

УДК 517, 519.6, 519.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-299-340

EDN: NMWGIQ

КОНТИНУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ РЕЛЕ

М. Е. СЕМЕНОВ, С. В. БОРЗУНОВ, О. И. КАНИЩЕВА, А. И. ПРОШУНИН,
П. А. МЕЛЕШЕНКО

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Преобразователь континуальной системы реле (еще одно название этой модели — преобразователь Прейзаха) — достаточно популярная модель, используемая для формализации широкого круга гистерезисных соотношений. В настоящей статье приведен обзор работ, посвященных исследованию систем из различных предметных областей (физики, экономики, биологии), где континуальная система реле играет ключевую роль в описании гистерезисных зависимостей. Первый раздел работы посвящен описанию входно-выходных соответствий классического преобразователя континуальной системы реле, устанавливаются его основные свойства, описываются методы построения выхода, использующие формализм функции размагничивания, приводится обобщение классического преобразователя континуальной системы реле на случай векторных входно-выходных соответствий. Классифицированные по различным естественно-научным областям приложения модели Прейзаха приведены во втором разделе. Здесь описаны различные обобщения модели применительно к системам, содержащим ферромагнитные и сегнетоэлектрические материалы. Основное внимание уделялось экспериментальным работам, где модель континуальной системы реле использовалась для аналитического описания наблюдаемых в экспериментах зависимостей. Отдельное внимание в обзоре уделено техническим приложениям модели — накопителям энергии, системам, использующим пьезоэффект, моделям систем с долговременной памятью. В обзоре приведены результаты применения преобразователя Прейзаха в биологии и медицине, а также экономике. В третьем разделе обзора описываются свойства преобразователя континуальной системы реле в части реакции на стохастические внешние воздействия и приводится обобщение модели преобразователя на случай стохастичности пороговых чисел его элементарных составляющих. Кроме того, в обзоре содержатся свежие результаты в области динамики систем с преобразователем континуальной системы реле — приводится метод идентификации динамических режимов, основанный на модификации алгоритма Бенеттина вычисления ляпуновских показателей в системах с негладкими многозначными характеристиками.

Ключевые слова: гистерезис, неидеальное реле, континуальная система реле, преобразователь КСР, стохастический вход, темп продаж, ценовая функция, поведение покупателей.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: М. Е. Семенов, С. В. Борзунов, О. И. Канищева, А. И. Прошунин, П. А. Мелешенко. Континуальные системы реле // Современ. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 299–340. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-299-340>

1. ВВЕДЕНИЕ

Линейные модели математической физики являются предметом исследований уже многие годы, и во многих случаях, особенно для задач малой размерности, их свойства известны исчерпывающим образом. Хотя линейные модели в ряде случаев детально описывают анализируемые процессы, в ряде важнейших задач их предсказательная способность оказывается недостаточной. Зачастую в моделях физики, химии, экономики, медицины, биологии и др. встречаются задачи, в которых присутствуют нелинейные слагаемые, связанные либо с внутренней структурой, либо с характером взаимодействий исследуемых систем с окружающей средой. Кроме того, при постановке и формализации процессов и явлений естественно-научных областей необходимо учитывать принципиальную недетерминированность системных параметров, а также стохастичность внешних воздействий. Характеристики отдельных звеньев не всегда однозначны. Именно такая ситуация имеет место в моделях систем с гистерезисными нелинейностями.

Как известно, гистерезис — это явление, проявляющееся в самых различных областях физики, химии, экономики, биологии. О гистерезисной зависимости принято говорить в ситуации, когда состояние системы в текущий момент времени определяется не только внешними условиями в этот момент времени, но и во все предшествующие моменты. Как правило, носители гистерезисных свойств являются частью систем более высокого уровня. Поэтому существенная нелинейность (неоднозначность характеристик) гистерезисных блоков находит отражение в динамике системы в целом. Математические модели динамических систем с гистерезисными компонентами допускают описание в рамках техники операторно-дифференциальных уравнений, где гистерезисным звеньям соответствуют операторы, зависящие от своего начального состояния как от параметра и определенные на широком функциональном пространстве (например, на пространстве непрерывных функций или функций ограниченной вариации). Возможность такой трактовки гистерезисных нелинейностей основана на развитом М. А. Красносельским и его учениками [3] операторном подходе к моделированию гистерезисных преобразователей в рамках теории систем. Гистерезисным явлениям и моделям, их описывающим, посвящена обширная литература. Достаточно подробное и ясное описание этих моделей, а также приложений, приведено в [36, 137, 198]. На сегодняшний момент методы анализа систем с гистерезисными нелинейностями весьма ограничены. Это связано с целым рядом особенностей: негладкостью операторов, являющихся математическими моделями гистерезисных звеньев; фазовые пространства таких систем, как правило, включают в себя пространства состояний гистерезисных преобразователей и могут иметь достаточно сложную (нелинейную) структуру. Именно такая ситуация имеет место при использовании континуальных моделей гистерезиса (под *континуальными* понимаются модели гистерезиса, являющиеся континуальными пределами моделей, состоящих из конечного числа параллельно соединенных гистеронов). К таким моделям относятся преобразователь Ишлинского (континуальный предел системы, состоящей из семейства упоров) и континуальная система реле (КСР) [3, 5, 39, 40, 50, 103, 129, 156, 180, 182–184]. В то же время, существует альтернативный подход, связанный с использованием феноменологических моделей — модели Боука–Вена, Айвана, Дьюема и др. [98, 107, 126]. Указанные модели формализуются посредством низкоразмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и представляют собой очень удобный инструмент для исследования динамики систем с гистерезисом. Указанные выше феноменологические модели являются многопараметрическими, настройка (выбор параметров) к настоящему времени детально описан в работах [41, 96, 97]. Что касается модели континуальной системы реле, то один из первых результатов, позволяющих идентифицировать параметры этой модели (меру), содержится в [92].

Принципиальное отличие конструктивных моделей гистерезиса от феноменологических заключается в их «физичности», что позволяет естественным образом имплементировать их в модели реальных физических процессов. Указанные модели исследовались во многих работах, среди которых отметим ставшими классическими труды [17, 64, 151, 162].

Идеи, связанные с описанием ферромагнитного гистерезиса посредством систем неидеальных реле, восходят к работе [200]. В 1935 году Прейзах предложил ясную геометрическую интерпретацию континуальной системы неидеальных реле, являющуюся основой модели ферромагнитного

гистерезиса [162]. (Перевод этой основополагающей работы на английский язык опубликован в [163].)

Хотя первоначально модель преобразователя КСР была сформулирована для ферромагнитных материалов [162], именно Эверетт [17, 64, 65] осознал ее применимость к широкому спектру явлений из различных научных областей. К настоящему времени область применимости модели КСР столь же широка, как и естественно-научные области, где встречаются гистерезисные явления.

Настоящий обзор структурирован следующим образом: в первом разделе приводится описание неидеального реле, систем неидеальных реле, соединенных параллельно, и преобразователя КСР — континуальной системе неидеальных реле, соединенных параллельно. Также в первом разделе сформулированы основные свойства преобразователя КСР (непрерывность, монотонность по входам и начальным состояниям, почти управляемость и др.) Кроме того, описывается процедура, позволяющая идентифицировать выход в помощью функции Эверетта [36]. В заключительной части приводятся недавно полученные экспериментальные данные, свидетельствующие о физической реализуемости частиц Преизаха (*Preisach particles*).

Второй раздел посвящен обзору работ, где преобразователь КСР применялся для моделирования гистерезисных явлений в технических системах, прежде всего, системах, содержащих носители ферромагнитных и сегнетоэлектрических свойств. В отдельный подраздел выделены работы, посвященные динамике преобразователей-накопителей энергии, приводов и сенсоров (*energy harvesters, actuators, sensors*), моделированию многоразрядных запоминающих устройств, сетевых структур с гистерезисными элементами. Последний подраздел посвящен обзору работ, рассматривающих динамику жидкости в пористых средах с учетом гистерезисных эффектов, моделируемых преобразователем КСР. В третьем разделе рассматриваются задачи оптимального управления, объекты в которых описываются системой дифференциальных операторных уравнений с преобразователем КСР. Предпоследний подраздел посвящен влиянию стохастических внешних воздействий и недетерминированным системам. Наконец, последний подраздел содержит сведения о применении преобразователя КСР в науках о живых системах и в общественных науках.

В заключении подводятся итоги роли преобразователя КСР в современных научных и научно-технических исследованиях.

2. ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЬ КСР И ЕГО ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

2.1. Неидеальное реле. В классическом подходе к описанию гистерезисных нелинейностей, развитом М. А. Красносельским и А. В. Покровским [3], гистерезисные операторы трактуются как преобразователи, определенные на пространстве непрерывных функций, динамика которых описывается соотношениями: «вход—состояние» и «состояние—выход».

Обозначим через $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$ гистерезисный преобразователь, отвечающий неидеальному реле с пороговыми числами α и β , где $x_0 \in \{0, 1\}$ — начальное состояние преобразователя, t_0 — начальный момент времени. Пространством состояний неидеального реле является двухэлементное множество $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Входом системы является непрерывная при $t \geq t_0$ функция $u(t)$, выходом — ступенчатая функция $x(t)$, определяемая операторным соотношением:

$$x(t) = R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t). \quad (2.1)$$

При этом начальное состояние x_0 преобразователя должно удовлетворять условию:

$$x_0 = \begin{cases} 0, & \text{если } u(0) \leq \alpha, \\ 1, & \text{если } u(0) \geq \beta. \end{cases} \quad (2.2)$$

В случае выполнения неравенств $\alpha \leq u(0) \leq \beta$ величина x_0 может принимать любое значение из множества $\mathbb{B}$. Значения выхода $x(t)$ при непрерывном входе $u(t)$ для $t \in (t_0, \infty)$ при каждом $t = \tau$ определяются согласно правилу:

$$R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(\tau) = \begin{cases} x_0, & \text{если } \forall t \in [t_0, \tau]: [\alpha < u(t) < \beta], \\ 1, & \text{если } \exists t' \in [t_0, \tau]: [u(t') \geq \beta] \wedge \{\forall t \in [t', \tau]: [u(t) > \alpha]\}, \\ 0, & \text{если } \exists t' \in [t_0, \tau]: [u(t') \leq \alpha] \wedge \{\forall t \in [t', \tau]: [u(t) < \beta]\}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Будем говорить, что *реле включено*, если выход равен единице. В противном случае оно находится в выключенном состоянии, или *реле отключено*. Значения β и α часто называют *порогом включения* и *порогом выключения* (отпускания) соответственно.

Таким образом, соответствие «вход—выход» неидеального реле описываются разрывным оператором (2.3). Схематично взаимосвязь между входом и выходом преобразователя $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$ представлена на рис. 1.

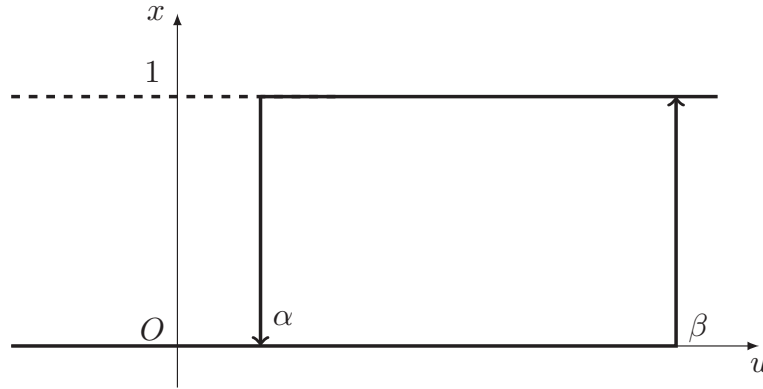


Рис. 1. Взаимосвязь между входом и выходом преобразователя $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$.

FIG. 1. The relationship between the input and output of the converter $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$.

Детальное описание преобразователя неидеального реле, а также его свойств приведено в [3]. Из недавних работ отметим содержательные результаты [54, 55, 88, 89, 99], моделирующие процесс формирования нелинейных структур и, в том числе, колец Лизеганга (*Liesegang rings*) в системах реакция—диффузия с релейными нелинейностями. Динамике систем с релейными нелинейностями в части исследования существования, единственности и устойчивости периодических решений посвящены работы [108, 201]. В монографии [3] показано, что оператор неидеального реле допускает непрерывную аппроксимацию дифференциальным уравнением с неоднозначной характеристикой. При этом аналогом переключений в неидеальном реле являются «быстрые» движения на фазовой плоскости. Такой подход оказался весьма удобным применительно к описанию реальных физических систем с релейным гистерезисом, поскольку позволил формально описывать динамические процессы только в рамках дифференциальных уравнений. Дополнительно отметим работы [51, 118], где гистерезис интерпретировался в терминах систем с «быстрым» и «медленным» движением.

Ниже приведем свойства преобразователя неидеального реле, которые потребуются для введения более сложных конструкций в дальнейших разделах настоящего обзора.

Справедливо полугрупповое тождество:

$$R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t) = R[\alpha, \beta, R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t_1), t_1]u(t), \quad (2.4)$$

где $t_0 \leq t_1 \leq t$, наглядный смысл которого заключается в возможности подачи входного сигнала $u(t)$ при $t > t_0$ на преобразователь, находящийся в момент $t = t_0$ в состоянии u_0, x_0 .

Значения выхода неидеального реле при произвольном непрерывном входе $u(t)$ определяются *принципом отсутствия лишних переключений* (*exclusion of superfluous switching rule*): выход $x(t)$ принимает постоянное значение на замкнутом промежутке $[t_1, t_2]$, если либо $x(t_1) = 0$ и $u(t) < \alpha$ при $t \in [t_1, t_2]$, либо $x(t_1) = 1$ и $u(t) > \beta$ при $t \in [t_1, t_2]$. Правило отсутствия лишних переключений является прямым следствием определения (2.3).

Состояние преобразователя в каждый фиксированный момент времени $t = \tau$ полностью определяется значениями $u_\tau = u(\tau)$, $x_\tau = x(\tau)$ входа и выхода, такой преобразователь называют *детерминированным*. Следовательно, неидеальное реле является детерминированным преобразователем, определенным на всех непрерывных входах.

Преобразователь *управляем*, если для любых двух возможных состояний $\{u_0, x_0\}$, $\{u_1, x_1\}$, можно указать такой допустимый при состоянии $\{u_0, x_0\}$ вход $u(t)$ ($t_0 < t < t_1$), что выполняются

равенства $u(t_0) = u_0$, $u(t_1) = u_1$, $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t_1) = x_1$. Неидеальное реле, как несложно видеть, управляемо.

Справедливо *свойство монотонности по входам*: если два возможных состояния неидеального реле $u(t_0), x_0$ и $v(t_0), y_0$ таковы, что

$$\begin{aligned} ((x_0 \leq y_0) \wedge \{\forall t \in (t_0, \infty) : [u(t) \leq v(t)]\}) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\forall t \in (t_0, \infty) : \{R[\alpha, \beta, x_0, t_0]u(t) \leq R[\alpha, \beta, x_0, t_0]v(t)\}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

В силу определения и изложенных выше свойств $R[\alpha, \beta, x_0, t_0]$ можно трактовать как оператор, действующий из пространства $C = C(t_0, t_1)$ непрерывных на $[t_0, t_1]$ функций $u(t)$ в пространство $L_q(0, 1)$ измеримых функций, таких, что q -я степень функций интегрируема (здесь $1 \leq q \leq \infty$).

Замечание. Заметим, что выбор элементов двухэлементного множества $\mathbb{B}$ может быть произведен и другим способом, например, как $\{-1, 1\}$. За исключением абсолютных значений выхода реле, определение (2.3) и свойства неидеального реле не изменятся. Легко видеть, что биективное отображение $f: [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$, заданное согласно правилу $f(x) = (1 + x)/2$, делает выбор конкретных значений элементов $\mathbb{B}$ полностью эквивалентным.

Поведение различных систем, математические модели которых включают в свой состав неидеальное реле, изучалось в работах [16, 44, 83, 127, 161, 181].

2.2. Системы реле. Рассмотрим набор из N неидеальных реле, занумерованных индексом j , где $1 \leq j \leq N$. Система реле $\mathcal{R}_N$, соединенных параллельно, схематично представлена на рис. 2. Выход определяется естественным образом как взвешенная сумма выходов, получаемых от каждого из индивидуальных реле:

$$\mathcal{R}_N \left[\{x_0^{(0)}, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(N)}\}, t_0 \right] u(t) = \sum_{j=1}^N \mu_j R[\alpha_j, \beta_j, x_0^{(j)}, t_0] u(t), \quad (2.6)$$

где $\{x_0^{(0)}, x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(N)}\}$ — множество начальных состояний конечной системы реле.

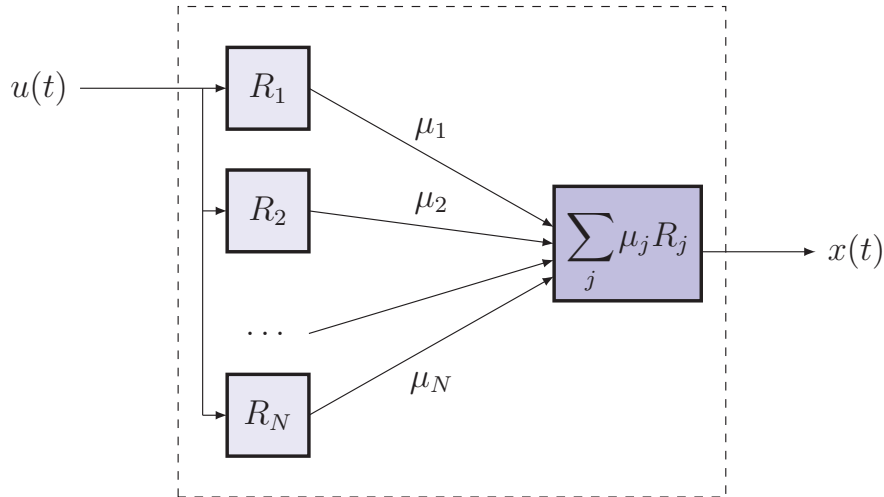


РИС. 2. Параллельное соединение N экземпляров неидеальных реле $R_j[\alpha_j, \beta_j, x_0^{(j)}, t_0]$, взятых с весами $\mu_j > 0$, где $j = 1, \dots, N$.

FIG. 2. Parallel connection of N instances of nonideal relays $R_j[\alpha_j, \beta_j, x_0^{(j)}, t_0]$ taken with weights $\mu_j > 0$, where $j = 1, \dots, N$.

Справедливо свойство монотонности конечной системы неидеальных реле относительно функции входа $u(t)$, что является непосредственным следствием линейности конструкции (2.6) и монотонности по входу одного гистерона. Система не является управляемой, как легко видеть в частном случае двух неидеальных реле. В самом деле, параллельное соединение двух реле

$R_1[\alpha_1, \beta_1, x_0^{(1)}, t_0]$ и $R_2[\alpha_2, \beta_2, x_0^{(2)}, t_0]$, где $\beta_{1,2} = \alpha_{1,2} + \varepsilon$ (при условии $0 < \varepsilon < |\beta - \alpha|$), $x^{(0)} = 1$, $x^{(1)} = 0$, характеризуется следующим поведением: легко видеть, что для любых допустимых входов $u(t)$ справедлива импликация

$$(R_1[\alpha_1, \beta_1, x_0^{(1)}, t_0]u(t) = 1) \Rightarrow (R_2[\alpha_2, \beta_2, x_0^{(2)}, t_0] = 1), \quad (2.7)$$

т. е. событие «первое реле выключено, а второе — включено» является невозможным.

2.3. Определение преобразователя КСР. Преобразователь КСР является континуальным аналогом семейства неидеальных реле, соединенных параллельно. Впервые идея, восходящая к указанной модели, была изложена в [200]. К настоящему времени эта модель детально описана во многих монографиях, из которых отметим [3, 36, 137, 149]. Пространство состояний преобразователя КСР состоит из пар $\{u, z(\alpha, \beta)\}$, где u — произвольное число, а $z(\alpha, \beta)$ — характеристическая функция подмножества полуплоскости $\alpha < \beta$.

Пространство состояний этого преобразователя иллюстрирует рис. 3. Ломаная линия $L(t)$ разбивает полуплоскость $\{(\alpha, \beta): \alpha < \beta\} = S^{(0)} \cup L(t) \cup S^{(1)}$ на два подмножества: $S^{(1)}$ состоит из гистеронов находящихся в выключенном состоянии, а $S^{(0)}$ — из гистеронов, находящихся во включенном состоянии. Кривая $L(t)$ имеет лестничный вид (*staircase*), координаты α_k и β_k ($k = 1, 2, \dots$) ее точек негладкости совпадают с локальными минимумами и максимумами в предыдущие моменты времени соответственно.

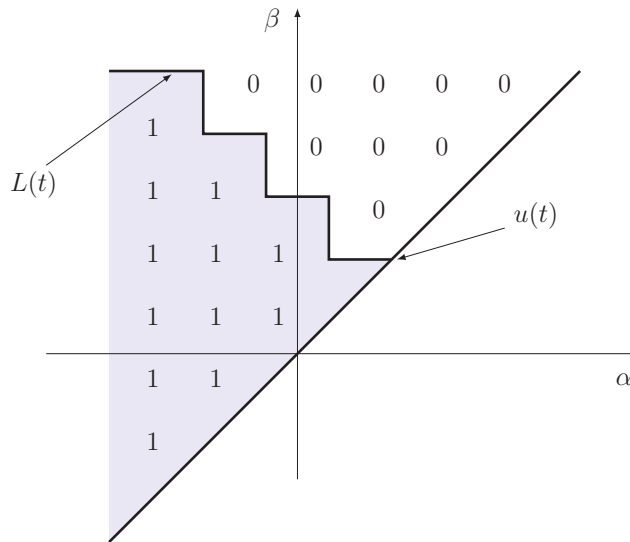


Рис. 3. Элемент пространства состояний набора неидеальных реле. Заливкой цветом выделены гистероны, находящиеся во включенном состоянии.

FIG. 3. Element of the state space of a set of nonideal relays. The hysteron in the switched-on state are highlighted in color.

Соотношение «вход — переменное состояние» преобразователя КСР задается оператором Γ :

$$z(\alpha, \beta, t) = \Gamma[z_0(\gamma)]u(t) = \mu(\alpha, \beta)R[z_0(\alpha, \beta), \alpha(\gamma), \beta(\gamma)]u(t), \quad (2.8)$$

где $\gamma \in \{(\alpha, \beta): \alpha < \beta\}$, $\mu(\alpha, \beta)$ — весовая функция, отражающая плотность распределения элементарных гистеронов. Заметим, что $\mu(\alpha, \beta)$ часто называют *функцией Пре́йзаха*.

