

УДК 517.956.6

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-18-32

EDN: STIIBV

ОБРАТНАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА

О. С. БАЛАШОВ, А. В. ФАМИНСКИЙ

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Рассмотрена обратная начально-краевая задача на ограниченном интервале для систем квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка. В качестве переопределений выбраны интегральные условия, а в качестве управлений — краевые функции и правые части уравнений специального вида. Установлены результаты о существовании и единственности решений при малых входных данных или малом временном интервале.

Ключевые слова: квазилинейные эволюционные уравнения, нечетный порядок, обратная задача, начально-краевая задача, интегральные условия, существование решения, единственность решения.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Второй автор был поддержан грантом Российского научного фонда (проект № 23-11-00056).

Для цитирования: О. С. Балашов, А. В. Фаминский. Обратная начально-краевая задача для систем квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 18–32. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-18-32>

1. ВВЕДЕНИЕ. ОПИСАНИЕ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В статье рассматривается система квазилинейных уравнений нечетного порядка

$$u_t - (-1)^l (a_{2l+1} \partial_x^{2l+1} u + a_{2l} \partial_x^{2l} u) - \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \partial_x^j [a_{2j+1}(t, x) \partial_x^{j+1} u + a_{2j}(t, x) \partial_x^j u] + \\ + \sum_{j=0}^l (-1)^j \partial_x^j [g_j(t, x, u, \dots, \partial_x^{l-1} u)] = f(t, x), \quad l \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

заданная на интервале $I = (0, R)$ ($R > 0$ произвольно). Здесь $u = u(t, x) = (u_1, \dots, u_n)^T$, $n \in \mathbb{N}$, — неизвестная вектор-функция, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$, $g_j = (g_{j1}, \dots, g_{jn})^T$ — также вектор-функции, $a_{2l+1} = \text{diag}(a_{(2l+1)i})$, $a_{2l} = \text{diag}(a_{(2l)i})$, $i = 1, \dots, n$, — постоянные диагональные матрицы размера $n \times n$, $a_j(t, x) = (a_{jim}(t, x))$, $i, m = 1, \dots, n$, для $j = 0, \dots, 2l - 1$, — матрицы также размера $n \times n$.

В прямоугольнике $Q_T = (0, T) \times I$ для некоторого $T > 0$ рассмотрим обратную начально-краевую задачу для системы (1.1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, R], \quad (1.2)$$

и граничными условиями

$$\partial_x^j u(t, 0) = \mu_j(t), \quad j = 0, \dots, l-1, \quad \partial_x^j u(t, R) = \nu_j(t), \quad j = 0, \dots, l, \quad t \in [0, T], \quad (1.3)$$

где $u_0 = (u_{01}, \dots, u_{0n})^T$, $\mu_j = (\mu_{j1}, \dots, \mu_{jn})^T$, $\nu_j = (\nu_{j1}, \dots, \nu_{jn})^T$.

Предположим, что для любого $i = 1, \dots, n$ функция f_i представляется в виде

$$f_i(t, x) \equiv h_{0i}(t, x) + \sum_{k=1}^{m_i} F_{ki}(t) h_{ki}(t, x) \quad (1.4)$$

для некоторого неотрицательного целого числа m_i (если $m_i = 0$, то $f_i = h_{0i}$), где функции h_{ki} даны, а функции F_{ki} неизвестны. Кроме того, предположим, что часть краевых функций ν_{li} также неизвестна. Положим $n_i = 1$, если функция ν_{li} неизвестна, и $n_i = 0$, если функция ν_{li} дана. Тогда задача (1.1)–(1.3) дополнена условиями переопределения в интегральной форме: если $m_i + n_i > 0$ для некоторого i , то

$$\int_I u_i(t, x) \omega_{ki}(x) dx = \varphi_{ki}(t), \quad t \in [0, T], \quad k = 1, \dots, m_i + n_i, \quad (1.5)$$

для некоторых заданных функций ω_{ki} и φ_{ki} . В частности, для отдельного i условия переопределения для функции u_i могут отсутствовать, но всегда предполагается, что

$$N = \sum_{i=1}^n n_i > 0, \quad (1.6)$$

так что хотя бы одна из краевых функций ν_{li} неизвестна (очевидно, что $N \leq n$). Положим также

$$M = \sum_{i=1}^n m_i,$$

тогда $M \geq 0$. Задача состоит в нахождении функций ν_{li} (при $n_i > 0$) и функций F_{ki} (при $m_i > 0$), для которых соответствующее решение u задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяет условиям (1.5).

В случае одного ($n = 1$) уравнения типа (1.1) обратные задачи были, например, рассмотрены в [5]. В частности, в этой статье приведены примеры физических моделей, которые могут быть описаны уравнениями подобного вида: уравнения Кортевега—де Фриза (КдФ) и Кавахары с обобщениями, уравнения Кортевега—де Фриза—Бюргерса и Бенни—Лина, уравнение Каупа—Купершмидта и другие. Однако, наряду с одиночными уравнениями, в реальных физических ситуациях возникают также системы квазилинейных эволюционных уравнений нечетного порядка. Среди подобных систем следует упомянуть систему Майды—Биелло (см. [8])

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + vv_x = 0, \\ v_t + \alpha v_{xxx} + (uv)_x = 0, \quad \alpha > 0, \end{cases}$$

и более общие системы уравнений типа КдФ со спаренными нелинейностями (см. [4]). Более подробно о примерах подобных систем написано, например, в [5].

Важность условий интегрального переопределения в обратных задачах обсуждена, например, в книге [9]. Изучение обратных задач с интегральным условием переопределения для уравнений типа КдФ было начато в статье [2] на основе, в частности, идей из [9]. В статье [5] для задачи (1.1)–(1.3) в случае одного уравнения были рассмотрены две обратные задачи с одним интегральным условием переопределения типа (1.5). В первой из них в качестве управления была выбрана правая часть уравнения типа (1.4) (тогда $M = 1$, $N = 0$), во второй — граничная функция ν_l (тогда $M = 0$, $N = 1$). Были установлены результаты о корректности подобных задач либо в случае малых входных данных, либо малого временного интервала. В статье [6] была рассмотрена

начально-краевая задача на ограниченном интервале для нелинейного уравнения Шрёдингера высокого порядка

$$iu_t + au_{xx} + ibu_x + iu_{xxx} + \lambda|u|^p u + i\beta(|u|^p u)_x + i\gamma(|u|^p)_x u = f(t, x)$$

(u — комплекснозначная функция) с начальными и краевыми условиями, аналогичными (1.2)–(1.3), и изучены три обратные задачи с интегральными условиями переопределения. Первые две из них аналогичны задачам, рассмотренным в [5], с похожими результатами. В третьей задаче были введены два условия переопределения типа (1.5), а в качестве управлений были рассмотрены как правая часть уравнения, так и граничная функция ($M = N = 1$). Результаты были аналогичны первым двум случаям.

Заметим также, что обратная задача с двумя интегральными условиями переопределения для уравнения типа КдФ

$$u_t + u_{xxx} + uu_x + \alpha(t)u = F(t)g(t)$$

в периодическом случае при неизвестных функциях α и F была рассмотрена в [7], где были установлены результаты об однозначной разрешимости для малого временного интервала.

В статье [3] была рассмотрена обратная начально-краевая задача (1.1)–(1.3) с интегральными условиями переопределения (1.5) в случае, когда управлениями были правые части уравнений типа (1.4) ($M > 0$ — произвольно, $N = 0$). Аналогично [5] были установлены результаты о корректности либо в случае малых входных данных, либо малого временного интервала. Заметим, что в [3] также была рассмотрена и прямая начально-краевая задача (1.1)–(1.3).

Настоящая работа является продолжением статьи [3] на случай произвольных $M \geq 0$ и $N \in (0, n]$ с аналогичными результатами о корректности. Эти результаты являются новыми даже в случае одного уравнения (тогда $N = n = 1$) в силу произвола в выборе M . Условия, накладываемые на систему, начальные и краевые данные, аналогичны условиям из [3], но с более сильными ограничениями на порядок роста нелинейностей (см. замечание 1.2).

