

УДК 517.958

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-55-70

EDN: TRQNDY

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА—ПУАССОНА—ЛАНДАУ

А. В. БОБЫЛЕВ, И. Ф. ПОТАПЕНКО

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Аннотация. Работа посвящена аналитическому и численному исследованию решений кинетических уравнений Власова—Пуассона—Ландау (ВПЛ) для функций распределения с длиной L таких, что $\varepsilon = r_D/L \ll 1$, где r_D — дебаевский радиус. Предполагается также, что число Кнудсена $\text{Kn} = l/L = O(1)$, где l — длина свободного пробега электронов. Мы используем стандартную модель плазмы электронов с пространственно-однородным нейтрализующим фоном бесконечно тяжелых ионов. Начальные данные всегда предполагаются близкими к нейтральным. Мы изучаем асимптотическое поведение системы при малых $\varepsilon > 0$. Известно, что формальный предел уравнений ВПЛ при $\varepsilon = 0$ не описывает быстро осциллирующую часть электрического поля. Наша цель — изучить поведение «истинного» электрического поля вблизи этого предела. Мы рассматриваем задачу со стандартными изотропными по скоростям максвелловскими начальными условиями и показываем, что в бесстолкновительном случае затухание этих колебаний практически отсутствует. Выводится приближенная формула для электрического поля, которая затем подтверждается численно с использованием упрощенной модели Бхатнагара—Гросса—Крука (БГК) для уравнений ВПЛ. Также рассматривается другой класс начальных условий, который приводит к сильным колебаниям с амплитудой порядка $O(1/\varepsilon)$. Численные решения этого класса изучаются для различных значений параметров ε и Kn .

Ключевые слова: Кинетические уравнения Власова—Пуассона—Ландау, функция распределения, модель Бхатнагара—Гросса—Крука, колебания электрического поля.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. В. Бобылев, И. Ф. Потапенко. Асимптотические решения кинетических уравнений Власова—Пуассона—Ландау // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 55–70. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-55-70>

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Власова—Пуассона—Ландау (ВПЛ) описывают эволюцию по времени горячей столкновительной плазмы. Известно, что интеграл столкновений Ландау [1, 11] можно рассматривать как малое возмущение уравнений Власова—Пуассона (см., например, [12]). Поэтому интегралы столкновений часто игнорируются, и тогда в литературе рассматриваются бесстолкновительные модели плазмы. Однако это может быть верно только для относительно коротких промежутков времени. Цель настоящей статьи — показать важность столкновительных эффектов в некоторых процессах. Очевидно, что уравнения Власова—Пуассона—Ландау содержат два различных микроскопических масштаба длины: радиус Дебая r_D и длину свободного пробега

$l \gg r_D$. Кроме того, типичные граничные или начальные условия могут вводить третий макроскопический масштаб длины L такой, что $L \gg l \gg r_D$. Эти три различных масштаба делают общую картину кинетической эволюции плазмы довольно сложной. Целью данной работы является изучение различных стадий этой эволюции на большом времени как аналитическими, так и численными методами. Основное внимание уделяется (1) роли начальных условий и (2) важности столкновительных эффектов. Мы используем в основном упрощенный оператор столкновений типа Бхатнагара—Гросса—Крука (БГК), поскольку все основные свойства приближенных уравнений совпадают с аналогичными свойствами истинных кинетических уравнений Власова—Пуассона—Ландау. Наша главная цель — описать как аналитическими, так и численными методами качественную картину эволюции системы.

Статья организована следующим образом. Раздел 2 посвящен постановке задачи для уравнений ВПЛ и анализу малых параметров, временных масштабов и различных классов начальных условий. Асимптотические решения относительно малого параметра ε обсуждаются в разделах 3–4. Показано, что безразмерное электрическое поле не может иметь предела при $\varepsilon = 0$ из-за быстрых колебаний с частотой порядка $O(1/\varepsilon)$. Этот вывод подтверждается численным решением. Колебания имеют величину порядка $O(1)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Они затухают со временем только за счет столкновений, и этот факт показывает важность столкновительных эффектов в плазме. Все эти факты подтверждаются численным моделированием для упрощенного модельного уравнения со столкновительным членом типа БГК в разделе 5. Упрощение позволяет уменьшить размерность задачи до $d = 2$ и, следовательно, минимизировать затраты на вычисления. Численная схема и результаты расчетов подробно обсуждаются в разделе 5.

Следует подчеркнуть, что кинетические уравнения Власова—Пуассона—Ландау с математической точки зрения достаточно сложны. Поэтому они пока недостаточно изучены. В частности, для этих уравнений до сих пор не доказаны теоремы о глобальном существовании решений задачи Коши и подобные результаты. В то же время они широко используются в приложениях к физике. Основная цель настоящей работы — прояснить некоторые тонкие математические вопросы, связанные со многими работами физиков по асимптотическим свойствам этих кинетических уравнений. Поэтому работа написана на формальном уровне математической строгости. Неявно предполагается, что классические решения задачи Коши рассматриваемых уравнений существуют на любом временном интервале и обладают всеми необходимыми свойствами. Основное внимание уделено таким эффектам, которые не были отмечены в публикациях физиков (в частности, существование быстрых и очень медленно затухающих колебаний электрического поля). Результаты подтверждены точными численными исследованиями.

2. УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА—ПУАССОНА—ЛАНДАУ ДЛЯ ПЛАЗМЫ

Рассмотрим плазму из электронов с электрическим зарядом $(-e)$ и массой m и ионов с зарядом Ze и массой M , где $e > 0$ — элементарный заряд электрона. Ниже для простоты полагаем, что $Z = 1$. Условие слабого взаимодействия:

$$e^2 \rho_0^{-1/3} \ll T_0, \quad (2.1)$$

где ρ_0 и T_0 — соответственно типичные постоянные плотность и абсолютная температура электронов.

Пусть $f(x, v, t)$ — распределение электронов, а ионы равномерно распределены в пространстве с постоянной плотностью ρ_0 . Тогда самосогласованное электрическое поле выражается формулой

$$E(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} e \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\rho(y, t) - \rho_0}{|x - y|}, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2)$$

В равенстве (2.2) предполагается, что на бесконечности плазма находится в состоянии равновесия, а также

$$\rho(x, t) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \rho_0 = \text{const}$$

достаточно быстро, чтобы гарантировать сходимость интеграла.

Уравнение Власова—Ландау для $f(x, v, t)$ выглядит так:

$$(\partial_t + v \cdot \partial_x - eE \cdot \partial_v)f = 2\pi \frac{e^4}{m^2} \Lambda [Q_L(f, f) + Q^{(L)}(f, f_i)],$$

где $f_i(x, v, t)$ — функция распределения ионов, Λ — постоянная кулоновского логарифма,

$$Q_L(f, f) = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} dw |u|^{-3} (|u|^2 \delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta) \left(\frac{\partial}{\partial v_\beta} - \frac{\partial}{\partial w_\beta} \right) f(v) f(w),$$

$$Q^{(L)}(f, f_i) = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} dw |u|^{-3} (|u|^2 \delta_{\alpha\beta} - u_\alpha u_\beta) \left(\frac{\partial}{\partial v_\beta} - \frac{m}{M} \frac{\partial}{\partial w_\beta} \right) f(x, v, t) f_i(x, w, t),$$

$$\rho_0 = \int_{\mathbb{R}^3} dv f_i(x, v, t) = \text{const}, \quad u = v - w, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3.$$

Мы рассматриваем формальный предел очень тяжелых ионов с $M \rightarrow \infty$, предполагая, что их кинетическая энергия остается конечной. Тогда типичная скорость иона очень мала и поэтому $u \approx v$ в подынтегральном выражении $Q^{(L)}(f, f_i)$. Следовательно,

$$Q^{(L)}(f, f_i) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial v_\alpha} (|v|^2 \delta_{\alpha\beta} - v_\alpha v_\beta) \frac{\partial f}{\partial v_\beta} = \rho_0 K(f)$$

в пределе при $M \rightarrow \infty$. Поэтому упрощенное кинетическое уравнение для функции распределения электронов $f(x, v, t)$ имеет вид

$$(\partial_t + v \cdot \partial_x - eE \cdot \partial_v)f = 2\pi \frac{e^4}{m^2} \Lambda [Q_L(f, f) + \rho_0 K(f)]. \quad (2.3)$$

Самосогласованное электрическое поле $E(x, t)$ задается уравнением (2.2). Его также можно рассматривать как решение уравнений Максвелла в нерелятивистском пределе $c = \infty$

$$\text{div} E = 4\pi e (\rho_0 - \rho), \quad \text{curl} E = 0, \quad (2.4)$$

или, что то же самое, градиент решения $\varphi(x, t)$ уравнения Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi e (\rho_0 - \rho), \quad E = \nabla \varphi, \quad (2.5)$$

с нулевыми условиями на бесконечности. Кинетическое уравнение (2.3) в паре с уравнением (2.4) или, что то же самое, с уравнением (2.5) называются *уравнениями Власова—Пуассона—Ландау*.