Допустимым входом называется любая непрерывная функция $u(t)$, начальное значение $u(0)$ которой согласовано с начальным состоянием оператора КСР, как показано на рис. 3. В [3] было показано, что многие гистерезисные преобразователи допускают естественное обобщение в части расширения области определения на разрывные функции, функции ограниченной вариации (*BV functions*). Однако в технических и иных приложениях, как правило, достаточно корректно определить гистерезисные преобразователи на пространстве непрерывных функций. В дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые входы непрерывны.

Выходом преобразователя КСР является мера M множества тех точек (α, β) указанной полуплоскости, для которых состояние равно единице:

$$x(t) = \int_{\alpha < \beta} z(\alpha, \beta, t) d\alpha d\beta = M(\{(\alpha, \beta) : R[z_0(\alpha, \beta), \alpha(\gamma), \beta(\gamma)]u(t) = 1\}). \quad (2.9)$$

На рис. 4 проиллюстрирован выход преобразователя КСР и состояние в конечный момент времени T для кусочно-линейной функции $u(t)$, $t \in [0, T]$.

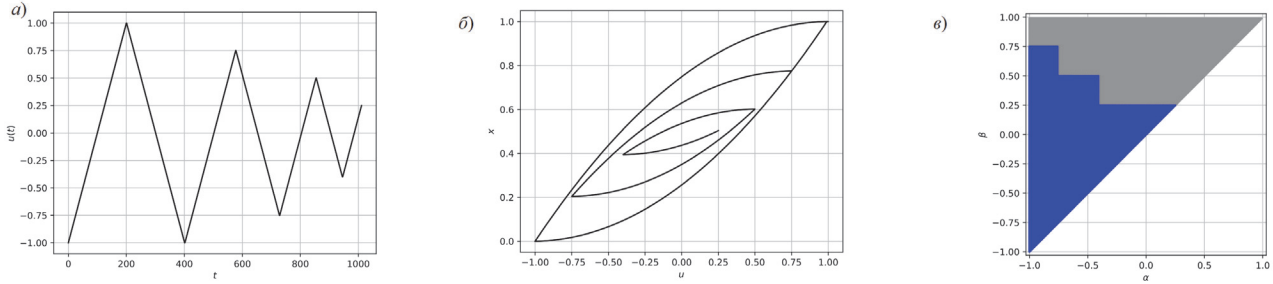


РИС. 4. а) Кусочно-линейная функция входа $u(t)$; б) петля гистерезиса в координатах (u, x) ; в) состояние преобразователя КСР в момент времени $T = 1000$. Количество элементарных гистеронов равно 20100.

FIG. 4. а) Piecewise linear input function $u(t)$; б) hysteresis loop in coordinates (u, x) ; в) state of the CSR converter at time $T = 1000$. The number of elementary hysterons is 20100.

Исходя из геометрической интерпретации, в ряде задач удобно представить выход в виде:

$$x(t) = \iint_{S(+)} \mu(\alpha, \beta) d\alpha d\beta. \quad (2.10)$$

Заметим, что функция $\mu(\alpha, \beta)$ в большинстве практических задач неизвестна. Для ее аппроксимации предложено использовать функции Гаусса [26]

$$\mu(\alpha, \beta) = A \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\beta - \alpha - 2h}{2h} \sigma \right)^2 + \left(\frac{\beta + \alpha}{2h} \sigma \right)^2 \right] \right\}, \quad A, h, \sigma = \text{const}, \quad (2.11)$$

функции Лоренца [13]

$$\mu(\alpha, \beta) = \frac{B}{[1 + (s(\beta - g)/g)^2][1 + (s(\alpha + g)/g)^2]}, \quad B, g, s = \text{const}, \quad (2.12)$$

модель Айвана—Дженкинса (*Iwan—Jenkins model*) [186]

$$\mu(\alpha, \beta) = \frac{k_J}{2} \left\{ \delta(\beta - \alpha) - \frac{k_J}{2} \frac{1}{f_{y,\max} - f_{y,\min}} \left[H\left(\beta - \alpha - 2\frac{f_{y,\min}}{k_J}\right) - H\left(\beta - \alpha - 2\frac{f_{y,\max}}{k_J}\right) \right] \right\}, \quad (2.13)$$

где k_J — линейная жесткость (*linear stiffness*) элемента Дженкинса, $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака, $H(\cdot)$ — функция Хевисайда (*Heaviside*), $f_{y,\min}$ и $f_{y,\max}$ — минимальное и максимальное значение функции выхода соответственно. Заметим, что известны также и другие способы аппроксимации плотности распределения элементарных гистеронов [52, 191]. Также отметим фундаментальную работу [92], в которой приведен элегантный алгоритм последовательной локализации плотности гистеронов на полуплоскости $\{(\alpha, \beta) : \alpha < \beta\}$.

2.4. Вычисление выходов и свойства гистерезисного преобразователя КСР. Для вычисления выхода при конкретном заданном входе удобно использовать аппарат функций размагничивания (*demagnetization function*). Функция размагничивания гистерезисного преобразователя КСР определяется следующим образом [3]:

$$\Phi(\xi, \eta) = \begin{cases} \mu(\{(\alpha, \beta): \xi \leq \alpha < \beta \leq \eta\}), & \text{если } \xi < \eta, \\ 0, & \text{если } \xi = \eta, \\ -\mu(\{(\alpha, \beta): \eta \leq \alpha < \beta \leq \xi\}), & \text{если } \xi > \eta. \end{cases} \quad (2.14)$$

Из определения функции $\Phi(\xi, \eta)$ следует, что она обладает свойством монотонности по каждой из своих переменных:

$$\forall \xi_1, \xi_2, \eta ((\xi_1 \leq \xi_2) \Rightarrow (\Phi(\xi_1, \eta) \geq \Phi(\xi_2, \eta))), \quad (2.15)$$

$$\forall \xi, \eta_1, \eta_2 ((\eta_1 \leq \eta_2) \Rightarrow (\Phi(\xi, \eta_1) \leq \Phi(\xi, \eta_2))). \quad (2.16)$$

Кроме того, $\Phi(\xi, \eta)$ при $\xi \leq \eta$ полунепрерывна по ξ слева и по η справа. Важность введенного определения (2.14) проявляется в возможности экспериментального вычисления этой функции и, следовательно, вычисления (в ряде задач) неизвестной меры μ . В самом деле, при кусочно-линейном входе вида

$$u_0(t) = \begin{cases} \xi + (\eta - \xi)(t - t_0), & \text{если } t_0 \leq t \leq \tau, \\ \eta + (\xi - \eta)[t - (t_0 + \tau)], & \text{если } \tau \leq t \leq T, \end{cases} \quad (2.17)$$

где t_0, τ, T — некоторые положительные константы (причем $t_0 < \tau < T < \infty$), и произвольном начальном состоянии $\{u_0, z_0(\alpha, \beta)\}$ выполняется соотношение:

$$R[t_0, z_0(\alpha, \beta), \mu]u_0(\tau) - R[t_0, z_0(\alpha, \beta), \mu]u_0(T) = \Phi(\xi, \eta). \quad (2.18)$$

Представим произвольную непрерывную функцию входа $u(t)$ как предел последовательности кусочно-монотонных функций. Тогда справедливо равенство:

$$R[t_0, z_0(\alpha, \beta), \mu]u(\tau_3) - R[t_0, z_0(\alpha, \beta), \mu]u(\tau_2) = -\Phi(u(\tau_2), u(\tau_3)), \quad (2.19)$$

где $t_0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \infty$, и значения входа $u(t)$ на $[\tau_1, \tau_2]$ образуют промежуток $[u(\tau_1), u(\tau_2)]$, значения входа на $[\tau_2, \tau_3]$ — промежуток $[u(\tau_2), u(\tau_3)]$, и $u(\tau_3) \in [\tau_1, \tau_2]$.

Перечислим основные свойства преобразователя КСР [3, 137, 197]:

- 1) независимость от скорости изменения входа (*rate-independence*);
- 2) непрерывность;
- 3) монотонность по входам и начальным состояниям;
- 4) виброкорректность;
- 5) детерминированность;
- 6) почти управляемость;
- 7) свойство «заметания» (*wiping-out property*);
- 8) конгруэнтность (*congruency*).

Независимость от скорости изменения входа: для любого входа траектория в координатах $(u(t), x(t))$ инвариантна относительно произвольного гомеоморфизма по времени (другими словами, траектория не зависит от скорости изменения $u(t)$).

Преобразователь континуальной системы реле, трактуемый как оператор, действующий из пространства непрерывных функций в себя, является непрерывным для широкого класса мер на плоскости. Для этого достаточно, чтобы мера была абсолютно непрерывна относительно лебеговой меры. Отметим, что преобразователь конечной системы реле, соединенных параллельно, континуальным аналогом которого является преобразователь КСР, указанным свойством не обладает. Свойства операторов, соответствующих наборам конечной системы реле, действующим из пространства непрерывных функций в пространство интегрируемых в q -й степени функций (где $q > 1$), рассмотрены в [3].

Монотонность оператора индивидуального реле распространяется и на континуальную систему:

$$[\forall t \geq t_0: u(t) \leq v(t)] \& [z_1(\alpha, \beta) \leq z_2(\alpha, \beta)] \Rightarrow (\forall t \geq t_0: R[t_0, z_0(\alpha, \beta)](t) \leq R[t_0, z_0(\alpha, \beta)]v(t)). \quad (2.20)$$

Несмотря на то, что неидеальное реле является разрывным преобразователем, преобразователи КСР обладают свойством виброкорректности: преобразователь $R[t_0, z_0(\alpha, \beta)]$ равномерно виброкорректен, если и только если мера каждой кривой $\alpha + \beta = \psi(\beta - \alpha)$ ($\alpha < \beta$), где ψ удовлетворяет условию Липшица $\psi \in \{\varphi: |\varphi(u) - \varphi(v)| \leq |u - v|\}$, равна нулю [3].

Свойство «заметания» гласит, что достижение функцией $u(t)$ локального максимума стирает вершины $L(t)$, чьи β -координаты меньше этого максимума, и достижение функцией $u(t)$ локального минимума стирает вершины, чьи α -координаты находятся выше этого минимума. Это свойство отражает факт, что модель КСР не накапливает информацию о прошлых экстремальных значениях входных данных. Другими словами, только последовательность чередующихся мажорирующих входных экстремумов сохраняется в модели. Все остальные экстремумы $u(t)$ стираются и не оказывают влияния на состояние преобразователя.

Конгруэнтность преобразователя КСР означает, что при условии симметрии меры Прейзаха $\mu(\alpha, \beta) \equiv \mu(\alpha + \beta)$ все малые петли гистерезиса, соответствующие изменениям входа $u(t)$ между одними и теми же двумя последовательными экстремальными значениями, являются конгруэнтными. Петли гистерезиса в этом случае инвариантны относительно линейных сдвигов (*linear translation*).

Строгие доказательства свойств заметания и конгруэнтности см. в работе [32].

Свойства преобразователя КСР обобщает теорема о характеристике (*characterization theorem*) [197]:

Теорема 2.1 (теорема о характеристике). *Выполнение свойств заметания и конгруэнтности для некоторого функционального оператора является необходимым и достаточным условием для представления этого оператора в виде преобразователя КСР для кусочно-монотонных входов.*

2.5. Векторная модель и sweeping-процессы. Обобщение гистерезисных операторов на случай векторных пространств привлекает внимание исследователей достаточно долгое время и восходит к классической работе [188]. Современный подход к построению векторного аналога преобразователя КСР основан на том, что формируется континуальный набор классических (скалярных) преобразователей КСР, расположенных по всем направлениям $\varphi \in [0, 2\pi)$ в некоторой заданной плоскости [8, 138]. Суперпозиция таких скалярных операторов и образует векторный преобразователь, выход которого $\mathbf{x}(t)$ по определению равен:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^{2\pi} \zeta(\varphi) \mathbf{a}_\varphi \Gamma_\varphi(\mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{u}(t)) d\varphi, \quad (2.21)$$

где $\mathbf{a}_\varphi$ — единичный вектор в направлении, характеризуемом углом φ , Γ — скалярный оператор КСР, функция $\zeta(\varphi)$ определяет анизотропные свойства среды, $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ — скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве. С использованием (2.9) формулу (2.21) обычно представляют в виде:

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^{2\pi} \zeta(\varphi) \mathbf{a}_\varphi \left(\iint_{\alpha < \beta} \mu(\alpha, \beta) R[\alpha, \beta, x_0, t_0] (\mathbf{a}_\varphi \cdot \mathbf{u}(t)) d\alpha d\beta \right) d\varphi. \quad (2.22)$$

Известен ряд обобщений (2.22) на случай трехмерного пространства выходов [135, 137]. Содержательные приложения векторных моделей гистерезиса к образованию пространственных структур и динамики популяций содержатся в [87, 93, 94].

Также отметим близкое к гистерезису понятие, связанное с входно-выходными соответствиями в рамках так называемых *sweeping-процессов*. Простейшая модель, относящаяся к этому классу, описывает связь между движением выпуклой рамки на плоскости и координатами точки, обуславливающей указанное движение. Математическая модель sweeping-процесса сводится к дифференциальному включению $\frac{dx}{dt} \in F(t, x)$, где правая часть есть многозначное отображение. А решением указанного включения называется абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая этому включению при почти всех значениях t . Первые работы в этом направлении относятся к началу 70-х годов прошлого века [146–148]. Из недавних работ выделим [111], посвященную исследованию

управляемой системы с обратной связью в форме sweeping-процесса; [109], где введено понятие и доказана устойчивость положения равновесия автономного sweeping-процесса; [110], где доказана разрешимость дифференциальных включений, возмущенных в классе функций ограниченной вариации.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1. Ферромагнитные и сегнетоэлектрические материалы. Вещества, способные обладать намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля, относятся к классу ферромагнитных материалов. Магнитная индукция $\mathbf{B}$ в таких веществах зависит от напряженности внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$ нелинейным образом. Гистерезис в магнитных средах проявляется в виде зависимости вектора намагниченности и вектора магнитной индукции в веществе не только от напряженности приложенного внешнего поля, но и от предыстории его изменения и состояния образца. Магнитный гистерезис проявляется в ферромагнитных материалах (к которым относятся железо, никель, кобальт; гадолиний и некоторые другие редкоземельные элементы; также сплавы на их основе). Заметим, что ферромагнитные свойства материала зависят от температуры.

Магнитные свойства ферромагнетиков определяются спиновыми магнитными моментами электронов. В указанных кристаллических материалах формируются условия, при которых магнитные моменты электронов располагаются параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного намагничивания, иначе называемые магнитными доменами, или доменами Вейсса (*Weiss domains*). Внутри каждого домена вектор намагниченности, равный магнитному моменту единицы объема, является постоянным по величине и направлению. Между доменами имеются относительно тонкие доменные стенки толщиной в несколько атомов, в которых направление намагничивания плавно меняется от направления одного домена к направлению в другом. При изменении внешнего магнитного поля стенки смещаются, изменяя относительные размеры и форму доменов.

В отсутствие внешнего поля в пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения и обладает определенным магнитным моментом, причем направления таких моментов для разных доменов различны, т. е. обычных условиях направления магнитных моментов хаотически распределены в пространстве, и образец в целом представляется макроскопически ненамагниченным. В слабых полях происходит смещение границ доменов, в результате чего происходит увеличение тех из них, магнитные моменты которых составляют с вектором $\mathbf{H}$ относительно малый угол. Заметим, что такое смещение в слабых полях носит обратимый характер. С увеличением H домены с меньшими углами практически полностью поглощают все остальные. Однако при дальнейшем росте H будет наблюдаться еще один эффект, заключающийся в повороте магнитных моментов доменов сонаправленно внешнему полю. Моменты электронов в пределах домена в этом случае поворачиваются единомысленно, и перемагничивание приобретает необратимый характер, возникает эффект гистерезиса.

Даже при монотонном и непрерывном изменении внешних условий наблюдается скачкообразное изменение намагниченности ферромагнитного вещества, приводящее к изменению доменной структуры материала. Это явление называется эффектом Баркгаузена и обусловлено наличием различного рода неоднородностей материала, в частности, дислокации, инородные включения, остаточные механические напряжения и т. д. Указанные неоднородности препятствуют перестройке магнитной структуры, но при достижении некоторого порогового значения H доменная стенка продвигается скачкообразным образом. Из-за подобных препятствий кривая намагничивания ферромагнетика имеет ступенчатый характер.

Таким образом, физической основой гистерезиса в ферромагнитных материалах является действие двух эффектов:

- 1) вращения вектора намагниченности;
- 2) изменения размера и/или количества магнитных доменов.

Помимо модели Прейзаха, для описания нелинейных зависимостей в ферромагнитных материалах также широко используются модели Джилса—Атертона (*Jiles—Atherton*) и Стонера—Вольфарта (*Stoner—Wohlfarth*).

Модель магнитного гистерезиса Джилля—Атертона была введена в 1984 г. для изотропных материалов и впоследствии была обобщена на анизотропные [104, 168]. Намагниченность M образца в этой модели вычисляется по следующему алгоритму:

- 1) по величине намагниченности M с учетом коэффициента междоменной связи α рассчитывается эффективное магнитное поле $H_{\text{eff}} = H + \alpha M$;
- 2) на основе H_{eff} рассчитывается негистерезисная составляющая M_{an} ;
- 3) наконец, намагниченность M вычисляется с помощью численного решения некоторого обыкновенного дифференциального уравнения с учетом знака производной напряженности магнитного поля H :

$$\frac{dM(H)}{dH} = \frac{M_{\text{an}}(H) - M(H)}{k - \alpha[M_{\text{an}}(H) - M(H)]}. \quad (3.1)$$

Доказано, что за счет специального выбора меры преобразователя КСР можно добиться совпадения входно-выходных соответствий модели Джилля—Атертона и преобразователя КСР [155]. Заметим, что в ряде работ было проведено сравнение моделей КСР и Джилля—Атертона [10, 60], а в недавней работе [130] построена новая гибридная модель гистерезиса на их основе с использованием нейронных сетей с обучением по алгоритму обратного распространения ошибок (*backpropagation neural networks*).

В модели Стонера—Вольфарта намагниченность $\mathbf{M}$ не изменяется внутри ферромагнетика, но этот вектор вращается при изменении магнитного поля $\mathbf{H}$ [188]. Магнитное поле изменяется только вдоль одной оси; его скалярная проекция h является положительной в одном направлении и отрицательной в противоположном. Предполагается, что ферромагнетик состоит из одноосных магнитных частиц. В условиях изменяющегося внешнего магнитного поля намагниченность ограничена плоскостью, содержащей направление магнитного поля и легкую ось (для большинства магнитно-анизотропных материалов существует два противоположных направления наибольшего намагничивания материала, и линия, параллельная этим направлениям, называется легкой осью.) Модель Стонера—Вольфарта описывает процесс вращения домена с использованием эллипсоидальных частиц с одноосной анизотропией, моделирующих доменные области. Магнитный момент таких частиц определяется анизотропией, а его положение равновесия определено условиями минимума энергии. Но для проведения расчетов требуется функция распределения частиц в ферромагнитном материале, которая, как правило, неизвестна [192]. Среди других особенностей этой модели, ограничивающих ее использование в физических приложениях, отметим формирование в ее рамках только симметричных внутренних петель гистерезиса (*minor loops*).

Классическая модель Прейзаха широко применяется для моделирования нелинейных явлений в ферромагнетиках [42, 75, 135, 174]. В серии работ Майергольца [136, 141–143] предложены некоторые ее обобщения. Так, например, в [141] предложено обобщение модели, в которой в уравнение (2.9) добавляется слагаемое

$$x(t) = \int_{\alpha < \beta} \mu(u(t), \alpha, \beta) \Gamma[z_0(\gamma)] u(t) d\alpha d\beta + \int_{-\infty}^{\infty} \nu(\beta) \hat{\lambda}_{\beta} u(t) d\beta, \quad (3.2)$$

где оператор $\hat{\lambda}_{\beta}$ определен на пространстве допустимых входов согласно правилу:

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_{\beta} u(t) = -1, & \text{если } u(t) < \beta, \\ \hat{\lambda}_{\beta} u(t) = 1, & \text{если } u(t) > \beta. \end{cases} \quad (3.3)$$

Весовая функция $\nu(\beta)$ отражает распределение плотности операторов $\hat{\lambda}_{\beta}$ по оси β . (Заметим, что в настоящей работе величины α и β поменяны местами относительно обозначений в работах Майергольца.)

Обратим внимание на два важных отличия (3.2) от классической модели. Во-первых, весовая функция $\mu(u(t), \alpha, \beta)$ зависит от входа $u(t)$. Во-вторых, введение в определение выхода интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \nu(\beta) \hat{\lambda}_{\beta} u(t) d\beta$ отражает влияние полностью обратимой компоненты гистерезисной нелинейности. В итоге, выход $x(t)$ описывается частично обратимой зависимостью, что позволяет моделировать, например, петли гистерезиса, образуемые доменами Стонера—Вольфарта [188].

В классической модели Прейзаха малые петли гистерезиса являются конгруэнтными. Для того, чтобы обойти это ограничение, в работе [136] предложено следующее определение выхода динамической модели КСР:

$$x(t) = \int_{\alpha < \beta} \mu \left(u(t), \alpha, \beta, \frac{dx(t)}{dt} \right) \Gamma[z_0(\gamma)] u(t) d\alpha d\beta + \frac{1}{2} \left(f_{u(t)}^- + f_{u(t)}^+ \right), \quad (3.4)$$

где $f_{u(t)}^-$ и $f_{u(t)}^+$ являются выходными значениями на нисходящей и восходящей ветвях основного контура гистерезиса соответственно. Как видим из (3.4), в уравнение введена зависимость весовой функции от скорости изменения выхода.

Теория, первоначально разработанная для ферромагнитных систем, может быть адаптирована к сегнетоэлектрическим материалам, на которых сконцентрировано внимание исследователей в области актуаторов и преобразователей-накопителей энергии.

Спонтанная поляризация сегнетоэлектрического материала и, как следствие, нелинейная зависимость электрического смещения (*displacement*) от внешнего электрического поля демонстрируют вид классической петли гистерезиса во многих классах кристаллических материалов. Зависимость физических величин от предыстории используется как материальная основа для реализации энергонезависимой RAM-памяти для электронных вычислительных систем и RFID-карт (*radio-frequency identification*) [20, 45].

