

УДК 517.958; 517.929

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-287-298

EDN: NGZDSK

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ В РЕШЕНИИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

В. Л. ПРЯДИЕВ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Осуществляется один подход к описанию решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на конечном и ограниченном геометрическом графе Γ . Линейные условия трансмиссии имеют вид более общий, нежели рассмотренные в предыдущих работах. Подход основан на толковании поведения решения в вершинах Γ как граничных режимов по отношению к примыкающим рёбрам. Набор этих граничных режимов оказывается решением начальной задачи для системы дифференциальных уравнений на $[0; +\infty)$ с запаздывающими аргументами, с количеством запаздываний, неограниченно растущим при неограниченном росте аргумента.

Ключевые слова: волновое уравнение на геометрическом графе, условие трансмиссии, распространение граничного режима, система дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами, существование и единственность решения, формула решения.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2025-1530.

Для цитирования: В. Л. Прядиев. Метод граничных режимов в решении начально-краевой задачи для волнового уравнения на геометрическом графе // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 287–298. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-287-298>

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье осуществлён один из возможных подходов к описанию решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на геометрическом графе Γ при условиях трансмиссии вида

$$\sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; t) u_h^+(a, t) = k(a)u(a, t) + \varkappa(a)u_t(a, t) + m(a)u_{tt}(a, t), \quad a \in J, \quad t > 0. \quad (1.1)$$

Здесь u обозначает вещественное решение названного уравнения, J — множество внутренних вершин Γ , $D(a)$ — множество единичных векторов, допустимых в точке a относительно Γ , $u_h^+(a, t)$ — правую производную функции $u(\cdot, t)$ в точке a по направлению h , $u_t(a, t)$ и $u_{tt}(a, t)$ — первую и вторую производные по временной переменной t от функции $u(a, \cdot)$; вещественные числа $k(a)$, $\varkappa(a)$ и $m(a)$ для каждой вершины a фиксированы, как и вещественные функции $\alpha(a, h; \cdot)$ — для каждой пары $(a; h)$. Заметим, что существование правых производных $u_h^+(a, t)$ влечёт непрерывность $u(\cdot, t)$ в точке a .

В случае, когда $k(a) = 0 = \kappa(a) = m(a)$ и $\alpha(a, h; \cdot) \equiv \text{const}$ для всех $a \in J$ и $h \in D(a)$, исследованию такой задачи на топологически произвольном Γ посвящены работы [2, 4, 6, 7], в которых получены разные по форме аналоги формулы Даламбера. При этом в [7] в качестве промежуточного этапа был использован метод Фурье, а в [2, 4, 6] метод Фурье не применялся, а использовалось правило прохождения бегущей волны через узел, представляющее собой, по сути, принцип Гюйгенса.

В случае же, когда $\alpha(a, h; \cdot) \not\equiv \text{const}$ или $\kappa(a) \neq 0$ хотя бы для одной $a \in J$, во-первых, метод Фурье неприменим, а во-вторых, отсутствует принцип Гюйгенса. Эти обстоятельства тем более имеют место, если вдобавок хотя бы одно из чисел $k(a)$ или $m(a)$ отлично от нуля. В этом случае подход, который мы назовём *методом граничных режимов*, был успешно применён в ситуации, когда $\alpha(a, h; \cdot) \equiv 1$, $m(a) = 0$, и ровно один из коэффициентов $\kappa(a)$ и $k(a)$ положителен, а другой равен 0 (см. [1, 5]). Метод граничных режимов, если кратко, основан на трактовке функции $u(a, \cdot)$ для каждой $a \in J$ как граничного режима для решений волновых уравнений на примыкающих рёбрах. Этот метод реализован в настоящей статье для любых функций $\alpha(a, h; \cdot)$ из $C^1[0; +\infty)$ и чисел $k(a)$, $\kappa(a)$ и $m(a)$, удовлетворяющих приводимому ниже условию (4.1). Заметим: в случаях, рассмотренных в [1, 5] и имеющих ясную физическую интерпретацию, (4.1) выполняется.

2. ОСНОВНОЙ ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Пусть Γ — связный геометрический граф из $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, понимаемый в соответствии с монографией [3] (см. там п. 3.1.1, первый абзац). Это означает, что Γ есть связное объединение конечного числа интервалов вида $(a; b) = \{a + \lambda(b - a) \mid 0 < \lambda < 1\}$, называемых *рёбрами*, и некоторого подмножества J множества всех концов этих интервалов. О рёбрах дополнительно предполагается, что $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ для любых различных рёбер γ_1 и γ_2 ; здесь и далее: если $M \subset \mathbb{R}^n$, то $\overline{M}$ — замыкание M по евклидовой метрике $\mathbb{R}^n$. Точки из J называются *внутренними вершинами* Γ . Концы рёбер, не вошедшие в J (а значит, и в Γ), называются *граничными вершинами* Γ , а их множество обозначается символом $\partial\Gamma$. Объединение всех рёбер обозначается $R(\Gamma)$. Отметим, что $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ и $\Gamma \cap \partial\Gamma = \emptyset$.

Для определения производной от функции, заданной на Γ или на $R(\Gamma)$, все рёбра Γ ориентируются, а именно, каждому $\gamma = (a, b)$, являющемуся ребром Γ , ставится в соответствие один из двух векторов единичной длины, коллинеарных вектору $b - a$. Этот вектор обозначим через h_γ .

Если вещественная функция w определена в точках ребра γ и $x \in \gamma$, то производной функции w в точке x называется число $w'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1}[w(x + \varepsilon h_\gamma) - w(x)]$, т. е. производная w в точке x по вектору h_γ . Ясно, что $w'(x)$ от выбора ориентации γ (от выбора вектора h_γ) не зависит. Если вещественная функция w определена в вершине c и на примыкающих к c рёбрах, а

$$D(c) = \{h \in \mathbb{R}^n \mid |h| = 1 \text{ и } (c + \varepsilon h) \in \Gamma \text{ для достаточно малых } \varepsilon > 0\}$$

— множество допустимых в точке c относительно $\overline{\Gamma}$ единичных векторов, то символом $w_h^+(c)$ обозначим правую производную w в точке c по вектору h . Если существуют $w_h^+(c + \varepsilon h)$ для достаточно малых $\varepsilon \geq 0$, то $w_{hh}^{++}(c)$ будет обозначать правую производную от функции w_h^+ в точке c по вектору h .

