

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-1-17

EDN: SPXFTR

О НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С УСЛОВИЯМИ САМАРСКОГО—ИОНКИНА ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

А. АШЫРАЛЫЕВ^{1,2,3}, А. ХАМАД⁴

¹*Bahcesehir University, Стамбул, Турция*

²*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

³*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

⁴*University of Benghazi, Бенгази, Ливия*

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию абстрактной нелокальной краевой задачи с условиями Самарского—Ионкина интегрального типа для дифференциального уравнения эллиптического типа

$$-u''(t) + Au(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad u(0) = \varphi, \quad u'(0) = u'(T) + \int_0^T \alpha(s) u(s) ds + \psi$$

в произвольном банаховом пространстве E с положительным оператором A . Устанавливается корректность этой задачи в различных банаховых пространствах. В приложениях доказываются теоремы о корректности ряда нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений с условиями Самарского—Ионкина интегрального типа.

Ключевые слова: эллиптическое дифференциальное уравнение, краевая задача, нелокальная задача, условия Самарского—Ионкина интегрального типа, корректность.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Публикация подготовлена при поддержке программы РУДН «5–100» и издано в рамках целевой программы BR05236656 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан. Авторы также выражают благодарность рецензенту за полезные советы по улучшению статьи.

Для цитирования: А. Ашыралыев, А. Хамад. О нелокальной краевой задаче для эллиптических дифференциальных уравнений с условиями Самарского—Ионкина интегрального типа // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 1. С. 1–17. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-1-17>

Посвящается 70-летию профессора А. Л. Скубачевского

1. ВВЕДЕНИЕ

Эллиптические уравнения в частных производных имеют приложения почти во всех областях математики, от гармонического анализа до геометрии и теории Ли, а также многочисленные приложения в физике и технике. Корректность локальной краевой задачи для эллиптического

уравнения

$$\begin{aligned} -v''(t) + Av(t) &= f(t) \quad (0 \leq t \leq T), \\ v(0) &= v_0, \quad v(T) = v_T \end{aligned} \quad (1.1)$$

в произвольном банаховом пространстве E с положительным оператором A и связанные с ним приложения изучались многими исследователями (см., например, [9, 12, 25, 34] и приведенную там библиографию).

В математическом моделировании эллиптические уравнения используются вместе с локальными граничными условиями, задающими решение на границе области. В некоторых случаях классические граничные условия не могут точно описать процесс или явление. Поэтому математические модели различных физических, химических, биологических или экологических процессов часто включают неклассические условия. Такие условия обычно определяются как нелокальные граничные условия и отражают ситуации, когда данные на границе области не могут быть измерены напрямую или когда данные на границе зависят от данных внутри области. Корректность различных нелокальных краевых задач для уравнений в частных производных и разностных уравнений широко изучалась многими исследователями (см., например, [6–8, 10, 13–19, 22, 24, 26, 31–33, 35] и приведенные там ссылки).

В статье [2] Ионкина исследовалась нелокальная задача для одномерного параболического уравнения, возникающего при моделировании некоторых неклассических тепловых процессов. Было доказано существование решений, а затем установлена их устойчивость в [3]. Для параболического уравнения с одной пространственной переменной Самарский [4] предложил нелокальную постановку краевой задачи, охватывающую как классические начально-краевые задачи, так и задачу Ионкина из [2, 3]. В последнее время различные нелокальные краевые задачи с условием Самарского–Ионкина для уравнений в частных производных изучались многими исследователями (см., например, [1, 20, 21, 23, 27–30, 37, 38] и приведенные там ссылки).

В настоящей работе рассматривается нелокальная краевая задача для абстрактного дифференциального уравнения эллиптического типа с условиями Самарского–Ионкина интегрального типа

$$\begin{aligned} -u''(t) + Au(t) &= f(t), \quad 0 < t < T, \\ u(0) &= \varphi, \quad u'(0) = u'(T) + \int_0^T \alpha(s) u(s) ds + \psi \end{aligned} \quad (1.2)$$

в произвольном банаховом пространстве E с положительным оператором A .

Функция $u(t)$ называется *решением* задачи (1.2), если выполняются следующие условия:

1. $u(t)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, T]$ функция. Производные на концах отрезка понимаются как соответствующие односторонние производные.
2. Элемент $u(t)$ принадлежит $D(A)$ для всех $t \in [0, T]$, а функция $Au(t)$ непрерывна на отрезке $[0, T]$.
3. $u(t)$ удовлетворяет уравнению и граничным условиям (1.2).

Решение задачи (1.2), определенное таким образом, в дальнейшем будет называться решением задачи (1.2) в пространстве $C(E) = C([0, T], E)$. Здесь $C(E)$ обозначает банахово пространство всех непрерывных функций $\varphi(t)$, определенных на $[0, T]$ со значениями в E , снабженное нормой

$$\|\varphi\|_{C(E)} = \max_{t \in [0, T]} \|\varphi(t)\|_E.$$

Установлена корректность задачи (1.2) в различных банаховых пространствах. В приложениях доказаны теоремы о корректности ряда нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений с условиями Самарского–Ионкина интегрального типа.

2. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1.1)

В этом разделе мы приводим некоторые вспомогательные утверждения из [12], которые будут полезны в дальнейшем. Оператор $B = A^{\frac{1}{2}}$ имеет лучшие спектральные свойства, чем положительный оператор A . Действительно, оператор $(-B)$ является генератором аналитической

полугруппы $\exp\{-tB\}$ ($t \geq 0$) с экспоненциально убывающей нормой при $t \rightarrow +\infty$, т. е. оценки

$$\|\exp(-tB)\|_{E \rightarrow E}, \|tB \exp(-tB)\|_{E \rightarrow E} \leq M(B)e^{-\alpha(B)t} \quad (t > 0) \quad (2.1)$$

выполняются для некоторых $M(B) \in [1, +\infty)$ и $\alpha(B) \in (0, +\infty)$. Из этого следует, что оператор $I - e^{-2TB}$ имеет ограниченный обратный

$$(I - e^{-2TB})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2kTB}$$

и выполняется оценка

$$\|(I - e^{-2TB})^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq M(B) \left(1 - e^{-2T\alpha(B)}\right)^{-1}. \quad (2.2)$$

Формула

$$\begin{aligned} v(t) = (I - e^{-2TB})^{-1} & \left\{ (e^{-tB} - e^{-(2T-t)B})v_0 + (e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B})v_T - \right. \\ & - (e^{-(T-t)B} - e^{-(T+t)B})(2B)^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})f(s)ds \Big\} + \\ & + (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-|t-s|B} - e^{-(t+s)B})f(s)ds \end{aligned} \quad (2.3)$$

справедлива для точного решения задачи (1.1) при достаточно гладких данных v_0 , v_T и $f(t)$.