Модель КСР применялась для описания такого рода зависимостей во многих работах, среди которых можно отметить, например, [42, 45]. В работе [171] проведено моделирование сегнетоэлектрических суженных петель (*pinched*, или *constricted*). Исходя из модельной функции распределения дипольного момента в материале, получено аналитическое выражение для результирующей сегнетоэлектрической петли, и соответствующая форма гистерезиса отражает ее явное сужение. Применяемый подход позволяет идентифицировать распределения дефектов, исходя из характеристики цикла.

Существенное отличие от ферромагнитных эффектов заключается в том, что, как правило, существует максимальное значение внешнего поля, при котором материал может эксплуатироваться без повреждения (пробоя). Таким образом, приложенное поле пьезокерамического материала не может достичь положения насыщения. Часто предполагается, что максимально допустимое входное значение образует ограничивающий треугольник для модели КСР в пьезокерамической системе привода. Но в приложениях системное входное значение часто не достигает этого фиксированного максимального значения, и иногда начальное входное значение может быть просто нулевым.

Экспериментальные данные показывают, что классическая модель КСР с достаточной точностью моделирует пьезокерамический преобразователь (*piezoceramic actuator*), когда он подвергается воздействию низкочастотного электрического напряжения. Точность модели ухудшается, если диапазон частот напряжения становится шире, а также в случае относительно больших механических нагрузок [95].

Кроме того, отметим, что модель Прейзаха естественным образом используется при разработке математических моделей ферромагнетизма в рамках вариационного принципа [145]. В указанной книге приводится строгое обоснование гистерезисной модели, описывающей входно-выходные соотношения на основе КСР.

3.2. Идентификация меры и технические системы. Прямой и обратный пьезоэлектрический эффект и, соответственно, функционирующие на их основе технические системы находят самое широкое применение в промышленности. Приведем краткий список таких устройств: кварцевые резонаторы (*crystal oscillator*), используемые как эталон частоты, пьезотрансформаторы для изменения напряжения высокой частоты, датчики микрофонов и гидрофонов, пьезокерамические излучатели звука и ультразвука, системы точного позиционирования [128, 170]. В последние годы этот список расширился за счет значительного прогресса в разработке преобразователей-накопителей энергии (*energy harvesters*) (см. например, работы [23, 73, 131], в которых подчеркивается роль нелинейных и гистерезисных эффектов в функционировании и эффективности преобразования таких устройств).

Как известно, процесс запасаения энергии заключается в перераспределении кинетической энергии колеблющегося массивного тела в электрическую форму энергии [91]. Принципиальное значение в этом эффекте имеет нелинейность характеристик механической и/или электрической подсистем. В работах [53, 72, 169] подчеркивается значимость наличия нелинейных звеньев в преобразователях энергии. Неизбежно наблюдаемые в промышленных условиях систематические изменения механических параметров, возникающие в силу механического износа, старения материалов, приводят к ухудшению передаточных характеристик. Отметим также немаловажное влияние внешних шумов, корректно оценить которое возможно только вероятностными и статистическими методами, для чего приходится вводить вероятностные характеристики для отдельных составных частей системы [47]. Моделирование нелинейных гистерезисных эффектов применительно к задачам накопления энергии было осуществлено в работах [123, 132, 179].

Несмотря на указанные выше «положительные» применения физических гистерезисных нелинейностей в технических устройствах, в управлении интеллектуальными приводами (*smart actuators*) влияние этих явлений стараются минимизировать. Для компенсации гистерезиса желательно, чтобы функция входа, сгенерированная искусственно с помощью операции инверсии, обладала свойствами регулярности. В частности, в работе [102] показано существование слабого $*$ -непрерывного обращения оператора КСР, рассматриваемого на множестве непрерывных по Гёльдеру (*Hölder*) функций. Также в этой работе предложены алгоритмы обращения оператора КСР, исследованы их свойства сходимости и непрерывности по Липшицу (*Lipschitz*). Совместный учет гистерезисных нелинейностей и явления ползучести (*creep dynamics*) приведен в [125].

Компенсация гистерезисных эффектов в динамике искусственных мышц рассмотрена в [113], где продемонстрирована важность описания так называемого «уединенного цикла» (*lonely stroke*). В этой работе проведено математическое моделирование зависимостей «*voltage—strain*» и «*load—strain*» и представлена экспериментальная процедура для определения параметров гистерезиса. Предложен итерационный алгоритм для компенсации гистерезиса путем численного инвертирования оператора КСР. Другие примеры применения этого оператора в задаче совершенствования искусственных мышц можно найти в работах [29, 193].

Близкой научно-технической проблемой является идентификация параметров различных гистерезисных моделей. Как уже отмечалось выше, достаточно общий подход к идентификации меры преобразователя КСР был впервые изложен в [92]. Авторы предложили последовательность входов, позволяющую наблюдать отклик локальной части системы гистеронов, что, в свою очередь, позволило определить плотность их распределения. Различные методы вычисления характеристик преобразователя КСР используются в работах [120, 199]. Например, в статье [189] предложен выбор плотности меры в виде

$$\mu(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x_1) \varphi_i(-x_2), \quad (3.5)$$

где вспомогательные функции $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, N$, равны

$$\varphi_i(x) = \frac{a_i}{2} \left[1 + \operatorname{ch} \left(\frac{x - b_i}{c_i} \right) \right]^{-1}. \quad (3.6)$$

В уравнении (3.6) a_i — амплитуда, b_i — среднее значение, c_i — дисперсия, $\operatorname{ch}(z)$ — гиперболический косинус. Выбор (3.5) позволяет вычислить выход преобразователя КСР в аналитической форме. Верификацию предложенного метода авторы выполнили с помощью моделирования переходных электрических цепей, основу которых составляет тороидальная катушка с ферромагнитным сердечником. Методы идентификации параметров в условиях малого объема данных предложены в статьях [101, 173]. Интересная работа [172] посвящена идентификации и компенсации гистерезисных эффектов в задаче управления луча в ускорителе заряженных частиц. Для описания отклика луча на магнитные поля системы фокусировки применяется байесова статистическая модель и методы машинного обучения.

До недавнего времени казалось, что модель КСР, несмотря на свой ясный физический смысл, носит, тем не менее, лишь умозрительный характер и является довольно абстрактной сущностью.

Однако недавняя работа [194] демонстрирует, что элементарные части модели могут быть наблюдаемы. Как указывают авторы, модель Прейзаха была краеугольным камнем в области ферромагнетизма и сегнетоэлектричества с момента ее создания. Она описывает реальный, неидеальный ферроидный материал как сумму распределения идеальных «гистеронов». Однако физическую сущность модели в сегнетоэлектрических материалах до последнего времени было трудно установить. В этой работе авторы экспериментально определяют распределение Прейзаха (распределение гистеронов) для двух сегнетоэлектрических систем и показывают, как его ширина напрямую связана с морфологией материалов. Авторы связывают распределение Прейзаха с измеренной микроскопической кинетикой переключения гистеронов, которая лежит в основе макроскопической дисперсионной кинетики переключения поляризации, обычно наблюдаемой на практике для сегнетоэлектриков. Представленные результаты еще раз демонстрируют глубокую физическую сущность модели КСР и подтверждают, что эта модель является мощным инструментом для объяснения переключения поляризации во всех временных масштабах в различных типах сегнетоэлектриков.

Полученные в [194] результаты могут быть использованы для дальнейшего развития сегнетоэлектрических технологий в области обычных и многобитовых устройств хранения данных. Как известно, совместное хранение нескольких битов на элемент памяти является позволяющим значительно увеличить плотности записи в запоминающих устройствах. Кроме того, таким образом можно смягчить проблему ограниченного минимального размера элемента органической сегнетоэлектрической памяти с произвольным доступом (*ferroelectric random access memory*, FeRAM).

Среди недавних работ, посвященных исследованию модели КСР применительно к объектам со структурой сети и путей на них (*complex pathways*), отметим [105, 106]. В интересной работе [106] рассматривается граф, описывающий переходы между дискретными входно-выходными состояниями гистерезисной модели Прейзаха. Такой граф обладает самоподобной (блочной-иерархической) несимметричной матрицей смежности. Авторы вычисляют в явном аналитическом виде собственные значения, матрицы смежности, их распределение (кратность) и соответствующие им собственные векторы. В частности, спектр матрицы смежности получен в явной аналитической форме благодаря тому, что ее характеристический многочлен представляет собой произведение полиномов Чебышева. Помимо этого, распределение собственных значений матрицы смежности (плотность состояний) также может быть вычислено в явной аналитической форме и, что является весьма неожиданным, в масштабе, похожем на так называемую «дьявольскую лестницу». Эти результаты могут быть использованы для определения параметров модели Прейзаха, в частности, для определения меры $\mu(\alpha, \beta)$. Кроме того, помимо значительного академического интереса, полученные результаты могут оказаться плодотворными при изучении сложных сетей, структура которых обладает свойством самоподобия — фракталов и мультифракталов.

Моделирование современных источников энергии включает учет динамики выходного напряжения, тока, холостого напряжения (*open circuit voltage*), состояния заряда (*state of charge*, отношение оставшейся емкости к эталонной емкости) и других параметров. Аккумуляторная ячейка достигает разных значений холостого напряжения в одном и том же состоянии заряда и при той же температуре в зависимости от предыдущей истории заряда. В работах [18, 19] различные модели гистерезиса, в т. ч. модель Прейзаха, использовались для описания свойств литий-ионных источников аккумуляторов. Несколько более общий подход предложен в [24, 195].

3.3. Сплошные среды и процессы в пористых средах. Помимо описания электрических и магнитных эффектов, преобразователь КСР оказался очень удобным инструментом для математического моделирования процессов переноса жидкости в пористых средах [31, 57, 71, 124, 176]. Как правило, зависимость насыщения среды жидкостью от давления в ней (*pressure-saturation relation*) носит нелинейный гистерезисный характер. Динамика содержания почвенной влаги в слое грунта в предположении, что единственными компонентами водного потока являются инфильтрация и дренаж, описывается дифференциальным уравнением первого порядка с гистерезисным членом [66]. Задача о диффузии воды с возможностью замораживания и плавления в вязкоупругопластичном пористом твердом теле детально решена в недавней работе [71]. Изменение гидравлической проводимости почв (*soil-saturated hydraulic conductivity*), рассматриваемых

как пример пористых сред, изучено в работах [7,90,116]. За счет полива таких почв водой невысокого качества, т. е. с повышенным содержанием солей и щелочей, происходит деградация почвенного слоя и существенное снижение его сельскохозяйственного значения. Тем не менее, процессы деградации, как правило, сопряжены с процессами частичного самовосстановления почвенных пород, что проявляется в виде гистерезисных зависимостей в моделях гидравлической проводимости. При моделировании и оптимизации процессов нефтедобычи приходится сталкиваться с необходимостью учета гистерезисных явлений, проявляющихся в неоднозначной (гистерезисной) связи между геологическими параметрами, характеризующими изменение состояния верхней части земной коры. В этой связи отметим работы [6,62]. Прецизионный учет гистерезисных эффектов на модельном уровне позволяет разработать и усовершенствовать технологии (*water alternating gas, huff-n-puff* и др.), позволяющие существенно повысить экономические показатели процесса нефтедобычи.

Применение модели КСР и соответствующий выбор весовой функции позволяет учитывать характеристики конкретных почв, например, содержание глины и других минералогических включений. Для идентификации весовой функции авторы [116] предлагают использовать стандартный метод на основе измерения обратных кривых первого порядка (FORC). Заметим, что в этой статье приведено также исключительно подробное и ясное описание программной реализации классической модели КСР.

В самое последнее время интерес к описанию существенно нелинейных процессов проявляется и в сейсмологии, где особую роль играет взаимодействие «грунт—конструкция» (*soil-structure interaction*). Так называют процессы, при которых массивная конструкция (например, промышленная установка, здание, масштабная инженерная конструкция) участвует в общем движении совместно с грунтом, на котором она располагается. В зависимости от параметров, определяющих такие процессы, сейсмические колебания могут либо усиливаться, либо, напротив, уменьшаться и минимизировать возможные повреждения конструкции. Так, в работах [37,38] преобразователь КСР используется для моделирования взаимодействия грунта и фундамента в приближении малых и умеренных деформаций грунта. С помощью метода гармонического баланса определяется реакция равновесного состояния (*steady-state*) системы на внешнее гармоническое воздействие. Также показано, что по сравнению с численным методом конечных элементов, традиционно используемым для решения подобных задач сейсмологии, модель КСР позволяет получить аналитические зависимости (для выбранной функции $\mu(\alpha, \beta)$) и оценивать значимость параметров задачи.

3.4. Оптимальное управление. Большое число исследований посвящено задаче оптимального управления динамическими системами, имеющими в своем составе гистерезисные блоки. Так, в работах [14,15] решена задача оптимального управления для системы с двумя переменными состояниями, у одного из них эволюция регулируется управляемым обыкновенным дифференциальным уравнением, а другое содержит гистерезисный оператор (люфт, оператор Прандтля—Ишлинского и оператор КСР). С помощью метода динамического программирования выводится соответствующее уравнение Гамильтона—Якоби первого порядка и доказывается, что целевая функция является единственным ограниченным равномерно непрерывным решением задачи Коши.

В ряде работ гистерезисные слагаемые присутствуют как в уравнениях состояния, так и в управлении [21,22]. Здесь задача оптимального управления сводится к системе с дискретным временем, и далее применяется метод динамического программирования. Устанавливается аналог принципа Беллмана оптимальности траектории для системы, включающей в свой состав звено, моделируемое преобразователем КСР.

Конкретные задачи математической физики, в частности, задача диффузии, рассмотрены в [33,70]. Предложен конструктивный метод, основанный на двухпараметрической «штрафной» функции. Малый параметр определяет отклонение решения за конечное время от ожидаемого значения, второй параметр используется для аппроксимации основных вариационных неравенств. Решение проблемы управляемости может быть получено путем перехода к пределу в дважды вырожденной системе управления, при этом наблюдается сходимости по пространственным координатам в сильном смысле, причем она является равномерной по времени. Диффузия в биологических системах обсуждается в [43], в этой статье анализируемая система содержит три

уравнения диффузии, описывающих эволюцию трех биологических видов: жертвы, хищника и пищи для добычи (или растительности). Уравнение для плотности пищи включает оператор гистерезиса в виде обобщенного упора. Изучена задача минимизации интегрального функционала затрат по отношению к решениям вышеупомянутой системы. Получены некоторые результаты релаксационного типа для задачи минимизации и установлено существование почти оптимального решения. Задача управления реакционной диффузией [150] моделируется системой с двумя видами управления, а именно распределенными функциями управления или элементами управления, которые действуют на части границы области. Уравнение состояния задается системой реакция—диффузия с дополнительным свойством, заключающимся в том, что в скорость реакции включен скалярный оператор упора. Особенностью вывода сопряженной системы является нелокальность во времени производной Адамара оператора управления по состоянию.

В задачах, модели которых сводятся к уравнениям с распределенными параметрами, проблема идентификации оптимального (квазиоптимального) управления является весьма нетривиальной [33]. Один из возможных способов ее решения связан с трансляцией управляющего воздействия посредством динамически меняющихся граничных условий. Именно к такому классу относится задача, связанная с поддержанием (установлением) желаемой температуры в теплопроводящих средах. Гистерезисное слагаемое в задачах указанного типа может проявляться на границе области [81, 114] или являться составной частью рассматриваемой системы. Разработке модели управления, проблеме существования периодических решений посвящен цикл работ [80, 82, 85], а также [68, 74, 164]. Исследованию задачи Стефана с гистерезисными особенностями посвящена работа [46]. Проблема регуляризации параболических уравнений, в том числе и с гистерезисом, рассматривалась в работах [9, 63, 196].

Еще один интересный способ учета гистерезисных нелинейностей в задачах управления предложен в [34]. Здесь гистерезисное слагаемое вводится в вариационное неравенство эволюции с замкнутым выпуклым ограничением m -мерного вещественного арифметического пространства. В этом случае существуют оптимальные решения, а также необходимые условия оптимальности первого порядка. В частности, при определенных предположениях о регулярности детально описано поведение решений сопряженной системы. Подчеркивается, что существенную трудность в получении условий оптимальности вносит недифференцируемость рассматриваемых нелинейных операторов.

В работе [178] рассматривается задача оптимального производства, хранения и сбыта продукции в условиях гистерезисного характера функции спроса, а именно, для функции спроса, определенной с помощью преобразователя КСР с инвертированными индивидуальными реле. Целевой функционал $I(T)$ равен с точностью до знака общему доходу за конечное время T :

$$I(T) = \int_0^T [-c(t)P(t) + U(t) + kZ(t)] dt, \quad (3.7)$$

где $c(t)$ — цена единицы товара на монотоварном рынке, $P(t)$ — темп продаж (т. е. количество проданного за единицу времени товара), $U(t)$ — темп производства (т. е. количество товара, поступающего на склад в единицу времени), $Z(t)$ — количество товара на складе у производителя, k — коэффициент, характеризующий затраты на хранение единицы товара; зависимость темпа продаж от $Z(t)$ является гистерезисной. Такая модель по своей природе позволяет учитывать «историю» потребительских отношений на конечном временном интервале.

В технических задачах большой интерес представляет управление элементами механических систем, в частности, механической трансмиссией [133]. В ряде случаев задача сводится к устранению эффекта гистерезиса в высокоточной механической передаче. Для описания гистерезисного поведения гармонического привода применяется модифицированная модель Боука—Вена. С помощью преобразования координат и линеаризации обратной связи получена математическая модель последовательной системы механического привода. Эталонная траектория отслеживается контроллером, основанным на линейном квадратичном регуляторе. Относительная погрешность в отслеживании установившихся колебаний стремится к нулю. При использовании оптимального управления выходной сигнал гармонического привода может следовать более сложной траектории.

3.5. Стохастические внешние воздействия и недетерминированные системы. Известно, что базовые характеристики гистерезисных блоков большинства динамических систем, как правило, известны лишь с ограниченной точностью и, более того, подвержены нерегулярным изменениям вследствие процессов «старения», «износа», а также особенностей внешнего окружения, что наиболее типично для механических составляющих. Это влечет необходимость обобщения известных гистерезисных моделей на случай стохастических возмущений параметров анализируемой системы.

Приведем несколько примеров систем с гистерезисом, в которых носитель указанных свойств, обладая доменной структурой, демонстрировал «не совсем» детерминированное поведение: первый из них касается экспериментального исследования отклика намагниченности ферромагнетиков различного химического состава на внешнее магнитное поле, изменяющееся по гармоническому закону [58]. В этой работе показано, что гистерезисная петля на каждом этапе перемагничивания испытывала неконтролируемые вариации (при этом условия эксперимента обеспечивали почти идеальное постоянство внешних условий — температуры, давления и т. д.). Аналогичные результаты, в том числе и для сегнетоэлектриков, поляризуемых периодически меняющимся электрическим полем, представлены в работах [153, 202]. Это означает, что существующие модели (как феноменологические, так и конструктивные) можно рассматривать лишь как «первое приближение» в задачах идентификации параметров систем с ферромагнитным и сегнетоэлектрическим гистерезисом. Следующий пример основан на гистерезисной модели безработицы [48]. В этой работе моделируется занятость населения, работающего на предприятиях-производителях монопродукции в зависимости от ценовой конъюнктуры. На основе статистических данных предлагается гистерезисная модель безработицы — преобразователь КСР, при этом элементарный носитель гистерезисных свойств (неидеальное реле) отождествляется с отдельным предприятием. Входом для соответствующего преобразователя является цена, выходом — состояние, соответствующее вовлеченности (невовлеченности) в производственный процесс. Отметим, что посредством указанной модели естественным образом может быть описано поведение производителей сланцевой нефти — действительно, ее цена на мировых рынках является определяющим наличие или отсутствие производства фактором (хотя и не единственным).

Модели систем с гистерезисом в условиях стохастических воздействий рассматривались в работах [59, 139, 140, 165, 185, 187], посвященных изучению отклика гистерезисного преобразователя на случайный или зашумленный сигнал. Тем не менее, внутренние параметры гистерезисной подсистемы в этих работах считались детерминированными. В работах [1, 30] рассматривалось обобщение одной из простейших гистерезисных моделей — обобщенного люфта: его определяющие кривые полагались подверженными случайным возмущениям, выход такого преобразователя трактовался как случайный процесс. В указанных работах была доказана корректность соответствующего определения, изучены основные свойства стохастического преобразователя.

В работе [139] исследуется отклик нелинейной системы на стохастическое внешнее воздействие. Введена модель последействия (*after-effect*) случайных тепловых возмущений, приводящих к постепенной потере памяти в гистерезисных системах. В предположении, что каждый домен имеет температуру фазового перехода $T_c \pm \delta T_c$, где знаки плюс и минус соответствуют нагреву и охлаждению соответственно, пространственные распределения T_c и δT_c служат параметрами модели.

Рассматривался детерминированный вход, который в начальный момент времени $t = 0$ принимает некоторое постоянное значение u . В детерминированной ситуации выход $x(t)$ оставался бы также постоянным для всех $t > 0$. Далее, на постоянный вход u накладываются тепловые возмущения или шум, описываемые случайным процессом X_t . Выход представляет собой случайный процесс

$$x_t = \int \int_{\alpha > \beta} \Gamma[z_0(\gamma)](u + X_t) d\alpha d\beta. \quad (3.8)$$

Параметры шума можно определить следующим образом. Время переключения для элементарных гистеронов связано с параметрами тепловых возмущений, которые не наблюдаются непосредственно. Статистические характеристики времени переключения гистерезисной системы наблюдаются экспериментально. Следовательно, может быть решена задача идентификации параметров шума.

Общие выражения для спектральной плотности выходного сигнала модели КСР с некоррелированным входным сигналом выведены в [78], причем для частного случая равномерной плотности Прейзаха автокорреляционная функция $\{C(t)\}$ убывает по степенному закону $\sim t^{-3}$, соответствующему логарифмической низкочастотной расходимости второй производной спектра. Также получено более простое выражение для симметричных моделей КСР, которое подробно обсуждается в [79]; показано, что долговременные «хвосты» $1/f$ являются общими чертами этого класса моделей [77].

В дальнейшем исследования моделей, основанных на процессах Орнштейна—Уленбека, были распространены на негауссовы входные процессы, с акцентом на долгосрочное корреляционное затухание отклика системы [175]. Численное моделирование показывает, что аналитические выражения, полученные для автокорреляционных функций и спектральных плотностей мощности модели Прейзаха с некоррелированными входными данными, асимптотически эквивалентны экспоненциально убывающим корреляциям внешнего воздействия. Как следствие, механизмы, вызывающие шум $1/f$ в системах с гистерезисными звеньями в виде преобразователя КСР с некоррелированными входными данными, остаются в силе и при наличии быстро затухающих входных корреляций. Кроме того, автокорреляционные функции и спектральные плотности мощности монотонно уменьшаются независимо от выбора входного сигнала и меры Прейзаха.

