

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-71-84

EDN: TXBXLU

О ВАРИАЦИОННОМ ПРИНЦИПЕ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Будочкина, Т. Х. Лыу

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия прямой представимости одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в виде уравнений Лагранжа—Остроградского и построен соответствующий вариационный принцип (действие по Гамильтону—Остроградскому).

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнения Лагранжа—Остроградского, вариационный принцип, действие по Гамильтону—Остроградскому.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Публикация частично выполнена в рамках проекта № 002092-0-000 Российского университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы и при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115).

Для цитирования: С. А. Будочкина, Т. Х. Лыу. О вариационном принципе для одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 71–84. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-71-84>

1. ВВЕДЕНИЕ

Вариационные принципы сыграли основополагающую роль в становлении и развитии механики (см., например, монографию [8] и библиографию в ней). В [2–4, 8, 24] изложены классические и современные методы решения основных задач динамики. Исследование вариационности дифференциальных уравнений является важной и актуальной задачей. Отметим, что этому вопросу посвящено значительное количество работ: например, для обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными [1, 9–14, 16–21, 23, 28, 29], дифференциально-разностных уравнений [5–7], стохастических дифференциальных уравнений [25–27], дифференциальных уравнений с производными дробного порядка [15, 22] и др. В перечисленных работах предложены конструктивные приемы построения прямых и косвенных вариационных формулировок дифференциальных уравнений. Для этого используются локальные и нелокальные билинейные формы, в том числе и билинейные формы со свертками, а также исследуются вопросы существования вариационных множителей как в виде функций, так и в виде операторов, в том числе и матричных. При этом соответствующие действия по Гамильтону (Гамильтону—Остроградскому) строятся с использованием как эйлеровых, так и неэйлеровых классов функционалов.

Представляет значительный интерес распространение некоторых изложенных в этих работах методов на исследование вопросов представимости дифференциальных уравнений с производными высших порядков в форме уравнений Лагранжа—Остроградского, построение соответствующих функционалов — действий по Гамильтону—Остроградскому. В связи с этим вопрос о вариационности одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений приобретает особую важность, что и определило актуальность данной работы.

Основная цель настоящей работы — получить необходимые и достаточные условия потенциальности оператора одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений и построить соответствующее действие по Гамильтону—Остроградскому.

В дальнейшем мы будем использовать обозначения и терминологию работ [8, 17].

Предположим, что U, V — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Для дальнейшего нам понадобятся следующие определение и теорема.

Определение 1.1 (см. [8]). Оператор $N : D(N) \subset U \rightarrow V$ называется *потенциальным* на множестве $D(N)$ относительно билинейной формы $\Phi(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, если существует дифференцируемый по Гато функционал $F_N : D(F_N) = D(N) \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что

$$\delta F_N[u, h] = \Phi(N(u), h) \quad \forall u \in D(N), \forall h \in D(N'_u).$$

В этом случае говорят, что соответствующее уравнение $N(u) = 0$ допускает прямую *вариационную формулировку*.

Заметим, что N'_u — производная Гато оператора N в точке $u \in D(N)$. Множество $D(N'_u)$ состоит из таких элементов $h \in U$, что $(u + \varepsilon h) \in D(N)$ для любого достаточно малого значения ε .

Теорема 1.1 (см. [8]). Пусть дифференцируемый по Гато оператор $N : D(N) \subset U \rightarrow V$ и билинейная форма $\Phi(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ таковы, что для любых фиксированных элементов $u \in D(N)$, $g, h \in D(N'_u)$ функция $\psi(\varepsilon) = \Phi(N(u + \varepsilon h), g)$ принадлежит классу $C^1[0, 1]$. Тогда для потенциальности оператора N на выпуклом множестве $D(N)$ относительно рассматриваемой билинейной формы необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Phi(N'_u h, g) = \Phi(N'_u g, h) \quad \forall u \in D(N), \forall h, g \in D(N'_u). \quad (1.1)$$

При этом потенциал оператора N определяется формулой

$$F_N[u] = \int_0^1 \Phi(N(u_0 + \lambda(u - u_0)), u - u_0) d\lambda + F_N[u_0], \quad (1.2)$$

где u_0 — фиксированный элемент $D(N)$.

2. УСЛОВИЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОСТИ

Рассмотрим систему уравнений

$$N(u) \equiv A(t)u^{(4)}(t) + B(t)u'''(t) + C(t)u''(t) + D(t)u'(t) + E(t)u(t) = 0, \quad t \in (t_0, t_1). \quad (2.1)$$

Здесь $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$ — неизвестная вектор-функция, $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, $B(t) = (b_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, $C(t) = (c_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, $D(t) = (d_{ij}(t))_{i,j=1}^n$, $E(t) = (e_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ — заданные матрицы, причем $a_{ij} \in C^4[t_0, t_1]$, $b_{ij} \in C^3[t_0, t_1]$, $c_{ij} \in C^2[t_0, t_1]$, $d_{ij} \in C^1[t_0, t_1]$, $e_{ij} \in C[t_0, t_1]$, $i, j = \overline{1, n}$.