Если вещественная функция u определена в точках множества $R(\Gamma) \times [0; +\infty)$, то $u_x(x, t)$ и $u_{xx}(x, t)$ будут обозначать, соответственно, первую и вторую производные функции $u(\cdot, t)$ в точке x . Если к тому же u определена в точках множества $\overline{\Gamma} \times [0; +\infty)$, и c — вершина Γ , то $u_h^+(c, t)$ и $u_{hh}^{++}(c, t)$ будут обозначать, соответственно, первую и вторую правые производные $u(\cdot, t)$ в вершине c по вектору $h \in D(c)$. Наконец, для вещественной функции u , определённой в точках множества $R(\Gamma) \times (0; +\infty)$ или в точках множества $\overline{\Gamma} \times (0; +\infty)$, символы $u_t(x, t)$ и $u_{tt}(x, t)$ будут обозначать, соответственно, первую и вторую производные $u(x, \cdot)$ в точке t .

Основной объект исследования в данной работе — это начально-краевая задача для волнового уравнения

$$u_{xx}(x, t) = u_{tt}(x, t), \quad x \in R(\Gamma), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

при условиях трансмиссии (1.1), начальных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{и} \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \overline{\Gamma}, \quad (2.2)$$

и краевых условиях

$$u(b, t) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \quad t \geq 0; \quad (2.3)$$

здесь $u : \bar{\Gamma} \times [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ — искомая функция, а вещественные числа $k(a)$, $\varkappa(a)$ и $m(a)$ и вещественные функции $\alpha(a, h; \cdot)$, φ и ψ заданы.

Всюду далее $J \neq \emptyset$, так как при $J = \emptyset$ задача (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) есть начально-краевая задача для волнового уравнения на конечном интервале с однородными краевыми условиями первого рода, имеющая хорошо известные эффективные представления решения, и исследование которой поэтому в настоящей статье не предполагается.

Решение u задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) понимается классически, а именно, предполагается:

- 1) u , u_t и u_{tt} непрерывны на $\bar{\Gamma} \times [0; +\infty)$,
- 2) для любого ребра γ выполнено $u|_{\gamma \times [0; +\infty)} \in C^2(\bar{\gamma} \times [0; +\infty))$.

Из выполнения этих требований и уравнения (2.1) вытекает, что $u_{xx}(\cdot, t)$ при любом $t \geq 0$, во-первых, непрерывна на $R(\Gamma)$, а во-вторых, доопределяема по непрерывности на $\bar{\Gamma}$. Но тогда для любой $c \in J \cup \partial\Gamma$ и любого $h \in D(c)$ существуют $u_h^+(c, t)$ и $u_{hh}^{++}(c, t)$ (при всех $t \geq 0$). Беря теперь в (2.1) $x = c + \varepsilon h$, где $c \in J \cup \partial\Gamma$, $h \in D(c)$, а $\varepsilon \geq 0$ достаточно мало, и устремляя ε к 0, получим:

$$u_{hh}^{++}(c, t) = u_{tt}(c, t), \quad c \in J \cup \partial\Gamma, \quad h \in D(c), \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

Перейдём к согласованию начальных условий (2.2) с уравнением (2.1), краевыми условиями (2.3) и условиями трансмиссии (1.1). Из требований к регулярности решения задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) следует, что $\varphi \in C(\bar{\Gamma})$ и $\psi \in C(\bar{\Gamma})$, а также, что для любого ребра γ выполнены $\varphi|_{\bar{\gamma}} \in C^2(\bar{\gamma})$ и $\psi|_{\bar{\gamma}} \in C^1(\bar{\gamma})$. Кроме того, беря в (2.4) $t = 0$, получим

$$\varphi_{hh}^{++}(c) = \varphi_{\eta\eta}^{++}(c) = u_{tt}(c, 0), \quad c \in J \cup \partial\Gamma, \quad h \in D(c), \quad \eta \in D(c). \quad (2.5)$$

Из (2.3) следует, что для любой $b \in \partial\Gamma$ не только $u(b, \cdot) \equiv 0$, но и $u_t(b, \cdot) \equiv 0 \equiv u_{tt}(b, \cdot)$, что влечёт

$$\varphi(b) = 0 = \psi(b), \quad b \in \partial\Gamma, \quad (2.6)$$

и, с учётом ещё и (2.5),

$$\varphi_{hh}^{++}(b) = 0, \quad b \in \partial\Gamma, \quad h \in D(b). \quad (2.7)$$

Наконец, подстановка $t = 0+$ в условия трансмиссии (1.1) даёт, в сочетании с (2.2) и (2.5), равенства

$$\sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \varphi_h^+(a) = k(a) \varphi(a) + \varkappa(a) \psi(a) + m(a) \varphi_{\eta\eta}^{++}(a), \quad a \in J, \quad \eta \in D(a). \quad (2.8)$$

Если $m(a) = 0$, то, сначала дифференцируя по t левую и правую части в условии трансмиссии (1.1) и затем полагая там $t = 0+$, получим, вдобавок к (2.8):

$$\sum_{h \in D(a)} [\alpha(a, h; 0) \psi_h^+(a) + \alpha'(a, h; 0) \varphi_h^+(a)] = k(a) \psi(a) + \varkappa(a) \varphi_{\eta\eta}^{++}(a), \quad a \in J, \quad \eta \in D(a), \quad (2.9)$$

— если, например, дополнительно $\alpha(a, h; \cdot) \in C^1[0; +\infty)$ при $a \in J$ и $h \in D(a)$. Все вышеперечисленные условия на φ и ψ , а также включения $\alpha(a, h; \cdot) \in C^1[0; +\infty)$, $a \in J$, $h \in D(a)$, ниже предполагаются выполненными.

В следующих двух разделах, начиная с леммы 3.1, мы рассматриваем только случай, когда $\partial\Gamma = \emptyset$, а в пятом разделе покажем, как случай $\partial\Gamma \neq \emptyset$ можно свести к случаю $\partial\Gamma = \emptyset$.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ, СВОДЯЩЕЕ В СЛУЧАЕ $\partial\Gamma = \emptyset$ ЗАДАЧУ (2.1), (1.1), (2.2) К НАБОРУ ЗАДАЧ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ГРАНИЧНЫХ РЕЖИМОВ

Вершины a и b из $J \cup \partial\Gamma$ назовём *смежными*, если интервал $(a; b)$ является ребром Γ . Если a и b смежны, то будем писать: $a \leftrightarrow b$. Через $h(a, b)$ обозначается далее вектор $|b - a|^{-1} \cdot (b - a)$. Поскольку для любой $a \in J$ соответствие $b \mapsto h(a, b)$ взаимно-однозначно отображает $\{b \mid b \leftrightarrow a\}$ в $D(a)$, то суммирование по всем $h \in D(a)$ (см., например, (1.1), (2.8) и (2.9)) можно заменить на

суммирование по всем b , смежным с a ; а именно, если $a \in J$ и для любого $h \in D(a)$ определено число $\beta(a, h; t)$ (здесь t рассматривается как параметр), то

$$\sum_{h \in D(a)} \beta(a, h; t) = \sum_{b \mid b \leftrightarrow a} \beta(a, h(a, b); t). \quad (3.1)$$

Этим переходом в суммировании, как в одну, так и в другую сторону, мы будем постоянно пользоваться.