В [154] предполагается, что система состоит из большого числа абстрактных гистеронов, в которых изменение внешнего управляющего параметра (магнитного поля) может привести к переходам между двумя состояниями s_1 и s_2 . Состояние гистерона частицы характеризуется значением $+1$ или -1 случайной величины (направлением намагничивания). Переходы между ними регулируются двумя вспомогательными случайными величинами, отвечающим инверсии $s_2 \rightarrow s_1$ и $s_1 \rightarrow s_2$. Метод позволяет вычислить распределение вероятностей и, следовательно, математическое ожидание числа частиц в состоянии s_1 и s_2 как для возрастающих, так и для убывающих значений параметров, т. е. могут быть определены кривые гистерезиса переходов. Получается, что критические точки управляющего параметра являются точками Маркова, которые определяют стохастическую эволюцию процесса. Было показано, что ветви петли гистерезиса сходятся к фиксированным предельным кривым, когда количество циклов управляющего параметра между двумя последовательными точками разворота достаточно велико. Было доказано, что процесс намагничивания становится стационарным с увеличением числа циклов намагничивания.

Достаточно общий и математически абстрактный подход, основанный на методе функционального интегрирования в колмогоровских пространствах, предложен в [27]. Этот подход имеет широкую область возможного применения, поскольку мера μ генерируется марковским стохастическим процессом.

Во многих прикладных задачах, связанных с моделированием гистерезисных эффектов, где априори предполагается доменная структура носителей гистерезисных свойств (многократное перемагничивание ферромагнитных составляющих электромагнитных систем, поляризация сегнетоэлектрика в зависимости от напряженности электрического поля, зависимость занятости от цены на монотоварных рынках и др.), приходится сталкиваться с необходимостью учитывать неопределенности в реакциях отдельных доменов на внешнее воздействие.

Естественное обобщение КСР, учитывающее стохастические флуктуации элементарных носителей гистерезиса, приведено в [2]. В указанной работе априори предполагалось, что пороговые числа каждого неидеального реле имеют заданную функцию распределения (при этом носители левого и правого пороговых чисел не пересекаются). Приводится определение и устанавливаются основные свойства стохастического преобразователя неидеального реле и систем неидеальных реле (конечных и континуальных), соединенных параллельно: управляемость, монотонность по входам и начальным состояниям, и некоторые другие.

Перечисленные свойства преобразователя открывают возможности использования его для моделирования гистерезисных связей в системах, где не предполагается детерминированность параметров гистерезисных преобразователей

Неидеальное реле со стохастическими параметрами определяется следующим образом: $R[p_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0]$. Здесь $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ — случайные величины с известным законом распределения. При этом величины $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$ непрерывны (см. рис. 5, а)).

Следуя классическому определению, *допустимыми* для стохастического реле являются непрерывные при $t \geq t_0$ входы $u(t)$, а пространство возможных состояний состоит из пар $\Omega = \Omega(\{-1, 1\}, 0 \leq p(t) \leq 1, u \in \mathbb{R})$.

Переменным состоянием преобразователя является пара $\{u(t), p(t)\}$, а выходом является случайный процесс $R[p_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0]u(t)$, принимающий значение $+1$ с вероятностью $p(t)$ и значение -1 с вероятностью $(1 - p(t))$, т. е.

$$P\{R[p_0, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0]u(t_0) = 1\} = p_0. \quad (3.9)$$

Вторая компонента определяется соотношением $p(t) \equiv p[p_0, u(\tau)|_{t_0 \leq \tau \leq t}](t)$ во всякий момент времени. На монотонных входах вероятность того, что реле находится во включенном состоянии $p[p_0, u(\tau)|_{t_0 \leq \tau \leq t}](t)$ при $t \geq t_0$, равна

$$p[p_0, u(\tau)|_{t_0 \leq \tau \leq t}](t) = \begin{cases} \max \left[p_0, \int_{-\infty}^{u(t)} \varphi_{\beta}(u) du \right], & \text{если } u(t) \text{ возрастает,} \\ \min \left[p_0, \int_{-\infty}^{u(t)} \varphi_{\alpha}(u) du \right], & \text{если } u(t) \text{ убывает.} \end{cases} \quad (3.10)$$

На кусочно-монотонных входах оператор стохастического реле R определяется с помощью полугруппового тождества: предположим, что имеет место разбиение области определения входа на участки монотонности:

$$[t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n] \cup [t_n, t]. \quad (3.11)$$

На каждом из них оператор определен соотношением (3.10). Состояние в моменты времени, соответствующие изменению монотонности, играют роль начальных состояний для следующих временных промежутков.

Рассмотрены основные свойства дискретной и непрерывной систем реле, параметры которых трактуются как случайные величины, при этом выход системы реле представляется как случайный процесс. Исследована корректность определения, в частности, установлена независимость выхода (случайного процесса) от способа дискретизации в рамках предельного перехода от конечной к непрерывной системе неидеальных реле, а также установлена управляемость и монотонность (в рамках соответствующего определения) стохастического аналога преобразователя КСР [2].

Преобразователь, соответствующий конечной системе неидеальных реле, определяется схемой, представленной на рис. 5. Однако выход определяется как случайный процесс, равный взвешенной сумме случайных процессов, определяемых входно-выходными соответствиями стохастических реле:

$$\xi_N[p(t), \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0, u(t)] = \sum_{j=1}^N \mu_j R[p_0, \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, x_0, t_0]u(t). \quad (3.12)$$

Предельный переход, когда число стохастических реле стремится к бесконечности, а весовые коэффициенты стремятся к нулю пропорционально элементам площади на плоскости параметров (α_j, β_j) , приводит к определению стохастического аналога преобразователя КСР:

$$\xi_N[p(t), \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0, u(t)] = \sum_{j=1}^N R[p_0, \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, x_0, t_0]u(t) \Delta \alpha_j \Delta \beta_j. \quad (3.13)$$

Стохастическим оператором КСР назовем преобразователь, сопоставляющий всякому непрерывному входу двухпараметрический случайный процесс, являющийся пределом сумм (3.13) при стремлении диагонали

$$d(\gamma_j) = \max_{1 \leq j \leq N} \sqrt{(\Delta \alpha_j)^2 + (\Delta \beta_j)^2} \quad (3.14)$$

прямоугольника γ_j к нулю.

Переменное состояние стохастического преобразователя КСР есть упорядоченная пара $\{u(t), p[p_0, \alpha, \beta, u(t)]\}$, вторая компонента которой есть вероятность того, что инфинитезимальное реле с пороговыми числами α и β находится во включенном состоянии.

В работе [2] сформулированы и доказаны следующие теоремы.

Теорема 3.1. *Случайный процесс, определенный равенством (3.15), инвариантен в смысле сходимости порядка p ($p > 1$) по отношению к последовательности разбиения множества $\mathcal{D}_\delta = \{(\alpha, \beta): \alpha < \beta - \delta\}$.*

Теорема 3.2. *Математическое ожидание и дисперсия случайного процесса $\Xi[p(t), \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, x_0, t_0, u(t)]$ определяются соотношениями*

$$M\{\Xi[p(t), \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0, u(t)]\} = \iint_{\alpha < \beta - \delta} p[p_0, \alpha, \beta, x_0, t_0, u(t)] d\alpha d\beta, \quad (3.16)$$

$$D\{\Xi[p(t), \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0, u(t)]\} = \iint_{\alpha < \beta - \delta} p[p_0, \alpha, \beta, x_0, t_0, u(t)] \{1 - p[p_0, \alpha, \beta, x_0, t_0, u(t)]\} d\alpha d\beta. \quad (3.17)$$

Теорема 3.3. *Пусть на промежутке $[t_0, T]$ имеет место равномерная сходимость последовательности кусочно-монотонных функций $\{u_n(t)\}$, где $n = 1, 2, \dots$, к функции $u_*(t)$:*

$$\forall t \in [t_0, T] \quad [u_n(t) \Rightarrow u_*(t)]. \quad (3.18)$$

Тогда выход представляет собой случайный процесс, сходящийся по распределению к случайному процессу

$$x_*(t) = \Xi[p(t), \hat{\alpha}, \hat{\beta}, x_0, t_0, u_*(t)]. \quad (3.19)$$

Эти теоремы открывают возможности к имплементации стохастического преобразователя КСР в модели динамических систем с носителями гистерезисных свойств с флуктуирующими параметрами.

3.6. Динамика систем с оператором КСР. Динамические свойства систем с конструктивными гистерезисными нелинейностями радикально отличается от динамики традиционных систем с функциональными нелинейностями. Это обуславливается расширением фазового пространства систем за счет пространства состояний гистерезисного преобразователя. В частности, пространство состояний преобразователя КСР состоит из характеристических функций полуплоскости $\alpha < \beta$, а соотношение «вход–состояние» этого преобразователя является частью динамических систем с гистерезисными нелинейностями. Особенности динамики систем с преобразователем КСР нашли отражение в работах [16, 25, 35, 144, 160, 167]. В первых двух из них рассматривается достаточно простая система, описывающая вынужденные колебания ферромагнитного шарика с малым вязким трением в магнитном поле:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = A \sin(\Omega t) + E\Gamma[x(t)], \quad (3.20)$$

где γ — логарифмический декремент затухания, ω — собственная частота осциллятора, Ω — частота внешнего гармонического воздействия, E — величина, пропорциональная градиенту внешнего магнитного поля, $\Gamma[x(t)]$ — выход преобразователя КСР.

Основной результат этой статьи связан с возникновением хаотических колебаний в определенном интервале значений градиента внешнего магнитного поля. Иными словами, возникновение хаоса в указанной системе обуславливается исключительно проявлением внутренней структуры гистерезисного слагаемого, формализуемого преобразователем КСР.

Отметим, что проблема идентификации динамических режимов (с точки зрения разделения на регулярную и хаотическую динамику) является достаточно сложной: основные методы базируются на вычислении ляпуновских показателей. Арсенал таковых методов достаточно широк: алгоритмы Бенеттина, Кантца, Вольфа, Розенштейна и др. Однако все указанные алгоритмы требуют гладкости правых частей уравнений. В ситуации, когда динамика носителей гистерезисных свойств формализуется феноменологической моделью с негладкими правыми частями, удовлетворительные (но не всегда точные) результаты вычислений ляпуновских показателей могут быть получены путем аппроксимации негладких нелинейностей гладкими функциями.

Характеристические показатели Ляпунова определяются как собственные значения матрицы инфинитезимального возмущения траектории в фазовом пространстве. Их обычно рассматривают как меру чувствительности системы по отношению к малым изменениям начальных условий. Старший показатель часто используется для разграничения хаотического и детерминированных режимов [190].

В работе [177] предложен метод вычисления ляпуновских показателей в системах с различными видами моделей гистерезисных нелинейностей. Приведем краткое описание указанного метода применительно к системам с преобразователем КСР.

Пусть динамическая система описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad (3.21)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

В общем случае преобразователь КСР не имеет даже слабой производной Гато. Однако существуют такие входы и отвечающие им направления (в функциональном пространстве), для которых аналог производной Гато имеет место. Ниже описываются соответствующие конструкции.

Определение. *Односторонними производными по параметру входа в момент времени $t \geq t_0$ преобразователя КСР назовем функции, определяемые правилами:*

$$D_{u(t)}^+ P[z_0(\alpha, \beta, t), u_0, t_0]u(t) = \lim_{\mu \rightarrow +0} \frac{P[z(\alpha, \beta, t), u(t), t] \delta u(\tau) \big|_{\tau=1} - P[z_0(\alpha, \beta, t), u_0, t_0]u(t)}{\mu}, \quad (3.22)$$

$$D_{u(t)}^- P[z_0(\alpha, \beta, t), u_0, t_0]u(t) = \lim_{\mu \rightarrow -0} \frac{P[z(\alpha, \beta, t), u(t), t] \delta u(\tau) \big|_{\tau=1} - P[z_0(\alpha, \beta, t), u_0, t_0]u(t)}{\mu}, \quad (3.23)$$

где $\delta u(\tau) = u(\tau) + \mu \varphi(\tau)$ — вариация входа $u(\tau)$. Здесь $\varphi(\tau)$ — произвольная непрерывная монотонно возрастающая функция, определенная на $0 \leq \tau \leq 1$ и принимающая на границах значения $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 1$.

В простейшей ситуации, когда носитель меры преобразователя КСР сосредоточен в треугольнике $\{(\alpha, \beta): \alpha \in [-L, L], \beta \in [\alpha, L]\}$, введенные выше производные по параметру допускают аналитическое представление.

Выберем некоторое начальное условие $\mathbf{x}_0$, которое подвергается возмущению $\delta \mathbf{x}_i^{(0)}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Рассмотрим разбиение промежутка времени $[t_0, T] = \bigcup_{j=1}^m [t_{j-1}, t_j]$. Для некоторого фиксированного $j \in [1, m]$ через малый промежуток времени $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ система перейдет из состояния $\mathbf{x}^{(j-1)} = \mathbf{x}(t_{j-1})$ в состояние $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}(t_j)$, причем $\delta \mathbf{x}_i^{(j)} = \delta \mathbf{x}_i(j)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Алгоритм вычисления спектра показателей Ляпунова заключается в последовательности следующих шагов.

Во-первых, вычисляется очередное значение $\mathbf{x}^{(j)}$. Далее находим матрицу Якоби $\Phi_{\Delta t_j}(\mathbf{x}^{(j-1)})$, с использованием которой вычисляются новые возмущения $\mathbf{y}_i^{(j)} = \Phi_{\Delta t_j}(\mathbf{x}^{(j-1)}) \delta \hat{\mathbf{x}}_i^{(j-1)}$. При этом для линеаризации гистерезисного слагаемого используются уравнения (3.22)–(3.23) с учетом информации о поведении входа на каждом из интервалов.

Для сохранения точности вычислений в связи со значительно отличающимися по порядку величины смещениями от невозмущенной траектории в различных пространственных направлениях применяется процедура ортогонализации Грама–Шмидта:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_1^{(j)} &= \mathbf{y}_1^{(j)}, \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_1^{(j)} &= \mathbf{x}_1^{(j)} / |\mathbf{x}_1^{(j)}|, \\ &\dots, \\ \delta \mathbf{x}_i^{(j)} &= \mathbf{y}_i^{(j)} - (\mathbf{y}_i^{(j)}, \hat{\mathbf{x}}_1^{(j)}) \hat{\mathbf{x}}_1^{(j)} - \dots - (\mathbf{y}_i^{(j)}, \hat{\mathbf{x}}_{i-1}^{(j)}) \hat{\mathbf{x}}_{i-1}^{(j)}, \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_i^{(j)} &= \delta \mathbf{x}_i^{(j)} / |\delta \mathbf{x}_i^{(j)}|. \end{aligned}$$

Выполнение вышеописанных шагов для последовательности точек разбиения $t_1, t_2, \dots, t_j, \dots, t_J$, где $j = 1, 2, \dots, J$, приводит к оценке спектра Ляпунова

$$\lambda_i = \frac{1}{T} \sum_{j=1}^J \ln |\delta \mathbf{x}_i^{(j)}|. \quad (3.24)$$

Для применения рассмотренного алгоритма к системам с гистерезисными нелинейностями предлагается следующая модификация. Для определенности положим, что правая часть $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), \dots, F_n(\mathbf{x}))$ рассматриваемой системы дифференциальных уравнений (3.21) содержит гистерезисное слагаемое в первой компоненте набора, $F_1(\mathbf{x})$. В вычислительном цикле на каждой итерации вводится дополнительная проверка условия $\dot{x}_1 = 0$. Заметим, при численной реализации алгоритма указанное условие означает, что произведение

$$((x_1)_k - (x_1)_{k-1}) ((x_1)_{k+1} - (x_1)_k)$$

становится отрицательным — функция $x_1(t)$ достигает локального экстремума. Здесь индекс k соответствует дискретизированным значениям первой компоненты на сеточном множестве в фазовом пространстве системы. При справедливости условий $\dot{x}_1 = 0$ и $\ddot{x}_1 \neq 0$ в некоторой точке $\mathbf{x}_k$ следует закончить вычисление смещений $\delta \hat{\mathbf{x}}^{(m)}$ и осуществить переход к очередной итерации вычислительного цикла, приняв $\mathbf{x}_k$ за начальную точку фазовой траектории (см. рис. 6). На рис. 6 приведена иллюстрация к реализации модификации алгоритма Бенеттина для вычисления показателей Ляпунова: в точке $\mathbf{x}^*$, геометрически совпадающей с точкой траектории, в которой первая компонента претерпевает изменение монотонности, накопление сумм приостанавливается и, следуя предложенной модификации, возобновляется на новом участке монотонности.

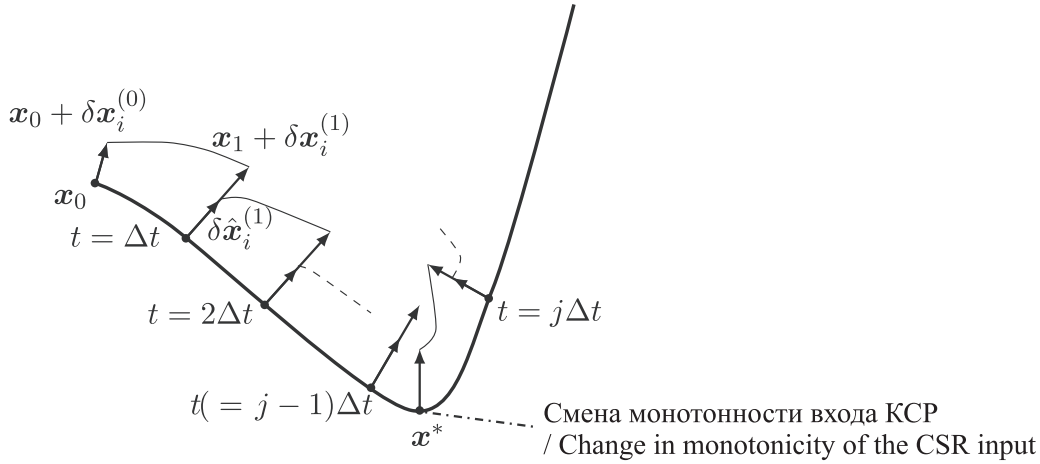


Рис. 6. Схема вычисления показателей Ляпунова с помощью численного решения уравнений динамики. Здесь $\mathbf{x}_0$ — некоторая исходная точка фазового пространства, $\mathbf{x}_k$ — точка, в которой выполняется условие $\dot{x}_1 = 0$. Траектории системы, начальные значения которой подвергнуты возмущениям, изображены тонкими линиями.

FIG. 6. Scheme of calculating Lyapunov exponents using numerical solution of the equations of dynamics. Here $\mathbf{x}_0$ is some initial point of the phase space, $\mathbf{x}_k$ is the point at which the condition $\dot{x}_1 = 0$ is satisfied. The trajectories of the system, the initial values of which are subjected to perturbations, are depicted by thin lines.

Отметим также работы [144, 152, 160], в которых рассматривались системы с преобразователем КСР, находящимся под знаком производной. В силу недифференцируемости (в общем случае) этого преобразователя под решениями указанных систем понималась абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая системе почти всюду. Центральный вопрос этих работ был связан с устойчивостью периодических решений в условиях периодичности правых частей. Приведены условия, формализуемые в виде неравенств и ограничений на правую часть, гарантирующие

существование устойчивого периодического решения. Эти результаты оказались полезны в задаче моделирования увлажнения (т. е. динамике влагосодержания пористой среды) [160].

Динамика потоков воды через ненасыщенные почвы (*water flow through unsaturated soil*) в гидродинамике с достаточной степенью точности описывается дифференциальными уравнениями, содержащими гистерезисные нелинейности под знаком производной по времени:

$$\frac{d}{dt}(ax(t) + \Gamma[x(t)]) = f(x(t), t), \quad (3.25)$$

где $a > 0$ — const, $\Gamma[x(t)]$ — оператор КСР, $f(x(t), t)$ — неоднородное слагаемое, характеризующее источники инфильтрационных и дренажных потоков (*infiltration and drainage flows*). В этом уравнении $\Gamma[x(t)]$ характеризует гистерезисную зависимость между капиллярно-сорбционным потенциалом (*matric potential*) и содержанием воды в почве (*water content*). Показано, что оператор $\Gamma[\cdot]$ дифференцируем по исходным данным для общего класса решений, предложен алгоритм вычисления его производной, проведен анализ устойчивости периодических решений [152]. Заметим, что вопросы существования решения и свойства решений дифференциальных уравнений с оператором КСР под знаком производной по времени детально исследованы в работах [117, 119].

3.7. Биология, медицина и общественные науки. Широкое применение моделей с гистерезисом в биологических науках и в медицине обусловлено принципиальной сложностью и многогранностью исследуемых объектов в науках о живых системах [56, 61, 69, 157, 159]. Так, в работе [159] адаптивное поведение биологических сообществ исследуется в рамках классической модели Лотки—Вольтерры с введенной гистерезисной нелинейностью в виде преобразователя КСР. Отмечается, что учет зависимости параметров от истории состояния переменных открывает перспективы для построения более детальных моделей адаптации в моделях конкуренции. При этом авторы указывают на сложности, связанные с идентификацией параметров гистерезисных блоков. Динамика популяций на примере бактерий, обладающих двумя фенотипами, рассмотрена в [69]. В качестве нелинейного слагаемого в уравнениях населенности среды выбраны неидеальные реле. Обзор [122] дает представление о применении моделей гистерезиса не только в биологических, но и в макроэкономических, гидрологических и некоторых других задачах (см. также [67, 121, 134]).

В ряде работ известная эпидемиологическая модель SIR, в которой популяция разделяется на группы восприимчивых, инфицированных или выздоровевших представителей (*susceptible, infectious, recovered*, введено в [112]) усовершенствована с учетом предположения о влиянии истории эпидемиологического процесса на его динамику [76, 115, 158, 166]. В недавней работе [115] предполагается, что уровень вакцинации меняется в ответ на динамику эпидемии. Авторы смоделировали адаптивную реакцию индивидуума с помощью двухпорогового переключателя (неидеального реле). Как следствие, поведение эпидемиологического процесса восприимчивой популяции в ответ на воздействие со стороны возбудителя моделируется в рамках модели Прейзаха. Показано, что произвольная траектория динамической системы сходится либо к эндемическому равновесию, либо к периодической орбите. Тем не менее, при дополнительных естественных предположениях периодический аттрактор не реализуется в реальных системах, и обеспечивается сходимостью каждой траектории к конечному состоянию равновесия. Роль моделей поведения популяции, зависящих от текущего состояния эпидемии на основе модели Прейзаха, подчеркивается в работе [166]. В этой работе показано, что более широкий разброс порогов различных групп населения приводит к значительному увеличению пика инфекции во время эпидемии.