Решения рассматриваемой задачи, как и в [3], строятся в специальном пространстве вектор-функций $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in (X(Q_T))^n$, где для любого $i = 1, \dots, n$

$$u_i(t, x) \in X(Q_T) = C([0, T]; L_2(I)) \cap L_2(0, T; H^l(I)),$$

с нормой

$$\|u\|_{(X(Q_T))^n} = \sum_{i=1}^n \left(\sup_{t \in (0, T)} \|u_i(t, \cdot)\|_{L_2(I)} + \|\partial_x^l u_i\|_{L_2(Q_T)} \right).$$

Для $r > 0$ через $\bar{X}_{rn}(Q_T)$ обозначим замкнутый шар $\{u \in (X(Q_T))^n : \|u\|_{(X(Q_T))^n} \leq r\}$.

Слабое решение задачи (1.1)–(1.3) понимается так же, как в [3], в смысле следующего определения.

Определение 1.1. Пусть $u_0 \in (L_2(I))^n$, $\mu_j, \nu_j \in (L_2(0, T))^n \forall j$, $f \in (L_1(Q_T))^n$, $a_j \in (C(\bar{Q}_T))^{n^2} \forall j$. Функция $u \in (X(Q_T))^n$ называется *слабым решением* задачи (1.1)–(1.3), если $\partial_x^j u(t, 0) \equiv \mu_j(t)$, $\partial_x^j u(t, R) \equiv \nu_j(t)$, $j = 0, \dots, l-1$, и для любой пробной функции $\phi(t, x)$, такой что $\phi \in (L_2(0, T; H^{l+1}(I)))^n$, $\phi_t \in (L_2(Q_T))^n$, $\phi|_{t=T} \equiv 0$, $\partial_x^j \phi|_{x=0} = \partial_x^j \phi|_{x=R} \equiv 0$, $j = 0, \dots, l-1$, $\partial_x^l \phi|_{x=0} \equiv 0$, справедливо свойство $(g_j(t, x, u, \dots, \partial_x^{l-1} u), \partial_x^j \phi) \in L_1(Q_T)$, $j = 0, \dots, l$, и выполнено интегральное тождество:

$$\begin{aligned} & \iint_{Q_T} \left[(u, \phi_t) - (a_{2l+1} \partial_x^l u, \partial_x^{l+1} \phi) + (a_{2l} \partial_x^l u, \partial_x^l \phi) + \sum_{j=0}^{l-1} ((a_{2j+1} \partial_x^{j+1} u + a_{2j} \partial_x^j u), \partial_x^j \phi) - \right. \\ & \left. - \sum_{j=0}^l (g_j(t, x, u, \dots, \partial_x^{l-1} u), \partial_x^j \phi) + (f, \phi) \right] dx dt + \int_I (u_0, \phi|_{t=0}) dx + \int_0^T (a_{2l+1} \nu_l, \partial_x^l \phi|_{x=R}) dt = 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где символом $(\cdot, \cdot)$ обозначено скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Пусть символы $\widehat{f}(\xi) \equiv \mathcal{F}[f](\xi)$ и $\mathcal{F}^{-1}[f](x)$, как обычно, обозначают соответственно прямое и обратное преобразования Фурье функции f . В частности, для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad \mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(\xi) d\xi.$$

Для $s \in \mathbb{R}$ стандартным образом введем пространство Соболева дробного порядка

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f : \mathcal{F}^{-1}[(1 + |\xi|^s)\widehat{f}(\xi)] \in L_2(\mathbb{R})\}$$

и для любого $T > 0$ обозначим через $H^s(0, T)$ пространство сужений на интервал $(0, T)$ функций из $H^s(\mathbb{R})$ с естественной нормой. Для описания свойств граничных функций μ_j, ν_j при $j < l$ будем использовать следующее функциональное пространство также с естественной нормой:

$$(\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n = \left(\prod_{j=0}^{l-1} H^{(l-j)/(2l+1)}(0, T) \right)^n.$$

На коэффициенты линейной части системы будем накладывать следующие условия:

$$a_{(2l+1)i} > 0, \quad a_{(2l)i} \leq 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.8)$$

и для любых $0 \leq j \leq l-1, i, m = 1, \dots, n$

$$\partial_x^k a_{(2j+1)im} \in C(\overline{Q}_T), \quad k = 0, \dots, j+1, \quad \partial_x^k a_{(2j)im} \in C(\overline{Q}_T), \quad k = 0, \dots, j. \quad (1.9)$$

Пусть $y_m = (y_{m1}, \dots, y_{mn})$ для $m = 0, \dots, l-1$. На функции $g_j(t, x, y_0, \dots, y_{l-1})$ при любом $0 \leq j \leq l$ будем накладывать следующие условия: для $i = 1, \dots, n$

$$g_{ji}, \text{grad}_{y_k} g_{ji} \in C(\overline{Q}_T \times \mathbb{R}^{ln}), \quad j = 0, \dots, l-1, \quad g_{ji}(t, x, 0, \dots, 0) \equiv 0, \quad (1.10)$$

$$|\text{grad}_{y_k} g_{ji}(t, x, y_0, \dots, y_{l-1})| \leq c \sum_{m=0}^{l-1} (|y_m|^{b_1(j,k,m)} + |y_m|^{b_2(j,k,m)}), \quad k = 0, \dots, l-1,$$

$$\forall (t, x, y_0, \dots, y_{l-1}) \in Q_T \times \mathbb{R}^{ln}, \quad (1.11)$$

где $0 < b_1(j, k, m) \leq b_2(j, k, m)$, $|y_m| = (y_m, y_m)^{1/2}$.

Наконец, функции ω_{ki} будут всегда удовлетворять следующим условиям:

$$\omega \in H^{2l+1}(I), \quad \omega^{(m)}(0) = 0, \quad m = 0, \dots, l, \quad \omega^{(m)}(R) = 0, \quad m = 0, \dots, l-1, \quad (1.12)$$

для всех ω_{ki} (где здесь $\omega \equiv \omega_{ki}$).

Теперь сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1.1. Пусть матрицы $a_j, j = 0, \dots, 2l+1$, удовлетворяют условиям (1.8), (1.9), а функции $g_j, j = 0, \dots, l$, удовлетворяют условиям (1.10), (1.11), где при $j < l$

$$b_2(j, k, m) \leq \begin{cases} \frac{2l-2k+1}{2m+1}, & m+k < l, \\ \frac{l-k}{m}, & m+k \geq l, \end{cases} \quad (1.13)$$

а при $j = l$

$$b_2(l, k, m) \leq \frac{2l-2k}{2m+1}. \quad (1.14)$$

Пусть $u_0 \in (L_2(I))^n, (\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1}) \in (\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n, \nu_{li} \in L_2(0, T)$, если $n_i = 0, h_0 = (h_{01}, \dots, h_{0n})^T \in (L_1(0, T; L_2(I)) \cap L_2(0, T; L_1(I)))^n$ для некоторого $T > 0$. Предположим, что выполнено условие (1.6) и для любого $i = 1, \dots, n$, для которого $m_i + n_i > 0$, при $k = 1, \dots, m_i + n_i$ функции ω_{ki} удовлетворяют условию (1.12); $\varphi_{ki} \in H^1(0, T)$ и

$$\varphi_{ki}(0) = \int_I u_{0i}(x) \omega_{ki}(x) dx; \quad (1.15)$$

$h_{ki} \in C([0, T]; L_2(I))$ для $k = 1, \dots, m_i$ если $m_i > 0$. Положим для $k = 1, \dots, m_i + n_i$ в случае $m_i > 0$

$$\psi_{kji}(t) \equiv \int_I h_{ji}(t, x) \omega_{ki}(x) dx, \quad j = 1, \dots, m_i, \quad (1.16)$$

а в случае $n_i = 1$

$$\psi_{k(m_i+1)i}(t) = \psi_{k(m_i+1)i} \equiv a_{(2l+1)i} \omega_{ki}^{(l)}(R), \quad (1.17)$$