Ниже для $a \leftrightarrow b$ определим $\varphi_{a,b}^\circ(y) = \varphi(a + y \cdot h(a, b))$ и $\psi_{a,b}^\circ(y) = \psi(a + y \cdot h(a, b))$, где в обоих случаях $0 \leq y \leq |b - a|$, и рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} z_{yy}(y, t) = z_{tt}(y, t), & 0 < y < |b - a|, \quad t > 0, \\ z(0, t) = \mu_a(t), \quad z(|b - a|, t) = \mu_b(t), & t \geq 0, \\ z(y, 0) = \varphi_{a,b}^\circ(y), \quad z_t(y, 0) = \psi_{a,b}^\circ(y), & 0 \leq y \leq |b - a|, \end{cases} \quad (3.2)$$

в которой вещественные функции μ_a и μ_b заданы. Классическое решение задачи (3.2) обозначим $v(\cdot, \cdot; a, b)$.

Замечание 3.1. Так как уже $\varphi|_{\bar{\gamma}} \in C^2(\bar{\gamma})$ и $\psi|_{\bar{\gamma}} \in C^1(\bar{\gamma})$ для любого ребра γ , то для существования $v(\cdot, \cdot; a, b)$ необходимо и достаточно выполнения ещё следующих условий согласования: $\mu_a \in C^2[0; +\infty)$, $\mu_b \in C^2[0; +\infty)$, $\mu_a(0) = \varphi(a)$, $\mu_b(0) = \varphi(b)$, $\mu'_a(0) = \psi(a)$, $\mu'_b(0) = \psi(b)$, $\mu''_a(0) = (\varphi_{a,b}^\circ)''(0)$, $\mu''_b(0) = (\varphi_{b,a}^\circ)''(0)$. При этом в силу (2.5)

$$(\varphi_{a,b}^\circ)''(0) = \varphi_{\eta\eta}^{++}(a), \quad b \leftrightarrow a, \quad \eta \in D(a). \quad (3.3)$$

Лемма 3.1. Пусть $\partial\Gamma = \emptyset$, и пусть

(А) набор $\mu = (\mu_a)_{a \in J}$ вещественных функций, определённых на $[0; +\infty)$, таков, что для любой пары смежных вершин a и b существует $v(\cdot, \cdot; a, b)$, причём для любой $a \in J$

$$\sum_{b \mid b \leftrightarrow a} \alpha(a, h(a, b); t) v_y(0, t; a, b) = k(a) \mu_a(t) + \kappa(a) \mu'_a(t) + m(a) \mu''_a(t), \quad t \geq 0. \quad (3.4)$$

Тогда функция u , определяемая равенствами

$$u(x, t) = v(|x - a|, t; a, b), \quad a \leftrightarrow b, \quad x \in [a; b], \quad t \geq 0, \quad (3.5)$$

является решением задачи (2.1), (1.1), (2.2). Верно и обратное: если $\partial\Gamma = \emptyset$, а функция u является решением задачи (2.1), (1.1), (2.2), то для набора $\mu = (u(a, \cdot))_{a \in J}$ выполнено свойство (А), причём если $a \leftrightarrow b$, то $v(y, t; a, b) = u(a + y \cdot h(a, b), t)$ при всех $y \in [0; |b - a|]$ и $t \geq 0$.

Доказательство. Доказательство осуществляется непосредственной проверкой. $\square$

Следствие 3.1. В случае $\partial\Gamma = \emptyset$ единственность решения задачи (2.1), (1.1), (2.2) равносильна единственности набора μ , удовлетворяющего условию (А) леммы 3.1.

Переформулируем теперь условие (А) леммы 3.1, исключая из (3.4) $v_y(0, t; a, b)$ за счёт возможности выразить $v(\cdot, \cdot; a, b)$ через φ , ψ , μ_a и μ_b .

Зафиксируем пока смежные вершины a и b и договоримся при такой фиксации использовать ℓ вместо $|b - a|$, а ξ — как общее обозначение для функций μ_a и μ_b . Обозначим через $\varphi_{a,b}$ нечётную и 2ℓ -периодическую функцию, определённую на $\mathbb{R} \setminus (\ell\mathbb{Z})$ ($\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел) и совпадающую с $\varphi_{a,b}^\circ$ на $(0; \ell)$. Производная $\varphi'_{a,b}$ доопределяема по непрерывности в точках $\ell\mathbb{Z}$; это доопределение обозначим через $\overline{\varphi'_{a,b}}$. Так же, как по сужению $\varphi_{a,b}^\circ|_{(a;b)}$ мы определили только что $\varphi_{a,b}$, определим функцию $\psi_{a,b}$ по сужению $\psi_{a,b}^\circ|_{(a;b)}$. Всюду далее функции $\varphi_{a,b}$ и $\psi_{a,b}$ считаются доопределёнными в точках из $\ell\mathbb{Z}$ следующим образом: в точках из $\ell\mathbb{N}$ — по непрерывности справа, а в точках из $\ell(\{0\} \cup (-\mathbb{N}))$ — по непрерывности слева. Такое доопределение согласовано с формулой оператора $\mathcal{G}_\ell$, описывающего распространение правого граничного режима для волнового уравнения на отрезке:

$$(\mathcal{G}_\ell \xi)(y) = \begin{cases} \sum_{p=0}^{\sigma_1(y, \ell)} \xi(y - (2p + 1)\ell) & \text{при } y \geq 0, \\ -(\mathcal{G}_\ell \xi)(-y) & \text{при } y < 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

где $\sigma_1(y, \ell)$ есть целая часть числа $(y - \ell)/(2\ell)$.