Заметим, что это уравнение было выведено выше в предположении (2.1) слабого взаимодействия между электронами. Параметры ρ_0 и T_0 в (2.1) соответствуют типичной электронной плотности и абсолютной температуре (выраженной в единицах энергии) на бесконечности. Рассмотрим задачу Коши для $t > 0$ во всем пространстве $(x, v) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ с начальными условиями

$$f|_{t=0} = \rho_0 \theta_0^{-3/2} \tilde{f}_0 \left(\frac{x}{L}, \frac{v}{\theta_0^{1/2}} \right), \quad \theta_0 = \frac{T_0}{m}.$$

Заметим, что длина L рассматривается здесь как свободный параметр. Она не предполагается большой с самого начала. Обычно мы также предполагаем, что

$$\tilde{f}_0(\tilde{x}, \tilde{v}) \xrightarrow{|\tilde{x}| \rightarrow \infty} M(|\tilde{v}|) = (2\pi)^{-3/2} \exp(-|\tilde{v}|^2/2).$$

Более того, та же самая константа Максвелла $M(|\tilde{v}|)$ на бесконечности для безразмерной задачи предполагается для всех $t > 0$. Это предположение будет рассматриваться ниже как граничное условие на бесконечности. Для постановки безразмерной задачи обозначим

$$f(x, v, t) = \rho_0 \theta_0^{-3/2} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{v}, \tilde{t}), \quad F(f) = m F_0 \tilde{F}(\tilde{f}), \quad C(f) = C_0 \tilde{C}(\tilde{f}),$$

с соответствующими константами F_0 для силы и C_0 , и положим

$$\tilde{x} = x/L, \quad \tilde{v} = v/\theta_0^{1/2}, \quad \tilde{t} = t/t_0, \quad t_0 = L/\theta_0^{1/2}.$$

Также определим безразмерное электронное поле $\tilde{E} = E/E_0$ в (2.3), (2.4) таким образом, что полученные уравнения для $\tilde{E}$ не содержат никаких параметров. Тогда безразмерные уравнения для $\tilde{f}$ и $\tilde{E}$ будут иметь вид

$$\begin{aligned} f_t + v \cdot f_x - A E \cdot f_v &= B C(f), \quad C(f) = Q_L(f, f) + K(f), \\ \operatorname{div} E &= 1 - \rho, \quad \operatorname{curl} E = 0, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где тильды опущены. Эти уравнения содержат только два безразмерных параметра

$$A = \left(\frac{L}{r_D} \right)^2, \quad B = \frac{L}{l} = \frac{1}{Kn}, \quad (2.7)$$

где Kn обозначает число Кнудсена,

$$r_D = \left(\frac{4\pi\rho_0 e^2}{T_0} \right)^{-1/2}, \quad l = \frac{\sqrt{2\pi} T_0^2}{e^4 \rho_0 \Lambda}, \quad \Lambda = \ln \frac{r_D T_0}{e^2}$$

обозначают соответственно радиус Дебая, среднюю длину свободного пробега электронов и кулоновский логарифм.

Важно ясно понимать, что параметры A и B в уравнениях (2.6) не являются независимыми. Действительно, кинетическое уравнение (2.6) было формально выведено в предположении (2.1) слабого взаимодействия. Традиционный малый параметр δ в физике плазмы (см., например, [10]) равен обратному числу частиц в сфере или кубе Дебая. Неравенство

$$\delta = \frac{1}{\rho_0 r_D^3} = \left(\frac{4\pi e^2 \rho_0^{1/3}}{T_0} \right)^{3/2} \ll 1, \quad (2.8)$$

очевидно, эквивалентно неравенству (2.1). Следовательно,

$$\Lambda \approx \ln \frac{1}{\delta} \gg 1, \quad \frac{l}{r_D} = c_1 \frac{1}{\delta \Lambda} \approx c_1 \left(\delta \ln \frac{1}{\delta} \right)^{-1} \gg 1,$$

и

$$\frac{A}{B} = \frac{L l}{r_D^2} \approx \left(\delta \ln \frac{1}{\delta} \right)^{-1} \frac{L}{r_D} \gg 1, \quad \text{если} \quad L \geq r_D,$$

где c_1 — абсолютная константа. Это неравенство подтверждает, что член столкновения Ландау следует рассматривать как малый поправочный член в уравнении Власова.

Имеется также второе условие применимости уравнения Ландау—Власова, а именно неравенство $L \ll d$, где d — эффективный радиус действия потенциала. В случае плазмы можно положить $d \approx r_D$ и ввести второй (вместе с δ из (2.8)) параметр, а именно

$$\varepsilon = A^{-1/2} = \frac{r_D}{L} \ll 1.$$

Число Кнудсена в уравнениях (2.6), (2.7) можно выразить через ε и δ как

$$Kn = \frac{l}{L} = \frac{l}{r_D} \varepsilon \approx c_1 \frac{\varepsilon}{\delta \ln 1/\delta}.$$

В следующем разделе мы рассмотрим некоторые асимптотические решения уравнений (2.6) вблизи предела $\varepsilon \rightarrow 0$, предполагая, что Kn ограничено.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВПЛ

Сделаем еще одно упрощение и предположим, что начальные данные f_0 и решение f задачи (2.6) зависят только от одной пространственной переменной. Для краткости сохраним ниже прежние обозначения x , полагая, что $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}_+$. Введем также безразмерное электрическое поле

$$E^\varepsilon(x, t) = E(x, t)/\varepsilon^2, \quad \varepsilon^2 = A^{-1}.$$

Замечание 3.1. Конечно, мы имеем в виду, что «истинное» электрическое поле $\tilde{E} \in \mathbb{R}^3$ — это вектор $\tilde{E} = (E, 0, 0)$, параллельный (или антипараллельный) оси x . Ниже, с некоторой долей злоупотребления обозначениями, символами типа $E_x, f_x, \dots$ обозначим частные производные по x , тогда как через v_x будем обозначать x -компоненту вектора $v \in \mathbb{R}^3$.

Получаем из (2.6):

$$f_t^\varepsilon + v_x f_x^\varepsilon - E^\varepsilon \cdot f_{v_x}^\varepsilon = \frac{1}{Kn} C(f^\varepsilon), \quad E_x^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} (1 - \rho^\varepsilon), \quad \varepsilon > 0, \quad (3.1)$$

где мы добавили верхние индексы к f, ρ , чтобы подчеркнуть их ε -зависимость. Типичное начальное условие имеет вид

$$f^\varepsilon|_{t=0} = [2\pi T_0(x)]^{-3/2} \exp[-|v|^2/2T_0(x)], \quad T_0(|x|) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 1. \quad (3.2)$$

Обозначим

$$\rho^\varepsilon = \langle f^\varepsilon, 1 \rangle, \quad j^\varepsilon = \langle f^\varepsilon, v_x \rangle, \quad \text{где} \quad \langle f, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} dv f(v) \psi(v).$$

Теперь мы можем рассмотреть формальный предел уравнений ВПЛ при $\varepsilon \rightarrow 0$ при некоторых предположениях о «хорошем поведении» $f^\varepsilon(x, v, t)$ и $E^\varepsilon(x, t)$ для $\varepsilon \rightarrow 0$. Полученные уравнения имеют следующий вид.