Зададим область определения оператора N (2.1) в виде

$$D(N) = \left\{ u \in U = C^4[t_0, t_1] : u_i(t_0) = \varphi_{i1}, u_i(t_1) = \varphi_{i2}, u'_i(t_0) = \varphi_{i3}, u'_i(t_1) = \varphi_{i4}, i = \overline{1, n} \right\}, \quad (2.2)$$

где φ_{ik} ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, 4}$) — заданные постоянные.

В данном случае

$$D(N'_u) = \left\{ h \in U = C^4[t_0, t_1] : h_i(t_0) = 0, h_i(t_1) = 0, h'_i(t_0) = 0, h'_i(t_1) = 0, i = \overline{1, n} \right\} \quad (2.3)$$

и $V = C[t_0, t_1]$.

Введем билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int_{t_0}^{t_1} (v(t))^T g(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n v_i(t) g_i(t) dt, \quad (2.4)$$

где $v(t) = (v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t))^T$, $g(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))^T$.

Отметим, что

$$\int_{t_0}^{t_1} (v(t))^T g(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} (g(t))^T v(t) dt,$$

т. е.

$$\Phi(v, g) = \Phi(g, v).$$

Теорема 2.1. Оператор N (2.1) является потенциальным на множестве $D(N)$ (2.2) относительно билинейной формы (2.4) тогда и только тогда, когда $\forall t \in [t_0, t_1]$ выполнены следующие условия:

$$(A(t))^T - A(t) = 0, \quad (2.5)$$

$$(B(t))^T - 4A'(t) + B(t) = 0, \quad (2.6)$$

$$(C(t))^T - 6A''(t) + 3B'(t) - C(t) = 0, \quad (2.7)$$

$$(D(t))^T - 4A'''(t) + 3B''(t) - 2C'(t) + D(t) = 0, \quad (2.8)$$

$$(E(t))^T - A^{(4)}(t) + B'''(t) - C''(t) + D'(t) - E(t) = 0. \quad (2.9)$$

Доказательство. Производная Гато оператора N (2.1) имеет вид

$$N'_u h = A(t)h^{(4)}(t) + B(t)h'''(t) + C(t)h''(t) + D(t)h'(t) + E(t)h(t).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \Phi(N'_u h, g) &= \int_{t_0}^{t_1} (A(t)h^{(4)}(t) + B(t)h'''(t) + C(t)h''(t) + D(t)h'(t) + E(t)h(t))^T g(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [(h^{(4)}(t))^T (A(t))^T g(t) + (h'''(t))^T (B(t))^T g(t) + (h''(t))^T (C(t))^T g(t) + \\ &\quad + (h'(t))^T (D(t))^T g(t) + (h(t))^T (E(t))^T g(t)] dt. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что h и g принадлежат $D(N'_u)$ (2.3), получаем

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} (h^{(4)}(t))^T (A(t))^T g(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (h(t))^T [(A^{(4)}(t))^T g(t) + 4(A'''(t))^T g'(t) + 6(A''(t))^T g''(t) + 4(A'(t))^T g'''(t) + (A(t))^T g^{(4)}(t)] dt, \\ &\int_{t_0}^{t_1} (h'''(t))^T (B(t))^T g(t) dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} -(h(t))^T [(B'''(t))^T g(t) + 3(B''(t))^T g'(t) + 3(B'(t))^T g''(t) + (B(t))^T g'''(t)] dt, \\ &\int_{t_0}^{t_1} (h''(t))^T (C(t))^T g(t) dt = \end{aligned}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} (h(t))^T [(C''(t))^T g(t) + 2(C'(t))^T g'(t) + (C(t))^T g''(t)] dt,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} (h'(t))^T (D(t))^T g(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} -(h(t))^T [(D'(t))^T g(t) + (D(t))^T g'(t)] dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Phi(N'_u h, g) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ (h(t))^T (A(t))^T g^{(4)}(t) + (h(t))^T [4(A'(t))^T - (B(t))^T] g'''(t) + \right. \\ & + (h(t))^T [6(A''(t))^T - 3(B'(t))^T + (C(t))^T] g''(t) + \\ & + (h(t))^T [4(A'''(t))^T - 3(B''(t))^T + 2(C'(t))^T - (D(t))^T] g'(t) + \\ & \left. + (h(t))^T [(A^{(4)}(t))^T - (B'''(t))^T + (C''(t))^T - (D'(t))^T + (E(t))^T] g(t) \right\} dt. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \Phi(N'_u g, h) = & \int_{t_0}^{t_1} (A(t)g^{(4)}(t) + B(t)g'''(t) + C(t)g''(t) + D(t)g'(t) + E(t)g(t))^T h(t) dt = \\ = & \int_{t_0}^{t_1} \left[(h(t))^T A(t)g^{(4)}(t) + (h(t))^T B(t)g'''(t) + (h(t))^T C(t)g''(t) + (h(t))^T D(t)g'(t) + (h(t))^T E(t)g(t) \right] dt. \end{aligned}$$