Решение задачи (3.2) представимо в виде:

$$v(y, t; a, b) = f_{a,b}(y+t) + f_{a,b}(y-t) + \frac{1}{2} \int_{y-t}^{y+t} \psi_{a,b}(s) ds, \quad 0 \leq y \leq \ell, \quad t \geq 0, \quad (3.7)$$

где $f_{a,b} = \frac{1}{2} \varphi_{a,b} + \mathcal{F}_\ell \mu_a + \mathcal{G}_\ell \mu_b$, а $(\mathcal{F}_\ell \xi)(y) = (\mathcal{G}_\ell \xi)(\ell - y)$, $y \in \mathbb{R}$. Покажем, что

$$v_y(0, t; a, b) = \overline{\varphi'_{a,b}}(t) + \psi_{a,b}(t) + 2(\mathcal{G}_\ell \mu'_b)(t) - (\mathcal{G}_\ell \mu'_a)(t - \ell) - (\mathcal{G}_\ell \mu'_a)(t + \ell), \quad t \geq 0 \quad (3.8)$$

(здесь $\mathcal{G}_\ell \xi'$ обозначает не производную функции $\mathcal{G}_\ell \xi$, а образ производной ξ' при действии на неё оператора $\mathcal{G}_\ell$). Для этого сначала заметим, что слагаемые, суммой которых определяется $f_{a,b}$, дифференцируемы в точках, не лежащих в $\ell\mathbb{Z}$, и поэтому правую часть (3.7) можно дифференцировать почленно в точках множества $\Pi \setminus \chi$, где $\Pi = (0; \ell) \times (0; +\infty)$, $\chi = \{(y, t) \mid (y+t) \in \ell\mathbb{Z} \vee (y-t) \in \ell\mathbb{Z}\}$. Далее, если точка $(y; t)$ лежит в какой-либо из компонент связности Ω множества $\Pi \setminus \chi$, то те или иные верхние пределы суммирования $\sigma_1(t+y, \ell)$, $\sigma_1(\pm(t-y), \ell)$, $\sigma_1(t+(\ell-y), \ell)$ и $\sigma_1(\pm(t-(\ell-y)), \ell)$, возникающие в (3.7) по применению формулы (3.6), зависят только от Ω , но не зависят от выбора $(y; t) \in \Omega$; значит, при дифференцировании внутри Ω функций $(\mathcal{G}_\ell \xi)(y \pm t)$ и $(\mathcal{F}_\ell \xi)(y \pm t)$ производные от сумм, определяющих эти функции согласно формуле (3.6), можно вносить под знак этих сумм — ибо количество слагаемых в этих суммах фиксировано для всех $(y; t) \in \Omega$. Таким образом, дифференцирование (3.7) по y даёт

$$v_y(y, t; a, b) = \frac{1}{2} \overline{\varphi'_{a,b}}(y+t) - (\mathcal{G}_\ell \mu'_a)(y+t-\ell) + (\mathcal{G}_\ell \mu'_b)(y+t) + \frac{1}{2} \overline{\varphi'_{a,b}}(t-y) - (\mathcal{G}_\ell \mu'_a)(t-y+\ell) + (\mathcal{G}_\ell \mu'_b)(t-y) + \frac{1}{2} \psi_{a,b}(y+t) + \frac{1}{2} \psi_{a,b}(t-y), \quad (y; t) \in \Pi \setminus \chi. \quad (3.9)$$

Непосредственно проверяется, что предельный переход в правой части (3.9) при $(y, t) \rightarrow (y_0, t_0) \in (\Pi \cap \chi) \cup \partial\Pi$, где $\partial\Pi$ — граница Π , даёт такое же выражение, как и в правой части (3.9), только при $y = y_0$ и $t = t_0$, т. е. в (3.9) вместо примечания $(y; t) \in \Pi \setminus \chi$ можно написать $(y; t) \in \overline{\Pi}$. Взяв теперь $y = 0$ в (3.9), получим (3.8).

В силу (3.6) $(\mathcal{G}_\ell \mu'_a)(t + \ell) = \mu'_a(t) + (\mathcal{G}_\ell \mu'_a)(t - \ell)$ для любого $t > 0$. С учётом этого подстановка (3.8) в левую часть (3.4) даёт

$$\sum_{b \mid b \leftrightarrow a} \alpha(a, h(a, b); t) \left\{ \overline{\varphi'_{a,b}}(t) + \psi_{a,b}(t) + 2(\mathcal{G}_{|b-a|} \mu'_b)(t) - 2(\mathcal{G}_{|b-a|} \mu'_a)(t - |b-a|) - \mu'_a(t) \right\} = \\ = m(a) \mu''_a(t) + \varkappa(a) \mu'_a(t) + k(a) \mu_a(t), \quad t > 0, \quad a \in J,$$

т. е. $\mu|_{(0; +\infty)}$ есть решение следующей системы дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами:

$$m(a) \nu''_a(t) + \left(\varkappa(a) + \sum_{b \mid b \leftrightarrow a} \alpha(a, h(a, b); t) \right) \nu'_a(t) + k(a) \nu_a(t) = \\ = \sum_{b \mid b \leftrightarrow a} \alpha(a, h(a, b); t) \left\{ 2(\mathcal{G}_{|b-a|} \nu'_b)(t) - 2(\mathcal{G}_{|b-a|} \nu'_a)(t - |b-a|) + \overline{\varphi'_{a,b}}(t) + \psi_{a,b}(t) \right\}, \quad t > 0, \quad a \in J; \quad (3.10)$$

$\nu = (\nu_a)_{a \in J}$ в (3.10) — искомое решение. Принимая во внимание, что μ определён на $[0; +\infty)$, а также то, что в дальнейшем для системы (3.10) мы будем рассматривать начальную задачу в точке $t = 0$, договоримся всегда считать, что решение ν этой системы определено на $[0; +\infty)$.

Итак, с учётом замечания 3.1, нами доказана следующая лемма.

Лемма 3.2. Пусть $\partial\Gamma = \emptyset$. Тогда условие (A) леммы 3.1 эквивалентно тому, что

- 1) $\mu \in C^2[0; +\infty)$,
- 2) μ является решением системы уравнений (3.10),
- 3) для любой $a \in J$ выполнены равенства

$$\mu_a(0) = \varphi(a), \quad \mu'_a(0) = \psi(a), \quad \mu''_a(0) = (\varphi_{a,b}^\circ)''(0) = \varphi_{\eta\eta}^{++}(a) - \text{при всех } b \leftrightarrow a \text{ и } \eta \in D(a). \quad (3.11)$$

Следующая лемма показывает, что список равенств в (3.11) может быть уменьшен до естественного списка начальных условий для системы уравнений (3.10).