Предложение 3.1. *Предельные функции $f^0(x, v, t)$ и $E^0(x, v, t)$ удовлетворяют уравнениям*

$$f_t^0 + v_x f_x^0 - E^0 f_{v_x}^0 = \frac{1}{Kn} C(f^0), \quad (3.3)$$

$$E^0 = \frac{1}{Kn} \langle C(f^0), v_x \rangle - \langle f^0, v_x^2 \rangle_x, \quad f^0|_{t=0} = f_0, \quad (3.4)$$

что влечёт

$$\rho^0(x, t) = \langle f^0, 1 \rangle = 1, \quad j^0(x, t) = \langle f^0, v_x \rangle = 0.$$

Доказательство. Формальное доказательство предложения 3.1 очевидно. Уравнение (3.1) для E приводит к равенству $\rho^0 = 1$. Это, в свою очередь, возможно только при $j^0 = 0$ из-за уравнения непрерывности и граничных условий на бесконечности. Наконец, формула для E^0 следует из уравнения $j_t^0 = 0$. $\square$

Предельные уравнения (3.3), (3.4) изучались аналитическими и численными методами во многих работах, в частности, в [2, 5–7, 9]. Можно сказать, что в этом случае уравнение Пуассона для электрического поля заменяется явной формулой (3.4) для E^0 , которая следует из условий квазинейтральности. Конечно, аналогичный формальный предел может быть определен и для более сложного случая двухкомпонентной плазмы с ионами, имеющими конечную массу и произвольный электрический заряд. В данной работе мы рассматриваем только упрощенную модель, чтобы избежать некоторых менее важных деталей.

4. ПОВЕДЕНИЕ $E^\varepsilon(x, t)$ ПРИ $\varepsilon \rightarrow 0$

Начнем с первого вопроса и предположим, что существует «хорошее» решение задачи (3.1), (3.2) для малых ε . Затем умножим уравнение (3.1) для $E^\varepsilon(x, t)$ на ε^2 и продифференцируем по переменной t . Уравнение непрерывности и граничные условия на бесконечности приводят к уравнению

$$\varepsilon^2 E_t^\varepsilon = j^\varepsilon, \quad j^\varepsilon = \langle f^\varepsilon, v_x \rangle.$$

Затем дифференцируем первое уравнение ещё раз и после несложных преобразований получаем на основе уравнений (3.1), (3.2) следующую задачу:

$$\varepsilon^2 E_{tt}^\varepsilon + E^\varepsilon = S^\varepsilon(x, t) = -\langle f^\varepsilon, v_x^2 \rangle_x + \frac{1}{Kn} \langle C(f^\varepsilon), v_x \rangle + \varepsilon^2 E^\varepsilon E_x^\varepsilon; \quad (4.1)$$

$$E^\varepsilon|_{t=0} = E_t^\varepsilon|_{t=0} = 0. \quad (4.2)$$

Задача (4.1), (4.2) может быть формально «решена» преобразованием Лапласа по t . Тогда мы получим

$$E^\varepsilon(x, t) = \int_0^{t/\varepsilon} d\tau (\sin \tau) S^\varepsilon(x, t - \varepsilon\tau) = S^\varepsilon(x, t) - S^\varepsilon(x, 0) \cos \frac{t}{\varepsilon} - \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} d\tau (\cos \tau) S_t^\varepsilon(x, t - \varepsilon\tau). \quad (4.3)$$

Теперь мы можем доказать следующую оценку.

Предложение 4.1. *Если*

$$|S_{tt}^\varepsilon(x, t)| \leq C(x), \quad 0 \leq t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

где C не зависит от ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, то справедлива следующая асимптотическая формула:

$$\begin{aligned} E^\varepsilon(x, t) &= S^\varepsilon(x, t) - S^\varepsilon(x, 0) \cos \frac{t}{\varepsilon} + \varepsilon \Delta(x, t), \\ |\Delta(x, t)| &\leq |S_t^\varepsilon(x, 0)| + C(x)t, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Доказательство. Достаточно оценить последний интеграл в (4.3). Интегрируя по частям, получаем

$$\Delta(x, t) = - \int_0^{t/\varepsilon} d\tau (\sin \tau)' S_t^\varepsilon(x, t - \varepsilon\tau) = -S_t^\varepsilon(x, 0) \sin \frac{t}{\varepsilon} - \varepsilon \int_0^{t/\varepsilon} d\tau (\sin \tau) S_{tt}^\varepsilon(x, t - \varepsilon\tau).$$

Оценка (4.5) следует непосредственно из этого равенства и предположения (4.4) предложения 4.1. Тем самым доказательство завершено. $\square$

Заметим, что $S^0(x, t) = E^0(x, t)$ в обозначениях уравнения (3.4). Таким образом, $E^\varepsilon(x, t)$ быстро осциллирует при $\varepsilon \rightarrow 0$ с частотой $\omega_\varepsilon = 1/\varepsilon$ вблизи своего среднего $E^0(x, t)$ с амплитудой $|E^0(x, 0)| = O(1)$. Например, $E^0(x, 0) = -T_0'(x)$ для начального локального максвеллиана с температурой $T_0(x)$.

Вероятно, дополнительный член в кинетическом уравнении (3.3) приводит лишь к небольшому возмущению $f^0(x, v, t)$ из-за быстрых колебаний. Но он важен для понимания поведения $E^\varepsilon(x, t)$.

Конечно, предположение (4.4) предложения 4.1 остается недоказанным. Однако оно выглядит реалистичным для «хорошего» решения $f^0(x, v, t)$ уравнения (3.3) с $E^\varepsilon(x, t)$ (без остаточного члена) из предложения 4.1. С другой стороны, асимптотическую формулу для $E^\varepsilon(x, t)$ можно проверить численно для общего случая или даже аналитически для линеаризованного бесстолкновительного случая (см. [3]).

Следует отметить, что быстрые колебания электрического поля для бесстолкновительных уравнений Власова—Пуассона ранее изучались в литературе (см., в частности, важную статью [8] Гренье). Наше уравнение (4.1) для $\text{Kn} = \infty$ можно рассматривать как одномерную версию уравнения (27) из [8] (после интегрирования и очевидной смены обозначений). Методы этой статьи основаны на специальном представлении решений (уравнение (12) из [8]), которое удобно только для уравнений типа Власова и вряд ли может быть использовано для уравнений ВПЛ.

5. Модельные уравнения Власова—Пуассона—БГК и численные примеры

В начале мы дадим краткое описание численного алгоритма и конечно-разностной схемы, с помощью которых решается упрощенная модель уравнений ВПЛ. Затем мы покажем несколько графиков, представляющих расчет для двух типов исходных данных и различных входных характеристик. В частности, расчеты качественно иллюстрируют полученные выше аналитические результаты.