В данном случае критерий потенциальности (1.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \Phi(N'_u h, g) - \Phi(N'_u g, h) = & \int_{t_0}^{t_1} \left\{ (h(t))^T [(A(t))^T - A(t)] g^{(4)}(t) + (h(t))^T [4(A'(t))^T - (B(t))^T - \right. \\ & - B(t)] g'''(t) + (h(t))^T [6(A''(t))^T - 3(B'(t))^T + (C(t))^T - C(t)] g''(t) + (h(t))^T [4(A'''(t))^T - \\ & - 3(B''(t))^T + 2(C'(t))^T - (D(t))^T - D(t)] g'(t) + (h(t))^T [(A^{(4)}(t))^T - (B'''(t))^T + (C''(t))^T - \\ & \left. - (D'(t))^T + (E(t))^T - E(t)] g(t) \right\} dt = 0 \quad \forall h, g \in D(N'_u). \end{aligned}$$

Это тождественно выполняется тогда и только тогда, когда

$$(A(t))^T - A(t) = 0, \quad (2.10)$$

$$4(A'(t))^T - (B(t))^T - B(t) = 0, \quad (2.11)$$

$$6(A''(t))^T - 3(B'(t))^T + (C(t))^T - C(t) = 0, \quad (2.12)$$

$$4(A'''(t))^T - 3(B''(t))^T + 2(C'(t))^T - (D(t))^T - D(t) = 0, \quad (2.13)$$

$$(A^{(4)}(t))^T - (B'''(t))^T + (C''(t))^T - (D'(t))^T + (E(t))^T - E(t) = 0. \quad (2.14)$$

Заметим, что условия (2.10)–(2.14) сводятся к условиям (2.5)–(2.9). $\square$

3. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛА

Теорема 3.1. Если оператор N (2.1) является потенциальным на множестве $D(N)$ (2.2) относительно билинейной формы (2.4), то действие по Гамильтону–Остроградскому имеет

вуд

$$F_N[u] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left((u''(t))^T A(t) u''(t) + (u''(t))^T (B(t) - 2A'(t)) u'(t) - (u'(t))^T (3A''(t) - 2B'(t) + \right. \\ \left. + C(t)) u'(t) + (u'(t))^T (A'''(t) - B''(t) + C'(t) - D(t)) u(t) + (u(t))^T (E(t))^T u(t) \right) dt. \quad (3.1)$$

Доказательство. Формула (1.2) в данном случае принимает вид

$$F_N[u] = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (A(t) \tilde{u}_{tttt}(t, \lambda) + B(t) \tilde{u}_{ttt}(t, \lambda) + C(t) \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) + D(t) \tilde{u}_t(t, \lambda) + \\ + E(t) \tilde{u}(t, \lambda))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda + F_N[u_0], \quad (3.2)$$

где $\tilde{u}(t, \lambda) = u_0(t) + \lambda(u(t) - u_0(t))$, $u_0(t)$ — фиксированный элемент из $D(N)$.

Обозначим

$$J_A[u] = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (A(t) \tilde{u}_{tttt}(t, \lambda))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $(u - u_0) \in D(N'_u)$ (2.3), получаем

$$J_A[u] = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tttt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \\ = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A''(t))^T (u(t) - u_0(t)) + 2(\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A'(t))^T (u(t) - u_0(t))' + \right. \\ \left. + (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t))'' \right) dt d\lambda = \\ = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left(-(\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (A'''(t))^T (u(t) - u_0(t)) - (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (A''(t))^T (u(t) - u_0(t))' + \right. \\ \left. + 2(\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A'(t))^T (u(t) - u_0(t))' + (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t))'' \right) dt d\lambda. \quad (3.3)$$