В ряду исследований моделей биологических процессов с гистерезисными нелинейностями особый интерес представляют недавние работы [61, 100]. В этих работах предлагается рассматривать дыхательный орган (легкие) как вязко-упругую деформируемую пористую среду, в которой соотношение давление/объем носит гистерезисный характер и может быть описано посредством модели КСР. Процесс дыхания с термодинамической точки зрения представляет собой изотермический периодический процесс с газообменом между внутренней и внешней частями тела. При этом такая модельная система основана на принципах сохранения массы и импульса. В предположении о малости деформаций получаемая система имеет структуру, аналогичную модели

ненасыщенных деформируемых пористых сред. Основной результат работы состоит в доказательстве существования периодических решений для любой возбуждающей силы с заданным периодом.

Проблеме динамики популяции в условиях неоднозначной (гистерезисной) связи между параметрами системы посвящены работы [84, 86, 87]. Также отметим интересные работы [11, 12], где устанавливаются свойства решений параболических уравнений с оператором неидеального реле в правой части. Полученные там результаты применимы к задачам моделирования химических, биологических процессов.

Отметим также, что, так или иначе, интерес к гистерезисным нелинейностям в рамках моделей биологических систем связан с наличием у таких нелинейностей свойств эргодичности, что, несомненно, имеет место практически в любых биопроцессах.

Применение гистерезисных эффектов (в том числе и преобразователя КСР) в общественных науках, в частности, в экономике, дало исследователям более обоснованные методы описания микро- и макроэкономических процессов. Несомненное лидерство в этой области принадлежит профессору Роду Кроссу. Отдельно отметим две работы [48, 50]. В первой из них рассматриваются макроэкономические процессы. Как указывают авторы, такие процессы часто концептуализируются как «потoki», и здесь может быть проведена аналогия с физическими потоками. Однако большинству экономических процессов присуща необратимость, что, в свою очередь, игнорируется в рамках таких аналогий. Авторами предлагается более адекватная аналогия, рассматривающая экономические потоки как потоки через пористую среду. Эта новая концептуальная основа включает в себя важные функции, такие как необратимость и гетеростазис, за счет того, что для описания процессов в пористых системах используются модели гистерезиса. В рамках представленной концепции авторами выведена простая модель, которую можно использовать для получения качественных результатов. Во второй работе показано, что гипотеза естественного уровня безработицы, согласно которой равновесная безработица определяется только структурными переменными, неверна. Как демонстрирует автор, такая гипотеза неправдоподобна и несовместима с наблюдаемыми фактами. Вместо этого, автор предлагает рассматривать различные гистерезисные модели, в частности, модель КСР с ее выборочным свойством «стирания» памяти. В рамках таких предположений анализируются данные о влиянии гистерезиса на процесс выпуска продукции, а также на безработицу. Кроме этого, обсуждаются эффекты такого подхода для макроэкономической политики.

Еще одной работой, тесно связанной с экономикой, но вводящей фундаментальные аспекты нового класса гистерезисных операторов, является [49]. В этой работе изучается новый тип гистерезисной нелинейности, возникающий в нестационарных системах — нестационарная модель КСР. В стандартную модель КСР внесены поправки, позволяющие использовать пороговые значения, зависящие от состояния или времени. В статье представлена простая нестационарная модель КСР, основанная на одной экономической модели инвестиций, рассмотрены основные свойства этой модели, включая конечные приближения. Схожие конструкции использовались также в работе [4].

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе приведен обзор работ, связанных с формализацией гистерезисных зависимостей посредством модели КСР. Приводятся определения и основные свойства преобразователя КСР, рассмотрены его основные обобщения, даются многочисленные примеры использования этого оператора в математическом моделировании процессов в естественно-научных областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борзунов С. В., Семенов М. Е., Сельвесюк Н. И., Мелешенко П. А. Гистерезисные преобразователи со случайными параметрами // Мат. модел. — 2019. — 31, № 7. — С. 109–126. — DOI: 10.1134/S0234087919070074.
2. Борзунов С. В., Семенов М. Е., Сельвесюк Н. И., Мелешенко П. А., Соловьев А. М. Стохастическая модель гистерезисного преобразователя с доменной структурой // Мат. модел. — 2021. — 33, № 9. — С. 60–86. — DOI: 10.20948/mm-2021-09-05
3. Красносельский М. А., Покровский А. В. Системы с гистерезисом. — М.: Наука, 1983.

4. Красносельский А. М., Покровский А. В. Диссипативность нерезонансного маятника с ферромагнитным трением// Автомат. и телемех. — 2006. — 2. — С. 57–69.
5. Медведский А. Л., Мелешенко П. А., Нестеров В. А., Решетова О. О., Семенов М. Е., Соловьев А. М. Неустойчивые колебательные системы с гистерезисом: задачи стабилизации и управления// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2020. — 4. — С. 58–82.
6. Abdullah N., Hasan N. The implementation of water alternating (WAG) injection to obtain optimum recovery in Cornea Field, Australia// J. Petrol. Explor. Product. Techn. — 2021. — 11. — С. 1475–1485. — DOI: 10.1007/s13202-021-01103-7.
7. Adeyemo T., Kramer I., Levy G. J., Mau Y. Salinity and sodicity can cause hysteresis in soil hydraulic conductivity// Geoderma. — 2022. — 413. — 115765.
8. Adly A. A., Mayergoyz I. D. Accurate modeling of vector hysteresis using a superposition of Preisach-type models// IEEE Trans. Magnet. — 1997. — 33. — С. 4155–4157.
9. Alt H. W. On the thermostat problem// Control Cybernet. — 1985. — 14. — С. 171–193.
10. Andreev M., Suvorov A., Ruban N., Ufa R., Gusev A., Askarov A., Kievets A. S. Development and research of mathematical model of current transformer reproducing magnetic hysteresis based on Preisach theory// IET Gener. Transm. & Distrib. — 2020. — 14. — С. 2720–2730.
11. Apushkinskaya D. E., Uraltseva N. N. Free boundaries in problems with hysteresis// Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 2015. — 373, № 2050. — 20140271. — DOI: 10.1098/rsta.2014.0271.
12. Apushkinskaya D. E., Uraltseva N. N. On regularity properties of solutions to the hysteresis-type problem// Interfaces and Free Bound. — 2015. — 17, № 1. — С. 93–115. — DOI: 10.4171/ifb/335.
13. Azzerboni B., Cardelli E., Della Torre E., Finocchio G. Reversible magnetization and Lorentzian function approximation// J. Appl. Phys. — 2003. — 93. — С. 6635–6637.
14. Bagagiolo F. Dynamic programming for some optimal control problems with hysteresis// Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2002. — 9. — С. 149–174.
15. Bagagiolo F. Viscosity solutions for an optimal control problem with Preisach hysteresis nonlinearities// ESAIM: Control Optim. Calc. Var. — 2004. — 10. — С. 271–294.
16. Balanov Z., Krawcewicz W., Rachinskii D., Zhezherun A. Hopf bifurcation in symmetric networks of coupled oscillators with hysteresis// J. Dynam. Differ. Equ. — 2012. — 24. — С. 713–759.
17. Barker J. A., Schreiber D. E., Huth B. G., Everett D. H. Magnetic hysteresis and minor loops: Models and experiments// Proc. R. Soc. London Ser. A. Math. Phys. Sci. — 1983. — 386. — С. 251–261.
18. Baronti F., Femia N., Saletti R., Visone C., Zamboni W. Hysteresis modeling in Li-ion batteries// IEEE Trans. Magnet. — 2014. — 50, № 11. — С. 1–4.
19. Baronti F., Femia N., Saletti R., Visone C., Zamboni W. Preisach modelling of lithium-iron-phosphate battery hysteresis// J. Energy Storage. — 2015. — 4. — С. 51–61. — DOI: 10.1016/j.est.2015.09.004.
20. Bartic A. T., Wouters D. J., Maes H. E., Rickes J. T., Waser R. M. Preisach model for the simulation of ferroelectric capacitors// J. Appl. Phys. — 2001. — 89, № 6. — С. 3420–3425.
21. Belbas S., Mayergoyz I. Dynamic programming for systems with hysteresis// Phys. B. — 2001. — 306. — С. 200–205.
22. Belbas S. A., Mayergoyz I. D. Optimal control of dynamical systems with Preisach hysteresis// Int. J. Non-Linear Mech. — 2002. — 37. — С. 1351–1361.
23. Belhaq M., Bichri A., Der Hogapian J., Mahfoud J. Effect of electromagnetic actuations on the dynamics of a harmonically excited cantilever beam// Int. J. Non-Linear Mech. — 2011. — 46. — С. 828–833.
24. Bermúdez A., Dupré L., Gómez D., Venegas P. Electromagnetic computations with Preisach hysteresis model// Finite Elem. Anal. Design. — 2017. — 126. — С. 65–74.
25. Bermúdez A., Gúmez D., Venegas P. Mathematical analysis and numerical solution of models with dynamic Preisach hysteresis// J. Comput. Appl. Math. — 2020. — 367. — С. 112452.
26. Bertotti G. Hysteresis in magnetism: for physicists, materials scientists, and engineers. — New York: Academic Press, 1998.
27. Bertotti G., Mayergoyz I. D., Basso V., Magni A. Functional integration approach to hysteresis// Phys. Rev. E. — 1999. — 60, № 2. — С. 1428–1440.
28. Bodale I., Stancu A. Reversible and irreversible processes in drying and wetting of soil// Materials. — 2020. — 13, № 1. — С. 135.
29. Bombara D., Fowzer S., Zhang J. Compliant, large-strain, and self-sensing twisted string actuators// Soft Robotics. — 2022. — 9. — С. 72–88.
30. Borzunov S. V., Semenov M. E., Sel'vesyuk N. I., Meleshenko P. A. Generalized play-operator under stochastic perturbations: an analytic approach// J. Vibr. Engrg. Techn. — 2021. — 9. — С. 355–365. — DOI: 10.1007/s42417-020-00234-1

31. Botkin N. D., Brokate M., El Behi-Gornostaeva E. G. One-phase flow in porous media with hysteresis// Phys. B. Cond. Matt. — 2016. — 486. — C. 183–186.
32. Brokate M. On a characterization of the Preisach model for hysteresis// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1990. — 83. — C. 153–163.
33. Brokate M., Friedman A. Optimal design for heat conduction problems with hysteresis// SIAM J. Control Optim. — 1989. — 27, № 4. — C. 697–717. — DOI: 10.1137/032703.
34. Brokate M., Krejčí P. Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2013. — 18, № 2. — C. 331–348.
35. Brokate M., Pokrovskii A., Rachinskii D., Rasskazov O. Differential equations with hysteresis via a canonical example// Б сб.: «The Science of Hysteresis. Vol. I. Mathematical Modeling and Applications». — Amsterdam: Academic Press, 2006. — C. 125–291. — DOI: 10.1016/B978-012480874-4/50005-1.
36. Brokate M., Sprekels J. Hysteresis and phase transition. — New York: Springer, 1996.
37. Cacciola P., Calì I., Fiorini N., Occhipinti G., Spina D., Tombari A. Seismic response of nonlinear soil-structure interaction systems through the Preisach formalism: the Messina Bell Tower case study// Bull. Earthquake Engng. — 2022. — 20. — C. 3485–3514.
38. Cacciola P., Tombari A. Steady state harmonic response of nonlinear soil-structure interaction problems through the Preisach formalism// Soil Dynam. Earthquake Engng. — 2021. — 144. — C. 106669.
39. Carboni B., Lacarbonara W. Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device: experiments and computations// Nonlinear Dynam. — 2016. — 83. — C. 23–39.
40. Carboni B., Lacarbonara W., Brewick P., Masri S. Dynamical response identification of a class of nonlinear hysteretic systems// J. Intel. Mater. Syst. Struct. — 2018. — 29, № 13. — C. 2795–2810.
41. Charalampakis A. E. The response and dissipated energy of Bouc–Wen hysteretic model revisited// Archive Appl. Mech. — 2015. — 85. — C. 1209–1223.
42. Chatterjee S., Kumar S., Gaidhane A., Dabhi C. K., Chauhan Y. S., Amrouch H. Ferroelectric FDSOI FET modeling for memory and logic applications// Solid-State Electron. — 2023. — 200. — C. 108554.
43. Chen B., Timoshin S. Optimal control of a population dynamics model with hysteresis// Acta Math. Sci. — 2022. — 42B(1). — C. 283–298.
44. Chladná Z., Kopfová J., Rachinskii D., Rouf S. C. Global dynamics of SIR model with switched transmission rate// J. Math. Biol. — 2020. — 80. — C. 1209–1233.
45. Chojecki P., Walters G., Forrester Z., Nishida T. Preisach modeling of imprint on hafnium zirconium oxide ferroelectric capacitors// J. Appl. Phys. — 2021. — 130. — C. 094102.
46. Colli P., Grasselli M., Sprekels J. Automatic control via thermostats of a hyperbolic Stefan problem with memory// Appl. Math. Optim. — 1999. — 39. — C. 229–255. — DOI: 10.1007/s002459900105.
47. Cottone F., Vocca H., Gammaitoni L. Nonlinear energy harvesting// Phys. Rev. Lett. — 2009. — 102. — C. 080601.
48. Cross R. Unemployment: natural rate epicycles or hysteresis?// Eur. J. Econom. Econom. Polic. Intervent. — 2014. — 11, № 2. — C. 136–148.
49. Cross R., Krasnosel'skii A. M., Pokrovskii A. V. A time-dependent Preisach model// Phys. B. Cond. Matt. — 2001. — 306, № 1. — C. 206–210.
50. Cross R., McNamara H., Pokrovskii A., Rachinskii D. A new paradigm for modelling hysteresis in macroeconomic flows// Phys. B. Cond. Matt. — 2008. — 403, № 2-3. — C. 231–236.
51. Curran M., Gurevich P., Tikhomirov S. Recent advances in reaction-diffusion equations with non-ideal relays// Б сб.: «Control of Self-Organizing Nonlinear Systems. Understanding Complex Systems». — Springer, 2016. — DOI: 10.1007/978-3-319-28028-8_11.
52. Dafri M., Ladjimi A., Mendaci S., Babouri A. Phenomenological model of the temperature dependence of hysteresis based on the Preisach model// J. Superconduct. Nov. Magnet. — 2021. — 34. — C. 1453–1458.
53. Daqaq M. F., Masana R., Erturk A., Dane Q. D. On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting: A critical review and discussion// Appl. Mech. Rev. — 2013. — 66. — C. 040801.
54. Darbenas Z., Van der Hout R., Oliver M. Long-time asymptotics of solutions to the Keller–Rubinow model for Liesegang rings in the fast reaction limit// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 2022. — 39, № 6. — C. 1413–1458. — DOI: 10.4171/aihpc/34.
55. Darbenas Z., Van der Hout R., Oliver M. Conditional uniqueness of solutions to the Keller–Rubinow model for Liesegang rings in the fast reaction limit// J. Differ. Equ. — 2023. — 347. — C. 212–245. — DOI: 10.1016/j.jde.2022.11.038.
56. Das S. G., Krug J., Mungan M. Driven disordered systems approach to biological evolution in changing environments// Phys. Rev. X. — 2022. — 12. — C. 031040.
57. Detmann B., Krejčí P. A multicomponent flow model in deformable porous media// Math. Methods Appl. Sci. — 2019. — 42. — C. 1894–1906.

58. *Dho J., Leung C. W., Blamire M. G.* Universal time relaxation behavior of the exchange bias in ferromagnetic/antiferromagnetic bilayers// J. Appl. Phys. — 2006. — 99. — C. 033910.
59. *Di Matteo A.* Response of nonlinear oscillators with fractional derivative elements under evolutionary stochastic excitations: A Path Integral approach based on Laplace's method of integration// Probab. Engrg. Mech. — 2023. — 71. — C. 103402.
60. *Dupre L. R., Van Keer R., Melkebeek J. A. A.* Identification of the relation between the material parameters in the Preisach model and in the Jiles–Atherton hysteresis model// J. Appl. Phys. — 1999. — 85. — C. 4376–4378.
61. *Eleuteri M., Ipocoana E., Kopfová J., Krejčí P.* Periodic solutions of a hysteresis model for breathing// ESAIM Math. Model. Numer. Anal. — 2020. — 54, № 1. — C. 255–271.
62. *Enab K., Emami-Meybodi H.* Effects of diffusion, adsorption, and hysteresis on huff-n-puff performance in ultratight reservoirs with different fluid types and injection gases// Energies. — 2021. — 14. — C. 7379. — DOI: 10.3390/en14217379.
63. *Evans L. C., Portilheiro M.* Irreversibility and hysteresis for a forward-backward diffusion equation// Math. Models Methods Appl. Sci. — 2004. — 14. — 1599–1620. — DOI: 10.1142/S0218202504003763.
64. *Everett D. H.* A general approach to hysteresis. Part 3. — A formal treatment of the independent domain model of hysteresis// Trans. Faraday Soc. — 1954. — 50. — C. 1077–1096.
65. *Everett D. H., Whitton W. I.* A general approach to hysteresis// Trans. Faraday Soc. — 1952. — 48. — C. 749–757.
66. *Flynn D., Zhezherun A., Pokrovskii A., O'Kane J. P.* Modeling discontinuous flow through porous media using ODEs with Preisach operator// Phys. B. — 2008. — 403. — C. 440–442.
67. *Franzitta V., Viola A., Trapanese M.* Description of hysteresis in Lithium battery by classical Preisach model// Adv. Mater. Res. — 2012. — 622–623. — C. 1099–1103.
68. *Friedman A., Jiang L. S.* Periodic solutions for a thermostat control problem// Commun. Part. Differ. Equ. — 1988. — 13, № 5. — C. 515–550. — DOI: 10.1080/03605308808820551.
69. *Friedman G., Gurevich P., McCarthy S., Rachinskii D.* Switching behaviour of two-phenotype bacteria in varying environment// J. Phys. Conf. Ser. — 2015. — 585. — C. 012012.
70. *Gavioli C., Krejčí P.* Control and controllability of PDEs with hysteresis// Appl. Math. Optim. — 2021. — 84. — C. 829–847.
71. *Gavioli C., Krejčí P.* Phase transitions in porous media// NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. — 2022. — 29. — C. 1–55.
72. *Ghouli Z., Belhaq M.* Energy harvesting in a delay-induced parametric van der Pol–Duffing oscillator// Eur. Phys. J. Spec. Top. — 2021. — 230. — C. 3591–3598.
73. *Ghouli Z., Litak G.* Effect of high-frequency excitation on a bistable energy harvesting system// J. Vibr. Engrg. Techn. — 2023. — 11. — C. 99–106.
74. *Glashoff K., Sprekels J.* An application of Glicksberg's theorem to set-valued integral equations arising in the theory of thermostats// SIAM J. Math. Anal. — 1981. — 12, № 3. — C. 477–486. — DOI: 10.1137/0512041.
75. *Grech C., Buzio M., Pentella M., Sammut N.* Dynamic ferromagnetic hysteresis modelling using a Preisach-recurrent neural network model// Materials. — 2020. — 13. — C. 2561.
76. *Guan R., Kopfová J., Rachinskii D.* Global stability of SIR model with heterogeneous transmission rate modeled by the Preisach operator// ArXiv. — 2022. — 2201.05722.
77. *Günter R.* Hysteresis-induced long-time tails// Phys. Rev. Lett. — 2008. — 100. — C. 240602.
78. *Günter R.* Spectral properties of the Preisach hysteresis model with random input. I. General results// Phys. Rev. E. — 2008. — 77. — C. 061133.
79. *Günter R.* Spectral properties of the Preisach hysteresis model with random input. II. Universality classes for symmetric elementary loops// Phys. Rev. E. — 2008. — 77. — C. 061134.
80. *Gurevich P.* Periodic solutions of parabolic problems with hysteresis on the boundary// Discrete Cont. Dynam. Syst. A. — 2011. — 29, № 3. — C. 1041–1083. — DOI: 10.3934/dcds.2011.29.1041.
81. *Gurevich P., Jäger W.* Parabolic problems with the Preisach hysteresis operator in boundary conditions// J. Differ. Equ. — 2009. — 47, № 11. — C. 2966–3010. — DOI: 10.1016/j.jde.2009.07.033.
82. *Gurevich P., Jäger W., Skubachevskii A.* On periodicity of solutions for thermocontrol problems with hysteresis-type switches// SIAM J. Math. Anal. — 2009. — 41, № 2. — C. 733–752. — DOI: 10.1137/080718905.
83. *Gurevich P., Rachinskii D.* Asymptotics of sign-changing patterns in hysteretic systems with diffusive thresholds// Asymptot. Anal. — 2016. — 96. — C. 1–22.
84. *Gurevich P., Shamin R., Tikhomirov S.* Reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis// SIAM J. Math. Anal. — 2013. — 45, № 3. — C. 1328–1355. — DOI: 10.1137/120879889.