Обозначим через $C^\alpha(E)$ ($0 < \alpha < 1$) банахово пространство, полученное пополнением множества всех гладких E -значных функций $\varphi(t)$ на $[0, T]$ по норме

$$\|\varphi\|_{C^\alpha(E)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|\varphi(t)\|_E + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq T} \frac{\|\varphi(t+\tau) - \varphi(t)\|_E}{\tau^\alpha}.$$

Теорема 2.1. Пусть $Av_0 - f(0), Av_T - f(T) \in E_\alpha$, $f(t) \in C^\alpha(E)$ ($0 < \alpha < 1$). Если A — положительный оператор в банаховом пространстве E , то краевая задача (1.1) корректно поставлена в пространстве Гёльдера $C^\alpha(E)$. Для решения $v(t)$ в $C^\alpha(E)$ краевой задачи выполняется коэрцитивное неравенство

$$\begin{aligned} & \|v''\|_{C^\alpha(E)} + \|Av\|_{C^\alpha(E)} + \|v''\|_{C(E_\alpha)} \leq \\ & \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C^\alpha(E)} + \frac{M}{\alpha} [\|Av_0 - f(0)\|_{E_\alpha} + \|Av_T - f(T)\|_{E_\alpha}], \end{aligned} \quad (2.4)$$

где M не зависит от α , v_0 , v_T и $f(t)$. Здесь банахово пространство $E_\alpha = E_\alpha(B, E)$ ($0 < \alpha < 1$) состоит из тех $v \in E$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{E_\alpha} = \sup_{z>0} z^{1-\alpha} \|B \exp\{-zB\}v\|_E + \|v\|_E.$$

Более того, положительность A является необходимым условием корректности задачи (1.1) в $C(E)$. Однако задача (1.1) не корректна в $C(E)$ для всех положительных операторов. Оказывается, что банахово пространство E можно ограничить до банахова пространства E' ($D(A) \subset E' \subset E$) таким образом, что ограниченная задача (1.1) в E' будет корректна в $C(E')$. Роль E' здесь будут играть дробные пространства $E_\alpha = E_\alpha(B, E)$ ($0 < \alpha < 1$).

Теорема 2.2. Пусть A — положительный оператор в банаховом пространстве E и $f(t) \in C(E_\alpha)$ ($0 < \alpha < 1$), $v_0, v_T \in E_\alpha$. Тогда для решения $v(t)$ в $C(E_\alpha)$ локальной краевой задачи (1.1) выполняется коэрцитивное неравенство

$$\begin{aligned} & \|v''\|_{C(E_\alpha)} + \|Av\|_{C(E_\alpha)} \leq \\ & \leq M [\|Av_0\|_{E_\alpha} + \|Av_T\|_{E_\alpha} + \alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1} \|f\|_{C(E_\alpha)}], \end{aligned} \quad (2.5)$$

где M не зависит от α , v_0 , v_T и $f(t)$.

3. КОРРЕКТНОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ (1.2)

Рассмотрим нелокальную краевую задачу (1.2). Приведем лемму, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 3.1. Пусть A — положительный оператор в банаховом пространстве E , и $\alpha(t)$ — неотрицательная непрерывная функция для любого $t \in [0, T]$. Тогда оператор

$$\left((I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \right)$$

имеет обратный

$$Q = \left((I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \right)^{-1},$$

и справедлива следующая оценка:

$$\|Q\|_{E \rightarrow E} \leq M_2(B). \quad (3.1)$$

Доказательство. Используя свойство непрерывности $\alpha(t)$, мы можем записать

$$B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds = \alpha(s^*) B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) ds = A^{-1} \alpha(s^*) (I - e^{-TB})^2.$$

Из этого следует, что

$$(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds = (I - e^{-TB})^2 A^{-1} (A + \alpha(s^*) I).$$

Тогда оператор

$$\left((I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \right)$$

имеет обратный

$$(I - e^{-TB})^{-2} A (A + \alpha(s^*) I)^{-1} = (I - e^{-TB})^{-2} (I - \alpha(s^*) (A + \alpha(s^*) I)^{-1}).$$

Лемма 3.1 доказана. $\square$

Более того, применяя формулу (2.3) для решения задачи (1.2) при $u(0) = \varphi$ и взяв производную по t , получаем

$$\begin{aligned} u'(t) = & (I - e^{-2TB})^{-1} \left\{ B \left(-e^{-tB} - e^{-(2T-t)B} \right) \varphi + B \left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B} \right) u(T) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(e^{-(T-t)B} + e^{-(T+t)B} \right) \int_0^T \left(e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right) f(s) ds \right\} + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \left(-e^{-(t-s)B} + e^{-(t+s)B} \right) f(s) ds + \frac{1}{2} \int_t^T \left(e^{-(s-t)B} + e^{-(t+s)B} \right) f(s) ds. \end{aligned}$$

Имеем, что

$$\begin{aligned} u'(0) = & -B(I - e^{-2TB})^{-1} (I + e^{-2TB}) \varphi + 2Be^{-TB} (I - e^{-2TB})^{-1} u(T) + \\ & + (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T \left(e^{-sB} - e^{-(2T-s)B} \right) f(s) ds \end{aligned} \quad (3.2)$$

и

$$\begin{aligned}
u'(T) = & -2Be^{-TB}(I - e^{-2TB})^{-1}\varphi + B(I + e^{-2TB})(I - e^{-2TB})^{-1}u(T) - \\
& - (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})f(s)ds.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Применяя формулу (2.3) для $u(0) = \varphi$, получаем

$$\begin{aligned}
\int_0^T \alpha(s) u(s)ds = & (I - e^{-2TB})^{-1} \left\{ \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B})\alpha(s) ds \varphi + \right. \\
& + \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})\alpha(s) ds u(T) - \\
& \left. - (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})\alpha(s) ds \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B})f(y)dy \right\} + \\
& + (2B)^{-1} \int_0^T \alpha(s) \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B})f(y)dyds.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Применяя формулы (3.2)–(3.4) и условие Самарского–Ионкина $u'(0) = u'(T) + \int_0^T \alpha(s) u(s)ds + \psi$, получаем

$$\begin{aligned}
& -B(I - e^{-2TB})^{-1}(I + e^{-2TB})\varphi + 2Be^{-TB}(I - e^{-2TB})^{-1}u(T) + \\
& + (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B})f(s)ds = \\
& = -2Be^{-TB}(I - e^{-2TB})^{-1}\varphi + B(I + e^{-2TB})(I - e^{-2TB})^{-1}u(T) - \\
& - (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})f(s)ds + \\
& + (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B})\alpha(s) ds \varphi + \\
& + (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})\alpha(s) ds u(T) - \\
& - (2B)^{-1}(I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})\alpha(s) ds \times \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B})f(y)dy + \\
& + (2B)^{-1} \int_0^T \alpha(s) \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B})f(y)dyds + \psi,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
& -(I - e^{-2TB})^{-1} \left[B(I - e^{-TB})^2 + \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B})\alpha(s) ds \right] u(T) = \\
& = (I - e^{-2TB})^{-1} \left[B(I - e^{-TB})^2 + \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B})\alpha(s) ds \right] \varphi -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) f(s) ds - \\
& - (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) f(s) ds - \\
& - (2B)^{-1} (I - e^{-2TB})^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \times \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B}) f(y) dy + \\
& + (2B)^{-1} \int_0^T \alpha(s) \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B}) f(y) dy ds + \psi.
\end{aligned}$$