Аналогично

$$J_B[u] = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (B(t) \tilde{u}_{ttt}(t, \lambda))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{ttt}(t, \lambda))^T (B(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \\ = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left(-(\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (B'(t))^T (u(t) - u_0(t)) - (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (B(t))^T (u(t) - u_0(t))' \right) dt d\lambda = \\ = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left((\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (B''(t))^T (u(t) - u_0(t)) + (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (B'(t))^T (u(t) - u_0(t))' - \right. \\ \left. - (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (B(t))^T (u(t) - u_0(t))' \right) dt d\lambda, \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
J_C[u] &= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (C(t) \tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (C(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \\
&= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left(-(\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (C'(t))^T (u(t) - u_0(t)) - (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (C(t))^T (u(t) - u_0(t))' \right) dt d\lambda,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$J_D[u] = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (D(t) \tilde{u}_t(t, \lambda))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (D(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda, \tag{3.6}$$

$$J_E[u] = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (E(t) \tilde{u}(t, \lambda))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda. \tag{3.7}$$

Подставляя (3.3)–(3.7) в (3.2), получим

$$\begin{aligned}
F_N[u] - F_N[u_0] &= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t))'' + \right. \\
&\quad + (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T [2(A'(t))^T - (B(t))^T] (u(t) - u_0(t))' + \\
&\quad + (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T [- (A''(t))^T + (B'(t))^T - (C(t))^T] (u(t) - u_0(t))' + \\
&\quad + (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T [- (A'''(t))^T + (B''(t))^T - (C'(t))^T + (D(t))^T] (u(t) - u_0(t)) + \\
&\quad \left. + (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T (u(t) - u_0(t)) \right) dt d\lambda.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Отметим, что

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t))'' dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) dt d\lambda = \\
&= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) \right) - ((u(t) - u_0(t))'')^T (A(t))^T \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) \right] dt d\lambda = \\
&= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) \right) - (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T A(t) (u(t) - u_0(t))'' \right] dt d\lambda = \\
&= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) \right) - (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t))'' \right] dt d\lambda
\end{aligned}$$

(здесь учтено условие (2.5)). Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T (u(t) - u_0(t))'' dt d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (A(t))^T \tilde{u}_{tt}(t, \lambda) \right) dt d\lambda = \\
&= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left((u''(t))^T A(t) u''(t) - (u_0''(t))^T A(t) u_0''(t) \right) dt.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (2(A'(t))^T - (B(t))^T) (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda. \quad (3.10)$$

Введем обозначение

$$H(t) = 2A'(t) - B(t).$$

С учетом условий (2.5), (2.6) получим

$$\begin{aligned} (H(t))^T &= (2A'(t) - B(t))^T = 2(A'(t))^T - (B(t))^T = 2A'(t) - 4A'(t) + B(t) = \\ &= -2A'(t) + B(t) = -H(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что $(u - u_0) \in D(N'_u)$ (2.3), а также условие (3.11), интеграл (3.10) представим в виде

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (2(A'(t))^T - (B(t))^T) (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (H(t))^T \tilde{u}_{t\lambda}(t, \lambda) dt d\lambda + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (H(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_{tt}(t, \lambda))^T (H(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) \right) dt d\lambda - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} ((u(t) - u_0(t))'')^T (H(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) dt d\lambda - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H'(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H(t))^T (u(t) - u_0(t))'' dt d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[(u''(t))^T (H(t))^T u'(t) - (u_0''(t))^T (H(t))^T u_0'(t) \right] dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T H(t) (u(t) - u_0(t))'' dt d\lambda - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H'(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H(t))^T (u(t) - u_0(t))'' dt d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left[(u''(t))^T (H(t))^T u'(t) - (u_0''(t))^T (H(t))^T u_0'(t) \right] dt - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H'(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda. \quad (3.12) \end{aligned}$$

Далее, интеграл

$$\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (- (A''(t))^T + (B'(t))^T - (C(t))^T) (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda$$

запишем в виде

$$\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda, \quad (3.13)$$

где

$$G(t) = -A''(t) + B'(t) - C(t).$$

С учетом условий (2.5)–(2.7) имеем

$$\begin{aligned} (G(t))^T &= (-A''(t) + B'(t) - C(t))^T = -A''(t) + 4A''(t) - B'(t) - 6A''(t) + 3B'(t) - C(t) = \\ &= -3A''(t) + 2B'(t) - C(t) = -A''(t) + B'(t) - C(t) - 2A''(t) + B'(t) = G(t) - H'(t). \end{aligned} \quad (3.14)$$