85. Gurevich P., Tikhomirov S. Symmetric periodic solutions of parabolic problems with discontinuous hysteresis// J. Dynam. Differ. Equ. — 2011. — 23. — С. 923–960. — DOI: 10.1007/s10884-011-9227-0.
86. Gurevich P., Tikhomirov S. Uniqueness of transverse solutions for reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis// Nonlinear Anal. — 2012. — 75. — С. 6610–6619. — DOI: 10.1016/j.na.2012.08.003.
87. Gurevich P., Tikhomirov S. Systems of reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis// Math. Bohem. — 2014. — 139. — С. 239–257. — DOI: 10.21136/MB.2014.143852.
88. Gurevich P., Tikhomirov S. Rattling in spatially discrete diffusion equations with hysteresis// Multiscale Model. Simul. — 2017. — 15, № 3. — С. 1176–1197. — DOI: 10.1137/16M106039X.
89. Gurevich P., Tikhomirov S. Spatially discrete reaction-diffusion equations with discontinuous hysteresis// Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 2018. — 35, № 4. — С. 1041–1077. — DOI: 10.1016/j.anihpc.2017.09.006.
90. Hanyga A., Seredyńska M. A dynamic model of capillary hysteresis in immiscible fluid displacement// Transp. Porous Media. — 2005. — 59, № 3. — С. 249–265. — DOI: 10.1007/s11242-004-2555-3.
91. Harb A. Energy harvesting: State-of-the-art// Renewable Energy. — 2011. — 36, № 10. — С. 2641–2654.
92. Hoffmann K.-H., Sprekels J., Visintin A. Identification of hysteresis loops// J. Comput. Phys. — 1988. — 78, № 1. — С. 215–230.
93. Hoppensteadt F. C., Jäger W. Pattern formation by bacteria// Lect. Notes Biomath. — 1980. — 38. — С. 68–81. — DOI: 10.1007/978-3-642-61850-5_7.
94. Hoppensteadt F. C., Jäger W., Pöppe C. A hysteresis model for bacterial growth patterns// Lect. Notes Biomath. — 1984. — 55. — С. 123–134. — DOI: 10.1007/978-3-642-45589-6_11.
95. Hu H., Ben Mrad R. On the classical Preisach model for hysteresis in piezoceramic actuators// Mechatronics. — 2003. — 13. — С. 85–94.
96. Ikhoulane F. A survey of the hysteretic Duhem model// Arch. Comput. Methods Engrg. — 2018. — 25. — С. 965–1002.
97. Ikhoulane F., Mañosa V., Pujol G. Minor loops of the Dahl and LuGre models// Appl. Math. Model. — 2020. — 77. — С. 1679–1690.
98. Ikhoulane F., Rodellar J. On the hysteretic Bouc–Wen model// Nonlinear Dynam. — 2005. — 42. — С. 63–78.
99. Il'in A. M., Markov B. A. Nonlinear diffusion equation and Liesegang rings// Dokl. Math. — 2011. — 440. — С. 164–167. — DOI: 10.1134/S1064562411060093.
100. Ipocoana E., Krejčí P. A model for assisted periodic breathing with degenerate permeability// Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2024. — 75. — С. 103980.
101. Iyer R. V., Shirley M. E. Hysteresis parameter identification with limited experimental data// IEEE Trans. Magnet. — 2004. — 40. — С. 3227–3239.
102. Iyer R. V., Tan X., Krishnaprasad P. S. Approximate inversion of the Preisach hysteresis operator with application to control of smart actuators// IEEE Trans. Autom. Control. — 2005. — 50. — С. 798–810.
103. Janaideh M. A., Naldi R., Marconi L., Krejčí P. A hybrid model for the play hysteresis operator// Phys. B. Cond. Matt. — 2013. — 430. — С. 95–98.
104. Jiles D. C., Atherton D. L. Theory of ferromagnetic hysteresis// J. Appl. Phys. — 1984. — 55. — С. 2115–2120.
105. Jules T., Reid A., Daniels K. E., Mungan M., Lechenault F. Delicate memory structure of origami switches// Phys. Rev. Res. — 2022. — 4. — С. 013128.
106. Kalmár-Nagy T., Amann A., Kim D., Rachinskii D. The Devil is in the details: Spectrum and eigenvalue distribution of the discrete Preisach memory model// Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2019. — 77. — С. 1–17.
107. Kalmár-Nagy T., Shekhawat A. Nonlinear dynamics of oscillators with bilinear hysteresis and sinusoidal excitation// Phys. D. Nonlinear Phenom. — 2009. — 238. — С. 1768–1786.
108. Kamachkin A. M., Potapov D. K., Yevstafyeva V. V. Dynamics of relay systems with hysteresis and harmonic perturbation// Eurasian Math. J. — 2024. — 15, № 2. — С. 48–60. — DOI: 10.32523/2077-9879-2024-15-2-48-60.
109. Kamenskii M., Makarenkov O. On the response of autonomous sweeping processes to periodic perturbations// Set-Valued Var. Anal. — 2016. — 24. — С. 551–563. — DOI: 10.1007/s11228-015-0348-1.
110. Kamenskii M., Makarenkov O., Wadippuli L. N. A continuation principle for periodic BV-continuous state-dependent sweeping processes// SIAM J. Math. Anal. — 2020. — 52, № 6. — С. 5598–5626. — DOI: 10.1137/19M1248613.

111. *Kamenskii M. I., Obukhovskii V. V., Petrosyan G. G.* On Almost Periodic Trajectories of Control Systems with Feedback in the Form of Sweeping Processes// *Math. Notes.* — 2023. — 114. — С. 85–91. — DOI: 10.1134/S0001434623070088.
112. *Kermack W. O., McKendrick A. G.* A contribution to the mathematical theory of epidemics// *Proc. R. Soc. London Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci.* — 1927. — 115. — С. 700–721.
113. *Konda R., Zhang J.* Hysteresis with lonely stroke in artificial muscles: Characterization, modeling, and inverse compensation// *Mech. Syst. Signal Proces.* — 2022. — 164. — С. 108240.
114. *Kopfová J., Kopf T.* Differential equations, hysteresis, and time delay// *Z. Angew. Math. Phys.* — 2002. — 53, № 4. — С. 676–691. — DOI: 10.1007/s00033-002-8176-1.
115. *Kopfová J., Nábělková P., Rachinskii D., Rouf S. C.* Dynamics of SIR model with vaccination and heterogeneous behavioral response of individuals modeled by the Preisach operator// *J. Math. Biol.* — 2021. — 83. — С. 1–34.
116. *Kramer I., Bayer Y., Adeyemo T., Mau Y.* Hysteresis in soil hydraulic conductivity as driven by salinity and sodicity — a modeling framework// *Hydrol. Earth Syst. Sci.* — 2021. — 25. — С. 1993–2008.
117. *Krejčí P.* Resonance in Preisach systems// *Appl. Math.* — 2000. — 45. — С. 439–468.
118. *Krejčí P.* Hysteresis in singularly perturbed problems// В сб.: «Singular Perturbations and Hysteresis». — SIAM, 2005. — С. 73–100. — DOI: 10.1137/1.9780898717860.ch3.
119. *Krejčí P.* A higher order energy bound in a singular Preisach circuit// *Phys. B. Cond. Matt.* — 2008. — 403. — С. 297–300.
120. *Krejčí P.* Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality// *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S.* — 2013. — 6. — С. 101–119.
121. *Krejčí P., Monteiro G. A.* Inverse parameter-dependent Preisach operator in thermo-piezoelectricity modeling// *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B.* — 2019. — 24, № 7. — С. 3051–3066.
122. *Krejčí P., O’Kane J. P., Pokrovskii A., Rachinskii D.* Properties of solutions to a class of differential models incorporating Preisach hysteresis operator// *Phys. D. Nonlinear Phenom.* — 2012. — 241, № 22. — С. 2010–2028. doi 10.1016/j.physd.2011.05.005
123. *Krejčí P., Petrov A.* A contact problem for a piezoelectric actuator on an elasto-plastic obstacle// *Fixed Point Theory Algorithms Sci. Engrg.* — 2022. — 2022. — С. 1–12.
124. *Krejčí P., Rocca E., Sprekels J.* Unsaturated deformable porous media flow with thermal phase transition// *Math. Models Methods Appl. Sci.* — 2017. — 27. — С. 2675–2710.
125. *Kuhnen K., Krejci P.* Compensation of complex hysteresis and creep effects in piezoelectrically actuated systems — A new Preisach modeling approach// *IEEE Trans. Autom. Control.* — 2009. — 54. — С. 537–550.
126. *Lacarbonara W., Vestroni F.* Nonclassical responses of oscillators with hysteresis/ *Nonlinear Dynam.* — 2003. — 32. — С. 235–258.
127. *Lelkes J., Kalmár-Nagy T.* Analysis of a mass-spring-relay system with periodic forcing// *Nonlinear Dynam.* — 2021. — 106. — С. 21–44.
128. *Li J., Huang H., Morita T.* Stepping piezoelectric actuators with large working stroke for nano-positioning systems: A review// *Sensors Actuators A. Phys.* — 2019. — 292. — С. 39–51.
129. *Li Y., Zhou S., Litak G.* Robust design optimization of a nonlinear monostable energy harvester with uncertainties// *Meccanica.* — 2020. — 55. — С. 1753–1762.
130. *Li Y., Zhu J., Li Y., Zhu L.* A hybrid Jiles–Atherton and Preisach model of dynamic magnetic hysteresis based on backpropagation neural networks// *J. Magnetism Magnet. Mater.* — 2022. — 544. — С. 168655.
131. *Litak G., Margielewicz J., Gaska D., Rysak A., Trigona C.* On theoretical and numerical aspects of bifurcations and hysteresis effects in kinetic energy harvesters// *Sensors.* — 2022. — 22. — С. 381.
132. *Liu V. T., Wing H. Y.* Classical Preisach model based on polynomial approximation and applied to micro-piezoelectric actuators// *Symmetry.* — 2022. — 14. — С. 1008.
133. *Lu Q., Gang T., Hao G., Chen L.* Compound optimal control of harmonic drive considering hysteresis characteristic// *Mech. Sci.* — 2019. — 10. — С. 383–391.
134. *Lygas K., Wolszczak P., Litak G., Stączek P.* Complex response of an oscillating vertical cantilever with clearance// *Meccanica.* — 2019. — 54. — С. 1689–1702.
135. *Mayergoyz I. D.* Mathematical models of hysteresis// *Phys. Rev. Lett.* — 1986. — 56, № 15. — С. 1518–1521.
136. *Mayergoyz I. D.* Dynamic Preisach models of hysteresis// *IEEE Trans. Magnet.* — 1998. — 24. — С. 2925–2927.
137. *Mayergoyz I.* Mathematical models of hysteresis and their applications. — Elsevier, 2003.
138. *Mayergoyz I. D., Adly A. A., Huang M. W., Krafft C.* Experimental testing of vector Preisach models for superconducting hysteresis// *IEEE Trans. Magnet.* — 2000. — 36. — С. 3505–3507.
139. *Mayergoyz I., Dimian M.* Analysis of spectral noise density of hysteretic systems driven by stochastic processes// *J. Appl. Phys.* — 2003. — 93, № 10. — С. 6826–6828.

140. *Mayergoyz I. D., Dimian M.* Stochastic aspects of hysteresis// J. Phys. Conf. Ser. — 2005. — 22. — C. 139–147.
141. *Mayergoyz I. D., Friedman G.* Generalized Preisach model of hysteresis// IEEE Trans. Magnet. — 1988. — 24. — C. 212–217.
142. *Mayergoyz I. D., Friedman G., Salling C.* Comparison of the classical and generalized Preisach hysteresis models with experiments// IEEE Trans. Magnet. — 1989. — 25. — C. 3925–3927.
143. *Mayergoyz I. D., Korman C. E.* Preisach based storage devices and global optimizers// Math. Model. Nat. Phenom. — 2020. — 15. — C. 20.
144. *McCarthy S., Rachinskii D.* Dynamics of systems with Preisach memory near equilibria// Math. Bohem. — 2014. — 139, № 1. — C. 39–73. — URL: <http://dml.cz/dmlcz/143636>.
145. *Mielke A.* Evolution of rate-independent systems// B c6.: «Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations. Vol. II», Amsterdam: Elsevier/North-Holland, 2005. — C. 461–559. — DOI: 10.1016/S1874-5717(06)80009-5.
146. *Moreau J. J.* Raŕle par un convexe variable (première partie)// Trav. Sémin. Anal. Conv. — 1971. — 1, № 15. — C. 1–43.
147. *Moreau J. J.* Raŕle par un convexe variable (deuxième partie)// Trav. Sémin. Anal. Conv. — 1972. — 2, № 3. — C. 1–36.
148. *Moreau J. J.* Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert spaces// J. Differ. Equ. — 1977. — 26, № 3. — C. 347–374. — DOI: 10.1016/0022-0396(77)90085-7.
149. *Mortell M. P., O'Malley R. E., Pokrovskii A., Sobolev V.* Singular perturbations and hysteresis. — Philadelphia: SIAM, 2005.
150. *Münch C.* Optimal control of reaction-diffusion systems with hysteresis// ESAIM: Control Optim. Calc. Var. — 2018. — 24, № 4. — C. 1453–1488.
151. *Néel L.* Théorie des lois d'aimantation de Lord Rayleigh: I. Les déplacements d'une paroi isolée// Cahiers de Physique. — 1942. — 12. — C. 1–20.
152. *O'Ceallaigh S., Pimenov A., Pokrovskii A., Rachinskii D., Zhezherun A.* Algorithm for linear stability analysis in systems with Preisach hysteresis// Phys. B. Cond. Matt. — 2008. — 403. — C. 305–307.
153. *Ortiz-Lopez J., Luty F.* Optical studies of thermal cycling and hysteresis effects in elastic order-disorder phase transformations. I. Pure alkali-metal cyanide crystals// Phys. Rev. B. — 1988. — 37, № 10. — C. 5452–5460.
154. *Pál L.* Stochastic model of hysteresis// Phys. Rev. E. — 2000. — 61, № 4. — C. 3490–3500.
155. *Pasquale M., Basso V., Bertotti G., Jiles D. C., Bi Y.* Domain-wall motion in random potential and hysteresis modeling// J. Appl. Phys. — 1998. — 83. — C. 6497–6499.
156. *Pei J. S., Carboni B., Lacarbonara W.* Mem-models as building blocks for simulation and identification of hysteretic systems// Nonlinear Dynam. — 2020. — 100, № 2. — C. 973–998. — DOI: 10.1007/s11071-020-05542-5.
157. *Pimenov A., Kelly T. C., Korobeinikov A., O'Callaghan M. J., Pokrovskii A.* Systems with hysteresis in mathematical biology via a canonical example// B c6.: «Mathematical Modeling, Clustering Algorithms and Applications». — Nova Sci. Publ., 2012. — C. 34.
158. *Pimenov A., Kelly T. C., Korobeinikov A., O'Callaghan M. J., Pokrovskii A. V., Rachinskii D.* Memory effects in population dynamics: spread of infectious disease as a case study// Math. Model. Nat. Phenom. — 2012. — 7. — C. 204–226.
159. *Pimenov A., Kelly T. C., Korobeinikov A., O'Callaghan M. J., Rachinskii D.* Memory and adaptive behavior in population dynamics: anti-predator behavior as a case study// J. Math. Biol. — 2017. — 74, № 6. — C. 1533–1559.
160. *Pimenov A., Rachinskii D.* Linear stability analysis of systems with Preisach memory// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2009. — 11, № 4. — C. 997–1018. — DOI: 10.3934/dcdsb.2009.11.997
161. *Pokrovskii A., Sobolev V.* A naive view of time relaxation and hysteresis// B c6.: *Singular Perturbations and Hysteresis*. — SIAM, 2005. — C. 1–59.
162. *Preisach F.* Über die magnetische Nachwirkung// Z. Phys. — 1935. — 94. — C. 277–302.
163. *Preisach F.* On the magnetic aftereffect// IEEE Trans. Magnet. — 2017. — 53. — C. 0700111.
164. *Prüss J.* Periodic solutions of the thermostat problem// B c6.: «Differential Equations in Banach Spaces», Proc. Conf., Bologna, July 2–5, 1985. — Springer Berlin Heidelberg, 2006. — C. 216–226.
165. *Rachinskii D.* Realization of arbitrary hysteresis by a low-dimensional gradient flow// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — 2016. — 21, № 1. — C. 227–243.
166. *Rachinskii D., Rouf S.* Dynamics of SIR model with heterogeneous response to intervention policy// Theor. Popul. Biol. — 2022. — 146. — C. 71–85.

167. *Radons G., Zienert A.* Nonlinear dynamics of complex hysteretic systems: Oscillator in a magnetic field// Eur. Phys. J. Spec. Topics. — 2013. — 222. — C. 1675–1684.
168. *Ramesh A., Jiles D. C., Roderick J. M.* A model of anisotropic anhysteretic magnetization// IEEE Trans. Magnet. — 1996. — 32. — C. 4234–4236.
169. *Renno J. M., Dagaq M. F., Inman D. J.* On the optimal energy harvesting from a vibration source// J. Sound Vibr. — 2009. — 320, № 1-2. — C. 386–405.
170. *Restorff J. B., Savage H. T., Clark A. E., Wun-Fogle M.* Preisach modeling of hysteresis in Terfenol// J. Appl. Phys. — 1990. — 67. — C. 5016–5018.
171. *Robert G., Damjanovic D., Setter N.* Preisach modeling of ferroelectric pinched loops// Appl. Phys. Lett. — 2000. — 77, № 26. — C. 4413–4415.
172. *Roussel R., Edelen A., Ratner D., Dubey K., Gonzalez-Aguilera J. P., Kim Y. K., Kuklev N.* Differentiable Preisach modeling for characterization and optimization of particle accelerator systems with hysteresis// Phys. Rev. Lett. — 2022. — 128. — C. 204801.
173. *Ruderman M., Bertram T.* Identification of soft magnetic B-H characteristics using discrete dynamic Preisach model and single measured hysteresis loop// IEEE Trans. Magnet. — 2012. — 48. — C. 1281–1284.
174. *Scalerandi M., Nobili M., Griffa M., Gliozzi A. S., Bosia F.* Preisach–Mayergoyz approach to fatigue-induced irreversibility// Phys. Rev. B. — 2006. — 73. — C. 092103.
175. *Schubert S., Radons G.* Preisach models of hysteresis driven by Markovian input processes// Phys. Rev. E. — 2017. — 96. — C. 022117.
176. *Schweizer B.* Hysteresis in porous media: Modelling and analysis// Interfaces Free Bound. — 2017. — 19. — C. 417–447.
177. *Semenov M. E., Borzunov S. V., Meleshenko P. A.* A new way to compute the Lyapunov characteristic exponents for non-smooth and discontinues dynamical systems// Nonlinear Dynam. — 2022. — 109. — C. 1805–1821. — DOI: 10.1007/s11071-022-07492-6.
178. *Semenov M. E., Borzunov S. V., Meleshenko P. A., Lapin A. V.* A model of optimal production planning based on the hysteretic demand curve// Mathematics. — 2022. — 10, № 18. — C. 3262. — DOI: 10.3390/math10183262
179. *Semenov M. E., Meleshenko P. A., Borzunov S. V., Reshetova O. O., Barsukov A. I.* A simple model of the energy harvester within a linear and hysteresis approach// Micromachines. — 2023. — 14. — C. 310. — DOI: 10.3390/mi14020310
180. *Semenov M. E., Reshetova O. O., Borzunov S. V., Meleshenko P. A.* Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach// Eur. Phys. J. Spec. Topics. — 2021. — 230. — C. 3565–3571. — DOI: 10.1140/epjs/s11734-021-00237-3.
181. *Semenov M. E., Reshetova O. O., Tolkachev A. V., Solovyov A. M., Meleshenko P. A.* Oscillations under hysteretic conditions: From simple oscillator to discrete sine–Gordon model// B c6.: «Topics in Nonlinear Mechanics and Physics»ю — Singapore: Springer, 2019. — C. 229–254. — DOI: 10.1007/978-981-13-9463-8_12.
182. *Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A.* Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case// J. Vibr. Control. — 2021. — 27, № 1-2. — C. 43–56. — DOI: 10.1177/1077546320923436
183. *Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A., Balthazar J. M.* Nonlinear damping: from viscous to hysteretic dampers// B c6.: «Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics: Selected Papers from CSNDD 2016». — Cham: Springer, 2017. — C. 259–275. — DOI: 10.1007/978-3-319-63937-6_15.
184. *Semenov M. E., Solovyov A. M., Meleshenko P. A., Reshetova O. O.* Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems// Math. Model. Nat. Phenom. — 2020. — 15. — C. 43. — DOI: 10.1051/mmnp/2019053
185. *Spanos P. D., Cacciola P., Redhorse J.* Random vibration of SMA systems via Preisach formalism// Nonlinear Dynam. — 2004. — 36. — C. 405–419.
186. *Spanos P. D., Matteo A., Di Pirrotta A.* Steady-state dynamic response of various hysteretic systems endowed with fractional derivative elements// Nonlinear Dynam. — 2019. — 98. — C. 3113–3124.
187. *Spanos P. D., Muscolino G.* Stochastic averaging of Preisach hysteretic systems// J. Engrg. Mech. — 2004. — 130. — C. 1257–1267.
188. *Stoner E. C., Wohlfarth E. P.* A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys// Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1948. — 240. — C. 599–642.
189. *Szabó Z., Füzi J.* Implementation and identification of Preisach type hysteresis models with Everett function in closed form// J. Magnetism Magnet. Mater. — 2016. — 406. — C. 251–258.
190. *Tabor M.* Chaos and integrability in nonlinear dynamics: an introduction. — London: Wiley-Interscience, 1989.
191. *Takács J.* The Everett integral and its analytical approximation// B c6.: «Advanced Magnetic Materials». — INTECH, 2012. — C. 203–230.

192. *Tannous C., Gieraltowski J.* A Stoner–Wohlfarth model redux: static properties// *Phys. B. Cond. Matt.* — 2008. — 403. — С. 3563–3570.
193. *Tsabadze T., Zhang J.* Design, characterization, modeling, and comparison of helically wrapped super-coiled polymer artificial muscles// *Sensors Actuators A. Phys.* — 2021. — 331. — С. 113018.
194. *Urbanavičiūtė I., Cornelissen T. D., Meng X., Sijbesma R. P., Kemerink M.* Physical reality of the Preisach model for organic ferroelectrics// *Nature Commun.* — 2018. — 9, № 1. — С. 1–11.
195. *Venegas P., Gómez D., Arrinda M., Oyarbide M., Macicior H., Bermúdez A.* Kalman filter and classical Preisach hysteresis model applied to the state of charge battery estimation// *Comput. Math. Appl.* — 2022. — 118. — С. 74–84.
196. *Visintin A.* Evolution problems with hysteresis in the source term// *SIAM J. Math. Anal.* — 1986. — 17. — С. 1113–1138. — DOI: 10.1137/0517079.
197. *Visintin A.* Differential models of hysteresis. — Springer, 1994.
198. *Visintin A.* Ten issues about hysteresis// *Acta Appl. Math.* — 2014. — 132. — С. 635–647. — DOI: 10.1007/s10440-014-9936-6.
199. *Visone C., Serpico C., Mayergoyz I. D., Huang M. W., Adly A. A.* Neural-Preisach-type models and their application to the identification of magnetic hysteresis from noisy data// *Phys. B. Cond. Matt.* — 2000. — 275. — С. 223–227.
200. *Weiss P., de Freudenreich J.* Étude de l'aimantation initiale en fonction de la température// *Arch. Sci. Phys. Natur.* — 1916. — 42. — С. 449–470.
201. *Yevstafyeva V. V.* Criterion for the existence of two-point oscillatory solution of a perturbed system with a relay// *Math. Notes.* — 2023. — 114, № 1. — С. 212–222. — DOI: 10.1134/S0001434623070222.
202. *Zhang K., Zhao T., Fujiwara H.* Training effect of exchange biased iron-oxide/ferromagnet systems// *J. Appl. Phys.* — 2001. — 89. — С. 6910–6912.