Для численного моделирования возьмем упрощенную одномерную по скорости $v \in \mathbb{R}$ и координате $x \in \mathbb{R}$ модель 1V1D-версии уравнений (3.1) и (3.4), (4.1) (опуская нижний индекс x в v_x , E_x)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \hat{I}_x f - \hat{I}_v f = \frac{1}{Kn} \hat{C}(f); \quad \hat{I}_x f = v \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \hat{I}_v f = E \frac{\partial f}{\partial v}; \quad (5.1)$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \rho E = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{Kn} J(x, t), \quad \varepsilon \neq 0, \quad (5.2)$$

$$E = \frac{1}{\rho} \left[-\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{Kn} J(x, t) \right], \quad \varepsilon = 0,$$

с начальными условиями

$$f|_{t=0} = f^0(x, v), \quad \rho|_{t=0} = \rho^0(x), \quad E|_{t=0} = E^0(x), \quad \varepsilon^2 \frac{\partial E}{\partial t} \Big|_{t=0} = j^0(x).$$

Здесь $J(x, t) = \langle \hat{C}(f), v \rangle$, $\rho(x, t) = \langle f, 1 \rangle$, $p(x, t) = \langle f, v^2 \rangle$, где используется модель типа БГК

$$\hat{C}(f) = f_c(x, v, t) - f(x, v, t), \quad f_c(x, v, t) = \frac{\rho}{[2\pi(p/\rho)]^{1/2}} \exp \left[-\frac{|v|^2}{2(p/\rho)} \right] \quad (5.3)$$

для члена столкновений $\hat{C}(f)$. Угловые скобки $\langle \dots \rangle$ обозначают в этом разделе интеграл по $\mathbb{R}$. Упрощенные уравнения (5.1)–(5.3) рассматриваются на отрезке $[0, 2\pi]$ с периодическими граничными условиями $f(2\pi, v, t) = f(0, v, t)$, $E(2\pi, t) = E(0, t)$. Для построения 1V1D конечно-разностной схемы для (5.1)–(5.3) бесконечный интервал скорости заменяется на $v \in [-v_m, v_m]$. Граничные значения дискретной скорости $\pm v_m$ выбираются достаточно большими, чтобы обеспечить равенство нулю распределения $f(x, \pm v_m, t) \simeq 0$. В рассматриваемой области введем пространственно-временную сетку $\omega = \omega_x \times \omega_v \times \omega_t$ с шагами дискретизации Δx , Δv и Δt :

$$\begin{aligned} \omega_x &= \{x_{l+1} = x_l + \Delta x, \quad l = 0, 1, \dots, L-1, \quad x_0 = 0, \quad x_L = 2\pi\}, \\ \omega_v &= \{v_{k+1} = v_k + \Delta v, \quad k = 0, 1, \dots, K-1, \quad v_0 = -v_m, \quad v_K = v_m\}, \\ \omega_t &= \{t^{n+1} = t^n + \Delta t, \quad n = 0, 1, \dots, \quad t^0 = 0\}, \end{aligned}$$

обозначая $f_{l,k}^n = f(l\Delta x, k\Delta v, n\Delta t)$, $E_l^n = E(l\Delta x, n\Delta t)$. Интегралы определяются суммами

$$\begin{aligned} \rho_l^n &= \sum_k f_{l,k}^n \Delta v, \quad j_l^n = \sum_k f_{l,k}^n v_k \Delta v, \\ p_l^n &= \sum_k f_{l,k}^n v_k^2 \Delta v, \quad J_l^n = \sum_k \hat{C}_{l,k}^n v_k \Delta v, \end{aligned}$$

где $\hat{C}_{l,k}^n = f_{c,l,k}^n - f_{l,k}^n$ в обозначениях уравнения (5.3).

Используя консервативную дискретизацию для уравнений (5.1), получаем конечно-разностные операторы

$$\begin{aligned} \hat{I}_x f_{l,k}^n &= \frac{(vf^n)_{l+\frac{1}{2},k} - (vf^n)_{l-\frac{1}{2},k}}{\Delta x}, \\ \hat{I}_v f_{l,k}^n &= \frac{(E^{n+1}f^n)_{l,k+\frac{1}{2}} - (E^{n+1}f^n)_{l,k-\frac{1}{2}}}{\Delta v} \end{aligned}$$

с потоками

$$\begin{aligned} (vf^n)_{l+\frac{1}{2},k} &= v_k \left(\frac{f_{l,k}^n + f_{l+1,k}^n}{2} \right) - |v_k| \left(\frac{f_{l+1,k}^n - f_{l,k}^n}{2} \right), \\ (E^{n+1}f^n)_{l,k+\frac{1}{2}} &= E_l^{n+1} \left(\frac{f_{l,k}^n + f_{l,k+1}^n}{2} \right) + |E_l^{n+1}| \left(\frac{f_{l,k+1}^n - f_{l,k}^n}{2} \right). \end{aligned}$$

Из уравнения (5.2) получаем его дискретный аналог для определения электрического поля. Тогда система (5.1), (5.2) принимает вид

$$\frac{f_{l,k}^{n+1} - f_{l,k}^n}{\Delta t} + \hat{I}_x f_{l,k}^n - \hat{I}_v f_{l,k}^n = \frac{1}{Kn} C_{l,k}^n; \quad (5.4)$$

$$\varepsilon^2 \frac{E_l^{n+1} - 2E_l^n + E_l^{n-1}}{\Delta t^2} + \rho_l^n E_l^{n+1} = \frac{J_{l,k}^n}{Kn} - \frac{\Delta p_l^n}{\Delta x}, \quad \varepsilon \neq 0; \quad (5.5)$$

$$E_l^{n+1} = \frac{1}{\rho_l^n} \left(\frac{J_{l,k}^n}{Kn} - \frac{\Delta p_l^n}{\Delta x} \right), \quad \varepsilon = 0. \quad (5.6)$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{f_{l,k}^{n+1} - f_{l,k}^n}{\Delta t} v_k \Delta v &= \frac{\Delta j^{n+1}}{\Delta t}, \quad \frac{\Delta j^{n+1}}{\Delta t} = \varepsilon^2 \frac{E_l^{n+1} - 2E_l^n + E_l^{n-1}}{\Delta t^2}, \\ \sum_k (\hat{I}_v f_{l,k}^n) v_k \Delta v &= -E_l^{n+1} \sum_k f_{l,k}^n \Delta v = -E_l^{n+1} \rho_l^n, \\ \sum_k \hat{I}_x f_{l,k}^n v_k \Delta v &= \frac{\Delta p_l^n}{\Delta x}, \end{aligned}$$

мы видим, что уравнения (5.5), (5.6) можно получить из уравнения (5.4). Квазинейтральный предел *формально* можно получить, если в уравнениях (5.2), (5.5) ε равен нулю: $\varepsilon = 0$, $E^0(x) = 0$, $j = 0$. Тогда осциллирующая во времени часть электрического поля в (5.6) обращается в нуль. Кроме того, в этой численной формуле отсутствует шаг по времени.

Таким образом, уравнения (5.4)–(5.6) задают численную схему первого порядка. Вычислительный алгоритм следующий:

1. На каждом временном шаге t^{n+1} все необходимые члены вычисляются с использованием $f_{l,k}^n$.
2. Затем электрическое поле E_l^{n+1} получается для $(n+1)$ -го временного шага из

$$E_l^{n+1} = \frac{1}{1 + \sigma \rho_l^n} \left[-\sigma \left[\frac{\Delta p_l^n}{\Delta x} - \frac{J_{l,k}^n}{Kn} \right] + (2E_l^n - E_l^{n-1}) \right] \quad (5.7)$$

с использованием уравнения (5.6) для формального предела при $\varepsilon = 0$. Здесь $\sigma = \Delta t^2/\varepsilon^2$.