В соответствии с условием (3.14) интеграл (3.13) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T \tilde{u}_{t\lambda}(t, \lambda) dt d\lambda = \\ &= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) \right) - ((u(t) - u_0(t))')^T (G(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) \right] dt d\lambda = \\ &= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) \right) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} ((u(t) - u_0(t))')^T (G(t) - H'(t)) \tilde{u}_t(t, \lambda) dt d\lambda = \\ &= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) \right) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} ((u(t) - u_0(t))')^T G(t) \tilde{u}_t(t, \lambda) dt d\lambda + \\ &\quad + \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} ((u(t) - u_0(t))')^T H'(t) \tilde{u}_t(t, \lambda) dt d\lambda = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left((u'(t))^T (G(t))^T u'(t) - (u'_0(t))^T (G(t))^T u'_0(t) \right) dt - \\ &\quad - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda + \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H'(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (G(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left((u'(t))^T (G(t))^T u'(t) - (u'_0(t))^T (G(t))^T u'_0(t) \right) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (H'(t))^T (u(t) - u_0(t))' dt d\lambda. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (-A'''(t))^T + (B''(t))^T - (C'(t))^T + (D(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda.$$

Обозначим

$$L(t) = -A'''(t) + B''(t) - C'(t) + D(t).$$

Из условий (2.5)–(2.8) следует, что

$$\begin{aligned} (L(t))^T &= (-A'''(t) + B''(t) - C'(t) + D(t))^T = \\ &= -A'''(t) + 4A'''(t) - B''(t) - 6A'''(t) + 3B''(t) - C'(t) + 4A'''(t) - 3B''(t) + 2C'(t) - D(t) = \\ &= A'''(t) - B''(t) + C'(t) - D(t) = -L(t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Таким образом, интегрируя по частям и принимая во внимание, что $(u - u_0) \in D(N'_u)$ (2.3), а также условие (3.16), получим

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (L(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (L(t))^T \tilde{u}_\lambda(t, \lambda) dt d\lambda = \\ &= \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (L(t))^T \tilde{u}(t, \lambda) \right) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} ((\tilde{u}_{t\lambda}(t, \lambda))^T (L(t))^T \tilde{u}(t, \lambda)) dt d\lambda = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left((u'(t))^T (L(t))^T u(t) - (u'_0(t))^T (L(t))^T u_0(t) \right) dt + \\ &+ \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u_0(t))^T (L'(t))^T \tilde{u}(t, \lambda) dt d\lambda + \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u_0(t))^T (L(t))^T \tilde{u}_t(t, \lambda) dt d\lambda = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left((u'(t))^T (L(t))^T u(t) - (u'_0(t))^T (L(t))^T u_0(t) \right) dt + \\ &+ \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u_0(t))^T (L'(t))^T \tilde{u}(t, \lambda) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (L(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}_t(t, \lambda))^T (L(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left((u'(t))^T (L(t))^T u(t) - (u'_0(t))^T (L(t))^T u_0(t) \right) dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (L'(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из условия потенциальности (2.9) имеем

$$(E(t))^T = A^{(4)}(t) - B'''(t) + C''(t) - D'(t) + E(t) = -L'(t) + E(t) = (L'(t))^T + E(t),$$

поэтому интеграл

$$\int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda$$

может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T \tilde{u}_\lambda(t, \lambda) dt d\lambda = \\ & = \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left((\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T \tilde{u}(t, \lambda) \right) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u_0(t))^T ((L'(t))^T + E(t)) \tilde{u}(t, \lambda) dt d\lambda = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} ((u(t))^T (E(t))^T u(t) - (u_0(t))^T (E(t))^T u_0(t)) dt - \\ & - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u_0(t))^T (L'(t))^T \tilde{u}(t, \lambda) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (u(t) - u_0(t))^T E(t) \tilde{u}(t, \lambda) dt d\lambda = \\ & = \int_{t_0}^{t_1} ((u(t))^T (E(t))^T u(t) - (u_0(t))^T (E(t))^T u_0(t)) dt + \\ & + \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (L'(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda - \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (E(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} ((u(t))^T (E(t))^T u(t) - (u_0(t))^T (E(t))^T u_0(t)) dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{t_0}^{t_1} (\tilde{u}(t, \lambda))^T (L'(t))^T (u(t) - u_0(t)) dt d\lambda. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Подставляя (3.9), (3.12), (3.15), (3.17), (3.18) в (3.8), получим

$$\begin{aligned} F_N[u] &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left((u''(t))^T A(t) u''(t) + (u''(t))^T (H(t))^T u'(t) + \right. \\ & \left. + (u'(t))^T (G(t))^T u'(t) + (u'(t))^T (L(t))^T u(t) + (u(t))^T (E(t))^T u(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Таким образом, принимая во внимание (3.11), (3.14), (3.16), из (3.19) получаем функционал (3.1). $\square$

4. СЛУЧАЙ ОДНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$N(u) \equiv a(t)u^{(4)}(t) + b(t)u'''(t) + c(t)u''(t) + d(t)u'(t) + e(t)u(t) = 0, \quad t \in (t_0, t_1). \quad (4.1)$$

Здесь $u = u(t)$ — неизвестная функция, $a \in C^4[t_0, t_1]$, $b \in C^3[t_0, t_1]$, $c \in C^2[t_0, t_1]$, $d \in C^1[t_0, t_1]$, $e \in C[t_0, t_1]$ — заданные функции.