М. Е. Семенов

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: mk1150@mail.ru

С. В. Борзунов

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: sborzunov@gmail.com

О. И. Канищева

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: oleka_olesya@mail.ru

А. И. Прошунин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: alexfrauch@gmail.com

П. А. Мелешенко

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: melechp@yandex.ru

UDC 517, 519.6, 519.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-299-340

EDN: NMWGIQ

Continual systems of relays

М. Е. Семенов, С. В. Борзун, О. И. Канисчева, А. И. Прохунин,
и П. А. Мелещенко

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. The converter of continual systems of relays (also known as the Preisach converter) is a well-known model applicable to describe the hysteresis relationships of a wide range. This article provides a review of works devoted to the study of systems from various subject areas (physics, economics, biology), where the continual system of relays plays a key role in the formalization of hysteresis dependencies. The first section of the work is devoted to a description of the input-output correspondences of the classical converter of continual systems of relays, its main properties are established, methods for constructing the output using the formalism of the demagnetization function are described, and a generalization of the classical converter of continual system of relays to the case of vector input-output correspondences is given. Applications of the Preisach model, classified according to various natural science fields, are given in the second section. Various generalizations of the model as applied to systems containing ferromagnetic and ferroelectric materials are described there. The main attention was paid to experimental works, where the model of continual system of relays was used to analytically describe the dependencies observed in experiments. Special attention in the review is paid to technical applications of the model such as energy storage devices, systems using the piezoelectric effect, models of systems with long-term memory. The review also presents the results of using the converter of continual systems of relays in biology and medicine, as well as in economics. The third part of the review describes the properties of the converter of continual system of relays in terms of its response to stochastic external influences and provides a generalization of the converter model to the case of stochasticity of the threshold numbers of its elementary components. In addition, the review contains fresh results in the field of dynamics of systems with a converter of continual system of relays: a method for identifying dynamic modes is given, based on a modification of Benettin's algorithm for calculating Lyapunov exponents in systems with nonsmooth multivalued characteristics.

Keywords: hysteresis, non-ideal relay, continual systems of relays, converter of CSR, stochastic input, sales rate, price function, consumer behaviour.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: М. Е. Семенов, С. В. Борзун, О. И. Канисчева, А. И. Прохунин, П. А. Мелещенко, "Continual systems of relays," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 2, 299–340. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-299-340>

REFERENCES

1. S. V. Borzunov, M. E. Semenov, N. I. Sel'vesyuk, and P. A. Meleshenko, "Gisterezisnye preobrazovateli so sluchajnymi parametrami" [Hysteretic Converters with Stochastic Parameters], *Mat. Model. [Math. Model.]*, 2019, **31**, No. 7, 109–126, DOI: 10.1134/S0234087919070074 (in Russian).
2. S. V. Borzunov, M. E. Semenov, N. I. Sel'vesyuk, P. A. Meleshenko, and A. M. Solov'ev, "Stokhasticheskaya model' gisterezisnogo preobrazovatelya s domennoj strukturoj" [Stochastic model of the hysteresis converter with a domain structure], *Mat. Model. [Math. Model.]*, 2021, **33**, No. 9, 60–86, DOI: 10.20948/mm-2021-09-05 (in Russian).



3. M. A. Krasnosel'skij and A. V. Pokrovskij, *Sistemy s Gistereziom* [Systems with Hysteresis], Moscow, Nauka, 1983 (in Russian).
4. A. M. Krasnosel'skij and A. V. Pokrovskij, "Dissipativnost' nerezonansnogo mayatnika s ferromagnitnym treniem" [Dissipativity of a non-resonant pendulum with ferromagnetic friction], *Avtomat. i Telemekh.* [Autom. Telemekh.], 2006, **2**, 57–69 (in Russian).
5. A. L. Medvedskij, P. A. Meleshenko, V. A. Nesterov, O. O. Reshetova, M. E. Semenov, and A. M. Solov'ev, "Neustojchivye kolebatel'nye sistemy s gisterezisom: zadachi stabilizacii i upravleniya" [Unstable oscillatory systems with hysteresis: problems of stabilization and control], *Izv. RAN. Teor. i Sist. Upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Theory Control Syst.], 2020, **4**, 58–82.
6. N. Abdullah and N. Hasan, "The implementation of Water Alternating (WAG) injection to obtain optimum recovery in Cornea Field, Australia," *J. Petrol. Explor. Product. Techn.*, 2021, **11**, 1475–1485, DOI: 10.1007/s13202-021-01103-7.
7. T. Adeyemo, I. Kramer, G. J. Levy, and Y. Mau, "Salinity and sodicity can cause hysteresis in soil hydraulic conductivity," *Geoderma*, 2022, **413**, 115765.
8. A. A. Adly and I. D. Mayergoyz, "Accurate modeling of vector hysteresis using a superposition of Preisach-type models," *IEEE Trans. Magnet.*, 1997, **33**, 4155–4157.
9. H. W. Alt, "On the thermostat problem," *Control Cybernet.*, 1985, **14**, 171–193.
10. M. Andreev, A. Suvorov, N. Ruban, R. Ufa, A. Gusev, A. Askarov, and A. S. Kievets, "Development and research of mathematical model of current transformer reproducing magnetic hysteresis based on Preisach theory," *IET Gener. Transm. & Distrib.*, 2020, **14**, 2720–2730.
11. D. E. Apushkinskaya and N. N. Uraltseva, "Free boundaries in problems with hysteresis," *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 2015, **373**, No. 2050, 20140271, DOI: 10.1098/rsta.2014.0271.
12. D. E. Apushkinskaya and N. N. Uraltseva, "On regularity properties of solutions to the hysteresis-type problem," *Interfaces Free Bound.*, 2015, **17**, No. 1, 93–115, DOI: 10.4171/ifb/335.
13. B. Azzerboni, E. Cardelli, E. Della Torre, and G. Finocchio, "Reversible magnetization and Lorentzian function approximation," *J. Appl. Phys.*, 2003, **93**, 6635–6637.
14. F. Bagagiolo, "Dynamic programming for some optimal control problems with hysteresis," *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2002, **9**, 149–174.
15. F. Bagagiolo, "Viscosity solutions for an optimal control problem with Preisach hysteresis nonlinearities," *ESAIM: Control Optim. Calc. Var.*, 2004, **10**, 271–294.
16. Z. Balanov, W. Krawcewicz, D. Rachinskii, and A. Zhezherun, "Hopf bifurcation in symmetric networks of coupled oscillators with hysteresis," *J. Dynam. Differ. Equ.*, 2012, **24**, 713–759.
17. J. A. Barker, D. E. Schreiber, B. G. Huth, and D. H. Everett, "Magnetic hysteresis and minor loops: Models and experiments," *Proc. R. Soc. London Ser. A. Math. Phys. Sci.*, 1983, **386**, 251–261.
18. F. Baronti, N. Femia, R. Saletti, C. Visone, and W. Zamboni, "Hysteresis modeling in Li-ion batteries," *IEEE Trans. Magnet.*, 2014, **50**, No. 11, 1–4.
19. F. Baronti, N. Femia, R. Saletti, C. Visone, and W. Zamboni, "Preisach modelling of lithium-iron-phosphate battery hysteresis," *J. Energy Storage*, 2015, **4**, 51–61. DOI: 10.1016/j.est.2015.09.004.
20. A. T. Bartic, D. J. Wouters, H. E. Maes, J. T. Rickes, and R. M. Waser, "Preisach model for the simulation of ferroelectric capacitors," *J. Appl. Phys.*, 2001, **89**, No. 6, 3420–3425.
21. S. Belbas and I. Mayergoyz, "Dynamic programming for systems with hysteresis," *Phys. B*, 2001, **306**, 200–205.
22. S. A. Belbas and I. D. Mayergoyz, "Optimal control of dynamical systems with Preisach hysteresis," *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2002, **37**, 1351–1361.
23. M. Belhaq, A. Bichri, J. Der Hogapian, and J. Mahfoud, "Effect of electromagnetic actuations on the dynamics of a harmonically excited cantilever beam," *Int. J. Non-Linear Mech.*, 2011, **46**, 828–833.
24. A. Bermúdez, L. Dupré, D. Gómez, and P. Venegas, "Electromagnetic computations with Preisach hysteresis model," *Finite Elem. Anal. Design*, 2017, **126**, 65–74.
25. A. Bermúdez, D. Gómez, and P. Venegas, "Mathematical analysis and numerical solution of models with dynamic Preisach hysteresis," *J. Comput. Appl. Math.*, 2020, **367**, 112452.
26. G. Bertotti, *Hysteresis in Magnetism: for Physicists, Materials Scientists, and Engineers*, Academic Press, New York, 1998.
27. G. Bertotti, I. D. Mayergoyz, V. Basso, and A. Magni, "Functional integration approach to hysteresis," *Phys. Rev. E*, 1999, **60**, No. 2, 1428–1440.
28. I. Bodale and A. Stancu, "Reversible and irreversible processes in drying and wetting of soil," *Materials*, 2020, **13**, No. 1, 135.
29. D. Bombara, S. Fowzer, and J. Zhang, "Compliant, large-strain, and self-sensing twisted string actuators," *Soft Robotics*, 2022, **9**, 72–88.

30. S. V. Borzunov, M. E. Semenov, N. I. Sel'vesyuk, and P. A. Meleshenko, "Generalized play-operator under stochastic perturbations: an analytic approach," *J. Vibr. Engrg. Techn.*, 2021, **9**, 355–365, DOI: 10.1007/s42417-020-00234-1.
31. N. D. Botkin, M. Brokate, and E. G. El Behi-Gornostaeva, "One-phase flow in porous media with hysteresis," *Phys. B. Cond. Matt.*, 2016, **486**, 183–186.
32. M. Brokate, "On a characterization of the Preisach model for hysteresis," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1990, **83**, 153–163.
33. M. Brokate and A. Friedman, "Optimal design for heat conduction problems with hysteresis," *SIAM J. Control Optim.*, 1989, **27**, No. 4, 697–717, DOI: 10.1137/032703.
34. M. Brokate and P. Krejčí, "Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2013, **18**, No. 2, 331–348.
35. M. Brokate, A. Pokrovskii, D. Rachinskii, and O. Rasskazov, "Differential equations with hysteresis via a canonical example," In: *The Science of Hysteresis. Vol. I. Mathematical Modeling and Applications*, Academic Press, Amsterdam, 2006, pp. 125–291, DOI: 10.1016/B978-012480874-4/50005-1.
36. M. Brokate and J. Sprekels, *Hysteresis and Phase Transition*, Springer, New York, 1996.
37. P. Cacciola, I. Calì, N. Fiorini, G. Occhipinti, D. Spina, and A. Tombari, "Seismic response of nonlinear soil-structure interaction systems through the Preisach formalism: the Messina Bell Tower case study," *Bull. Earthquake Engrg.*, 2022, **20**, 3485–3514.
38. P. Cacciola and A. Tombari, "Steady state harmonic response of nonlinear soil-structure interaction problems through the Preisach formalism," *Soil Dynam. Earthquake Engrg.*, 2021, **144**, 106669.
39. B. Carboni and W. Lacarbonara, "Nonlinear dynamic characterization of a new hysteretic device: experiments and computations," *Nonlinear Dynam.*, 2016, **83**, 23–39.
40. B. Carboni, W. Lacarbonara, P. Brewick, and S. Masri, "Dynamical response identification of a class of nonlinear hysteretic systems," *J. Intel. Mater. Syst. Struct.*, 2018, **29**, No. 13, 2795–2810.
41. A. E. Charalampakis, "The response and dissipated energy of Bouc–Wen hysteretic model revisited," *Archive Appl. Mech.*, 2015, **85**, 1209–1223.
42. S. Chatterjee, S. Kumar, A. Gaidhane, C. K. Dabhi, Y. S. Chauhan, and H. Amrouch, "Ferroelectric FDSOI FET modeling for memory and logic applications," *Solid-State Electron.*, 2023, **200**, 108554.
43. B. Chen and S. Timoshin, "Optimal control of a population dynamics model with hysteresis," *Acta Math. Sci.*, 2022, **42B(1)**, 283–298.
44. Z. Chladná, J. Kopfová, D. Rachinskii, and S. C. Rouf, "Global dynamics of SIR model with switched transmission rate," *J. Math. Biol.*, 2020, **80**, 1209–1233.
45. P. Chojecki, G. Walters, Z. Forrester, and T. Nishida, "Preisach modeling of imprint on hafnium zirconium oxide ferroelectric capacitors," *J. Appl. Phys.*, 2021, **130**, 094102.
46. P. Colli, M. Grasselli, and J. Sprekels, "Automatic control via thermostats of a hyperbolic Stefan problem with memory," *Appl. Math. Optim.*, 1999, **39**, 229–255, DOI: 10.1007/s002459900105.
47. F. Cottone, H. Vocca, and L. Gammaitoni, "Nonlinear energy harvesting," *Phys. Rev. Lett.*, 2009, **102**, 080601.
48. R. Cross, "Unemployment: natural rate epicycles or hysteresis?," *Eur. J. Econom. Econom. Polic. Intervent.*, 2014, **11**, No. 2, 136–148.
49. R. Cross, A. M. Krasnosel'skii, and A. V. Pokrovskii, "A time-dependent Preisach model," *Phys. B. Cond. Matt.*, 2001, **306**, No. 1, 206–210.
50. R. Cross, H. McNamara, A. Pokrovskii, and D. Rachinskii, "A new paradigm for modelling hysteresis in macroeconomic flows," *Phys. B. Cond. Matt.*, 2008, **403**, No. 2–3, 231–236.
51. M. Curran, P. Gurevich, and S. Tikhomirov, "Recent advances in reaction-diffusion equations with non-ideal relays," In: *Control of Self-Organizing Nonlinear Systems. Understanding Complex Systems*, Springer, 2016, DOI: 10.1007/978-3-319-28028-8_11.
52. M. Dafri, A. Ladjimi, S. Mendaci, and A. Babouri, "Phenomenological model of the temperature dependence of hysteresis based on the Preisach model," *J. Superconduct. Nov. Magnet.*, 2021, **34**, 1453–1458.
53. M. F. Daqaq, R. Masana, A. Erturk, and Q. D. Dane, "On the role of nonlinearities in vibratory energy harvesting: A critical review and discussion," *Appl. Mech. Rev.*, 2013, **66**, 040801.
54. Z. Darbenas, R. Van der Hout, and M. Oliver, "Long-time asymptotics of solutions to the Keller–Rubinow model for Liesegang rings in the fast reaction limit," *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2022, **39**, No. 6, 1413–1458, DOI: 10.4171/aihpc/34.
55. Z. Darbenas, R. Van der Hout, and M. Oliver, "Conditional uniqueness of solutions to the Keller–Rubinow model for Liesegang rings in the fast reaction limit," *J. Differ. Equ.*, 2023, **347**, 212–245, DOI: 10.1016/j.jde.2022.11.038.

56. S. G. Das, J. Krug, and M. Mungan, “Driven disordered systems approach to biological evolution in changing environments,” *Phys. Rev. X*, 2022, **12**, 031040.
57. B. Detmann and P. Krejčí, “A multicomponent flow model in deformable porous media,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2019, **42**, 1894–1906.
58. J. Dho, C. W. Leung, and M. G. Blamire, “Universal time relaxation behavior of the exchange bias in ferromagnetic/antiferromagnetic bilayers,” *J. Appl. Phys.*, 2006, **99**, 033910.
59. A. Di Matteo, “Response of nonlinear oscillators with fractional derivative elements under evolutionary stochastic excitations: A Path Integral approach based on Laplace’s method of integration,” *Probab. Engrg. Mech.*, 2023, **71**, 103402.
60. L. R. Dupre, R. Van Keer, and J. A. A. Melkebeek, “Identification of the relation between the material parameters in the Preisach model and in the Jiles–Atherton hysteresis model,” *J. Appl. Phys.*, 1999, **85**, 4376–4378.
61. M. Eleuteri, E. Ipocoana, J. Kopfová, and P. Krejčí, “Periodic solutions of a hysteresis model for breathing,” *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 2020, **54**, No. 1, 255–271.
62. K. Enab and H. Emami-Meybodi, “Effects of diffusion, adsorption, and hysteresis on huff-n-puff performance in ultratight reservoirs with different fluid types and injection gases,” *Energies*, 2021, **14**, 7379, DOI: 10.3390/en14217379.
63. L. C. Evans and M. Portilheiro, “Irreversibility and hysteresis for a forward-backward diffusion equation,” *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2004, **14**, 1599–1620, DOI: 10.1142/S0218202504003763.
64. D. H. Everett, “A general approach to hysteresis. Part 3. — A formal treatment of the independent domain model of hysteresis,” *Trans. Faraday Soc.*, 1954, **50**, 1077–1096.
65. D. H. Everett and W. I. Whitton, “A general approach to hysteresis,” *Trans. Faraday Soc.*, 1952, **48**, 749–757.
66. D. Flynn, A. Zhezherun, A. Pokrovskii, and J. P. O’Kane, “Modeling discontinuous flow through porous media using ODEs with Preisach operator,” *Phys. B*, 2008, **403**, 440–442.
67. V. Franzitta, A. Viola, and M. Trapanese, “Description of hysteresis in Lithium battery by classical Preisach model,” *Adv. Mater. Res.*, 2013, **622**, 1099–1103.
68. A. Friedman and L. S. Jiang, “Periodic solutions for a thermostat control problem,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1988, **13**, No. 5, 515–550, DOI: 10.1080/03605308808820551.
69. G. Friedman, P. Gurevich, S. McCarthy, and D. Rachinskii, “Switching behaviour of two-phenotype bacteria in varying environment,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2015, **585**, 012012.
70. C. Gavioli and P. Krejčí, “Control and Controllability of PDEs with Hysteresis,” *Appl. Math. Optim.*, 2021, **84**, 829–847.
71. C. Gavioli and P. Krejčí, “Phase transitions in porous media,” *NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2022, **29**, 1–55.
72. Z. Ghouli and M. Belhaq, “Energy harvesting in a delay-induced parametric van der Pol–Duffing oscillator,” *Eur. Phys. J. Spec. Topics*, 2021, **230**, 3591–3598.
73. Z. Ghouli and G. Litak, “Effect of high-frequency excitation on a bistable energy harvesting system,” *J. Vibr. Engrg. Techn.*, 2023, **11**, 99–106.
74. K. Glaschoff and J. Sprekels, “An application of Glicksberg’s theorem to set-valued integral equations arising in the theory of thermostats,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1981, **12**, No. 3, 477–486, DOI: 10.1137/0512041.
75. C. Grech, M. Buzio, M. Pentella, and N. Sammut, “Dynamic ferromagnetic hysteresis modelling using a Preisach-recurrent neural network model,” *Materials*, 2020, **13**, 2561.
76. R. Guan, J. Kopfová, and D. Rachinskii, “Global stability of SIR model with heterogeneous transmission rate modeled by the Preisach operator,” *ArXiv*, 2022, 2201.05722.
77. R. Günter, “Hysteresis-induced long-time tails,” *Phys. Rev. Lett.*, 2008, **100**, 240602.
78. R. Günter, “Spectral properties of the Preisach hysteresis model with random input. I. General results,” *Phys. Rev. E*, 2008, **77**, 061133.
79. R. Günter, “Spectral properties of the Preisach hysteresis model with random input. II. Universality classes for symmetric elementary loops,” *Phys. Rev. E*, 2008, **77**, 061134.
80. P. Gurevich, “Periodic solutions of parabolic problems with hysteresis on the boundary,” *Discrete Cont. Dynam. Syst. A*, 2011, **29**, No. 3, 1041–1083, DOI: 10.3934/dcds.2011.29.1041.
81. P. Gurevich and W. Jäger, “Parabolic problems with the Preisach hysteresis operator in boundary conditions,” *J. Differ. Equ.*, 2009, **47**, No. 11, 2966–3010, DOI: 10.1016/j.jde.2009.07.033.
82. P. Gurevich, W. Jäger, and A. Skubachevskii, “On periodicity of solutions for thermocontrol problems with hysteresis-type switches,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2009, **41**, No. 2, 733–752, DOI: 10.1137/080718905.
83. P. Gurevich and D. Rachinskii, “Asymptotics of sign-changing patterns in hysteretic systems with diffusive thresholds,” *Asymptot. Anal.*, 2016, **96**, 1–22.