Лемма 3.3. Пусть $\partial\Gamma = \emptyset$ и

$$|m(a)| + \left| \varkappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \right| > 0, \quad a \in J. \quad (3.12)$$

Тогда условие (A) леммы 3.1 эквивалентно тому, что μ принадлежит $C^2[0; +\infty)$ и является решением начальной задачи

$$\nu_a(0) = \varphi(a), \quad a \in J, \quad (3.13)$$

$$m(a) \neq 0 \Rightarrow \nu'_a(0) = \psi(a), \quad a \in J. \quad (3.14)$$

для системы уравнений (3.10).

Всюду далее для каждого $a \in J$ левую часть в равенстве (3.10) будем обозначать через $(L_a\nu)(t)$, а правую — через $(M_a\nu)(t)$.

Доказательство леммы 3.3. В силу леммы 3.2 достаточно доказать, что если в условиях леммы 3.3 μ есть решение задачи (3.10), (3.13), (3.14), то для любой $a \in J$ помимо первого равенства в (3.11) выполнены как второе (в том числе при $m(a) = 0$), так и остальные.

Для любых смежных вершин a и b при достаточно малых $t > 0$ имеем $\sigma_1(t, |b-a|) = -1$ и $\sigma_1(|b-a|-t, |b-a|) = -1$, и тогда из (3.6) следует, что $(\mathcal{G}_{|b-a|}\nu'_b)(t) = 0$ и $(\mathcal{G}_{|b-a|}\nu'_a)(t-|b-a|) = 0$ — при таких t . Поэтому из (3.10) вытекает:

$$(L_a\nu)(t) = \sum_{b \mid b \leftrightarrow a} \alpha(a, h(a, b); t) (\varphi'_{a,b}(t) + \psi_{a,b}(t)), \quad t > 0 \text{ и достаточно мало, } a \in J. \quad (3.15)$$

Беря $\nu = \mu$ в (3.15) и переходя к пределу при $t \rightarrow 0+$, получим с учётом (3.1) равенства

$$(L_a\mu)(0+) = \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) (\varphi_h^+(a) + \psi(a)), \quad a \in J, \quad (3.16)$$

$$(L_a\mu)'(0+) = \sum_{h \in D(a)} \{ \alpha'(a, h; 0) [\varphi_h^+(a) + \psi(a)] + \alpha(a, h; 0) [\varphi_{hh}^{++}(a) + \psi_h^+(a)] \}, \quad a \in J. \quad (3.17)$$

Допустим пока, что $m(a) \neq 0$ для некоторой $a \in J$. Тогда второе равенство в (3.11) выполнено, ибо μ удовлетворяет условию (3.14). С учётом этого (3.16) принимает вид:

$$m(a)\mu''_a(0) + \left(\varkappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \right) \psi(a) + k(a)\varphi(a) = \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) (\varphi_h^+(a) + \psi(a)). \quad (3.18)$$

В силу (2.8) равенство (3.18) эквивалентно тому, что

$$m(a)(\mu''_a(0) - \varphi_{\eta\eta}^{++}(a)) = 0, \quad \eta \in D(a),$$

откуда ввиду $m(a) \neq 0$ следуют и остальные равенства из (3.11). Итак, при $m(a) \neq 0$ все равенства из (3.11) выполняются.

Пусть теперь $m(a) = 0$ для какой-то $a \in J$. Тогда (3.16) принимает вид:

$$\left(\varkappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \right) \mu'_a(0) + k(a)\varphi(a) = \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) (\varphi_h^+(a) + \psi(a)). \quad (3.19)$$

С учётом (2.8) равенство (3.19) эквивалентно тому, что

$$\left(\varkappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \right) (\mu'_a(0) - \psi(a)) = 0,$$

откуда в силу (3.12) следует второе равенство из (3.11). С учётом него и $m(a) = 0$, равенство (3.17) принимает вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{h \in D(a)} \alpha'(a, h; 0) \psi(a) + \left(\varkappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \right) \mu_a''(0) + k(a) \psi(a) = \\ & = \sum_{h \in D(a)} \{ \alpha'(a, h; 0) [\varphi_h^+(a) + \psi(a)] + \alpha(a, h; 0) [\varphi_{hh}^{++}(a) + \psi_h^+(a)] \}. \end{aligned}$$

Это равенство в силу (2.9) и (2.5) эквивалентно равенствам

$$\left(\varkappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; 0) \right) [\mu_a''(0) - \varphi_{\eta\eta}^{++}(a)] = 0, \quad \eta \in D(a),$$

из которых ввиду (3.12) следуют остальные равенства из (3.11).

Выполнение равенств (3.11) окончательно доказано, а вместе с этим доказана и лемма 3.3. $\square$

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (2.1), (1.1), (2.2) В СЛУЧАЕ $\partial\Gamma = \emptyset$

С помощью представления (3.7) при $\partial\Gamma = \emptyset$ леммы 3.1 и 3.3 сводят решение задачи (2.1), (1.1), (2.2) к решению задачи (3.10), (3.13), (3.14). Поэтому естественно выяснить то, как разрешима последняя.

Следующая лемма — о том, что в лемме 3.3 изначальные требования к гладкости решения задачи (3.10), (3.13), (3.14) можно понизить.

Лемма 4.1. Пусть $\partial\Gamma = \emptyset$ и

$$|m(a)| + \left| \varkappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; t) \right| > 0, \quad a \in J, \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

Тогда решение задачи (3.10), (3.13), (3.14) существует, единственно и дважды непрерывно дифференцируемо на $[0; +\infty)$.