Зададим область определения оператора N (4.1) в виде

$$D(N) = \left\{ u \in U = C^4[t_0, t_1] : u(t_0) = \varphi_1, u(t_1) = \varphi_2, u'(t_0) = \varphi_3, u'(t_1) = \varphi_4 \right\}, \quad (4.2)$$

где φ_k ($k = \overline{1, 4}$) — заданные постоянные.

Отметим, что

$$D(N'_u) = \left\{ h \in U = C^4[t_0, t_1] : h(t_0) = 0, h(t_1) = 0, h'(t_0) = 0, h'(t_1) = 0 \right\}$$

и $V = C[t_0, t_1]$.

Введем билинейную форму

$$\Phi(v, g) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)g(t)dt. \quad (4.3)$$

В данном случае теоремы 2.1 и 3.1 формулируются следующим образом.

Теорема 4.1. *Оператор N (4.1) является потенциальным на множестве $D(N)$ (4.2) относительно билинейной формы (4.3) тогда и только тогда, когда $\forall t \in [t_0, t_1]$ выполнены следующие условия:*

$$\begin{aligned} b(t) - 2a'(t) &= 0, \\ d(t) + a'''(t) - c'(t) &= 0. \end{aligned}$$

Теорема 4.2. *Если оператор N (4.1) является потенциальным на множестве $D(N)$ (4.2) относительно билинейной формы (4.3), то действие по Гамильтону—Остроградскому имеет вид*

$$F_N[u] = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \left(a(t)(u''(t))^2 + (a''(t) - c(t))(u'(t))^2 + e(t)(u(t))^2 \right) dt.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована прямая представимость одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в форме уравнений Лагранжа—Остроградского. Одним из возможных направлений дальнейшего развития полученных результатов является разработка методов нахождения первых интегралов рассматриваемой системы обыкновенных дифференциальных уравнений, основанных на применении теории преобразований переменных для установления инвариантности как самих уравнений, так и соответствующего функционала — действия по Гамильтону—Остроградскому.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Будочкина С. А. О представлении одного операторного уравнения с первой производной по времени в форме B_u -гамильтонова уравнения // Дифф. уравн. — 2013. — 49, № 2. — С. 175–185.
2. Галиуллин А. С. Системы Гельмгольца. — Москва: РУДН, 1995.
3. Галиуллин А. С. Аналитическая динамика. — Москва: РУДН, 1998.
4. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. — Ижевск: Удмуртский гос. унив., 1995.
5. Попов А. М. Условия потенциальности дифференциально-разностных уравнений // Дифф. уравн. — 1998. — 34, № 3. — С. 422–424.
6. Попов А. М. Условия потенциальности Гельмгольца для систем дифференциально-разностных уравнений // Мат. заметки. — 1998. — 64, № 3. — С. 437–442.
7. Попов А. М. Обратная задача вариационного исчисления для систем дифференциально-разностных уравнений второго порядка // Мат. заметки. — 2002. — 72, № 5. — С. 745–749.
8. Савчин В. М. Математические методы механики бесконечномерных непотенциальных систем. — Москва: УДН, 1991.
9. Филиппов В. М. Вариационные принципы для непотенциальных операторов. — Москва: УДН, 1985.