84. P. Gurevich, R. Shamin, and S. Tikhomirov, “Reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2013, **45**, No. 3, 1328–1355, DOI: 10.1137/120879889.
85. P. Gurevich and S. Tikhomirov, “Symmetric periodic solutions of parabolic problems with discontinuous hysteresis,” *J. Dynam. Differ. Equ.*, 2011, **23**, 923–960, DOI: 10.1007/s10884-011-9227-0.
86. P. Gurevich and S. Tikhomirov, “Uniqueness of transverse solutions for reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis,” *Nonlinear Anal.*, 2012, **75**, 6610–6619, DOI: 10.1016/j.na.2012.08.003.
87. P. Gurevich and S. Tikhomirov, “Systems of reaction-diffusion equations with spatially distributed hysteresis,” *Math. Bohem.*, 2014, **139**, 239–257, DOI: 10.21136/MB.2014.143852.
88. P. Gurevich and S. Tikhomirov, “Rattling in spatially discrete diffusion equations with hysteresis,” *Multiscale Model. Simul.*, 2017, **15**, No. 3, 1176–1197, DOI: 10.1137/16M106039X.
89. P. Gurevich and S. Tikhomirov, “Spatially discrete reaction-diffusion equations with discontinuous hysteresis,” *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2018, **35**, No. 4, 1041–1077, DOI: 10.1016/j.anihpc.2017.09.006.
90. A. Hanyga and M. Seredyńska, “A dynamic model of capillary hysteresis in immiscible fluid displacement,” *Transp. Porous Media*, 2005, **59**, No. 3, 249–265, DOI: 10.1007/s11242-004-2555-3.
91. A. Harb, “Energy harvesting: State-of-the-art,” *Renewable Energy*, 2011, **36**, No. 10, 2641–2654.
92. K.-H. Hoffmann, J. Sprekels, and A. Visintin, “Identification of hysteresis loops,” *J. Comput. Phys.*, 1988, **78**, No. 1, 215–230.
93. F. C. Hoppensteadt and W. Jäger, “Pattern formation by bacteria,” *Lect. Notes Biomath.*, 1980, **38**, 68–81, DOI: 10.1007/978-3-642-61850-5_7.
94. F. C. Hoppensteadt, W. Jäger, and C. Pöppe, “A hysteresis model for bacterial growth patterns,” *Lect. Notes Biomath.*, 1984, **55**, 123–134, DOI: 10.1007/978-3-642-45589-6_11.
95. H. Hu and R. Ben Mrad, “On the classical Preisach model for hysteresis in piezoceramic actuators,” *Mechatronics*, 2003, **13**, 85–94.
96. F. Ikhouane, “A survey of the hysteretic Duhem model,” *Arch. Comput. Methods Engrg.*, 2018, **25**, 965–1002.
97. F. Ikhouane, V. Mañosa, and G. Pujol, “Minor loops of the Dahl and LuGre models,” *Appl. Math. Model.*, 2020, **77**, 1679–1690.
98. F. Ikhouane and J. Rodellar, “On the hysteretic Bouc–Wen model,” *Nonlinear Dynam.*, 2005, **42**, 63–78.
99. A. M. Il’in and B. A. Markov, “Nonlinear diffusion equation and Liesegang rings,” *Dokl. Math.*, 2011, **440**, 164–167, DOI: 10.1134/S1064562411060093.
100. E. Ipocoana and P. Krejčí, “A model for assisted periodic breathing with degenerate permeability,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2024, **75**, 103980.
101. R. V. Iyer and M. E. Shirley, “Hysteresis parameter identification with limited experimental data,” *IEEE Trans. Magnet.*, 2004, **40**, 3227–3239.
102. R. V. Iyer, X. Tan, and P. S. Krishnaprasad, “Approximate inversion of the Preisach hysteresis operator with application to control of smart actuators,” *IEEE Trans. Autom. Control*, 2005, **50**, 798–810.
103. M. A. Janaideh, R. Naldi, L. Marconi, and P. Krejčí, “A hybrid model for the play hysteresis operator,” *Phys. B. Cond. Matt.*, 2013, **430**, 95–98.
104. D. C. Jiles and D. L. Atherton, “Theory of ferromagnetic hysteresis,” *J. Appl. Phys.*, 1984, **55**, 2115–2120.
105. T. Jules, A. Reid, K. E. Daniels, M. Mungan, and F. Lechenault, “Delicate memory structure of origami switches,” *Phys. Rev. Res.*, 2022, **4**, 013128.
106. T. Kalmár-Nagy, A. Amann, D. Kim, and D. Rachinskii, “The Devil is in the details: Spectrum and eigenvalue distribution of the discrete Preisach memory model,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2019, **77**, 1–17.
107. T. Kalmár-Nagy and A. Shekhawat, “Nonlinear dynamics of oscillators with bilinear hysteresis and sinusoidal excitation,” *Phys. D. Nonlinear Phenom.*, 2009, **238**, 1768–1786.
108. A. M. Kamachkin, D. K. Potapov, and V. V. Yevstafyeva, “Dynamics of relay systems with hysteresis and harmonic perturbation,” *Eurasian Math. J.*, 2024, **15**, No. 2, 48–60, DOI: 10.32523/2077-9879-2024-15-2-48-60.
109. M. Kamenskii and O. Makarenkov, “On the response of autonomous sweeping processes to periodic perturbations,” *Set-Valued Var. Anal.*, 2016, **24**, 551–563, DOI: 10.1007/s11228-015-0348-1.
110. M. Kamenskii, O. Makarenkov, and L. N. Wadippuli, “A continuation principle for periodic BV-continuous state-dependent sweeping processes,” *SIAM J. Math. Anal.*, 2020, **52**, No. 6, 5598–5626, DOI: 10.1137/19M1248613.
111. M. I. Kamenskii, V. V. Obukhovskii, and G. G. Petrosyan, “On almost periodic trajectories of control systems with feedback in the form of sweeping processes,” *Math. Notes*, 2023, **114**, 85–91, DOI: 10.1134/S0001434623070088.

112. W. O. Kermack and A. G. McKendrick, “A contribution to the mathematical theory of epidemics,” *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1927, **115**, 700–721.
113. R. Konda and J. Zhang, “Hysteresis with lonely stroke in artificial muscles: Characterization, modeling, and inverse compensation,” *Mech. Syst. Signal Proces.*, 2022, **164**, 108240.
114. J. Kopfová and T. Kopf, “Differential equations, hysteresis, and time delay,” *Z. Angew. Math. Phys.*, 2002, **53**, No. 4, 676–691, DOI: 10.1007/s00033-002-8176-1.
115. J. Kopfová, P. Nábělková, D. Rachinskii, and S. C. Rouf, “Dynamics of SIR model with vaccination and heterogeneous behavioral response of individuals modeled by the Preisach operator,” *J. Math. Biol.*, 2021, **83**, 1–34.
116. I. Kramer, Y. Bayer, T. Adeyemo, and Y. Mau, “Hysteresis in soil hydraulic conductivity as driven by salinity and sodicity — a modeling framework,” *Hydrol. Earth Syst. Sci.*, 2021, **25**, 1993–2008.
117. P. Krejčí, “Resonance in Preisach systems,” *Appl. Math.*, 2000, **45**, 439–468.
118. P. Krejčí, “Hysteresis in singularly perturbed problems,” In: *Singular Perturbations and Hysteresis*, SIAM, 2005, 73–100, DOI: 10.1137/1.9780898717860.ch3.
119. P. Krejčí, “A higher order energy bound in a singular Preisach circuit,” *Phys. B. Cond. Matt.*, 2008, **403**, 297–300.
120. P. Krejčí, “Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2013, **6**, 101–119.
121. P. Krejčí and G. A. Monteiro, “Inverse parameter-dependent Preisach operator in thermo-piezoelectricity modeling,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2019, **24**, No. 7, 3051–3066.
122. P. Krejčí, J. P. O’Kane, A. Pokrovskii, and D. Rachinskii, “Properties of solutions to a class of differential models incorporating Preisach hysteresis operator,” *Phys. D. Nonlinear Phenom.*, 2012, **241**, No. 22, 2010–2028, DOI: 10.1016/j.physd.2011.05.005.
123. P. Krejčí and A. Petrov, “A contact problem for a piezoelectric actuator on an elasto-plastic obstacle,” *Fixed Point Theory Algorithms Sci. Engrg.*, 2022, **2022**, 1–12.
124. P. Krejčí, E. Rocca, and J. Sprekels, “Unsaturated deformable porous media flow with thermal phase transition,” *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2017, **27**, 2675–2710.
125. K. Kuhnen and P. Krejci, “Compensation of complex hysteresis and creep effects in piezoelectrically actuated systems — A new Preisach modeling approach,” *IEEE Trans. Autom. Control*, 2009, **54**, 537–550.
126. W. Lacarbonara and F. Vestroni, “Nonclassical responses of oscillators with hysteresis,” *Nonlinear Dynam.*, 2003, **32**, 235–258.
127. J. Lelkes and T. Kalmár-Nagy, “Analysis of a mass-spring-relay system with periodic forcing,” *Nonlinear Dynam.*, 2021, **106**, 21–44.
128. J. Li, H. Huang, and T. Morita, “Stepping piezoelectric actuators with large working stroke for nano-positioning systems: A review,” *Sensors Actuators A. Phys.*, 2019, **292**, 39–51.
129. Y. Li, S. Zhou, and G. Litak, “Robust design optimization of a nonlinear monostable energy harvester with uncertainties,” *Meccanica*, 2020, **55**, 1753–1762.
130. Y. Li, J. Zhu, Y. Li, and L. Zhu, “A hybrid Jiles–Atherton and Preisach model of dynamic magnetic hysteresis based on backpropagation neural networks,” *J. Magnetism Magnet. Mater.*, 2022, **544**, 168655.
131. G. Litak, J. Margielewicz, D. Gaška, A. Rysak, and C. Trígona, “On theoretical and numerical aspects of bifurcations and hysteresis effects in kinetic energy harvesters,” *Sensors*, 2022, **22**, 381.
132. V. T. Liu and H. Y. Wing, “Classical Preisach model based on polynomial approximation and applied to micro-piezoelectric actuators,” *Symmetry*, 2022, **14**, 1008.
133. Q. Lu, T. Gang, G. Hao, and L. Chen, “Compound optimal control of harmonic drive considering hysteresis characteristic,” *Mech. Sci.*, 2019, **10**, 383–391.
134. K. Lygas, P. Wolszczak, G. Litak, and P. Stączek, “Complex response of an oscillating vertical cantilever with clearance,” *Meccanica*, 2019, **54**, 1689–1702.
135. I. D. Mayergoyz, “Mathematical models of hysteresis,” *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **56**, No. 15, 1518–1521.
136. I. D. Mayergoyz, “Dynamic Preisach models of hysteresis,” *IEEE Trans. Magnet.*, 1998, **24**, 2925–2927.
137. I. Mayergoyz, *Mathematical Models of Hysteresis and Their Applications*, Elsevier, 2003.
138. I. D. Mayergoyz, A. A. Adly, M. W. Huang, and C. Krafft, “Experimental testing of vector Preisach models for superconducting hysteresis,” *IEEE Trans. Magnet.*, 2000, **36**, 3505–3507.
139. I. Mayergoyz and M. Dimian, “Analysis of spectral noise density of hysteretic systems driven by stochastic processes,” *J. Appl. Phys.*, 2003, **93**, No. 10, 6826–6828.
140. I. D. Mayergoyz and M. Dimian, “Stochastic aspects of hysteresis,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2005, **22**, 139–147.
141. I. D. Mayergoyz and G. Friedman, “Generalized Preisach model of hysteresis,” *IEEE Trans. Magnet.*, 1988, **24**, 212–217.

142. I. D. Mayergoyz, G. Friedman, and C. Salling, “Comparison of the classical and generalized Preisach hysteresis models with experiments,” *IEEE Trans. Magnet.*, 1989, **25**, 3925–3927.
143. I. D. Mayergoyz and C. E. Korman, “Preisach based storage devices and global optimizers,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2020, **15**, 20.
144. S. McCarthy and D. Rachinskii, “Dynamics of systems with Preisach memory near equilibria,” *Math. Bohem.*, 2014, **139**, No. 1, 39–73, URL: <https://dml.cz/dmlcz/143636>.
145. A. Mielke, “Evolution of rate-independent systems,” In: *Handbook of Differential Equations: Evolutionary Equations. Vol. II*, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2005, 461–559, DOI: 10.1016/S1874-5717(06)80009-5.
146. J. J. Moreau, “Rafle par un convexe variable (première partie),” *Trav. Sémin. Anal. Conv.*, 1971, **1**, No. 15, 1–43.
147. J. J. Moreau, “Rafle par un convexe variable (deuxième partie),” *Trav. Sémin. Anal. Conv.*, 1972, **2**, No. 3, 1–36.
148. J. J. Moreau, “Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert spaces,” *J. Differ. Equ.*, 1977, **26**, No. 3, 347–374, DOI: 10.1016/0022-0396(77)90085-7.
149. M. P. Mortell, R. E. O’Malley, A. Pokrovskii, and V. Sobolev, *Singular Perturbations and Hysteresis*, SIAM, Philadelphia, 2005.
150. C. Münch, “Optimal control of reaction-diffusion systems with hysteresis,” *ESAIM: Control Optim. Calc. Var.*, 2018, **24**, No. 4, 1453–1488.
151. L. Néel, “Théorie des lois d’aimantation de Lord Rayleigh: I. Les déplacements d’une paroi isolée,” *Cahiers de Physique*, 1942, **12**, 1–20.
152. S. O’Ceallaigh, A. Pimenov, A. Pokrovskii, D. Rachinskii, A. Zhezherun, “Algorithm for linear stability analysis in systems with Preisach hysteresis,” *Phys. B. Cond. Matt.*, 2008, **403**, 305–307.
153. J. Ortiz-Lopez and F. Luty, “Optical studies of thermal cycling and hysteresis effects in elastic order-disorder phase transformations. I. Pure alkali-metal cyanide crystals,” *Phys. Rev. B*, 1988, **37**, No. 10, 5452–5460.
154. L. Pál, “Stochastic model of hysteresis,” *Phys. Rev. E*, 2000, **61**, No. 4, 3490–3500.
155. M. Pasquale, V. Basso, G. Bertotti, D. C. Jiles, and Y. Bi, “Domain-wall motion in random potential and hysteresis modeling,” *J. Appl. Phys.*, 1998, **83**, 6497–6499.
156. J. S. Pei, B. Carboni, and W. Lacarbonara, “Mem-models as building blocks for simulation and identification of hysteretic systems,” *Nonlinear Dynam.*, 2020, **100**, No. 2, 973–998, DOI: 10.1007/s11071-020-05542-5.
157. A. Pimenov, T. C. Kelly, A. Korobeinikov, M. J. O’Callaghan, and A. Pokrovskii, “Systems with hysteresis in mathematical biology via a canonical example,” In: *Mathematical Modeling, Clustering Algorithms and Applications* Nova Science Publishers, 2012, 34.
158. A. Pimenov, T. C. Kelly, A. Korobeinikov, M. J. O’Callaghan, A. V. Pokrovskii, and D. Rachinskii, “Memory effects in population dynamics: spread of infectious disease as a case study,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2012, **7**, 204–226.
159. A. Pimenov, T. C. Kelly, A. Korobeinikov, M. J. O’Callaghan, and D. Rachinskii, “Memory and adaptive behavior in population dynamics: anti-predator behavior as a case study,” *J. Math. Biol.*, 2017, **74**, No. 6, 1533–1559.
160. A. Pimenov and D. Rachinskii, “Linear stability analysis of systems with Preisach memory,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2009, **11**, No. 4, 997–1018, DOI: 10.3934/dcdsb.2009.11.997.
161. A. Pokrovskii and V. Sobolev, “A naive view of time relaxation and hysteresis,” In: *Singular Perturbations and Hysteresis*, SIAM, 2005, 1–59.
162. F. Preisach, “Über die magnetische Nachwirkung,” *Z. Phys.*, 1935, **94**, 277–302.
163. F. Preisach, “On the magnetic aftereffect,” *IEEE Trans. Magnet.*, 2017, **53**, 0700111.
164. J. Prüss, “Periodic solutions of the thermostat problem,” In: *Differential Equations in Banach Spaces*, Proc. Conf., Bologna, July 2–5, 1985, Springer, Berlin–Heidelberg, 2006, 216–226.
165. D. Rachinskii, “Realization of arbitrary hysteresis by a low-dimensional gradient flow,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2016, **21**, No. 1, 227–243.
166. D. Rachinskii and S. Rouf, “Dynamics of SIR model with heterogeneous response to intervention policy,” *Theor. Popul. Biol.*, 2022, **146**, 71–85.
167. G. Radons and A. Zienert, “Nonlinear dynamics of complex hysteretic systems: Oscillator in a magnetic field,” *Eur. Phys. J. Spec. Topics*, 2013, **222**, 1675–1684.
168. A. Ramesh, D. C. Jiles, and J. M. Roderick, “A model of anisotropic anhysteretic magnetization,” *IEEE Trans. Magnet.*, 1996, **32**, 4234–4236.

169. J. M. Renno, M. F. Daqaq, and D. J. Inman, “On the optimal energy harvesting from a vibration source,” *J. Sound Vibr.*, 2009, **320**, No. 1-2, 386–405.
170. J. B. Restorff, H. T. Savage, A. E. Clark, and M. Wun-Fogle, “Preisach modeling of hysteresis in Terfenol,” *J. Appl. Phys.*, 1990, **67**, 5016–5018.
171. G. Robert, D. Damjanovic, and N. Setter, “Preisach modeling of ferroelectric pinched loops,” *Appl. Phys. Lett.*, 2000, **77**, No. 26, 4413–4415.
172. R. Roussel, A. Edelen, D. Ratner, K. Dubey, J. P. Gonzalez-Aguilera, Y. K. Kim, and N. Kuklev, “Differentiable Preisach modeling for characterization and optimization of particle accelerator systems with hysteresis,” *Phys. Rev. Lett.*, 2022, **128**, 204801.
173. M. Ruderman and T. Bertram, “Identification of soft magnetic B-H characteristics using discrete dynamic Preisach model and single measured hysteresis loop,” *IEEE Trans. Magnet.*, 2012, **48**, 1281–1284.
174. M. Scalerandi, M. Nobili, M. Griffa, A. S. Gliozzi, and F. Bosia, *Preisach–Mayergoyz approach to fatigue-induced irreversibility*, *Phys. Rev. B*, 2006, **73**, 092103.
175. S. Schubert and G. Radons, “Preisach models of hysteresis driven by Markovian input processes,” *Phys. Rev. E*, 2017, **96**, 022117.
176. B. Schweizer, “Hysteresis in porous media: Modelling and analysis,” *Interfaces Free Bound.*, 2017, **19**, 417–447.
177. M. E. Semenov, S. V. Borzunov, and P. A. Meleshenko, “A new way to compute the Lyapunov characteristic exponents for non-smooth and discontinues dynamical systems,” *Nonlinear Dynam.*, 2022, **109**, 1805–1821, DOI: 10.1007/s11071-022-07492-6.
178. M. E. Semenov, S. V. Borzunov, P. A. Meleshenko, and A. V. Lapin, “A model of optimal production planning based on the hysteretic demand curve,” *Mathematics*, 2022, **10**, No. 18, 3262, DOI: 10.3390/math10183262.
179. M. E. Semenov, P. A. Meleshenko, S. V. Borzunov, O. O. Reshetova, and A. I. Barsukov, “A simple model of the energy harvester within a linear and hysteresis approach,” *Micromachines*, 2023, **14**, 310, DOI: 10.3390/mi14020310.
180. M. E. Semenov, O. O. Reshetova, S. V. Borzunov, and P. A. Meleshenko, “Self-oscillations in a system with hysteresis: the small parameter approach,” *Eur. Phys. J. Spec. Topics*, 2021, **230**, 3565–3571, DOI: 10.1140/epjs/s11734-021-00237-3.
181. M. E. Semenov, O. O. Reshetova, A. V. Tolkachev, A. M. Solovyov, and P. A. Meleshenko, “Oscillations under hysteretic conditions: From simple oscillator to discrete sine–Gordon model,” In: *Topics in Nonlinear Mechanics and Physics*, Springer, Singapore, 2019, 229–254, DOI: 10.1007/978-981-13-9463-8_12.
182. M. E. Semenov, A. M. Solovyov, and P. A. Meleshenko, “Stabilization of coupled inverted pendula: From discrete to continuous case,” *J. Vibr. Control*, 2021, **27**, No. 1-2, 43–56, DOI: 10.1177/1077546320923436.
183. M. E. Semenov, A. M. Solovyov, P. A. Meleshenko, and J. M. Balthazar, “Nonlinear damping: from viscous to hysteretic dampers,” In: *Recent Trends in Applied Nonlinear Mechanics and Physics: Selected Papers from CSNDD 2016*, Springer, Cham, 2017, 259–275. DOI: 10.1007/978-3-319-63937-6_15.
184. M. E. Semenov, A. M. Solovyov, P. A. Meleshenko, and O. O. Reshetova, “Efficiency of hysteretic damper in oscillating systems,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2020, **15**, 43, DOI: 10.1051/mmnp/2019053.
185. P. D. Spanos, P. Cacciola, and J. Redhorse, “Random vibration of SMA systems via Preisach formalism,” *Nonlinear Dynam.*, 2004, **36**, 405–419.
186. P. D. Spanos, A. Matteo, and A. Di Pirrotta, “Steady-state dynamic response of various hysteretic systems endowed with fractional derivative elements,” *Nonlinear Dynam.*, 2019, **98**, 3113–3124.
187. P. D. Spanos and G. Muscolino, “Stochastic averaging of Preisach hysteretic systems,” *J. Engrg. Mech.*, 2004, **130**, 1257–1267.
188. E. C. Stoner and E. P. Wohlfarth, “A mechanism of magnetic hysteresis in heterogeneous alloys,” *Proc. R. Soc. London Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1948, **240**, 599–642.
189. Z. Szabó and J. Füzi, “Implementation and identification of Preisach type hysteresis models with Everett function in closed form,” *J. Magnetism Magnet. Mater.*, 2016, **406**, 251–258.
190. M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction*, Wiley-Interscience, London, 1989.
191. J. Takács, “The Everett integral and its analytical approximation,” In: *Advanced Magnetic Materials*, INTECH, 2012, 203–230.
192. C. Tannous and J. Gieraltowski, “A Stoner–Wohlfarth model redux: static properties,” *Phys. B. Cond. Matt.*, 2008, **403**, 3563–3570.
193. T. Tsabedze and J. Zhang, “Design, characterization, modeling, and comparison of helically wrapped super-coiled polymer artificial muscles,” *Sensors Actuators A. Phys.*, 2021, **331**, 113018.

194. I. Urbanavičiūtė, T. D. Cornelissen, X. Meng, R. P. Sijbesma, and M. Kemerink, “Physical reality of the Preisach model for organic ferroelectrics,” *Nature Commun.*, 2018, **9**, No. 1, 1–11.
195. P. Venegas, D. Gómez, M. Arrinda, M. Oyarbide, H. Macicior, and A. Bermúdez, “Kalman filter and classical Preisach hysteresis model applied to the state of charge battery estimation,” *Comput. Math. Appl.*, 2022, **118**, 74–84.
196. A. Visintin, “Evolution problems with hysteresis in the source term,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1986, **17**, 1113–1138, DOI: 10.1137/0517079.
197. A. Visintin, *Differential Models of Hysteresis*, Springer, 1994.
198. A. Visintin, “Ten issues about hysteresis,” *Acta Appl. Math.*, 2014, **132**, 635–647, DOI: 10.1007/s10440-014-9936-6.
199. C. Visone, C. Serpico, I. D. Mayergoyz, M. W. Huang, and A. A. Adly, “Neural-Preisach-type models and their application to the identification of magnetic hysteresis from noisy data,” *Phys. B. Cond. Matt.*, 2000, **275**, 223–227.
200. P. Weiss and J. de Freudenreich, “Étude de l’aimantation initiale en fonction de la température,” *Arch. Sci. Phys. Natur.*, 1916, **42**, 449–470.
201. V. V. Yevstafyeva, “Criterion for the existence of two-point oscillatory solution of a perturbed system with a relay,” *Math. Notes*, 2023, **114**, No. 1, 212–222, DOI: 10.1134/S0001434623070222.
202. K. Zhang, T. Zhao, and H. Fujiwara, “Training effect of exchange biased iron–oxide/ferromagnet systems,” *J. Appl. Phys.*, 2001, **89**, 6910–6912.

M. E. Semenov

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: mkl1150@mail.ru

S. V. Borzunov

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: sborzunov@gmail.com

O. I. Kanischeva

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: oleka_olesya@mail.ru

A. I. Proshunin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: alexfrauch@gmail.com

P. A. Meleshenko

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: melechp@yandex.ru