Доказательство. Доказательство проведём методом шагов. Для этого рассмотрим множество

$$S = \left(\bigcup_{a \in J} \left(\bigcup_{b \mapsto a} |b - a| \mathbb{N} \right) \right) \cup \{0\},$$

которое представимо в виде: $S = \{s_0; s_1; s_2; \dots\}$, где $s_0 = 0$ и $s_i < s_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2, \dots$). Отметим:

$$s_i - s_{i-1} \leq \rho = \min \{ |b - a| \mid a \in J, b \mapsto a \}, \quad i \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

На каждом $[0; s_i]$, $i \in \mathbb{N}$, определим набор вещественных функций $\mu^i = (\mu_a^i)_{a \in J}$ согласно правилу:

1) μ^1 есть решение задачи

$$(L_a \nu)(t) = (M_a \nu)(t), \quad t \in [0; s_1], \quad a \in J, \quad (4.3)$$

$$\nu_a(0) = \varphi(a), \quad a \in J, \quad (4.4)$$

$$m(a) \neq 0 \Rightarrow \nu'_a(0) = \psi(a), \quad a \in J; \quad (4.5)$$

2) если $i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, то μ^i определён на $[0; s_i]$, $\mu^i|_{[0; s_{i-1})} = \mu^{i-1}$, а $\mu^i|_{[s_{i-1}; s_i]}$ есть решение задачи

$$(L_a \nu)(t) = (M_a \mu^i)(t), \quad t \in [s_{i-1}; s_i], \quad a \in J, \quad (4.6)$$

$$\nu_a(s_{i-1}) = \mu_a^{i-1}(s_{i-1}-), \quad a \in J, \quad (4.7)$$

$$m(a) \neq 0 \Rightarrow \nu'_a(s_{i-1}) = (\mu_a^{i-1})'(s_{i-1}-), \quad a \in J. \quad (4.8)$$

Отметим сразу, что все аргументы функций μ_b^i и μ_a^i , входящих в правые части (4.6), не превосходят $t - \rho$, а значит, в силу (4.2) все эти аргументы лежат в $[0; s_{i-1}]$. Это означает, что правые части в (4.6) корректно определены, если существует функция μ^{i-1} — так как по определению $\mu^i|_{[0; s_{i-1})} = \mu^{i-1}$.

Если μ — решение задачи (3.10), (3.13), (3.14), то μ с необходимостью удовлетворяет равенствам $\mu(t) = \mu^i(t)$, $t \in [s_{i-1}; s_i]$, $i \in \mathbb{N}$; поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать, что для любого $i \in \mathbb{N}$ набор μ^i существует, единствен и принадлежит $C^2[0; s_i]$, причём существуют конечные пределы $(\mu^i)^{(q)}(s_i-)$, $q = \overline{0, 2}$. Это мы докажем индукцией по i .

В силу своего определения $s_1 = \rho$, поэтому из $t \in (0; s_1)$ следует, что $\sigma_1(t, |b - a|) = -1$ и $\sigma_1(|b - a| - t, |b - a|) = -1$ для любых смежных вершин a и b , и потому при $t \in (0; s_1)$ в силу (3.6) выполнены равенства $(\mathcal{G}_{|b-a|}\nu'_b)(t) = 0$ и $(\mathcal{G}_{|b-a|}\nu'_a)(t - |b - a|) = 0$ при любых $a \in J$ и $b \leftrightarrow a$ — какими бы ни были ν_b и ν_a . Но тогда $\mu^1|_{(0; s_1)}$ есть решение следующей системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений либо второго порядка (если $m(a) \neq 0$), либо первого (если $m(a) = 0$):

$$\begin{aligned} m(a)\nu''_a(t) + \left(\sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; t) + \kappa(a) \right) \nu'_a(t) + k(a)\nu_a(t) = \\ = \sum_{b | b \leftrightarrow a} \alpha(a, h(a, b); t) \left(\overline{\varphi'_{a,b}}(t) + \psi_{a,b}(t) \right), \quad t \in (0; s_1), \quad a \in J, \end{aligned} \quad (4.9)$$

причём с непрерывно дифференцируемыми на $(0; s_1)$ коэффициентами и правыми частями, производные которых являются непрерывно доопределяемыми в точках 0 и s_1 . Значит, μ^1 существует, единственно, принадлежит $C^2[0; s_1]$ (если $m(a) = 0$, то надо дополнительно учесть (4.1)) и имеет конечные пределы $(\mu^1)^{(q)}(s_1-)$, $q = \overline{0, 2}$. База индукции установлена.

Укажем ещё одно свойство μ^1 , которое нам понадобится в дальнейшем:

$$(\mu^1)'(0) = \psi(a) \text{ и } (\mu^1)''(0) = (\varphi_{a,b}^\circ)''(0) \text{ — для всех } a \in J \text{ и } b \leftrightarrow a. \quad (4.10)$$

Детали его обоснования мы здесь не приводим, так как оно выводится из того, что μ^1 есть решение (4.9), *точно так же*, как при доказательстве леммы 3.3 мы вывели выполнение второго и последующих равенств в (3.11) из того, что μ есть решение (3.15).

Предположим теперь, что для некоторого $j \in \mathbb{N}$ набор μ^j существует, единствен и принадлежит $C^2[0; s_j]$, причём существуют конечные пределы $(\mu^j)^{(q)}(s_j-)$, $q = \overline{0, 2}$. Тогда для установления аналогичных свойств набора μ^{j+1} достаточно доказать, что, во-первых, $\mu^{j+1}|_{[s_j; s_{j+1}]}$ существует, единственно и принадлежит $C^2[s_j; s_{j+1}]$; во-вторых, существуют конечные $(\mu^{j+1})^{(q)}(s_{j+1}-)$, $q = \overline{0, 2}$; и в-третьих,

$$(\mu^{j+1})'(s_j+) = (\mu^j)'(s_j-) \text{ и } (\mu^{j+1})''(s_j+) = (\mu^j)''(s_j-). \quad (4.11)$$

В силу замечания, сделанного сразу после формулировки задачи (4.6)–(4.8), эта задача при $i = j + 1$ есть задача Коши для системы неоднородных линейных обыкновенных дифференциальных уравнений (второго или первого порядка) с непрерывно дифференцируемыми на $[s_j; s_{j+1}]$ коэффициентами и правыми частями $M_a\mu^j$. Значит, $\mu^{j+1}|_{[s_j; s_{j+1}]}$ существует, единственно и принадлежит $C^2[s_j; s_{j+1}]$ (опять же, если $m(a) = 0$, то надо дополнительно учесть (4.1)). Более того, при $i = j + 1$ производные коэффициентов и правых частей в (4.6) непрерывно доопределяемы в точке s_{j+1} слева, поэтому $(\mu^{j+1})^{(q)}(s_{j+1}-)$, $q = \overline{0, 2}$, и $(\mu^{j+1})^{(q)}(s_{j+1}+)$, $q = \overline{0, 2}$, существуют и конечны. Остаётся доказать (4.11).