10. Филиппов В. М. О вариационном принципе для гипоеллиптических уравнений с постоянными коэффициентами// Дифф. уравн. — 1986. — 22, № 2. — С. 338–343.
11. Филиппов В. М. О полуограниченных решениях обратных задач вариационного исчисления// Дифф. уравн. — 1987. — 23, № 9. — С. 1599–1607.
12. Филиппов В. М., Савчин В. М., Будочкина С. А. О существовании вариационных принципов для эволюционных дифференциально-разностных уравнений// Тр. МИАН. — 2013. — 283. — С. 25–39.
13. Филиппов В. М., Савчин В. М., Будочкина С. А. Бивариационность, симметрии и приближенные решения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — 67, № 3. — С. 596–608.
14. Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. — 1992. — 40. — С. 3–176.
15. Agrawal O. P. Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — 272, № 1. — С. 368–379.
16. Budochkina S. A. Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation// Eurasian Math. J. — 2012. — 3, № 1. — С. 18–28.
17. Budochkina S. A., Dekhanova E. S. On the potentiality of a class of operators relative to local bilinear forms// Ural Math. J. — 2021. — 7, № 1. — С. 26–37.
18. Budochkina S. A., Luu T. H. On connection between variationality of a six-order ordinary differential equation and Hamilton–Ostrogradskii equations// Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 15. — С. 3594–3605.
19. Budochkina S. A., Luu T. H. On variational symmetries and conservation laws of a fifth-order partial differential equation// Lobachevskii J. Math. — 2024. — 45, № 6. — С. 2466–2477.
20. Budochkina S. A., Luu T. H., Shokarev V. A. On indirect representability of fourth order ordinary differential equation in form of Hamilton–Ostrogradsky equations// Уфимский мат. ж. — 2023. — 15, № 3. — С. 121–131.
21. Budochkina S. A., Vu H. P. On an indirect representation of evolutionary equations in the form of Birkhoff’s equations// Eurasian Math. J. — 2022. — 13, № 3. — С. 23–32.
22. He L., Wu H., Mei F. Variational integrators for fractional Birkhoffian systems// Nonlinear Dynam. — 2017. — 87. — С. 2325–2334.
23. Kalpakides V. K., Charalambopoulos A. On Hamilton’s principle for discrete and continuous systems: a convolved action principle// Rep. Math. Phys. — 2021. — 87, № 2. — С. 225–248.
24. Santilli R. M. Foundations of Theoretical Mechanics, II: Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics. — Berlin–Heidelberg: Springer, 1983.
25. Tleubergenov M. I., Azhymbaev D. T. On the solvability of stochastic Helmholtz problem// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2021. — 253. — С. 297–305.
26. Tleubergenov M. I., Ibraeva G. T. On inverse problem of closure of differential systems with degenerate diffusion// Eurasian Math. J. — 2019. — 10, № 2. — С. 93–102.
27. Tleubergenov M. I., Ibraeva G. T. On the solvability of the main inverse problem for stochastic differential systems// Ukr. Math. J. — 2019. — 71, № 1. — С. 157–165.
28. Tonti E. On the variational formulation for linear initial value problems// Ann. Mat. Pura Appl. — 1973. — 95. — С. 331–359.
29. Tonti E. Variational formulation for every nonlinear problem// Internat. J. Engrg. Sci. — 1984. — 22, № 11–12. — С. 1343–1371.

Светлана Александровна Будочкина

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: budochkina-sa@rudn.ru

Тхи Хуен Лыу

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: luuthihuyen250393@gmail.com

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-71-84

EDN: TXBXLU

On the variational principle for a system of ordinary differential equations

S. A. Budochkina and T. H. Luu

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. Necessary and sufficient conditions for the direct representability of one system of ordinary differential equations in the form of Lagrange–Ostrogradsky equations are obtained and the corresponding variational principle (the Hamilton–Ostrogradsky action) is constructed.

Keywords: system of ordinary differential equations, Lagrange–Ostrogradsky equations, variational principle, Hamilton–Ostrogradsky action.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The publication was partially supported by the project No. 002092-0-000 of the Peoples’ Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement No. 075-15-2022-1115).

For citation: S. A. Budochkina, T. H. Luu, “On the variational principle for a system of ordinary differential equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 71–84. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-71-84>

REFERENCES

1. S. A. Budochkina, “O predstavlenii odnogo operatornogo uravneniya s pervoy proizvodnoy po vremeni v forme B_u -gamil’tonova uravneniya” [On the representation of one operator equation with the first derivative with respect to time in the form of a B_u -Hamiltonian equation] *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 2, 175–185 (in Russian).
2. A. S. Galiullin, *Sistemy Gel’mgol’tsa* [Helmholtz Systems], RUDN, Moscow, 1995 (in Russian).
3. A. S. Galiullin, *Analiticheskaya dinamika* [Analytical Dynamics], RUDN, Moscow, 1998 (in Russian).
4. V. V. Kozlov, *Simmetrii, topologiya i rezonansy v gamil’tonovoy mekhanike* [Symmetries, Topology and Resonances in Hamiltonian Mechanics], Udmurtskiy gos. univ., Izhevsk, 1995 (in Russian).
5. A. M. Popov, “Usloviya potentsial’nosti differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [Potentiality conditions for differential-difference equations], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1998, **34**, No. 3, 422–424 (in Russian).
6. A. M. Popov, “Usloviya potentsial’nosti Gel’mgol’tsa dlya sistem differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [Helmholtz potentiality conditions for systems of differential-difference equations] *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1998, **64**, No. 3, 437–442 (in Russian).
7. A. M. Popov, “Obratnaya zadacha variatsionnogo ischisleniya dlya sistem differentsial’no-raznostnykh uravneniy vtorogo poryadka” [Inverse problem of variational calculus for systems of second-order differential-difference equations], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2002, **72**, No. 5, 745–749 (in Russian).
8. V. M. Savchin, *Matematicheskie metody mekhaniki beskonечnomernykh nepotentsial’nykh sistem* [Mathematical Methods of Mechanics of Infinite-Dimensional Nonpotential Systems], UDN, Moscow, 1991 (in Russian).
9. V. M. Filippov, *Variatsionnye printsipy dlya nepotentsial’nykh operatorov* [Variational Principles for Non-potential Operators], UDN, Moscow, 1985 (in Russian).