3. Функция распределения вычисляется из уравнения

$$f_{l,k}^{n+1} = \Delta t f_{l,k}^n - \Delta t \hat{I}_x f_{l,k}^n + \Delta t \hat{I}_v f_{l,k}^n + \Delta t \frac{1}{Kn} C_{l,k}^n. \quad (5.8)$$

В следующей части раздела представлены численные эксперименты по изучению эволюции электрического поля для параметров $0 \leq \varepsilon \leq 1$ и $0 \leq Kn \leq 0.01$. Скорость изменяется от $-v_m = -20$ до $v_m = 20$ с шагом скорости $\Delta v = 0.1$, шаг пространственной сетки обычно равен $\Delta x \leq 0.1$. Шаг по времени зависит от ε . Его следует брать достаточно малым, поскольку грубые шаги не улавливают самые быстрые временные масштабы. Ниже рассматриваются два типа начальных данных:

$$f_{1,2}^0(x, v) = \frac{a_{1,2}(x, v)}{[2\pi T_{1,2}^0(x)]^{1/2}} \exp \left[-\frac{|v|^2}{2T^0(x)} \right],$$

где

$$(I) \quad a_1 = 1, \quad (II) \quad a_2 = 1 + \frac{v \cos x}{T^0(x) + v^2},$$

с двумя различными типами начальных условий для $E(x, t)$:

$$\rho_1^0 = 1, \quad E_1^0(x) = 0, \quad \frac{\partial E_1}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad j_1^0 = 0; \quad (I)$$

$$\rho_2^0 = 1, \quad E_2^0(x) = 0, \quad \varepsilon^2 \frac{\partial E_2}{\partial t} \Big|_{t=0} = j_2^0. \quad (II)$$

Представленные ниже численные результаты сравниваются с приближенной формулой для электрического поля $E(x, t)$ из [4]

$$E(x, t) \approx -\frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial p(x, 0)}{\partial x} e^{-\lambda t} \cos \frac{t}{\varepsilon}, \quad \lambda = \frac{\beta}{Kn}, \quad \beta = \text{const}. \quad (5.9)$$

При отсутствии столкновений $Kn = \infty$ имеем $C(f) = J(f) = 0$ в (5.6)–(5.8) и $\lambda = 0$ в (5.9).

В начале мы рассмотрим эволюцию функции $f_1^0(x, v)$ для начальных условий (I) с температурой, распределенной как $T_1^0(x) = 1 - A \cos x$, $A = 0.5$. Отметим, что амплитуда колебаний электрического поля пропорциональна A и зависит от этого параметра возмущения линейно через $\partial p/\partial x$. Несколько расчетов выполнены для набора значений параметра $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Численные результаты на рис. 1 и 2 иллюстрируют зависимость колебаний электрического поля от времени. Напомним, что $\varepsilon = 1$ соответствует периодическому в пространстве решению с периодом $2\pi r_D$ (масштаб пространства равен радиусу Дебая r_D). Условие $\varepsilon = 0$ соответствует квазинейтральному пределу, см. (5.6). Эта формула удобна для долговременного моделирования, поскольку нет ограничений на временной шаг, за исключением обычных численных ограничений. В этом случае колебания поля исчезают, и электрическое поле становится равным нулю после короткой начальной стадии $t \simeq \pi/2$ (рис. 1, $\varepsilon = 0$). Этот формальный подход не улавливает реального поведения электрического поля, но он приближенно описывает среднее значение $E(x, t)$ для *любых* малых значений $\varepsilon \ll 1$. В [3] было показано, что длинноволновые колебания электрического поля в бесстолкновительной плазме могут существовать без затухания очень долгое время (см. (5.9)). Этот факт подтверждается на рис. 1. Чем меньше параметр ε , тем слабее затухание колебаний.

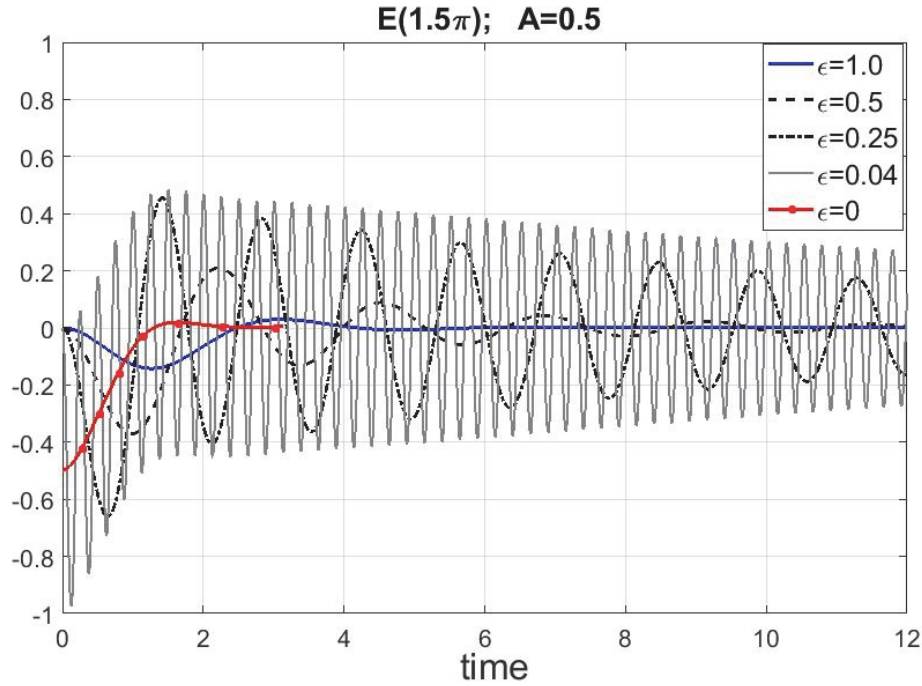


Рис. 1. Электрическое поле $E(1.5\pi, t)$ как функция времени для различных значений параметра $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

FIG. 1. Electric field $E(1.5\pi, t)$ as a function of time for different values of parameter $0 \leq \varepsilon \leq 1$.

Для оценки затухания колебаний $E(x, t)$ вводится амплитуда колебаний $\Delta E(x, t; \varepsilon)$, вычисленная за период колебаний T_{osc} :

$$\Delta E(x, t; \varepsilon) = |E_{max} - E_{min}| ; \quad T_{osc} = 2\pi\varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5.10)$$

$mT_{osc} \leq t \leq (1+m)T_{osc}$

Эта характеристика $\Delta E(x, t; \varepsilon)$ представлена на рис. 2 для $x = \pi/2$ и различных значений параметра ε .

Замечание 5.1. В принципе, параметр $\varepsilon(t)$ может менять свое значение в ходе численного решения больших по времени физических задач. Поскольку грубый шаг по времени не сохраняет правильную эволюцию поля, важно учитывать зависимость Δt от ε такую, что $\Delta t/\varepsilon \ll 1$. Несмотря на возможно небольшое влияние на саму функцию распределения, ошибка в оценке поля может играть важную роль для некоторых задач динамики плазмы.

Вторую серию численных расчетов для второго типа начальных данных $f_2(x, v)$ с начальными условиями (II)

$$\rho_2^0 = 1, \quad E_2^0 = 0, \quad \varepsilon^2 \frac{\partial E(x, 0)}{\partial t} = j_2^0(x)$$

и распределением температуры

$$T_2^0(x) = 1 + A(1 - \cos x)$$

начинаем с бесстолкновительного случая $\text{Kn} = \infty$. Переход от начальных условий (I) к более общим ограничениям (II) существенно увеличивает величину осциллирующей части поля $E(x, t \geq 0) \simeq 1/\varepsilon$ (см. [4]).

Графики 3 и 4 дают общий вид эволюции электрического поля $E(x, t)$ для $\varepsilon = 0.04$ от времени для $x = \pi, 1.5\pi$. На рис. 4 показаны графики E и $\partial p/\partial x$, увеличенные для лучшей наглядности.

На рис. 5 и 6 представлены два результата вычислений для второго варианта в бесстолкновительном ($\text{Kn} = \infty$) и столкновительном ($\text{Kn} = 1$) случаях, $\varepsilon = 0.01$. Зависимость $\partial p/\partial x$ от времени во втором варианте более подробно представлена на рис. 5.