По лемме 3.1 существует обратный ограниченный оператор

$$Q = \left((I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \right)^{-1}$$

для оператора

$$(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds. \quad (3.5)$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
u(T) = & -Q \left\{ \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds \right] \varphi - \right. \\
& - B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) f(s) ds - B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) f(s) ds - \\
& - (2B)^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \times B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B}) f(y) dy + \\
& \left. + (I - e^{-2TB}) \left[(2B)^{-1} \int_0^T \alpha(s) B^{-1} \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B}) f(y) dy ds + B^{-1} \psi \right] \right\}. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Итак, легко показать, что функция $u(t)$, заданная на $[0, T]$ формулами (2.3) при $u(0) = \varphi$ и (3.6), дает единственное решение в $C(E)$ задачи (1.2), если, например, $\alpha(t) \in C^{(1)}[0, T]$, $\varphi \in D(A^2)$, $\psi \in D(A^{\frac{3}{2}})$ и $Af(t) \in C(E)$ или $f'(t) \in C(E)$. Достаточные условия корректности нелокальной краевой задачи (1.2) можно установить, если рассмотреть эту задачу в некоторых пространствах гладких E -значных функций, определенных на $[0, T]$.

Обратим внимание, что для решения задачи (1.2) неравенство коэрцитивности

$$\|u''\|_{C^\alpha(E)} + \|Au\|_{C^\alpha(E)} \leq M_C [\|f\|_{C^\alpha(E)} + \|A\varphi\|_E + \|A\psi\|_E]$$

не выполняется. Тем не менее, мы имеем следующие результаты о корректности.

Теорема 3.1. *Предположим, что $A\varphi = f(0)$, $A^{\frac{1}{2}}\psi \in E_\alpha$, $f(t) \in C^\alpha(E)$ ($0 < \alpha < 1$). Если A — положительный оператор в банаховом пространстве E , то краевая задача (1.2) корректно поставлена в пространстве Гёльдера $C^\alpha(E)$ и для решения этой задачи $u(t)$ в $C^\alpha(E)$ выполняется коэрцитивное неравенство*

$$\|u''\|_{C^\alpha(E)} + \|Au\|_{C^\alpha(E)} + \|u''\|_{C(E_\alpha)} \leq \quad (3.7)$$

$$\leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C^\alpha(E)} + \frac{M}{\alpha} \left[\|A\varphi - f(0)\|_{E_\alpha} + \left\| A^{\frac{1}{2}}\psi \right\|_{E_\alpha} \right],$$

где M не зависит от $\alpha, \varphi, \psi, f(t)$.

Доказательство. По теореме 2.1 имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned} & \|u''\|_{C^\alpha(E)} + \|Au\|_{C^\alpha(E)} + \|u''\|_{C(E_\alpha)} \leq \\ & \leq \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C^\alpha(E)} + \frac{M}{\alpha} [\|Au(0) - f(0)\|_{E_\alpha} + \|Au(T) - f(T)\|_{E_\alpha}] \end{aligned} \quad (3.8)$$

для решения задачи (1.2). Поэтому для доказательства теоремы 3.1 достаточно установить оценки для $\|Au(T) - f(T)\|_{E_\alpha}$. Применяя формулу (3.6), получаем

$$\begin{aligned} Au(T) - f(T) = & -Q \left\{ \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds \right] (A\varphi - f(0)) + \right. \\ & + \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds \right] f(0) - \\ & - (I - e^{-TB}) f(0) - B \int_0^T e^{-sB} (f(s) - f(0)) ds + \\ & + \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \right] f(T) - \\ & - (I - e^{-TB}) f(T) - B \int_0^T (e^{-(T-s)B} (f(s) - f(T)) ds + \\ & + B \int_0^T e^{-(2T-s)B} f(s) ds + B \int_0^T e^{-(T+s)B} f(s) ds - \\ & - 2^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B}) f(y) dy + \\ & \left. + (I - e^{-2TB}) \left[2^{-1} \int_0^T \alpha(s) \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B}) f(y) dy ds + B\psi \right] \right\} = \sum_{k=1}^5 J_k, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_1 = & -Q \left\{ \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds \right] (A\varphi - f(0)) \right\}, \\ J_2 = & -Q(I - e^{-2TB})B\psi, \\ J_3 = & -Q \left\{ \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds \right] f(0) - \right. \\ & - (I - e^{-TB}) f(0) - B \int_0^T e^{-sB} (f(s) - f(0)) ds + \\ & \left. + \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \right] f(T) - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (I - e^{-TB}) f(T) - B \int_0^T (e^{-(T-s)B} (f(s) - f(T))) ds \Big\}, \\
J_4 = & -Q \left\{ B \int_0^T e^{-(2T-s)B} f(s) ds + B \int_0^T e^{-(T+s)B} f(s) ds \right\}, \\
J_5 = & -Q \left\{ -2^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B}) f(y) dy + \right. \\
& \left. + (I - e^{-2TB}) \left[2^{-1} \int_0^T \alpha(s) \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B}) f(y) dy ds \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Оценим J_k в норме E_α для любых $k = 1, 2, 3, 4$ и 5 по отдельности. В каждом случае будем использовать лемму 3.1 и оценки (2.1), (2.2) и (3.1). Начнем с J_1 в норме E_α . Применяя неравенство треугольника, получим

$$\begin{aligned}
& \left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} J_1 \right\|_E \leq \\
& \leq \|Q\|_{E \rightarrow E} \left[\|I - e^{-TB}\|_{E \rightarrow E}^2 + \int_0^T \int_s^{2T-s} \|e^{-yB}\|_{E \rightarrow E} dy ds \max_{s \in [0, T]} |\alpha(s)| \right] \left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} [A\varphi - f(0)] \right\|_E \leq \\
& \leq M_1 \sup_{\lambda > 0} \left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} (A\varphi - f(0)) \right\|_E \leq M_1 \|A\varphi - f(0)\|_{E_\alpha}
\end{aligned}$$

для всех $\lambda, \lambda \in (0, \infty)$. Тогда

$$\|J_1\|_{E_\alpha} \leq M_1 \|A\varphi - f(0)\|_{E_\alpha}.$$

Таким же образом мы можем получить

$$\|J_2\|_{E_\alpha} \leq M_2 \|B\psi\|_{E_\alpha}.$$

Теперь оценим J_3 в норме пространств E_α . Имеем, что

$$\begin{aligned}
J_3 = & -Q \left\{ B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds f(0) + B^{-1} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds f(T) - \right. \\
& - (I - e^{-TB}) e^{-TB} f(0) - B \int_0^T e^{-sB} (f(s) - f(0)) ds - \\
& \left. - (I - e^{-TB}) e^{-TB} f(T) - B \int_0^T (e^{-(T-s)B} (f(s) - f(T))) ds \right\}.
\end{aligned}$$