10. V. M. Filippov, “O variatsionnom printsipe dlya gipoellipticheskikh uravneniy s postoyannymi koeffitsientami” [On the variational principle for hypoelliptic equations with constant coefficients] *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1986, **22**, No. 2, 338–343 (in Russian).
11. V. M. Filippov, “O poluogranichennykh resheniyakh obratnykh zadach variatsionnogo ischisleniya” [On semi-bounded solutions of inverse problems of the calculus of variations] *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1987, **23**, No. 9, 1599–1607 (in Russian).
12. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. A. Budochkina, “O sushchestvovanii variatsionnykh printsipov dlya evolyutsionnykh differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [On the existence of variational principles for evolutionary differential-difference equations] *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 25–39 (in Russian).
13. V. M. Filippov, V. M. Savchin, S. A. Budochkina, “Bivariatsionnost’, simmetrii i priblizhennye resheniya” [Bivariance, symmetries and approximate solutions] *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], **67**, No. 3, 596–608 (2021).
14. V. M. Filippov, V. M. Savchin, S. G. Shorokhov, “Variatsionnye printsipy dlya nepotentsial’nykh operatorov” [Variational principles for nonpotential operators], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Nov. Dostizh.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. New Achiev.], 1992, **40**, 3–176 (in Russian).
15. O. P. Agrawal, “Formulation of Euler–Lagrange equations for fractional variational problems,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **272**, No. 1, 368–379.
16. S. A. Budochkina, “Symmetries and first integrals of a second order evolutionary operator equation,” *Eurasian Math. J.*, 2012, **3**, No. 1, 18–28.
17. S. A. Budochkina and E. S. Dekhanova, “On the potentiality of a class of operators relative to local bilinear forms,” *Ural Math. J.*, 2021, **7**, No. 1, 26–37.
18. S. A. Budochkina and T. H. Luu, “On connection between variationality of a six-order ordinary differential equation and Hamilton–Ostrogradskii equations,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 15, 3594–3605.
19. S. A. Budochkina and T. H. Luu, “On variational symmetries and conservation laws of a fifth-order partial differential equation,” *Lobachevskii J. Math.*, 2024, **45**, No. 6, 2466–2477.
20. S. A. Budochkina, T. H. Luu, and V. A. Shokarev, “On indirect representability of fourth order ordinary differential equation in form of Hamilton–Ostrogradsky equations,” *Ufimskii Mat. Zh.* [Ufa Math. J.], 2023, **15**, No. 3, 121–131.
21. S. A. Budochkina and H. P. Vu, “On an indirect representation of evolutionary equations in the form of Birkhoff’s equations,” *Eurasian Math. J.*, 2022, **13**, No. 3, 23–32.
22. L. He, H. Wu, and F. Mei, “Variational integrators for fractional Birkhoffian systems,” *Nonlinear Dynam.*, 2017, **87**, 2325–2334.
23. V. K. Kalpakides and A. Charalambopoulos, “On Hamilton’s principle for discrete and continuous systems: a convolved action principle,” *Rep. Math. Phys.*, 2021, **87**, No. 2, 225–248.
24. R. M. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics, II: Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1983.
25. M. I. Tleubergenov and D. T. Azhymbaev, “On the solvability of stochastic Helmholtz problem,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2021, **253**, 297–305.
26. M. I. Tleubergenov and G. T. Ibraeva, “On inverse problem of closure of differential systems with degenerate diffusion,” *Eurasian Math. J.*, 2019, **10**, No. 2, 93–102.
27. M. I. Tleubergenov and G. T. Ibraeva, “On the solvability of the main inverse problem for stochastic differential systems,” *Ukr. Math. J.*, 2019, **71**, No. 1, 157–165.
28. E. Tonti, “On the variational formulation for linear initial value problems,” *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1973, **95**, 331–359.
29. E. Tonti, “Variational formulation for every nonlinear problem,” *Internat. J. Engrg. Sci.*, 1984, **22**, No. 11–12, 1343–1371.

Svetlana A. Budochkina
 RUDN University, Moscow, Russia
 E-mail: budochkina-sa@rudn.ru

Thi Huyen Luu
 RUDN University, Moscow, Russia
 E-mail: luuthihuyen250393@gmail.com