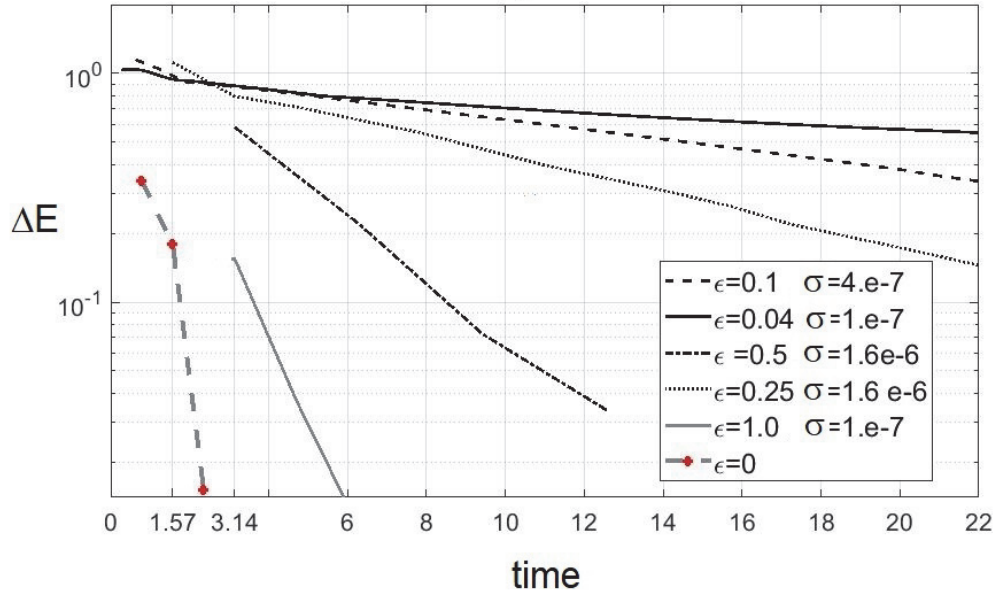


Рис. 2. $\Delta E(\pi/2, t; \varepsilon)$ как функция времени для различных значений параметра $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $\text{Kn} = \infty$.

FIG. 2. $\Delta E(\pi/2, t; \varepsilon)$ as a function of time for different values of parameter $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $\text{Kn} = \infty$.

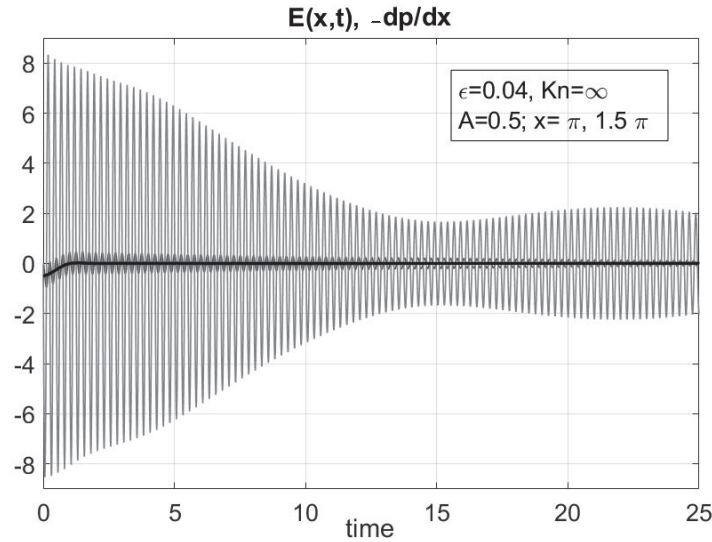


Рис. 3. Электрическое поле $E(x, t)$, $x = \pi$ — светло-серая линия, и $x = 3\pi/2$ — темно-серая линия, $\partial p / \partial x$, $x = 3\pi/2$ — черная линия; $\text{Kn} = \infty$, $\varepsilon = 0.04$ и $A = 0.5$.

FIG. 3. Electric field $E(x, t)$, $x = \pi$ — light grey line, and $x = 3\pi/2$ — dark grey line, $\partial p / \partial x$, $x = 3\pi/2$ — black line; $\text{Kn} = \infty$, $\varepsilon = 0.04$ and $A = 0.5$.

Для сравнения результатов двух вариантов начальных данных на рис. 7 представлены расчеты колебаний электрического поля в столкновительном случае, $\text{Kn} = 1$, для первого варианта: начальная функция f_1^0 с начальными условиями (II) и начальным распределением температуры $T_2^0(x)$. Длительность затухания электрического поля в обоих случаях сопоставима, но амплитуда колебаний в первом случае пренебрежимо мала.

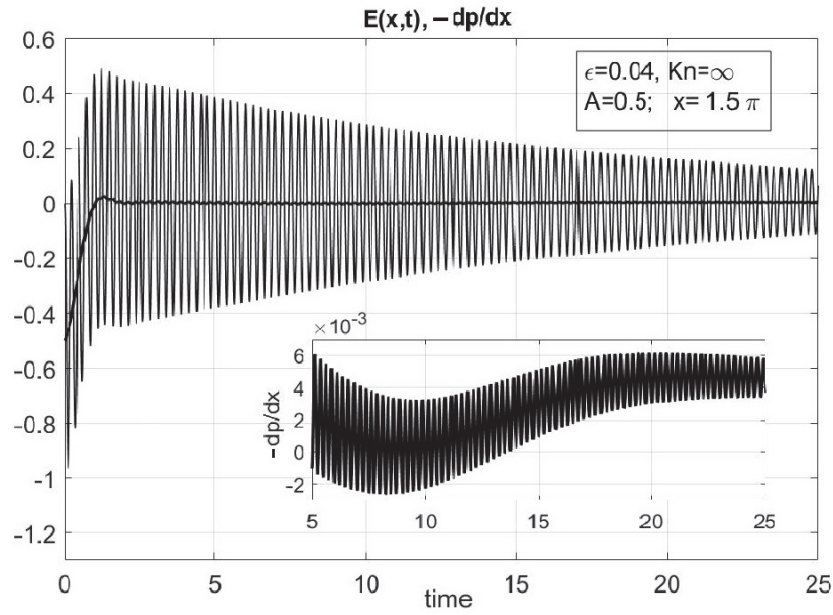


РИС. 4. Электрическое поле $E(x,t)$ — темно-серая линия, $-\partial p/\partial x$ — черная линия частично изображены в большем масштабе; $x = 3\pi/2$, $\text{Kn} = \infty$, $\varepsilon = 0.04$ и $A = 0.5$.

FIG. 4. Electric field $E(x,t)$ — dark grey line, $-\partial p/\partial x$ — black line are partially depicted at a larger scale; $x = 3\pi/2$, $\text{Kn} = \infty$, $\varepsilon = 0.04$ and $A = 0.5$.

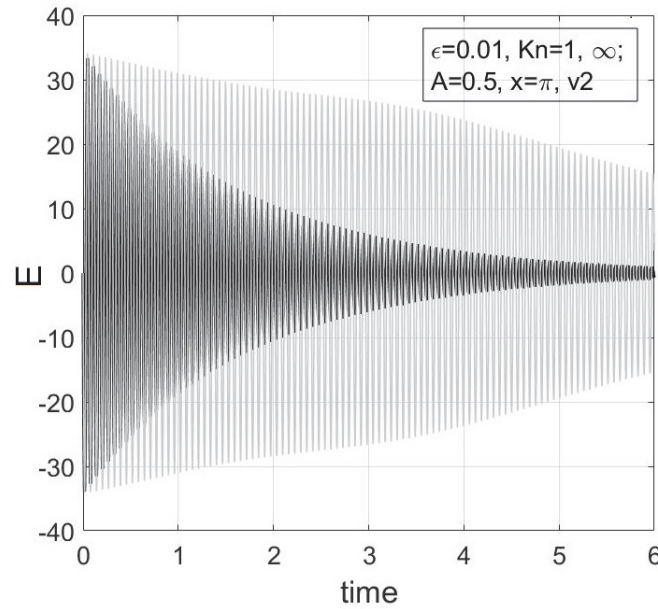


РИС. 5. Зависимость электрического поля $E(x,t)$ от времени; $\text{Kn} = \infty$ — серые линии; $\text{Kn} = 1$ — черные линии, $x = \pi$.

