilding Inst.], 1970, **69**, 19–26 (in Russian).
4. A. V. Zvyagin, "O razreshimosti statsionarnoy modeli dvizheniya slabykh vodnykh rastvorov polimerov" [On the solvability of a stationary model of motion of weak aqueous solutions of polymers], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2011, No. 2, 103–105 (in Russian).
5. A. V. Zvyagin, "Razreshimost' zadachi termovyazkouprugosti dlya al'fa-modeli Lere" [Razreshimost' zadachi termovyazkouprugosti dlya al'fa-modeli Lere], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2016, No. 10, 70–75 (in Russian).

6. A. V. Zvyagin, V. G. Zvyagin, and D. M. Polyakov, “O dissipativnoy razreshimosti al’fa-modeli dvizheniya zhidkosti s pamyat’yu” [On the dissipative solvability of the alpha model of fluid motion with memory], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2019, **59**, No. 7, 1243–1257 (in Russian).
7. A. V. Zvyagin and D. M. Polyakov, “O razreshimosti al’fa-modeli Dzheffrisa—Oldroyda” [On the solvability of the Jeffreys–Oldroyd alpha model], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 6, 782–787 (in Russian).
8. V. G. Zvyagin, “Approksimatsionno-topologicheskiy podkhod k issledovaniyu matematicheskikh zadach gidrodinamiki” [Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **46**, 92–119 (in Russian).
9. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, “Issledovanie nachal’no-kraevykh zadach dlya matematicheskikh modeley dvizheniya zhidkostey Kel’vina—Foygta” [The study of initial-boundary value problems for mathematical models of the motion of Kelvin–Voigt fluids], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **31**, 3–144 (in Russian).
10. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, *Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vyazkouprugikh sred* [Mathematical Issues of Hydrodynamics of Viscoelastic Media], Krasand URSS, Moscow, 2012 (in Russian).
11. O. A. Ladyzhenskaya, *Matematicheskie voprosy dinamiki vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti* [Mathematical Issues of Dynamics of Viscous Incompressible Fluid], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
12. V. A. Pavlovskii, “K voprosu o teoreticheskom opisanii slabykh vodnykh rastvorov polimerov” [On the issue of theoretical description of weak aqueous solutions of polymers], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1971, **200**, No. 4, 809–812 (in Russian).
13. V. V. Pukhnachev and O. A. Frolovskaya, “O modeli Voytkunskogo—Amfilokhieva—Pavlovskogo dvizheniya vodnykh rastvorov polimerov” [On the Voitkunsky–Amfilokhiev–Pavlovskii model of motion of aqueous solutions of polymers], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2018, **300**, 176–189 (in Russian).
14. R. Teman, *Uravneniya Nav’e—Stoksa. Teoriya i chislennyy analiz* [Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis], Mir, Moscow, 1981 (Russian translation).
15. S. Agmon, “On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1962, **15**, 119–147.
16. M. W. Hecht, D. D. Holm, M. R. Petersen, and B. A. Wingate, “Implementation of the LANS-alpha turbulence model in a primitive equation ocean model,” *J. Comput. Phys.*, 2008, **227**, 5691–5716.
17. D. D. Holm, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu, “The Euler–Poincare models of ideal fluids with nonlinear dispersion,” *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **349**, 4173–4177.
18. P. G. Lemarie-Rieusset, *The Navier–Stokes Problem in the 21st Century*, Taylor and Francis Group, 2016.
19. J. Leray, “Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l’hydrodynamique,” *J. Math. Pures Appl.*, 1933, **12**, 1–82.
20. A. V. Zvyagin, “Optimal feedback control in the stationary mathematical model of low concentrated aqueous polymer solutions,” *Appl. Anal.*, 2013, **92**, No. 6, 1157–1168.
21. A. V. Zvyagin, “Solvability for equations of motion of weak aqueous polymer solutions with objective derivative,” *Nonlinear Anal.*, 2013, **90**, 70–85.
22. A. V. Zvyagin, “Solvability of the stationary mathematical model of one non-Newtonian fluid motion with the objective derivative,” *Fixed Point Theory*, 2014, **15**, No. 2, 623–634.

A. V. Zvyagin
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvyagin.a@mail.ru