и предположим, что

$$\Delta_i(t) \equiv \det(\psi_{kji}(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad k, j = 1, \dots, m_i + n_i. \quad (1.18)$$

Положим

$$\begin{aligned} c_0 = & \|u_0\|_{(L_2(I))^n} + \|(\mu_0, \dots, \mu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n} + \|(\nu_0, \dots, \nu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n} + \sum_{i: n_i=0} \|\nu_i\|_{L_2(0, T)} + \\ & + \|h_0\|_{(L_1(0, T; L_2(I)))^n} + \|h_0\|_{(L_2(0, T; L_1(I)))^n} + \sum_{i: m_i+n_i>0} \sum_{k=1}^{m_i+n_i} \|\varphi'_{ki}\|_{L_2(0, T)}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Тогда существует $\delta > 0$, для которого при условии $c_0 \leq \delta$ существуют функции $F_{ki} \in L_2(0, T)$, $i : m_i > 0$, $k = 1, \dots, m_i$, функции $\nu_i \in L_2(0, T)$, $i : n_i = 1$, и соответствующее слабое решение $u \in (X(Q_T))^n$ задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющее свойствам (1.5), где функция f задана формулой (1.4). Более того, существует $r > 0$, для которого это решение u единственно в шаре $\bar{X}_{rn}(Q_T)$ с соответствующими единственными функциями $F_{ki} \in L_2(0, T)$ и $\nu_i \in L_2(0, T)$, причем отображение

$$(u_0, (\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1}), \{\nu_i : n_i = 0\}, h_0, \{\varphi'_{ki}\}) \rightarrow (u, \{F_{ki}\}, \{\nu_i : n_i = 1\}) \quad (1.20)$$

Липшиц-непрерывно в замкнутом шаре радиуса δ в пространстве $(L_2(I))^n \times (\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n \times (\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n \times (L_2(0, T))^{n-N} \times (L_1(0, T; L_2(I)) \cap L_2(0, T; L_1(I)))^n \times (L_2(0, T))^{M+N}$ в пространство $(X(Q_T))^n \times (L_2(0, T))^{M+N}$.

Теорема 1.2. Пусть выполнены условия теоремы 1.1, более того, в (1.13), (1.14) нестрогие неравенства при оценках b_2 заменены на строгие. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для фиксированного произвольного $\delta > 0$ существует $T_0 > 0$, для которого при $c_0 \leq \delta$ и $T \in (0, T_0]$ существуют единственные функции $F_{ki} \in L_2(0, T)$, $i : m_i > 0$, $k = 1, \dots, m_i$, единственные функции $\nu_i \in L_2(0, T)$, $i : n_i = 1$, и соответствующее единственное слабое решение $u \in (X(Q_T))^n$ задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющее условиям (1.5), где функция f задана формулой (1.4).
2. Для фиксированного произвольного $T > 0$ существует $\delta > 0$, для которого при условии $c_0 \leq \delta$ существуют единственные функции $F_{ki} \in L_2(0, T)$, $i : m_i > 0$, $k = 1, \dots, m_i$, единственные функции $\nu_i \in L_2(0, T)$, $i : n_i = 1$, и соответствующее единственное слабое решение $u \in (X(Q_T))^n$ задачи (1.1)–(1.3), удовлетворяющее условиям (1.5), где функция f задана формулой (1.4).

Более того, отображение (1.20) Липшиц-непрерывно в замкнутом шаре радиуса δ аналогично теореме 1.1.

Замечание 1.1. Теорема 1.2 справедлива для неоднородного аналога приведенной выше системы Майды–Биелло. Теорема 1.1 справедлива, например, для ее обобщения вида

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + (g_{11}(u, v))_x + g_{01}(u, v) = f_1, \\ v_t + \alpha v_{xxx} + (g_{12}(u, v))_x + g_{02}(u, v) = f_2, \quad \alpha > 0, \end{cases}$$

при

$$|\partial_{y_k} g_{1i}(y_1, y_2)| \leq c(|y_1|^{b_1} + |y_2|^{b_1} + |y_1|^{b_2} + |y_2|^{b_2}), \quad k, i = 1, 2,$$

где $0 < b_1 \leq b_2 \leq 2$, например, если $g_{11}(y_1, y_2) = cy_2^3$, $g_{12}(y_1, y_2) = c_1 y_1^2 y_2 + c_2 y_1 y_2^2$,

$$|\partial_{y_k} g_{0i}(y_1, y_2)| \leq c(|y_1|^{b_1} + |y_2|^{b_1} + |y_1|^{b_2} + |y_2|^{b_2}), \quad k, i = 1, 2,$$

где $0 < b_1 \leq b_2 \leq 3$.

Замечание 1.2. По сравнению с результатами настоящей работы аналогичные результаты в статье [3] в случае $N = 0$ получены при более слабых условиях на нелинейность

$$b_2(j, k, m) \leq \frac{4l - 2j - 2k}{2m + 1}$$

для любого $0 \leq j \leq l$ (с аналогичной заменой на строгое неравенство в аналоге теоремы 1.2).

Статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит некоторые интерполяционные неравенства и вспомогательные результаты для соответствующей линейной задачи, в разделе 3 приведены доказательства основных результатов.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

В дальнейшем мы будем использовать следующие интерполяционные неравенства: для некоторой константы $c = c(R, l, b)$ и любых функций $v, w \in X(Q_T)$

1. если $j \in [0, l]$, $k, m \in [0, l - 1]$, $b \in (0, (4l - 2j - 2k)/(2m + 1)]$, то

$$\| |\partial_x^m v|^b \partial_x^k w \|_{L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I))} \leq c(T^{((4l-2j-2k)-(2m+1)b)/(4l)} + T^{(2l-j)/(2l)}) \|v\|_{X(Q_T)}^b \|w\|_{X(Q_T)}; \quad (2.1)$$

2. если $k, m \in [0, l - 1]$, $m + k < l$, $b \in (1, (2l - 2k + 1)/(2m + 1)]$, то

$$\| |\partial_x^m v|^b \partial_x^k w \|_{L_2(0, T; L_1(I))} \leq c(T^{2l-2k+1-(2m+1)b/(4l)} + T^{1/2}) \|v\|_{X(Q_T)}^b \|w\|_{X(Q_T)}; \quad (2.2)$$

3. если $k, m \in [0, l - 1]$ и либо $m + k < l$, $b \in (0, 1]$, либо $m + k \geq l$, $b \in (0, (l - k)/m]$, то

$$\| |\partial_x^m v|^b \partial_x^k w \|_{L_2(0, T; L_1(I))} \leq c(T^{(l-k-mb)/(2l)} + T^{1/2}) \|v\|_{X(Q_T)}^b \|w\|_{X(Q_T)}, \quad (2.3)$$

которые доказаны в [5, лемма 3.3] (неравенство (2.1)) и [5, леммы 4.3, 4.4] (неравенства (2.2), (2.3)) на основе следующего простого неравенства (см., например, [1]): для некоторой константы $c = c(R, l, p)$ и любых $\varphi \in H^l(I)$, целого $m \in [0, l]$ и $p \in [2, +\infty]$

$$\|\varphi^{(m)}\|_{L_p(I)} \leq c\|\varphi^{(l)}\|_{L_2(I)}^{2s} \|\varphi\|_{L_2(I)}^{1-2s} + c\|\varphi\|_{L_2(I)}, \quad s = s(p, l, m) = \frac{2m + 1}{4l} - \frac{1}{2lp}.$$