FIG. 5. Electric field $E(x,t)$ dependence on time; $\text{Kn} = \infty$ — grey lines; $\text{Kn} = 1$ — black lines, $x = \pi$.

В следующих примерах сравниваются столкновительные режимы для второго варианта при различных числах Кнудсена, которые принимаются в качестве параметра. Ищем зависимость затухания колебаний от величины Kn . На рис. 8 показана зависимость $E(\pi/2, t)$, $\varepsilon = 0.001$ для трех

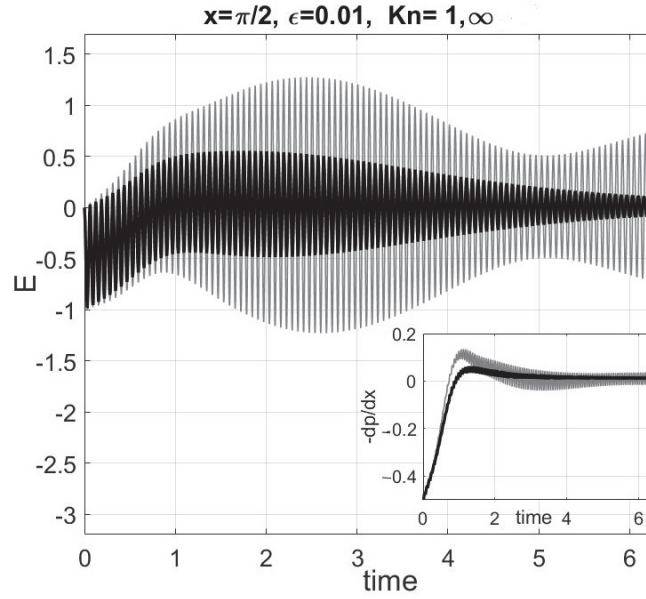


РИС. 6. Зависимость от времени электрического поля $E(x, t)$ и $\partial p / \partial x$: $\text{Kn} = \infty$ — серые линии; $\text{Kn} = 1$ — черные линии. $x = \pi/2$.

FIG. 6. Electric field $E(x, t)$ and $\partial p / \partial x$ dependence on time: $\text{Kn} = \infty$ — grey lines; $\text{Kn} = 1$ — black lines. $x = \pi/2$.

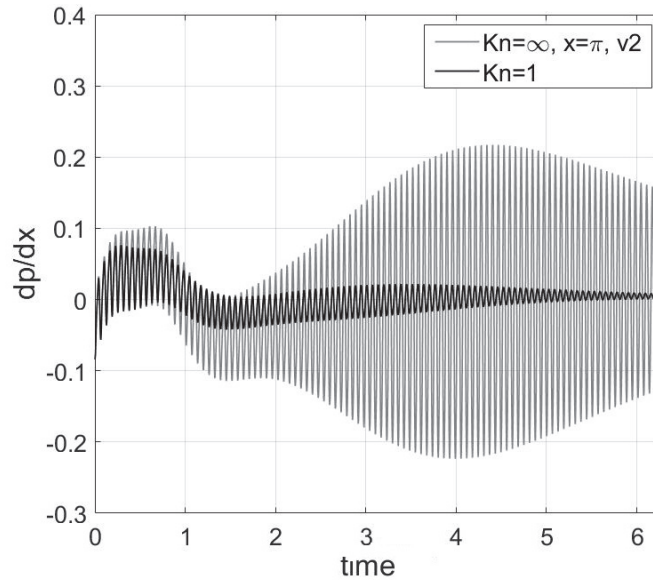


РИС. 7. Временная зависимость $\partial p / \partial x$ для $\text{Kn} = \infty$ и $\text{Kn} = 1$, $x = \pi/2$.

FIG. 7. Time dependence of $\partial p / \partial x$ for $\text{Kn} = \infty$ and $\text{Kn} = 1$, $x = \pi/2$.

чисел Кнудсена $\text{Kn} = 0.1, 0.05, 0.025$. Очевидно, что чем меньше число Кнудсена, тем медленнее $E(x, t)$ сходится к нулю при больших t .

Фактически, рис. 9 описывает переход к гидродинамическому режиму. Видно, что через некоторое время, пропорциональное Kn^{-1} , колебания исчезают. Также видно, что чем меньше число Кнудсена, тем выше проходят линии $E(x, t)$.

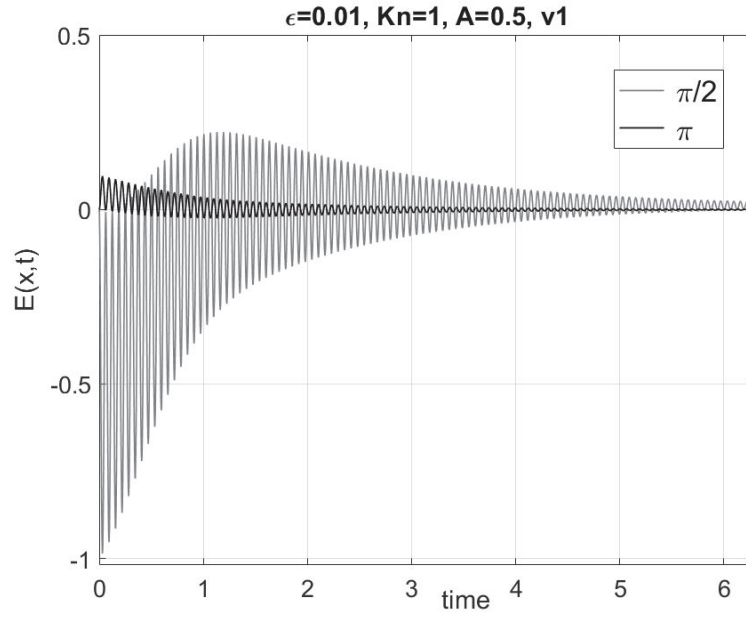


Рис. 8. $E(x, t)$ для начальной функции f_1^0 с начальными условиями (I) и $T_2^0(x)$.

FIG. 8. $E(x, t)$ for the initial function f_1^0 with the initial conditions (I) and $T_2^0(x)$.

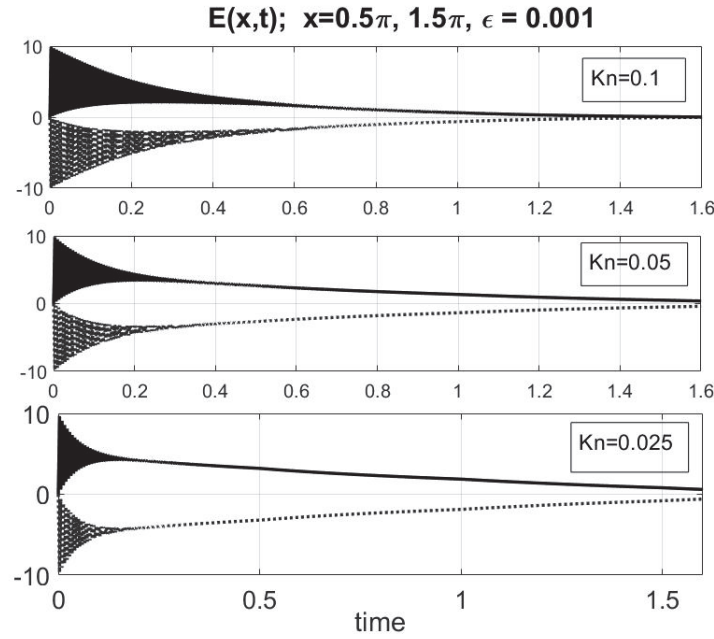


Рис. 9. Электрическое поле $E(x, t)$ для $\text{Kn} = 0.1, 0.05, 0.025$; $\varepsilon = 10^{-3}$, $A = 5$, $x = 3\pi/2$ — пунктирная линия, $\pi/2$ — сплошная линия.