Из существования левых частей равенств из (4.11), а также того, что μ^{j+1} есть решение (4.6) при $i = j + 1$, вытекает существование и равенство пределов $(L_a\mu^{j+1})(s_j+)$ и $(M_a\mu^{j+1})(s_j+)$ для всех $a \in J$. Кроме того, в силу предположения индукции $(L_a\mu^j)(s_j-) = (M_a\mu^j)(s_j-)$ для всех $a \in J$. Поэтому для любой $a \in J$

$$(L_a\mu^{j+1})(s_j+) - (L_a\mu^j)(s_j-) = (M_a\mu^{j+1})(s_j+) - (M_a\mu^j)(s_j-). \quad (4.12)$$

Зафиксируем далее $a \in J$ и рассмотрим множества $B_1(a) = \{b | b \leftrightarrow a \wedge s_j \in |b - a|(2\mathbb{N} - 1)\}$ и $B_2(a) = \{b | b \leftrightarrow a \wedge s_j \in |b - a|(2\mathbb{N})\}$. Пусть $\sigma_2(t, \ell)$ обозначает целую часть числа $t/(2\ell)$. Тогда

правую часть (4.12) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in B_1(a)} \alpha(a, h(a, b); s_j) \left\{ 2(\mu_b^j)'(s_j - [2\sigma_1(s_j, |b-a|) + 1] \cdot |b-a|) + \psi_{a,b}(s_j) - \psi_{a,b}(s_j-) \right\} + \\ & + \sum_{b \in B_2(a)} \alpha(a, h(a, b); s_j) \left\{ -2(\mu_a^j)'(s_j - [2\sigma_2(s_j, |b-a|) + 1] \cdot |b-a|) + \psi_{a,b}(s_j) - \psi_{a,b}(s_j-) \right\}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Выражение (4.13) равно 0. Действительно, во-первых, аргументы там у $(\mu_b^j)'$ и $(\mu_a^j)'$ равны 0, что вытекает из определения $\sigma_1(t, \ell)$ и $\sigma_2(t, \ell)$; и во-вторых, в силу определения $\psi_{a,b}$, если $b \in B_1(a)$, то $\psi_{a,b}(s_j) = -\psi(b)$ и $\psi_{a,b}(s_j-) = \psi(b)$, а если $b \in B_2(a)$, то $\psi_{a,b}(s_j) = \psi(a)$ и $\psi_{a,b}(s_j-) = -\psi(a)$. В силу чего и получается, если учесть ещё и первое равенство из (4.10), что выражение (4.13) равно 0.

Итак, правая часть в (4.12) равна 0. Но тогда, расписывая подробнее левую часть (4.12), получим:

$$\begin{aligned} & m(a) \left[(\mu_a^{j+1})''(s_j+) - (\mu_a^j)''(s_j-) \right] + \\ & + \left(\kappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; s_j) \right) \left[(\mu_a^{j+1})'(s_j+) - (\mu_a^j)'(s_j-) \right] = 0, \quad a \in J. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Если $m(a) \neq 0$, то выполнено первое равенство из (4.11), поскольку $\mu^{j+1}|_{[s_j; s_{j+1})}$ удовлетворяет условию (4.8) при $i = j+1$. Но тогда из (4.14) следует и второе равенство, выписанное в (4.11). Остаётся рассмотреть случай $m(a) = 0$. В этом случае из (4.14) в силу (4.1) сразу следует первое равенство из (4.11), и остаётся доказать выполнение второго из равенств (4.11) при $m(a) = 0$.

Подставляя $\mu^j|_{[s_{j-1}; s_j]}$ и $\mu^{j+1}|_{[s_j; s_{j+1})}$ в (4.6) соответственно при $i = j$ и при $i = j+1$, получим равенства $(L_a \mu^j)(t) = (M_a \mu^j)(t)$, $s_{j-1} < t < s_j$, и $(L_a \mu^{j+1})(t) = (M_a \mu^{j+1})(t)$, $s_j < t < s_{j+1}$, левые и правые части которых допускают почленное дифференцирование — независимо от того, равно $m(a)$ нулю или нет. Выполняя после этого дифференцирование предельный переход при $t \rightarrow s_j-$ в первом из этих равенств и при $t \rightarrow s_j+$ во втором, придём к равенству

$$(L_a \mu^{j+1})'(s_j+) - (L_a \mu^j)'(s_j-) = (M_a \mu^{j+1})'(s_j+) - (M_a \mu^j)'(s_j-). \quad (4.15)$$

В силу (3.6) левая часть равенства (4.15) при $m(a) = 0$ приобретает вид (учитываем также равенство $\mu^{j+1}(s_j+) = \mu^j(s_j-)$ и первое равенство в (4.11)):

$$\left(\kappa(a) + \sum_{h \in D(a)} \alpha(a, h; s_j) \right) \left[(\mu_a^{j+1})''(s_j+) - (\mu_a^j)''(s_j-) \right], \quad (4.16)$$

а правая —

$$\begin{aligned} & \sum_{b \in B_1(a)} \left\{ \alpha'(a, h(a, b); s_j) \left[2(\mu_b^j)'(0) + \psi_{a,b}(s_j+) - \psi_{a,b}(s_j-) \right] + \right. \\ & + \alpha(a, h(a, b); s_j) \left[2(\mu_b^j)''(0) + \varphi_{a,b}''(s_j+) + \psi_{a,b}'(s_j+) - \varphi_{a,b}''(s_j-) - \psi_{a,b}'(s_j-) \right] \Big\} + \\ & + \sum_{b \in B_2(a)} \left\{ \alpha'(a, h(a, b); s_j) \left[-2(\mu_a^j)'(0) + \psi_{a,b}(s_j+) - \psi_{a,b}(s_j-) \right] + \right. \\ & + \alpha(a, h(a, b); s_j) \left[-2(\mu_a^j)''(0) + \varphi_{a,b}''(s_j+) + \psi_{a,b}'(s_j+) - \varphi_{a,b}''(s_j-) - \psi_{a,b}'(s_j-) \right] \Big\}. \end{aligned}$$

Последнее выражение равно 0. Действительно, первая и третья квадратные скобки в нём равны 0 — это доказывается *точь-в-точь* такими же выкладками, что равенство нулю выражения (4.13). Вторая и четвёртая квадратные скобки равны соответственно $2(\mu_b^1)''(0) - 2(\varphi_{a,b}^\circ)''(|b-a|)$ и $-2(\mu_a^1)''(0) + 2(\varphi_{a,b}^\circ)''(0)$. Но оба последних выражения — нулевые, в силу второго равенства из (4.10) и того, что $(\varphi_{a,b}^\circ)''(|b-a|) = (\varphi_{b,a}^\circ)''(0)$. Равенство нулю правой части (4.15) влечёт равенство нулю выражения (4.16), что в свою очередь влечёт с учётом (4.1) второе из равенств (4.11). Заявленные свойства наборов μ^i , $i \in \mathbb{N}$, окончательно доказаны, а вместе с ними доказана и лемма 4.1. $\square$

Теорема 4.1. Пусть $\partial\Gamma = \emptyset$ и выполнено (4.1). Тогда решение задачи (2.1), (1.1), (2.2) существует, единственно и определяется равенствами (3.5), в которых $v(\cdot, \cdot; a, b)$ определяется формулой (3.7), а $(\mu_a)_{a \in J}$ есть решение начальной задачи (3.10), (3.13), (3.14).