Применяя неравенство треугольника и оценки (2.1), (3.1), получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} J_3 \right\|_E \leq \|Q\|_{E \rightarrow E} \left\{ \lambda^{1-\alpha} \left\| e^{-\lambda B} \right\|_{E \rightarrow E} \max_{s \in [0, T]} |\alpha(s)| \times \right. \\
& \times \left[\int_0^T \left\| e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B} \right\|_{E \rightarrow E} ds + \int_0^T \left\| e^{-sB} - e^{-(2T-s)B} \right\|_{E \rightarrow E} ds \right] \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_E + \\
& + \lambda^{1-\alpha} \int_0^T \left\| B^2 e^{-(s+\lambda)B} \right\|_{E \rightarrow E} \|f(s) - f(0)\|_E ds + \lambda^{1-\alpha} \int_0^T \left\| B^2 e^{-(T-s+\lambda)B} \right\|_{E \rightarrow E} \|f(s) - f(T)\|_E ds + \\
& \left. + \|I - e^{-TB}\|_{E \rightarrow E} \lambda^{1-\alpha} \left\| B e^{-(\lambda+T)B} \right\|_{E \rightarrow E} [\|f(0)\|_E + \|f(T)\|_E] \right\} \leq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq M_{31}(\delta) \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)} + M_{32} \int_0^T \frac{\lambda^{1-\alpha} s^\alpha}{(s+\lambda)^2} ds \sup_{0 < s \leq T} \frac{\|f(s) - f(0)\|_E}{s^\alpha} + \\ &\quad + M_{33} \lambda^{1-\alpha} \int_0^T \frac{(T-s)^\alpha}{(\lambda+T-s)^2} ds \sup_{0 \leq s < T} \frac{\|f(s) - f(T)\|_E}{(T-s)^\alpha} \end{aligned}$$

для всех $\lambda, \lambda \in (0, \infty)$. Так как

$$\int_0^T \frac{\lambda^{1-\alpha} s^\alpha}{(\lambda+s)^2} ds \leq \int_0^\infty \frac{p^\alpha}{(1+p)^2} dp \leq \int_0^1 p^\alpha dp + \int_1^\infty p^{\alpha-2} dp = \frac{2}{(1+\alpha)(1-\alpha)},$$

имеем, что

$$\|J_3\|_{E_\alpha} \leq \frac{M_3(\delta)}{1-\alpha} \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)}.$$

Оценим J_4 в норме пространств E_α . Применяя неравенство треугольника и оценки (2.1), (3.1), получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} J_4 \right\|_E \leq \\ &\leq \|Q\|_{E \rightarrow E} \lambda^{1-\alpha} \left[\int_0^T \left\| B^2 e^{-(2T-s+\lambda)B} \right\|_{E \rightarrow E} ds + \int_0^T \left\| B^2 e^{-(T+s+\lambda)B} \right\|_{E \rightarrow E} ds \right] \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_E \leq \\ &\leq M_{41} \lambda^{1-\alpha} \left[\int_0^T \frac{1}{(\lambda+2T-s)^2} ds + \int_0^T \frac{1}{(\lambda+T+s)^2} ds \right] \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)} \leq M_4 \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)} \end{aligned}$$

для всех $\lambda, \lambda \in (0, \infty)$. Поэтому

$$\|J_4\|_{E_\alpha} \leq M_4 \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)}.$$

Оценим J_5 в норме интерполяционных пространств E_α . Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} J_5 \right\|_E \leq \|Q\|_{E \rightarrow E} \lambda^{1-\alpha} \frac{1}{2} \left\{ \max_{s \in [0,T]} |\alpha(s)| \int_0^T \left\| B e^{-(\lambda+T-s)B} \right\|_{E \rightarrow E} \|I - e^{-2sB}\|_{E \rightarrow E} ds \times \right. \\ &\quad \times \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_E + \|I - e^{-2sB}\|_{E \rightarrow E} \times \\ &\quad \times \int_0^T |\alpha(s)| \left[\int_0^s \left\| B \left(e^{-(s-y)B} - e^{-(s+y)B} \right) \right\|_{E \rightarrow E} dy + \int_s^T \left\| B \left(e^{-(y-s)B} - e^{-(s+y)B} \right) \right\|_{E \rightarrow E} dy \right] ds \times \\ &\quad \times \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_E \leq M_5(\delta) \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|_E \end{aligned}$$

для всех $\lambda, \lambda \in (0, \infty)$. Тогда

$$\|J_5\|_{E_\alpha} \leq M_5(\delta) \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)}.$$

Объединяя оценки для J_k в норме E_α для любых $k = 1, 2, 3, 4$ и 5 , получаем

$$\|Au(T) - f(T)\|_{E_\alpha} \leq M \|A\varphi - f(0)\|_{E_\alpha} + M \|B\psi\|_{E_\alpha} + \frac{M_3(\delta)}{1-\alpha} \|f\|_{C^\alpha([0,T],E)}. \quad (3.9)$$

Наконец, применяя оценки (3.8) и (3.9), получаем оценку (3.7). Теорема 3.1 доказана. $\square$

Теорема 3.2. Пусть A — положительный оператор в банаховом пространстве E и $A^{\frac{1}{2}}\psi, A\varphi \in E_\alpha, f(t) \in C(E_\alpha)$ ($0 < \alpha < 1$). Тогда для решения $u(t)$ в $C(E_\alpha)$ краевой задачи (1.2) выполняется коэрцитивное неравенство

$$\|u''\|_{C(E_\alpha)} + \|Au\|_{C(E_\alpha)} \leq M(\mu) [\|A\varphi\|_{E_\alpha} + \|A^{\frac{1}{2}}\psi\|_{E_\alpha} + \alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1} \|f\|_{C(E_\alpha)}],$$

где $M(\mu)$ не зависит от α, φ, ψ и $f(t)$.

Доказательство. По теореме 2.2 имеем оценку

$$\|u''\|_{C(E_\alpha)} + \|Au\|_{C(E_\alpha)} \leq M[\|Au(0)\|_{E_\alpha} + \|Au(T)\|_{E_\alpha} + \alpha^{-1}(1-\alpha)^{-1}\|f\|_{C(E_\alpha)}]$$

для решения задачи (1.2). Поэтому для доказательства теоремы 3.2 достаточно установить оценки для $\|Au(T)\|_{E_\alpha}$. Применяя формулу (3.6), получаем

$$\begin{aligned} Au(T) = & -Q \left\{ \left[(I - e^{-TB})^2 + B^{-1} \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) \alpha(s) ds \right] A\varphi - \right. \\ & - B \int_0^T (e^{-sB} - e^{-(2T-s)B}) f(s) ds - B \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) f(s) ds - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T (e^{-(T-s)B} - e^{-(T+s)B}) \alpha(s) ds B \int_0^T (e^{-(T-y)B} - e^{-(T+y)B}) f(y) dy + \\ & \left. + (I - e^{-2TB}) \left[\frac{1}{2} \int_0^T \alpha(s) B \int_0^T (e^{-|s-y|B} - e^{-(s+y)B}) f(y) dy ds + B\psi \right] \right\}. \end{aligned}$$

Используя неравенство треугольника, оценки (2.1), (3.1) и определение пространств E_α , получаем

$$\left\| \lambda^{1-\alpha} B e^{-\lambda B} Au(T) \right\|_E \leq M_1 [\|A\varphi\|_{E_\alpha} + \|B\psi\|_{E_\alpha}] + M_3 \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C(E_\alpha)}$$

для любого $\lambda > 0$. Поэтому

$$\|Au(T)\|_{E_\alpha} \leq M_1(\mu) [\|A\varphi\|_{E_\alpha} + \|B\psi\|_{E_\alpha}] + M_3(\mu) \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C(E_\alpha)}. \quad (3.10)$$

Теорема 3.2 доказана. $\square$

4. ПРИЛОЖЕНИЯ

Теперь рассмотрим приложения теорем 3.1 и 3.2 к эллиптическим уравнениям.