Кроме нелинейной системы (1.1) рассмотрим ее линейный аналог

$$\begin{aligned} u_t - (-1)^l (a_{2l+1} \partial_x^{2l+1} u + a_{2l} \partial_x^{2l} u) - \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^j \partial_x^j [a_{2j+1}(t, x) \partial_x^{j+1} u + a_{2j}(t, x) \partial_x^j u] = \\ = f(t, x) + \sum_{j=0}^l (-1)^j \partial_x^j G_j(t, x), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$G_j = (G_{j1}, \dots, G_{jn})^T$. Понятие слабого решения соответствующей начально-краевой задачи аналогично определению 1.1. В частности, соответствующее интегральное тождество (для тех же пробных функций, что и в определении 1.1) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint_{Q_T} \left[(u, \phi_t) - (a_{2l+1} \partial_x^l u, \partial_x^{l+1} \phi) + (a_{2l} \partial_x^l u, \partial_x^l \phi) + \sum_{j=0}^{l-1} ((a_{2j+1} \partial_x^{j+1} u + a_{2j} \partial_x^j u), \partial_x^j \phi) + \right. \\ \left. + (f(t, x), \phi) + \sum_{j=0}^l (G_j(t, x), \partial_x^j \phi) \right] dx dt + \int_I (u_0, \phi|_{t=0}) dx + \int_0^T (a_{2l+1} \nu_l, \partial_x^l \phi|_{x=R}) dt = 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Теорема 2.1. Пусть матрицы a_j удовлетворяют условиям (1.8), (1.9), $u_0 \in (L_2(I))^n$, $(\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1}) \in (\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n$, $\nu_l \in (L_2(0, T))^n$, $f \in (L_1(0, T; L_2(I)))^n$, $G_j \in (L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I)))^n$, $j = 0, \dots, l$. Тогда существует единственное слабое решение $u \in (X(Q_T))^n$ задачи (2.4), (1.2), (1.3) и для любого $t \in (0, T]$

$$\|u\|_{(X(Q_t))^n} \leq c(T) \left[\|u_0\|_{(L_2(I))^n} + \|(\mu_0, \dots, \mu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0, t))^n} + \|(\nu_0, \dots, \nu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0, t))^n} + \right]$$

$$+ \|\nu_l\|_{(L_2(0,t))^n} + \|f\|_{(L_1(0,t;L_2(I)))^n} + \sum_{j=0}^l \|G_j\|_{(L_{2l/(2l-j)}(0,t;L_2(I)))^n}. \quad (2.6)$$

Доказательство. Это утверждение доказано в [3, теорема 2.3]. $\square$

Введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть

$$u = S(u_0, (\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1}), \nu_l, f, (G_0, \dots, G_l))$$

является слабым решением задачи (2.4), (1.2), (1.3) из пространства $(X(Q_T))^n$ в условиях теоремы 2.1. Положим также

$$\begin{aligned} W &= (u_0, (\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1})), \\ \tilde{S}W &= S(W, 0, 0, (0, \dots, 0)), \quad \tilde{S} : (L_2(I) \times \mathcal{B}^{l-1}(0, T) \times \mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n \rightarrow (X(Q_T))^n, \\ S_l \nu_l &= S(0, (0, \dots, 0), (0, \dots, 0), \nu_l, 0, (0, \dots, 0)), \quad S_l : (L_2(0, T))^n \rightarrow (X(Q_T))^n, \\ S_0 f &= S(0, (0, \dots, 0), (0, \dots, 0), 0, f, (0, \dots, 0)), \quad S_0 : (L_1(0, T; L_2(I)))^n \rightarrow (X(Q_T))^n, \\ \tilde{S}_j G_j &= S(0, (0, \dots, 0), (0, \dots, 0), 0, 0, (0, \dots, G_j, \dots, 0)), \quad S_j : (L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I)))^n \rightarrow (X(Q_T))^n, \\ &\quad j = 0, \dots, l. \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{H}^1(0, T) = \{\varphi \in H^1(0, T) : \varphi(0) = 0\}$. Очевидно, что $\|\varphi'\|_{L_2(0, T)}$ является эквивалентной нормой в этом пространстве.

Пусть $\omega \in C(\bar{I})$. На пространстве функций $u(t, x)$, лежащих в $L_1(I)$ для всех $t \in [0, T]$, определим линейный оператор $Q(\omega)$ формулой $(Q(\omega)u)(t) = q(t; u, \omega)$, где

$$q(t; u, \omega) \equiv \int_I u(t, x) \omega(x) dx, \quad t \in [0, T]. \quad (2.7)$$

Лемма 2.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и дополнительно $f \in (L_2(0, T; L_1(I)))^n$, $G_j \in (L_2(0, T; L_1(I)))^n$, $j = 0, \dots, l$, а функция ω удовлетворяет условиям (1.12). Тогда для функции $u = (u_1, \dots, u_n)^T = S(W, \nu_l, f, (G_0, \dots, G_l))$ соответствующая функция $q(\cdot; u_i, \omega) = Q(\omega)u_i$, заданная формулой (2.7), принадлежит пространству $H^1(0, T)$, $i = 1, \dots, n$, и для почти всех $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} q'(t; u_i, \omega) &= r(t; u_i, \omega) \equiv \nu_{li}(t) a_{(2l+1)i} \omega^{(l)}(R) + \\ &+ \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^{l+k} \left[\nu_{ki}(t) \left(a_{(2l+1)i} \omega^{(2l-k)}(R) - a_{(2l)i} \omega^{(2l-k-1)}(R) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \mu_{ki}(t) \left(a_{(2l+1)i} \omega^{(2l-k)}(0) - a_{(2l)i} \omega^{(2l-k-1)}(0) \right) \right] \\ &+ \sum_{m=1}^n \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=0}^{j-1} (-1)^{j+k} \left[\nu_{km}(t) \left((a_{(2j+1)im} \omega^{(j)})^{(j-k)}(R) - (a_{(2j)im} \omega^{(j)})^{(j-k-1)}(R) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \mu_{km}(t) \left((a_{(2j+1)im} \omega^{(j)})^{(j-k)}(0) - (a_{(2j)im} \omega^{(j)})^{(j-k-1)}(0) \right) \right] + \\ &\quad + (-1)^{l+1} \int_I u_i(t, x) \left(a_{(2l+1)i} \omega^{(2l+1)} - a_{(2l)i} \omega^{(2l)} \right) dx + \\ &+ \sum_{m=1}^n \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{j+1} \int_I u_m(t, x) \left[(a_{(2j+1)im} \omega^{(j)})^{(j+1)} - (a_{(2j)im} \omega^{(j)})^{(j)} \right] dx + \\ &\quad + \int_I f_i(t, x) \omega dx + \sum_{j=0}^l \int_I G_{ji}(t, x) \omega^{(j)} dx. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|q'(\cdot; u_i, \omega)\|_{L_2(0,T)} &\leq c(T) \left[\|u_0\|_{(L_2(I))^n} + \|(\mu_0, \dots, \mu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0,T))^n} + \|(\nu_0, \dots, \nu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0,T))^n} + \right. \\ &\quad + \|\nu_l\|_{(L_2(0,T))^n} + \|f\|_{(L_1(0,T;L_2(I)))^n} + \|f\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n} + \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^l (\|G_j\|_{(L_{2l/(2l-j)}(0,T;L_2(I)))^n} + \|G_j\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n}) \right], \quad (2.9) \end{aligned}$$

где константа c не убывает по T .