FIG. 9. Electric field $E(x, t)$ for $\text{Kn} = 0.1, 0.05, 0.025$; $\varepsilon = 10^{-3}$, $A = 5$, $x = 3\pi/2$ — dotted line, $\pi/2$ — solid line.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы изучили класс таких решений уравнений ВПЛ, для которых типичная длина L намного больше радиуса Дебая r_D . Принимая формальный предел такой, что $\varepsilon = r_D/L \rightarrow 0$, $\text{Kn} = l/L$ остается ограниченным, мы получаем кинетическое уравнение, которое численно изучалось в нескольких публикациях. Нашей целью было прояснить некоторые математические вопросы, связанные с этим пределом. В частности, было показано, что предельное уравнение дает, вероятно, правильные результаты для функции распределения, но не для самосогласованного электрического поля. Причина в том, что поле содержит быстро осциллирующие члены, пропорциональные $\exp(\pm it/\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это новое наблюдение показывает, что с предельными уравнениями нужно проявлять осторожность.

Мы считаем, что эти свойства уравнений ВПЛ могут быть строго доказаны, все они подтверждены в [3] более явным изучением линеаризованного уравнения Власова—Пуассона и в настоящей статье точными численными решениями модельных уравнений Власова—Пуассона—БГК. Численные результаты для случая сильных колебаний электрического поля (см. рис. 5 и 6) поднимают много интересных вопросов, которые требуют дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Landau L. D. Кинетическое уравнение в случае кулоновского взаимодействия // Ж. экс. и теор. физ. — 1937. — 7. — С. 203–209.
2. Batishchev O. V., Bychenkov V. Yu., Detering F., Rozmus W., Sydora R., Capjack C. E., Novikov V. N. Heat transport and electron distribution function in laser produced with hot spots // Phys. Plasmas. — 2002. — 9. — С. 2302–2310.
3. Bobylev A. V., Potapenko I. F. Long wave asymptotics for Vlasov–Poisson–Landau kinetic equation // J. Stat. Phys. — 2019. — 175. — С. 1–18.
4. Bobylev A. V., Potapenko I. F. On solutions of Vlasov–Poisson–Landau equations for slowly varying in space initial data // Kinet. Relat. Models. — 2023. — 16, № 1. — С. 20–40.
5. Brantov A. V., Bychenkov V. Yu., Batishchev O. V., Rozmus W. Nonlocal heat wave propagation due to skin layer plasma heating by short laser pulses // Comput. Phys. Commun. — 2004. — 164. — С. 67–72.
6. Bychenkov V. Yu., Rozmus W., Tikhonchuk V. T., Brantov A. V. Nonlocal electron transport in a plasma // Phys. Rev. Lett. — 1995. — 75. — С. 4405–4408.
7. Epperlein E. M., Short R. W. A practical nonlocal model for electron heat transport in laser plasmas // Phys. Fluids B. — 1991. — 3. — С. 3092–3098.
8. Grenier E. Oscillations in quasi-neutral plasma // Commun. Part. Differ. Equ. — 1996. — 21. — С. 363–394.
9. Guisset S., Brull S., Dubroca B., d’Humières E., Karpov S., Potapenko I. Asymptotic-preserving scheme for the M1-Maxwell system in the quasi-neutral regime // Commun. Comput. Phys. — 2016. — 19, № 2. — С. 301–328.
10. Ichimaru S. Basic Principles of Plasma Physics. — Boca Raton: CRC Press, 1973.
11. Landau L. D. Kinetic equation in case of Coulomb interaction // Phys. Zs. Sov. Union. — 1936. — 10. — С. 154–164.
12. Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P. Physical Kinetics. — London: Pergamon, 1981.

А. В. Бобылев

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
E-mail: alexander.bobylev47@gmail.com

И. Ф. Потапенко

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

UDC 517.958

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-55-70

EDN: TRQNDY

Asymptotic solutions of the Vlasov–Poisson–Landau kinetic equations

A. V. Bobylev and I. F. Potapenko

Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia

Abstract. The paper is devoted to analytical and numerical study of solutions to the Vlasov–Poisson–Landau kinetic equations (VPLE) for distribution functions with typical length L such that $\varepsilon = r_D/L \ll 1$, where r_D stands for the Debye radius. It is also assumed that the Knudsen number $\text{Kn} = l/L = O(1)$, where l denotes the mean free pass of electrons. We use the standard model of plasma of electrons with a spatially homogeneous neutralizing background of infinitely heavy ions. The initial data is always assumed to be close to neutral. We study an asymptotic behavior of the system for small $\varepsilon > 0$. It is known that the formal limit of VPLE at $\varepsilon = 0$ does not describe a rapidly oscillating part of the electric field. Our aim is to study the behavior of the “true” electric field near this limit. We consider the problem with standard isotropic in velocities Maxwellian initial conditions, and show that there is almost no damping of these oscillations in the collisionless case. An approximate formula for the electric field is derived and then confirmed numerically by using a simplified Bathnagar–Gross–Krook (BGK-type) model of Vlasov–Poisson–Landau equation (VPLE). Another class of initial conditions that leads to strong oscillations having the amplitude of order $O(1/\varepsilon)$ is also considered. Numerical solutions of that class are studied for different values of parameters ε and Kn .

Keywords: Vlasov–Poisson–Landau kinetic equations, distribution function, BGK model, electric field oscillations.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: A. V. Bobylev, I. F. Potapenko, “Asymptotic solutions of the Vlasov–Poisson–Landau kinetic equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 55–70. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-55-70>

REFERENCES

1. L. D. Landau, “Kineticheskoe uravnenie v sluchae kulonovskogo vzaimodeystviya” [Kinetic equation for the case of Coulomb interaction] *Zh. Eks. Teor. Fiz.* [J. Exp. Theor. Phys.], 1937, **7**, 203–209 (in Russian).
2. O. V. Batishchev, V. Yu. Bychenkov, F. Detering, W. Rozmus, R. Sydora, C. E. Capjack, and V. N. Novikov, “Heat transport and electron distribution function in laser produced with hot spots,” *Phys. Plasmas*, 2002, **9**, 2302–2310.
3. A. V. Bobylev and I. F. Potapenko, “Long wave asymptotics for Vlasov–Poisson–Landau kinetic equation,” *J. Stat. Phys.*, 2019, **175**, 1–18.
4. A. V. Bobylev and I. F. Potapenko, “On solutions of Vlasov–Poisson–Landau equations for slowly varying in space initial data,” *Kinet. Relat. Models*, 2023, **16**, No. 1, 20–40.
5. A. V. Brantov, V. Yu. Bychenkov, O. V. Batishchev, and W. Rozmus, “Nonlocal heat wave propagation due to skin layer plasma heating by short laser pulses,” *Comput. Phys. Commun.*, 2004, **164**, 67–72.
6. V. Yu. Bychenkov, W. Rozmus, V. T. Tikhonchuk, and A. V. Brantov, “Nonlocal electron transport in a plasma,” *Phys. Rev. Lett.*, 1995, **75**, 4405–4408.
7. E. M. Epperlein and R. W. Short, “A practical nonlocal model for electron heat transport in laser plasmas,” *Phys. Fluids B*, 1991, **3**, 3092–3098.

8. E. Grenier, “Oscillations in quasi-neutral plasma,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1996, **21**, 363–394.
9. S. Guisset, S. Brull, B. Dubroca, E. d’Humières, S. Karpov, and I. Potapenko, “Asymptotic-preserving scheme for the M1-Maxwell system in the quasi-neutral regime,” *Commun. Comput. Phys.*, 2016, **19**, No. 2, 301–328.
10. S. Ichimaru, *Basic Principles of Plasma Physics*, CRC Press, Boca Raton, 1973.
11. L. D. Landau, “Kinetic equation in case of Coulomb interaction,” *Phys. Zs. Sov. Union*, 1936, **10**, 154–164.
12. E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics*, Pergamon, London, 1981.

A. V. Bobylev

Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia

E-mail: alexander.bobylev47@gmail.com

I. F. Potapenko

Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, Russia