1. Сначала рассмотрим краевые задачи для двумерных эллиптических уравнений

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \delta u = f(y, x), & 0 < y < T, \quad 0 < x < l, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial y} = \frac{\partial u(T, x)}{\partial y} + \int_0^T \alpha(s) u(s, x) ds + \psi(x), & 0 < x < l, \\ u(y, 0) = u(y, l), \quad u_x(y, 0) = u_x(y, l), & 0 \leq y \leq T, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $a(x)$, $\varphi(x)$ и $f(y, x)$ — заданные достаточно гладкие функции, а $a(0) = a(l)$, $a(x) > 0$, $\delta > 0$ — достаточно большие числа. Введем банаховы пространства $C^\beta[0, l]$ ($0 < \beta < 1$) всех непрерывных функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию Гёльдера, для которых конечны следующие нормы:

$$\|\varphi\|_{C^\beta[0, l]} = \|\varphi\|_{C[0, l]} + \sup_{0 \leq x < x+\tau \leq l} \frac{|\varphi(x+\tau) - \varphi(x)|}{\tau^\beta},$$

где $C[0, l]$ — пространство всех непрерывных на $[0, l]$ функций $\varphi(x)$ с обычной нормой

$$\|\varphi\|_{C[0, l]} = \max_{0 \leq x \leq l} |\varphi(x)|.$$

Известно, что дифференциальное выражение

$$A^x v = -(a(x)v_x(x))_x + \delta v(x)$$

определяет положительный оператор A^x , действующий в $C^\beta[0, l]$ с областью определения $C^{\beta+2}[0, l]$ и удовлетворяющий условиям $v(0) = v(l)$, $v_x(0) = v_x(l)$. Поэтому мы можем заменить краевые задачи (4.1) абстрактной краевой задачей (1.2). Используя результаты теорем 3.1 и 3.2, мы получаем следующий результат.

Теорема 4.1. *Для решения краевой задачи (4.1) справедливы следующие коэрцитивные неравенства:*

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C^{2+\alpha}(C^\mu[0, l])} + \|u\|_{C^\alpha(C^{2+\mu}[0, l])} \leq \\ & \leq M(\alpha) [\|f\|_{C^\alpha(C^\mu[0, l])} + \|-(a(\cdot)\varphi_x(\cdot))_x + \delta\varphi(\cdot) - f(0, \cdot)\|_{C^{2\alpha+\mu}[0, l]} + \|\psi(\cdot)\|_{C^{2+\mu}[0, l]}], \\ & \|u\|_{C^2(C^{2\alpha+\mu}[0, l])} + \|u\|_{C(C^{2+2\alpha+\mu}[0, l])} \leq \\ & \leq M(\alpha) [\|f\|_{C(C^{2\alpha+\mu}[0, l])} + \|\varphi\|_{C^{2+2\alpha+\mu}[0, l]} + \|\psi\|_{C^{2+\mu}[0, l]}], \quad 0 < 2\alpha + \mu < 1. \end{aligned}$$

Здесь $M(\alpha)$ не зависит от $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(y, x)$.

2. Теперь пусть Ω будет единичным открытым кубом в n -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ ($0 < x_k < 1$, $1 \leq k \leq n$) с границей $S\bar{\Omega} = \Omega \cup S$. В $[0, T] \times \Omega$ рассмотрим смешанную краевую задачу для многомерного эллиптического уравнения

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u(y, x)}{\partial y^2} - \sum_{r=1}^n \alpha_r(x) \frac{\partial^2 u(y, x)}{\partial x_r^2} + \delta u(y, x) = f(y, x), \\ x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega, \quad 0 < y < T, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial y} = \frac{\partial u(T, x)}{\partial y} + \int_0^T \alpha(s)u(s, x)ds + \psi(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ u(y, x) = 0, \quad x \in S, \end{cases} \quad (4.2)$$

где $\alpha_r(x)$ ($x \in \Omega$) и $f(y, x)$ ($y \in (0, T)$, $x \in \Omega$), $\varphi(x)$ ($x \in \bar{\Omega}$) — заданные гладкие функции, а $\alpha_r(x) > 0$, $\delta > 0$ — достаточно большое число. Введем банаховы пространства $C_{01}^\beta(\bar{\Omega})$ ($\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $0 < x_k < 1$, $k = 1, \dots, n$) всех непрерывных функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с индикатором $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\beta_k \in (0, 1)$, $1 \leq k \leq n$ и весом $x_k^{\beta_k}(1 - x_k - h_k)^{\beta_k}$, $0 \leq x_k < x_k + h_k \leq 1$, $1 \leq k \leq n$, с нормой

$$\|f\|_{C_{01}^\beta(\bar{\Omega})} = \|f\|_{C(\bar{\Omega})} + \sup_{\substack{0 \leq x_k < x_k + h_k \leq 1, \\ 1 \leq k \leq n}} |f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n)| \prod_{k=1}^n h_k^{-\beta_k} x_k^{\beta_k} (1 - x_k - h_k)^{\beta_k},$$

где $C(\bar{\Omega})$ — пространство всех непрерывных функций, определенных на $\bar{\Omega}$, снабженное нормой

$$\|f\|_{C(\bar{\Omega})} = \max_{x \in \bar{\Omega}} |f(x)|.$$

Известно, что дифференциальное выражение

$$A^x v = - \sum_{r=1}^n \alpha_r(x) \frac{\partial^2 v(y, x)}{\partial x_r^2} + \delta v(y, x)$$

определяет положительный оператор A^x , действующий на $C_{01}^\beta(\bar{\Omega})$ с областью определения $D(A^x) \subset C_{01}^{2+\beta}(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющий условию $v = 0$ на S . Поэтому мы можем заменить краевые задачи (4.2) на абстрактные краевые задачи (1.2). Используя результаты теорем 3.1, мы можем получить следующий результат.