Доказательство. Формула (2.8) была доказана при более слабых предположениях в [3, лемма 2.4]. Так как в условиях настоящей леммы, поскольку $\omega \in C^{2l}[0, R]$, то $r \in L_2(0, T)$, и в силу (2.8) $q'(t; u_i, \omega) = r(t; u_i, \omega) \in L_2(0, T)$,

$$\begin{aligned} \|q'\|_{L_2(0,T)} &\leq c \left[\sum_{j=0}^{l-1} \|\mu_j\|_{(L_2(0,T))^n} + \sum_{j=0}^l \|\nu_j\|_{(L_2(0,T))^n} + \|f\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^l \|G_j\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n} + \|u\|_{(L_2(0,T;L_2(I)))^n} \right]. \end{aligned}$$

Так как $\|u\|_{(L_2(0,T;L_2(I))^n} \leq T^{1/2} \|u\|_{(C([0,T];L_2(I)))^n} \leq T^{1/2} \|u\|_{(X(Q_T))^n}$, применяя неравенство (2.6), завершаем доказательство леммы. $\square$

Лемма 2.2. Пусть для матриц a_j выполнены условия (1.8), (1.9) и условие (1.6). Пусть для любого $i = 1, \dots, n$, для которого $m_i + n_i > 0$, при $k = 1, \dots, m_i + n_i$ функции ω_{ki} удовлетворяют условию (1.12), $\varphi_{ki} \in \tilde{H}^1(0, T)$, функции $h_{ki} \in C([0, T]; L_2(I))$ в случае $m_i > 0$ и для соответствующих функций ψ_{kji} выполнены условия (1.18). Тогда существуют единственное множество M функций $F = \{F_{ki}(t) \in L_2(0, T), i : m_i > 0, k = 1, \dots, m_i\}$ и единственное множество N функций $\Phi = \{\nu_{li}(t) \in L_2(0, T), i : n_i > 0\}$, таких что для функций $f = (f_1, \dots, f_n)^T \equiv HF$ и $\nu_l = (\nu_{l1}, \dots, \nu_{ln})^T \equiv J\Phi$, где при $m_i > 0$

$$f_i(t, x) = \sum_{k=1}^{m_i} F_{ki}(t) h_{ki}(t, x),$$

$f_i(t, x) \equiv 0$ при $m_i = 0$, $\nu_{li}(t) \equiv 0$ при $n_i = 0$, соответствующая функция

$$u = S_0 f + S_l \nu_l = (S_0 \circ H)F + (S_l \circ J)\Phi \quad (2.10)$$

удовлетворяет всем условиям (1.5). Более того, если положить

$$(F, \Phi) = \Gamma \{\varphi_{ki}, i : m_i + n_i > 0, k = 1, \dots, m_i + n_i\},$$

то линейный оператор $\Gamma : (\tilde{H}^1(0, T))^{M+N} \rightarrow (L_2(0, T))^{M+N}$ ограничен и его норма не убывает по T .

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу (1.16)–(1.18) $\psi_{kji} \in C[0, T]$ и

$$|\Delta_i(t)| \geq \Delta_0 > 0, \quad |\psi_{kji}(t)| \leq \psi_0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.11)$$

На пространстве $(L_2(0, T))^{M+N}$ введем $M + N$ линейных операторов $\Lambda_{ki}(F, \Phi) = Q(\omega_{ki}) \circ [(S_0 \circ H)F + (S_l \circ J)\Phi]$. Пусть $\Lambda = \{\Lambda_{ki}\}$. Тогда, поскольку $HF \in (L_2(0, T; L_2(I)))^n$, $J\Phi \in (L_2(0, T))^n$, из теоремы 2.1 и леммы 2.1 следует, что оператор Λ действует из пространства $(L_2(0, T))^{M+N}$ в пространство $(\tilde{H}^1(0, T))^{M+N}$ и ограничен.

Заметим, что набор равенств $\varphi_{ki} = \Lambda_{ki}(F, \Phi)$, $i : m_i + n_i > 0, k = 1, \dots, m_i + n_i$, для $(F, \Phi) \in (L_2(0, T))^{M+N}$ очевидно означает, что набор функций (F, Φ) является искомым.

Положим для каждого i , для которого $m_i + n_i > 0$,

$$\tilde{r}(t; u_i, \omega_{ki}) \equiv (-1)^{l+1} \int_I u_i(t, x) \left(a_{(2l+1)i} \omega_{ki}^{(2l+1)} - a_{2l} \omega_{ki}^{(2l)} \right) dx +$$

$$+ \sum_{m=1}^n \sum_{j=0}^{l-1} (-1)^{j+1} \int_I u_m(t, x) \left[(a_{(2j+1)im} \omega_{ki}^{(j)})^{(j+1)} - (a_{(2j)im} \omega_{ki}^{(j)})^{(j)} \right] dx \in C[0, T], \quad (2.12)$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)^T = (S_0 \circ H)F + (S_l \circ J)\Phi$. Тогда из равенства (2.8) следует, что для $q(t; u_i, \omega_{ki}) = (\Lambda_{ki}(F, \Phi))(t)$

$$q'(t; u_i, \omega_{ki}) = \tilde{r}(t; u_i, \omega_{ki}) + \sum_{j=1}^{m_i} F_{ji}(t) \psi_{kji}(t) + n_i \nu_{li}(t) \psi_{k(m_i+1)i}(t) \in L_2(0, T), \quad (2.13)$$

где функции ψ_{kji} заданы формулами (1.16), (1.17). Положим

$$y_{ki}(t) \equiv q'(t; u_i, \omega_{ki}) - \tilde{r}(t; u_i, \omega_{ki}) \in L_2(0, T), \quad k = 1, \dots, m_i + n_i \quad (2.14)$$

и обозначим через $\tilde{\Delta}_{ki}(t)$ определитель матрицы размера $(m_i + n_i) \times (m_i + n_i)$, где по сравнению с матрицей $(\psi_{kji}(t))$ k -й столбец заменен столбцом $(y_{1i}(t), \dots, y_{(m_i+n_i)i}(t))^T$. Тогда из равенства (2.13) следует, что

$$F_{ki}(t) = \frac{\tilde{\Delta}_{ki}(t)}{\Delta_i(t)}, \quad k = 1, \dots, m_i, \quad \nu_{li}(t) = \frac{\tilde{\Delta}_{(m_i+1)i}(t)}{\Delta_i(t)}, \quad n_i = 1. \quad (2.15)$$

Положим

$$z_{ki}(t) \equiv \varphi'_{ki}(t) - \tilde{r}(t; u_i, \omega_{ki}) \in L_2(0, T), \quad k = 1, \dots, m_i + n_i, \quad (2.16)$$

и обозначим через $\Delta_{ki}(t)$ определитель матрицы размера $(m_i + n_i) \times (m_i + n_i)$, где по сравнению с $\tilde{\Delta}_{ki}(t)$ k -й столбец $(y_{1i}(t), \dots, y_{(m_i+n_i)i}(t))^T$ заменен столбцом $(z_{1i}(t), \dots, z_{(m_i+n_i)i}(t))^T$.

Введем операторы $A_{ki} : L_2(0, T) \rightarrow L_2(0, T)$ формулой

$$(A_{ki}(F, \Phi))(t) \equiv \frac{\Delta_{ki}(t)}{\Delta_i(t)}, \quad i : m_i + n_i > 0, k = 1, \dots, m_i + n_i, \quad (2.17)$$

и пусть $A(F, \Phi) = \{A_{ki}(F, \Phi)\}$, $A : (L_2(0, T))^{M+N} \rightarrow (L_2(0, T))^{M+N}$.

Докажем, что $\varphi_{ki} = \Lambda_{ki}(F, \Phi)$, $i : m_i + n_i > 0, k = 1, \dots, m_i + n_i$, тогда и только тогда, когда $A(F, \Phi) = (F, \Phi)$.

Действительно, если $\varphi_{ki} = \Lambda_{ki}(F, \Phi)$, то $\varphi'_{ki}(t) \equiv q'(t; u_i, \omega_{ki})$ для функции $q(t; u_i, \omega_{ki}) \equiv (\Lambda_{ki}(F, \Phi))(t)$, и тогда из равенств (2.14)–(2.17) следует, что $\Delta_{ki}(t) \equiv \tilde{\Delta}_{ki}(t)$. Поэтому $A(F, \Phi) = (F, \Phi)$.

Обратно, если $A(F, \Phi) = (F, \Phi)$, то $\Delta_{ki}(t) \equiv \tilde{\Delta}_{ki}(t)$ и из условия $\Delta_i(t) \neq 0$ следует, что $z_{ki}(t) \equiv y_{ki}(t)$, а тогда $\varphi'_{ki}(t) \equiv q'(t; u_i, \omega_{ki})$. Поскольку $\varphi_{ki}(0) = q(0; u_i, \omega_{ki}) = 0$, мы получаем, что $q(t; u_i, \omega_{ki}) \equiv \varphi_{ki}(t)$.