Теорема 4.2. *Предположим, что*

$$- \sum_{r=1}^n \alpha_r(x) \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_r^2} + \delta \varphi(x) - f(0, x) = 0, \quad \psi(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Тогда для решения краевой задачи (4.2) справедливо коэрцитивное неравенство

$$\|u\|_{C^{2+\alpha}(C_{01}^\mu(\bar{\Omega}))} + \sum_{r=1}^n \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_r^2} \right\|_{C^\alpha(C_{01}^\mu(\bar{\Omega}))} \leq M(\alpha) \|f\|_{C^\alpha(C_{01}^\mu(\bar{\Omega}))},$$

$$0 < \alpha < 1, \quad \mu = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}, \quad 0 < \mu_k < 1, \quad 1 \leq k \leq n,$$

где $M(\alpha)$ не зависит от $f(y, x)$.

3. Перейдем к краевой задаче в диапазоне

$$\{0 \leq y \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n\}$$

для многомерных эллиптических уравнений порядка $2m$

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{|r|=2m} a_r(x) \frac{\partial^{|r|} u}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} + \delta u(y, x) = f(y, x), \\ 0 < y < T, \quad x, r \in \mathbb{R}^n, \quad |r| = r_1 + \dots + r_n, \\ u(0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial y} = \frac{\partial u(T, x)}{\partial y} + \int_0^T \alpha(s) u(s, x) ds + \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.3)$$

где $a_r(x)$ и $f(y, x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, а $\alpha_r(x) > 0$, $\delta > 0$ — достаточно большие числа. Будем считать, что символ

$$B^x(\xi) = \sum_{|r|=2m} a_r(x) (i\xi_1)^{r_1} \dots (i\xi_n)^{r_n}, \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$$

дифференциального оператора вида

$$B^x = \sum_{|r|=2m} a_r(x) \frac{\partial^{|r|}}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}}, \quad (4.4)$$

действующего на функции, определенные на пространстве $\mathbb{R}^n$, удовлетворяет неравенствам

$$0 < M_1 |\xi|^{2m} \leq (-1)^m B^x(\xi) \leq M_2 |\xi|^{2m} < \infty$$

при $\xi \neq 0$. Задача (4.3) имеет единственное гладкое решение. Для формулировки наших результатов мы вводим банахово пространство $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ ($0 < \mu < 1$) всех непрерывных функций $\varphi(x)$, определенных на $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющих условию Гёльдера, для которого конечна следующая норма:

$$\|\varphi\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} = \|\varphi\|_{C(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x, z \in \mathbb{R}^n, z \neq 0} \frac{|\varphi(x+z) - \varphi(x)|}{|z|^\mu},$$

где $C(\mathbb{R}^n)$ — пространство всех непрерывных функций $\varphi(x)$, определенных на $\mathbb{R}^n$ с обычной нормой

$$\|\varphi\|_{C(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)|.$$

Теперь сформулируем следующий результат о корректности.

Теорема 4.3. *Для решения краевой задачи (4.3) выполняются следующие неравенства коэрцитивности:*

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C^{2+\alpha}(C^\mu(\mathbb{R}^n))} + \sum_{|\tau|=2m} \left\| \frac{\partial^{|\tau|} u}{\partial x_1^{\tau_1} \dots \partial x_n^{\tau_n}} \right\|_{C^\alpha(C^\mu(\mathbb{R}^n))} + \\ & + \|u\|_{C^2(C^{2m\alpha+\mu}(\mathbb{R}^n))} \leq M(\alpha) \left[\|f\|_{C^\alpha(C^\mu(\mathbb{R}^n))} + \left\| \sum_{|r|=2m} a_r(\cdot) \frac{\partial^{|r|} \psi(\cdot)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} \right\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} + \right. \\ & \left. + \left\| \sum_{|r|=2m} a_r(\cdot) \frac{\partial^{|r|} \varphi(\cdot)}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} + \delta \varphi(\cdot) - f(0, \cdot) \right\|_{C^{2m\alpha+\mu}(\mathbb{R}^n)} \right], \\ & \|u\|_{C^2(C^{2m\alpha+\mu}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{|\tau|=2m} \left\| \frac{\partial^{|\tau|} u}{\partial x_1^{\tau_1} \dots \partial x_n^{\tau_n}} \right\|_{C(C^{2m\alpha+\mu}(\mathbb{R}^n))} \leq \end{aligned}$$

$$\leq M(\alpha) \left[\|f\|_{C(C^{2m\alpha+\mu}(\mathbb{R}^n))} + \sum_{|\tau|=2m} \left\| \frac{\partial^{|\tau|}\varphi}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} \right\|_{C^{2m\alpha+\mu}(\mathbb{R}^n)} + \right. \\ \left. + \sum_{|\tau|=2m} \left\| \frac{\partial^{|\tau|}\psi}{\partial x_1^{r_1} \dots \partial x_n^{r_n}} \right\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} \right], \quad 0 < 2m\alpha + \mu < 1,$$

где $M(\alpha)$ не зависит от $\varphi(x)$, $\psi(x)$, и $f(y, x)$.

Доказательство теоремы 4.3 основано на абстрактных теоремах 3.1 и 3.2, положительности оператора A^x в $C^\mu(\mathbb{R}^n)$, структуре дробных пространств $E_\alpha((A^x)^{\frac{1}{2}}, C(\mathbb{R}^n))$ и неравенстве коэрцитивности для эллиптического оператора A^x в $C^\mu(\mathbb{R}^n)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье изучается нелокальная краевая задача для эллиптических уравнений с условием Самарского—Ионкина интегрального типа. Устанавливается корректность нелокальной краевой задачи для абстрактных эллиптических уравнений с условием Самарского—Ионкина интегрального типа в банаховом пространстве. В приложениях доказана теорема о корректности нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений с условием Самарского—Ионкина интегрального типа. Представлены двухшаговые разностные схемы высокого порядка точности для численного решения дифференциальной задачи с условием Самарского—Ионкина интегрального типа. Отметим, что операторный метод в [12] позволяет установить корректность этих разностных схем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дукенбаева А. А.* Об одной обобщенной задаче типа Самарского—Ионкина для уравнения Пуассона в круге // Мат. ж. — 2018. — 18, № 1. — С. 78–87.
2. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифф. уравн. — 1977. — 13, № 2. — С. 294–304.
3. *Ионкин Н. И.* Об устойчивости одной задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифф. уравн. — 1979. — 15, № 7. — С. 1279–1283.
4. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифф. уравн. — 1980. — 16, № 11. — С. 1925–1935.
5. *Соболевский П. Е.* Разностные методы приближенного решения дифференциальных уравнений. — Воронеж: ВГУ, 1975.
6. *Ashyralyev A.* On well-posedness of the nonlocal boundary value problems for elliptic equations // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2003. — 24, № 1-2. — С. 1–15.
7. *Ashyralyev A.* A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 344, № 1. — С. 557–573.
8. *Ashyralyev A., Agirseven D., Agarwal R. P.* Stability estimates for delay parabolic differential and difference equations // Appl. Comput. Math. — 2020. — 19, № 2. — С. 175–204.
9. *Ashyralyev A., Hamad A.* On the well-posedness of elliptic equations with nonlocal boundary conditions // TWMS J. Pure Appl. Math. — 2025. — 16, № 1.
10. *Ashyralyev A., Ozturk E.* On a difference scheme of fourth order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem // Math. Methods Appl. Sci. — 2013. — 36, № 8. — С. 936–955.
11. *Ashyralyev A., Sarsanbi A.* Well-posedness of a parabolic equation with involution // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2017. — 38, № 10. — С. 1295–1305.
12. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* New Difference Schemes for Partial Differential Equations. — Basel–Boston–Berlin : Birkhauser, 2004.
13. *Ashyralyev A., Tetikoglu F.* FDM for elliptic equations with Bitsadze-Samarskii-Dirichlet conditions // Abst. Appl. Anal. — 2012. — 2012. — 454831.
14. *Ashyralyev A., Tetikoglu F.* A note on Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems: well-posedness // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2013. — 34, № 9. — С. 939–975.
15. *Ashyralyev C.* Numerical solution to Bitsadze-Samarskii type elliptic overdetermined multipoint NBVP // Bound. Value Probl. — 2017. — 2017. — 74.
16. *Ashyralyev C.* Stability estimates for solution of Neumann-type overdetermined elliptic problem // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2017. — 38, № 10. — С. 1226–1243.