Теперь покажем, что оператор A является сжимающим при подходящем выборе специальной нормы в пространстве $(L_2(0, T))^{M+N}$.

Пусть $(F_1, \Phi_1), (F_2, \Phi_2) \in (L_2(0, T))^{M+N}$, $u_m \equiv (S_0 \circ H)F_m + (S_l \circ J)\Phi_m$, $m = 1, 2$. Обозначим через $\Delta_{ki}^*(t)$ определитель матрицы размера $(m_i + n_i) \times (m_i + n_i)$, где по сравнению с матрицей $(\psi_{kji}(t))$ k -й столбец заменен на столбец, в котором на j -й строке стоит элемент $\tilde{r}(t; u_{1i}, \omega_{ji}) - \tilde{r}(t; u_{2i}, \omega_{ji}) = \tilde{r}(t; u_{1i} - u_{2i}, \omega_{ji})$. Тогда

$$(A_{ki}(F_1, \Phi_1))(t) - (A_{ki}(F_2, \Phi_2))(t) = -\frac{\Delta_{ki}^*(t)}{\Delta_i(t)}. \quad (2.18)$$

В силу неравенства (2.6) для $t \in [0, T]$

$$\|u_1(t, \cdot) - u_2(t, \cdot)\|_{(L_2(I))^n} \leq c(T) \left[\sum_{i: m_i > 0} \sum_{j=1}^{m_i} \|h_{ji}\|_{C([0, T]; L_2(I))} \|F_{1ji} - F_{2ji}\|_{L_2(0, t)} + \sum_{i: n_i > 0} \|\nu_{1li} - \nu_{2li}\|_{L_2(0, t)} \right]. \quad (2.19)$$

Пусть $\gamma > 0$, тогда с учетом (2.11), (2.12), (2.18) и (2.19)

$$\|e^{-\gamma t} (A(F_1, \Phi_1) - A(F_2, \Phi_2))\|_{(L_2(0, T))^{M+N}} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{c(\{\|\omega_{ji}\|_{H^{2l+1}(I)}\}, \psi_0)}{\Delta_0} \left(\int_0^T e^{-2\gamma t} \|u_1(t, \cdot) - u_2(t, \cdot)\|_{(L_2(I))^n}^2 dt \right)^{1/2} \leq \\
&\leq c(T, (\{\|\omega_{ji}\|_{H^{2l+1}(I)}\}, \psi_0, \Delta_0^{-1}, \{\|h_{ji}\|_{C([0,T]; L_2(I))}\})) \left[\int_0^T e^{-2\gamma t} \int_0^t \left(\sum_{i:m_i>0} \sum_{j=1}^{m_i} (F_{1ji}(\tau) - F_{2ji}(\tau))^2 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{i:n_i>0} (\nu_{1li}(\tau) - \nu_{2li}(\tau))^2 \right) d\tau dt \right]^{1/2} = \\
&= c \left[\int_0^T \left(\sum_{i:m_i>0} \sum_{j=1}^{m_i} (F_{1ji}(\tau) - F_{2ji}(\tau))^2 + \sum_{i:n_i>0} (\nu_{1li}(\tau) - \nu_{2li}(\tau))^2 \right) \left(\int_\tau^T e^{-2\gamma t} dt \right) d\tau \right]^{1/2} \leq \\
&\leq \frac{c}{(2\gamma)^{1/2}} \|e^{-\gamma \tau} ((F_1, \Phi_1) - (F_2, \Phi_2))\|_{(L_2(0,T))^{M+N}}. \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Осталось выбрать достаточно большое γ .

Таким образом, для любого набора функций $\varphi_{ki} \in (\tilde{H}^1(0, T))^{M+N}$ существует единственный набор функций $(F, \Phi) \in (L_2(0, T))^{M+N}$, для которого $A(F, \Phi) = (F, \Phi)$, т. е. $\varphi_{ki} = \Lambda_{ki}(F, \Phi)$. Это означает, что оператор Λ обратим, и тогда из теоремы Банаха следует, что обратный оператор $\Gamma = \Lambda^{-1} : (\tilde{H}^1(0, T))^{M+N} \rightarrow (L_2(0, T))^{M+N}$ непрерывен. В частности,

$$\|\Gamma\{\varphi_{ki}\}\|_{(L_2(0,T))^{M+N}} \leq c(T) \|\{\varphi'_{ki}\}\|_{(L_2(0,T))^{M+N}}. \quad (2.21)$$

Наконец, если для произвольного $T_1 > T$ продолжить функции φ_{ki} константами $\varphi_{ki}(T)$ на интервал (T, T_1) , то аналог неравенства (2.21) на интервале $(0, T_1)$ для таких функций очевидно выполнен для константы $c(T_1) \geq c(T)$. Это означает, что норма оператора Γ не убывает по T . $\square$

В следующей теореме приводится решение обратной задачи для линейной системы в общем случае.

Теорема 2.2. Пусть для матриц a_j выполнены условия (1.8), (1.9) для некоторого $T > 0$. Предположим, что $u_0 \in (L_2(I))^n$, $(\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1}) \in (\mathcal{B}^{l-1}(0, T))^n$, $\nu_{li} \in L_2(0, T)$ если $n_i = 0$ и положим $\tilde{\nu}_l = (\tilde{\nu}_{l1}, \dots, \tilde{\nu}_{ln})^T$, где $\tilde{\nu}_{li} = 0$ при $n_i = 1$, $\tilde{\nu}_{li} = \nu_{li}$ при $n_i = 0$. Пусть $h_0 = (h_{01}, \dots, h_{0n})^T \in (L_1(0, T; L_2(I)) \cap L_2(0, T; L_1(I)))^n$, $G_j \in (L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I)) \cap L_2(0, T; L_1(I)))^n$, $j = 0, \dots, l$. Предположим, что выполнено условие (1.6) и для любого $i = 1, \dots, n$, для которого $m_i + n_i > 0$, при $k = 1, \dots, m_i + n_i$ функции ω_{ki} удовлетворяют условию (1.12); $\varphi_{ki} \in H^1(0, T)$ и выполнено условие (1.15); $h_{ki} \in C([0, T]; L_2(I))$ для $k = 1, \dots, m_i$ если $m_i > 0$. Предположим, что выполнено условие (1.18), где функции ψ_{kji} заданы формулами (1.16), (1.17). Тогда существуют единственное множество M функций $F = \{F_{ki}(t) \in L_2(0, T), i : m_i > 0, k = 1, \dots, m_i\}$, единственное множество N функций $\nu_i(t) \in L_2(0, T), i : n_i = 1\}$ и соответствующее единственное слабое решение $u \in (X(Q_T))^n$ задачи (2.4), (1.2), (1.3), удовлетворяющее условиям (1.5), где

$$f \equiv h_0 + HF, \quad \nu_l \equiv \tilde{\nu}_l + J\Phi, \quad (2.22)$$

$$(F, \Phi) = \Gamma \left\{ \varphi_{ki} - Q(\omega_{ki}) (\tilde{S}W + S_l \tilde{\nu}_l + S_0 h_0 + \sum_{j=0}^l \tilde{S}_j G_j)_i, i : m_i + n_i > 0, k = 1, \dots, m_i + n_i \right\}, \quad (2.23)$$

$$u = \tilde{S}W + S_l \nu_l + S_0 f + \sum_{j=0}^l \tilde{S}_j G_j. \quad (2.24)$$

Доказательство. Положим

$$v \equiv S(u_0, (\mu_0, \dots, \mu_{l-1}), (\nu_0, \dots, \nu_{l-1}), \tilde{\nu}_l, h_0, (G_0, \dots, G_l)) = \tilde{S}W + S_l \tilde{\nu}_l + S_0 h_0 + \sum_{j=0}^l \tilde{S}_j G_j.$$

В силу леммы 2.1 $Q(\omega_{ki})v_i \in H^1(0, T)$. Более того, согласно (1.15) $Q(\omega_{ki})v_i|_{t=0} = \varphi_{ki}(0)$. Положим

$$\tilde{\varphi}_{ki} \equiv \varphi_{ki} - Q(\omega_{ki})v_i,$$

тогда $\tilde{\varphi}_{ki} \in \tilde{H}^1(0, T)$. В свою очередь, из леммы 2.2 следует, что функции $(F, \Phi) \equiv \Gamma\{\tilde{\varphi}_{ki}\}$ и $u \equiv v + (S_l \circ J)\Phi + (S_0 \circ H)F$ по формулам (2.22) и (2.24) дают искомое решение рассматриваемой задачи. Единственность также следует из леммы 2.2. $\square$

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1.1. На пространстве $(X(Q_T))^n$ введем отображение Θ

$$u = \Theta v \equiv \tilde{S}W + S_l \tilde{v}_l + S_0 h_0 - \sum_{j=0}^l \tilde{S}_j g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v) + (S_l \circ J)\Phi + (S_0 \circ H)F, \quad (3.1)$$

$$(F, \Phi) \equiv \Gamma\left\{\varphi_{ki} - Q(\omega_{ki})(\tilde{S}W + S_l \tilde{v}_l + S_0 h_0 - \sum_{j=0}^l \tilde{S}_j g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v))_i\right\}. \quad (3.2)$$

Заметим, что в силу условий (1.10), (1.11) для $i = 1, \dots, n$

$$|g_{ji}(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)| \leq c \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{l-1} (|\partial_x^m v|^{b_1(j,k,m)} + |\partial_x^m v|^{b_2(j,k,m)}) |\partial_x^k v|. \quad (3.3)$$

Положим при $j < l$

$$e(b_i(j, k, m)) = \begin{cases} \frac{2l - 2k + 1 - (2m + 1)b_i(j, k, m)}{4l}, & b_i(j, k, m) > 1, \\ \frac{l - k - mb_i(j, k, m)}{2l}, & b_i(j, k, m) \leq 1, \end{cases} \quad (3.4)$$

а при $j = l$

$$e(b_i(l, k, m)) = \frac{2l - 2k - (2m + 1)b_i(l, k, m)}{4l}; \quad (3.5)$$

в частности, в силу (1.13), (1.14) все величины $e(b_i(j, k, m)) \geq 0$. Заметим, что если $j < l$, то

$$\frac{2l - 2k + 1}{2m + 1} < \frac{4l - 2j - 2k}{2m + 1},$$

более того, если $m + k \geq l$, то

$$\frac{l - k}{m} \leq \frac{2l - 2k + 1}{2m + 1}.$$

Тогда из условий (1.13), (1.14) и неравенства (2.1) следует, что

$$g_{ji}(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v) \in L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I)),$$

более того,

$$\|g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)\|_{(L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I)))^n} \leq c \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=1}^2 (T^{e(b_i(j,k,m))} + T^{(2l-j)/(2l)}) \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_i(j,k,m)+1}. \quad (3.6)$$

В свою очередь, из условий (1.13)-(1.14) и неравенств (2.2)-(2.3) следует, что $g_{ji}(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v) \in L_2(0, T; L_1(I))$, более того,

$$\|g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)\|_{(L_2(0, T; L_1(I)))^n} \leq c \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{i=1}^2 (T^{e(b_i(j,k,m))} + T^{1/2}) \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_i(j,k,m)+1}. \quad (3.7)$$

Тогда в силу теоремы 2.2 отображение Θ существует. Пусть

$$b_1 = \min_{j,k,m} b_1(j, k, m), \quad b_2 = \max_{j,k,m} b_2(j, k, m), \quad 0 < b_1 \leq b_2, \quad (3.8)$$

тогда из неравенств (3.6) и (3.7) следует, что при $0 \leq j \leq l$

$$\|g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)\|_{(L_{2l/(2l-j)}(0, T; L_2(I)))^n} + \|g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)\|_{(L_2(0, T; L_1(I)))^n} \leq$$

$$\leq c(T) \left(\|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1+1} + \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2+1} \right). \quad (3.9)$$

Применим леммы 2.1 и 2.2, тогда для функций (F, Φ) из равенства (3.2) следует оценка

$$\begin{aligned} \|(F, \Phi)\|_{(L_2(0,T))^{M+N}} &\leq c(T) \left[\|u_0\|_{(L_2(I))^n} + \|(\mu_0, \dots, \mu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0,T))^n} + \|(\nu_0, \dots, \nu_{l-1})\|_{(\mathcal{B}^{l-1}(0,T))^n} + \right. \\ &\quad + \|\tilde{\nu}_l\|_{(L_2(0,T))^n} + \|h_0\|_{(L_1(0,T;L_2(I)))^n} + \|h_0\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n} + \|\{\varphi'_{ki}\}\|_{(L_2(0,T))^{M+N}} + \\ &\quad \left. + \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1+1} + \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2+1} \right]. \quad (3.10) \end{aligned}$$

Поскольку также очевидно, что

$$\begin{aligned} \|HF\|_{(L_2(0,T;L_2(I)))^n} &\leq \max_{i:m_i>0, k=1, \dots, m_i} (\|h_{ki}\|_{C([0,T];L_2(I))}) \|F\|_{(L_2(0,T))^M}, \\ \|J\Phi\|_{(L_2(0,T))^n} &= \|\Phi\|_{(L_2(0,T))^N}, \end{aligned}$$

то из неравенства (2.6) следует, что

$$\|\Theta v\|_{(X(Q_T))^n} \leq c(T)c_0 + c(T) \left(\|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1+1} + \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2+1} \right). \quad (3.11)$$

Далее, для произвольных функций $v_1, v_2 \in (X(Q_T))^n$

$$\begin{aligned} |g_{ji}(t, x, v_1, \dots, \partial_x^{l-1} v_1) - g_{ji}(t, x, v_2, \dots, \partial_x^{l-1} v_2)| &\leq \\ &\leq c \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{m=0}^{l-1} \left(|\partial_x^m v_1|^{b_1(j,k,m)} + |\partial_x^m v_2|^{b_1(j,k,m)} + |\partial_x^m v_1|^{b_2(j,k,m)} + |\partial_x^m v_2|^{b_2(j,k,m)} \right) |\partial_x^k (v_1 - v_2)|, \quad (3.12) \end{aligned}$$

поэтому, аналогично (3.9)

$$\begin{aligned} \|g_j(t, x, v_1, \dots, \partial_x^{l-1} v_1) - g_j(t, x, v_2, \dots, \partial_x^{l-1} v_2)\|_{(L_{2l/(2l-j)}(0,T;L_2(I)))^n} + \\ + \|g_j(t, x, v_1, \dots, \partial_x^{l-1} v_1) - g_j(t, x, v_2, \dots, \partial_x^{l-1} v_2)\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n} \leq \\ \leq c(T) \left(\|v_1\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1} + \|v_2\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1} + \|v_1\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2} + \|v_2\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2} \right) \|v_1 - v_2\|_{(X(Q_T))^n}. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Theta v_1 - \Theta v_2 &= - \sum_{j=0}^l \tilde{S}_j \left[g_j(t, x, v_1, \dots, \partial_x^{l-1} v_1) - g_j(t, x, v_2, \dots, \partial_x^{l-1} v_2) \right] + \\ &\quad + (S_l \circ J)(\Phi_1 - \Phi_2) + (S_0 \circ H)(F_1 - F_2), \quad (3.14) \end{aligned}$$

где

$$(F_1, \Phi_1) - (F_2, \Phi_2) = \Gamma \left\{ Q(\omega_{ki}) \left(\sum_{j=0}^l \tilde{S}_j \left[g_j(t, x, v_1, \dots, \partial_x^{l-1} v_1) - g_j(t, x, v_2, \dots, \partial_x^{l-1} v_2) \right] \right) \right\}_i, \quad (3.15)$$

то аналогично (3.11)

$$\begin{aligned} \|\Theta v_1 - \Theta v_2\|_{(X(Q_T))^n} &\leq \\ &\leq c(T) \left(\|v_1\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1} + \|v_2\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1} + \|v_1\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2} + \|v_2\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2} \right) \|v_1 - v_2\|_{(X(Q_T))^n}. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Теперь выберем $r > 0$ так, чтобы

$$r^{b_1} + r^{b_2} \leq \frac{1}{4c(T)}, \quad (3.17)$$

а затем $\delta > 0$ так, чтобы

$$\delta \leq \frac{r}{2c(T)}. \quad (3.18)$$

Тогда из неравенств (3.11) и (3.16) следует, что на шаре $\overline{X}_{rn}(Q_T)$ отображение Θ является сжимающим. Его единственная неподвижная точка $u \in (X(Q_T))^n$ является искомым решением. Более того, в силу теоремы 2.2 функции (F, Φ) в (3.2) (для $v \equiv u$) определяются единственным образом.