17. *Ashyralyev C., Akkan Y.* Numerical solution to inverse elliptic problem with neumann type over-determination and mixed boundary conditions// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2015. — 2015. — 188.
18. *Avalishvili G., Avalishvili M.* Nonclassical problem with integral boundary conditions for elliptic system// *Complex Var. Elliptic Equ.* — 2018. — 63, № 6. — С. 836–853.
19. *Ciupaila R., Sapagovas M., Štikonienė O.* Numerical solution of nonlinear elliptic equation with nonlocal condition// *Nonlinear Anal. Model. Control* — 2013. — 18, № 4. — С. 412–426.
20. *Gasimova Kh. A.* On the Dirichlet problem for a class of non-uniformly elliptic equations with measure data// *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.* — 2023. — 43, № 4. — С. 72–84.
21. *Il'in V. A., Kritskov L. V.* Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators// *J. Math. Sci. (N. Y)* — 2003. — 116, № 5. — С. 3489–3550.
22. *Kadirkulov B. J., Kirane M.* On solvability of boundary value problem for the Poisson equation with a nonlocal boundary operator// *Acta Math. Sci.* — 2016. — 35. — С. 970–980.
23. *Karachik V. V., Turmetov B. Kh.* On solvability of some nonlocal boundary value problems for biharmonic equation// *Math. Slovaca* — 2020. — 70, № 2. — С. 329–342.
24. *Kirane M., Torebek B. T.* On a nonlocal problem for the Laplace equation in the unit ball with fractional boundary conditions// *Math. Methods Appl. Sci.* — 2016. — 39. — С. 1121–1128.
25. *Lunardi A.* Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1995.
26. *Pulkina L. S.* Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral conditions// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2016. — 2016. — 193.
27. *Sadybekov M. A., Dukenbayeva A. A.* On boundary value problem of the Samarskii–Ionkin type for the Laplace operator in a ball// *Kazakh Math. J.* — 2020. — 20, № 1. — С. 84–94.
28. *Sadybekov M. A., Dukenbayeva A. A.* On boundary value problems of the Samarskii–Ionkin type for the Laplace operator in a ball// *Int. J. Complex Var. Elliptic Equ.* — 2022. — 67, № 2. — С. 369–383.
29. *Sadybekov M. A., Dukenbayeva A. A., Yessirkegenov N. A.,* “On a generalised Samarskii–Ionkin type problem for the Poisson equation,” In: *Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory*, Springer, Cham, pp. 207–216.
30. *Sadybekov M. A., Turmetov B. Kh., Torebek B. T.* Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2014. — 2014. — 157.
31. *Sapagovas M., Griskoniene V., Štikonienė O.* Application of M-matrices theory to numerical investigation of a nonlinear elliptic equation with an integral condition// *Nonlinear Anal. Model. Control* — 2017. — 22, № 4. — С. 489–504.
32. *Sapagovas M., Stikonienė O., Ciupaila R., Joksiene Z.* Convergence of iterative methods for elliptic equations with integral boundary conditions// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2016. — 2016. — 118.
33. *Shakhmurov V., Musaev H.* Nonlocal separable elliptic equations and applications// *TWMS J. Pure Appl. Math.* — 2024. — 15, № 2. — С. 257–268.
34. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhauser, 1997.
35. *Stikonienė O., Sapagovas M., Ciupaila R.* On iterative methods for some elliptic equations with nonlocal conditions// *Nonlinear Anal. Model. Control* — 2014. — 19, № 3. — С. 517–535.
36. *Triebel H.* Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators. — Amsterdam–New York: North-Holland, 1978.
37. *Turmetov B. Kh., Karachik V. V.* On solvability of some boundary value problems for a biharmonic equation with periodic conditions// *Filomat* — 2018. — 32, № 3. — С. 947–953.
38. *Turmetov B. Kh.* Generalization of the Robin problem for the Laplace equation// *Differ. Equ.* — 2019. — 55, № 9. — С. 1134–1142.

Аллаберен Ашыралыев

Bahcesehir University, Стамбул, Турция

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

E-mail: allaberen.ashyralyev@eng.bau.edu.tr, aallaberen@gmail.com

Айман Хамад

University of Benghazi, Бенгази, Ливия

E-mail: ayman.hamad@uob.edu.ly

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-1-1-17

EDN: SPXFTP

On the nonlocal boundary value problem for the elliptic differential equations with integral type Samarskii–Ionkin conditions

A. Ashyralyev^{1,2,3} and A. Hamad⁴

¹*Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye*

²*RUDN University, Moscow, Russia*

³*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

⁴*University of Benghazi, Elmarj, Libya*

Abstract. The present paper is devoted to the study of the abstract nonlocal boundary value problem with integral type Samarskii–Ionkin conditions for the differential equation of elliptic type

$$-u''(t) + Au(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq T), \quad u(0) = \varphi, \quad u'(0) = u'(T) + \int_0^T \alpha(s) u(s) ds + \psi.$$

in an arbitrary Banach space E with the positive operator A . The well-posedness of this problem in various Banach spaces is established. In applications, theorems on the well-posedness of several nonlocal boundary value problems for elliptic equations with integral type Samarskii–Ionkin conditions are proved.

Keywords: elliptic differential equation, boundary-value problem, nonlocal problem, integral type Samarskii–Ionkin conditions, well-posedness.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The publication has been prepared with the support of the “RUDN University Program 5–100” and published under target program BR05236656 of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan. The authors also express their gratitude to the reviewers for their useful advice on improving the article.