Липшиц-непрерывная зависимость решения от входных данных устанавливается аналогично (3.11), (3.16). $\square$

Доказательство теоремы 1.2. В основном, доказательство повторяет доказательство теоремы 1.1. Искомое решение строится как неподвижная точка отображения Θ , заданного формулами (3.1), (3.2). Однако в силу того, что в условиях (1.13), (1.14) нестрогие неравенства заменены на строгие, здесь все величины $e(b_i(j, k, m)) > 0$. Положим

$$\sigma = \min_{j,k,m} e(b_2(j, k, m)) > 0. \quad (3.19)$$

Тогда из неравенств (3.6), (3.7) получаем, что в отличие от (3.9)

$$\begin{aligned} \|g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)\|_{(L_{2l/(2l-j)}(0,T;L_2(I)))^n} + \|g_j(t, x, v, \dots, \partial_x^{l-1} v)\|_{(L_2(0,T;L_1(I)))^n} \leq \\ \leq c(T)T^\sigma \left(\|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1+1} + \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2+1} \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

а тогда, используя также оценку (3.10), выводим аналогично (3.11), что

$$\|\Theta v\|_{(X(Q_T))^n} \leq c(T)c_0 + c(T)T^\sigma \left(\|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1+1} + \|v\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2+1} \right). \quad (3.21)$$

Также аналогично (3.16) находим, что

$$\begin{aligned} \|\Theta v_1 - \Theta v_2\|_{(X(Q_T))^n} \leq \\ \leq c(T)T^\sigma \left(\|v_1\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1} + \|v_2\|_{(X(Q_T))^n}^{b_1} + \|v_1\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2} + \|v_2\|_{(X(Q_T))^n}^{b_2} \right) \|v_1 - v_2\|_{(X(Q_T))^n}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Далее для доказательства первого утверждения теоремы при фиксированном δ выберем $T_0 > 0$ так, чтобы

$$4c(T_0)T_0^\sigma \left((2c(T_0)\delta)^{b_1} + (2c(T_0)\delta)^{b_2} \right) \leq 1, \quad (3.23)$$

а затем для любого $T \in (0, T_0]$ выберем произвольное r , для которого

$$r \geq 2c(T)\delta, \quad 4c(T)T^\sigma (r^{b_1} + r^{b_2}) \leq 1 \quad (3.24)$$

(это множество непусто согласно (3.23), поскольку величина $c(T)$ не убывает по T). Тогда отображение Θ является сжимающим на шаре $\overline{X}_{rn}(Q_T)$.

Для второго утверждения теоремы доказательство того факта, что в случае фиксированного T отображение Θ является сжимающим на шаре $\overline{X}_{rn}(Q_T)$, ничем не отличается от аналогичного доказательства для теоремы 1.1.

Для того, чтобы доказать единственность решения во всем пространстве в обоих случаях, заметим, что для достаточно большого r величина T_0 может быть выбрана настолько малой, что решение рассматриваемой задачи $u \in (X(Q_{T_0}))^n$ будет единственной неподвижной точкой сжимающего отображения Θ в шаре $\overline{X}_{rn}(Q_{T_0})$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1996.
2. Фаминский А. В. О задачах управляемости для уравнения Кортевега—де Фриза с интегральным переопределением // Дифф. уравн. — 2019. — 55, № 1. — С. 123–133.
3. Balashov O. S., Faminskii A. V. On direct and inverse problems for systems of odd-order quasilinear evolution equations // Eurasian Math. J. — 2024. — 15, № 4. — С. 33–53.
4. Bona J. L., Cohen J., Wang G. Global well-posedness for a system of KdV-type equations with coupled quadratic nonlinearities // Nagoya Math. J. — 2014. — 215. — С. 67–149.
5. Faminskii A. V. On inverse problems for odd-order quasilinear evolution equations with general nonlinearity // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2023. — 271, № 3. — С. 281–299.
6. Faminskii A. V., Martynov E. V. Inverse problems for the higher order nonlinear Schrödinger equation // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2023. — 274, № 4. — С. 475–492.
7. Lu S., Chen M., Lui Q. A nonlinear inverse problem of the Korteweg–de Vries equation // Bull. Math. Sci. — 2019. — 9, № 3. — 1950014.
8. Majda A. J., Biello J. A. The nonlinear interaction of barotropic and equatorial baroclinic Rossby waves // J. Atmos. Sci. — 2003. — 60. — С. 1809–1821.

9. *Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A.* Methods for solving inverse problems in mathematical physics. — New York—Basel: Marcel Dekker Inc., 1999.

О. С. Балашов

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: balashovos@s1238.ru

А. В. Фаминский

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: faminskiy-av@pfur.ru

UDC 517.956.6

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-18-32

EDN: STIIBB

Inverse initial-boundary value problem for systems of quasilinear evolution equations of odd order

O. S. Balashov and A. V. Faminskii

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. An inverse initial-boundary value problem on a bounded interval for systems of quasilinear evolution equations of odd order is considered. Integral conditions are chosen as overdeterminations, and boundary functions and right-hand sides of equations of a special type are chosen as controls. Results on the existence and uniqueness of solutions for small initial data or a small time interval are established.

Keywords: quasilinear evolution equations, odd order, inverse problem, initial-boundary value problem, integral conditions, existence, uniqueness.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The second author was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 23-11-00056).

For citation: O. S. Balashov, A. V. Faminskii, “Inverse initial-boundary value problem for systems of quasilinear evolution equations of odd order,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 18–32. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-18-32>

REFERENCES

1. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vloženiya* [Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vloženiya], Nauka, Moscow, 1996 (in Russian).
2. A. V. Faminskii, “O zadachakh upravlyaemosti dlya uravneniya Kortevaga—de Friza s integral'nym pereopredeleniem” [On controllability problems for the Korteweg—de Vries equation with integral overdetermination], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2019, **55**, No. 1, 123–133 (in Russian).
3. O. S. Balashov and A. V. Faminskii, “On direct and inverse problems for systems of odd-order quasilinear evolution equations,” *Eurasian Math. J.*, 2024, **15**, No. 4, 33–53.
4. J. L. Bona, J. Cohen, and G. Wang, “Global well-posedness for a system of KdV-type equations with coupled quadratic nonlinearities,” *Nagoya Math. J.*, 2014, **215**, 67–149.

5. A. V. Faminskii, “On inverse problems for odd-order quasilinear evolution equations with general nonlinearity,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2023, **271**, No. 3, 281–299.
6. A. V. Faminskii and E. V. Martynov, “Inverse problems for the higher order nonlinear Schrödinger equation,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2023, **274**, No. 4, 475–492.
7. S. Lu, M. Chen, and Q. Lui, “A nonlinear inverse problem of the Korteweg–de Vries equation,” *Bull. Math. Sci.*, 2019, **9**, No. 3, 1950014.
8. A. J. Majda and J. A. Biello, “The nonlinear interaction of barotropic and equatorial baroclinic Rossby waves,” *J. Atmos. Sci.*, 2003, **60**, 1809–1821.
9. A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, and I. A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Marcel Dekker Inc., New York—Basel, 1999.

O. S. Balashov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: balashovos@s1238.ru

A. V. Faminskii
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: faminskiy-av@pfur.ru