For citation: A. Ashyralyev, A. Hamad, “On the nonlocal boundary value problem for the elliptic differential equations with integral type Samarskii–Ionkin conditions,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 1, 1–17. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-1-1-17>

REFERENCES

1. A. A. Dukenbayeva, “Ob odnoy obobshchennoy zadache tipa Samarskogo–Ionkina dlya uravneniya Puassona v krug” [On a generalised Samarskii–Ionkin type problem for the Poisson equation in the disk] *Mat. Zh.* [Math. J.], 2018, **18**, No. 1, 78–87 (in Russian).
2. N. I. Ionkin, “Reshenie odnoy kraevoy zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym uslovиеm” [Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition] *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1977, **13**, No. 2, 294–304 (in Russian).
3. N. I. Ionkin, “Ob ustoychivosti odnoy zadachi teorii teploprovodnosti s neklassicheskim kraevym uslovиеm” [On the stability of a problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition] *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1979, **15**, No. 7, 1279–1283 (in Russian).
4. A. A. Samarskii, “O nekotorykh problemakh teorii differentsial’nykh uravneniy” [On certain problems in the theory of differential equations] *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 11, 1925–1935 (in Russian).



5. P. E. Sobolevskii, *Raznostnye metody priblizhennogo resheniya differentsial'nykh uravneniy* [Difference Methods for the Approximate Solution of Differential Equations] [in Russian], Voronezh State Univ., Voronezh, 1975 (in Russian).
6. A. Ashyralyev, "On well-posedness of the nonlocal boundary value problems for elliptic equations," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2003, **24**, No. 1-2, 1–15.
7. A. Ashyralyev, "A note on the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem in a Banach space," *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **344**, No. 1, 557–573.
8. A. Ashyralyev, D. Agirseven, and R. P. Agarwal, "Stability estimates for delay parabolic differential and difference equations," *Appl. Comput. Math.*, 2020, **19**, No. 2, 175–204.
9. A. Ashyralyev and A. Hamad, "On the well-posedness of elliptic equations with nonlocal boundary conditions," *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 2025, **16**, No. 1.
10. A. Ashyralyev and E. Ozturk, "On a difference scheme of fourth order of accuracy for the Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problem," *Math. Methods Appl. Sci.*, 2013, **36**, No. 8, 936–955.
11. A. Ashyralyev and A. Sarsanbi, "Well-posedness of a parabolic equation with involution," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2017, **38**, No. 10, 1295–1305.
12. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 2004.
13. A. Ashyralyev and F. Tetikoglu, "FDM for elliptic equations with Bitsadze-Samarskii-Dirichlet conditions," *Abst. Appl. Anal.*, 2012, **2012**, 454831.
14. A. Ashyralyev and F. Tetikoglu, "A note on Bitsadze-Samarskii type nonlocal boundary value problems: well-posedness," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2013, **34**, No. 9, 939–975.
15. C. Ashyralyev, "Numerical solution to Bitsadze-Samarskii type elliptic overdetermined multipoint NBVP," *Bound. Value Probl.*, 2017, **2017**, 74.
16. C. Ashyralyev, "Stability estimates for solution of Neumann-type overdetermined elliptic problem," *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2017, **38**, No. 10, 1226–1243.
17. C. Ashyralyev and Y. Akkan, "Numerical solution to inverse elliptic problem with neumann type overdetermination and mixed boundary conditions," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2015, **2015**, 188.
18. G. Avalishvili and M. Avalishvili, "Nonclassical problem with integral boundary conditions for elliptic system," *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2018, **63**, No. 6, 836–853.
19. R. Ciupaila, M. Sapagovas, and Štikonienė O., "Numerical solution of nonlinear elliptic equation with nonlocal condition," *Nonlinear Anal. Model. Control*, 2013, **18**, No. 4, 412–426.
20. Kh. A. Gasimova, "On the Dirichlet problem for a class of non-uniformly elliptic equations with measure data," *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, 2023, **43**, No. 4, 72–84.
21. V. A. Il'in and L. V. Kritskov, "Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2003, **116**, No. 5, 3489–3550.
22. B. J. Kadirkulov and M. Kirane, "On solvability of a boundary value problem for the Poisson equation with a nonlocal boundary operator," *Acta Math. Sci.*, 2016, **35**, 970–980.
23. V. V. Karachik and B. Kh. Turmetov, "On solvability of some nonlocal boundary value problems for biharmonic equation," *Math. Slovaca*, 2020, **70**, No. 2, 329–342.
24. M. Kirane and B. T. Torebek, "On a nonlocal problem for the Laplace equation in the unit ball with fractional boundary conditions," *Math. Methods Appl. Sci.*, 2016, **39**, 1121–1128.
25. A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 1995.
26. L. S. Pulkina, "Nonlocal problems for hyperbolic equations with degenerate integral conditions," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2016, **2016**, 193.
27. M. A. Sadybekov and A. A. Dukenbayeva, "On boundary value problem of the Samarskii-Ionkin type for the Laplace operator in a ball," *Kazakh Math. J.*, 2020, **20**, No. 1, 84–94.
28. M. A. Sadybekov and A. A. Dukenbayeva, "On boundary value problems of the Samarskii-Ionkin type for the Laplace operator in a ball," *Int. J. Complex Var. Elliptic Equ.*, 2022, **67**, No. 2, 369–383.
29. M. A. Sadybekov, A. A. Dukenbayeva, and N. A. Yessirkegenov, "On a generalised Samarskii-Ionkin type problem for the Poisson equation," In: *Algebra, Complex Analysis, and Pluripotential Theory*, Springer, Cham, 2018, pp. 207–216.
30. M. A. Sadybekov, B. Kh. Turmetov, and B. T. Torebek, "Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball," *Electron. J. Differ. Equ.*, 2014, **2014**, 157.
31. M. Sapagovas and V. Griskoniene, Štikonienė O., "Application of M-matrices theory to numerical investigation of a nonlinear elliptic equation with an integral condition," *Nonlinear Anal. Model. Control*, 2017, **22**, No. 4, 489–504.

- 32. M. Sapagovas, O. Stikonienė, R. Ciupaila, and Z. Joksiene, “Convergence of iterative methods for elliptic equations with integral boundary conditions,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2016, **2016**, 118.
- 33. V. Shakhmurov and H. Musaev, “Nonlocal separable elliptic equations and applications,” *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 2024, **15**, No. 2, 257–268.
- 34. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
- 35. O. Stikonienė, M. Sapagovas, and R. Ciupaila, “On iterative methods for some elliptic equations with nonlocal conditions,” *Nonlinear Anal. Model. Control*, 2014, **19**, No. 3, 517–535.
- 36. H. Triebel, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam–New York, 1978.
- 37. B. Kh. Turmetov and V. V. Karachik, “On solvability of some boundary value problems for a biharmonic equation with periodic conditions,” *Filomat*, 2018, **32**, No. 3, 947–953.
- 38. B. Kh. Turmetov, “Generalization of the Robin problem for the Laplace equation,” *Differ. Equ.*, 2019, **55**, No. 9, 1134–1142.

Allaberen Ashyralyev

Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye

RUDN University, Moscow, Russia

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

E-mail: allaberen.ashyralyev@eng.bau.edu.tr, aallaberen@gmail.com

Ayman Hamad

University of Benghazi, Elmarj, Libya

E-mail: ayman.hamad@uob.edu.ly