Доказательство. Теорема 4.1 есть следствие леммы 3.1, следствия 3.1 и лемм 3.3 и 4.1. $\square$

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) В СЛУЧАЕ $\partial\Gamma \neq \emptyset$

Пусть $\partial\Gamma \neq \emptyset$. Поскольку величины углов между рёбрами Γ при описании и при решении задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) не играют роли, то можно считать, что, во-первых, к каждой граничной вершине Γ примыкает ровно одно ребро, и во-вторых, существует линейное подпространство $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$ размерности $n - 1$ такое, что $\partial\Gamma \subset \mathcal{L}$ и $J \subset \delta x_0 + \mathcal{L}$, где $x_0 \perp \mathcal{L}$, $|x_0| = 1$ и $\delta > 0$. Пусть $\mathcal{S}$ — отображение симметрии в $\mathbb{R}^n$ относительно $\mathcal{L}$, и рассмотрим сначала геометрический граф $\Gamma_1 = \mathcal{S}(\Gamma)$ с множеством внутренних вершин $J_1 = \mathcal{S}(J)$ и с $\partial\Gamma_1 = \partial\Gamma$, а затем геометрический граф $\Gamma_{\times 2} = \bar{\Gamma} \cup \Gamma_1$ без граничных вершин и с множеством внутренних вершин $J_{\times 2} = J \cup J_1 \cup \partial\Gamma$. Множество допустимых относительно $\Gamma_{\times 2}$ единичных векторов в вершине $a \in J_{\times 2}$ будем обозначать $D_{\times 2}(a)$. Заметим, что в силу построения $a \in J \Rightarrow [D_{\times 2}(a) = D(a) \wedge D_{\times 2}(\mathcal{S}(a)) = \mathcal{S}(D(a))]$ и $a \in \partial\Gamma \Rightarrow D_{\times 2}(a) = \{h_a; \mathcal{S}(h_a)\}$, где h_a — единственный вектор из $D(a)$; при этом $\mathcal{S}(h_a) \neq h_a$.

Рассмотрим задачу, получающуюся из задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) «нечётным продолжением» на $\Gamma_{\times 2}$:

$$\omega_{xx}(x, t) = \omega_{tt}(x, t), \quad x \in R(\Gamma_{\times 2}), \quad t > 0, \quad (5.1)$$

$$\sum_{h \in D_{\times 2}(a)} \alpha_{\times 2}(a, h; t) \omega_h^+(a, t) = k_{\times 2}(a) \omega(a, t) + \varkappa_{\times 2}(a) \omega_t(a, t) + m_{\times 2}(a) \omega_{tt}(a, t), \quad a \in J_{\times 2}, \quad t > 0, \quad (5.2)$$

$$\omega(x, 0) = \varphi_{\times 2}(x) \quad \text{и} \quad \omega_t(x, 0) = \psi_{\times 2}(x), \quad x \in \Gamma_{\times 2}, \quad (5.3)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_{\times 2}(x) &= \begin{cases} \theta(x), & \text{если } x \in \bar{\Gamma} \\ -\theta(\mathcal{S}^{-1}(x)), & \text{если } x \in \Gamma_1 \end{cases} \quad \text{для } \theta \in \{\varphi, \psi\}, \\ \alpha_{\times 2}(a, h; t) &= \begin{cases} \alpha(a, h; t), & \text{если } a \in J \text{ и } h \in D(a), \\ \alpha(\mathcal{S}^{-1}(a), \mathcal{S}^{-1}(h); t), & \text{если } a \in J_1 \text{ и } h \in D_{\times 2}(a), \\ 1, & \text{если } a \in \partial\Gamma \text{ и } h \in D_{\times 2}(a), \end{cases} \\ \zeta_{\times 2}(a) &= \begin{cases} \zeta(a), & \text{если } a \in J \\ \zeta(\mathcal{S}^{-1}(a)), & \text{если } a \in J_1 \\ 0, & \text{если } a \in \partial\Gamma \end{cases} \quad \text{для } \zeta \in \{k, \varkappa, m\}. \end{aligned}$$

С учётом (2.6) и (2.7), если выполнено (4.1), то к задаче (5.1)–(5.3) применимы все результаты разделов 3 и 4. Обозначая через ω решение задачи (5.1)–(5.3), получим, что сужение $\omega|_{\bar{\Gamma} \times [0; +\infty)}$ будет решением задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3) тогда и только тогда, когда

$$\omega(a, t) = 0, \quad a \in \partial\Gamma, \quad t > 0. \quad (5.4)$$

Заметим: функция z , определяемая равенством $z(x, t) = \omega(\mathcal{S}(x), t)$ при $x \in \Gamma_{\times 2}$ и $t \geq 0$, является решением задачи (5.1)–(5.3) с той лишь разницей, что вместо $\varphi_{\times 2}$ и $\psi_{\times 2}$ надо в ней взять $-\varphi_{\times 2}$ и $-\psi_{\times 2}$ соответственно. Значит, $\omega(\mathcal{S}(x), t) = -\omega(x, t)$ для всех $x \in \Gamma_{\times 2}$ и $t \geq 0$. Отсюда и следует (5.4), поскольку $\mathcal{S}(a) = a$ для любой $a \in \partial\Gamma$.

Обратно, если u — решение задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3), то $u_{\times 2}(\cdot, t)$ есть решение задачи (5.1)–(5.3), что, в частности, влечёт единственность u как решения задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3).

Итак, установлен следующий факт.

Теорема 5.1. Если $\partial\Gamma \neq \emptyset$ и выполнено условие (4.1), то сужение на $\bar{\Gamma} \times [0; +\infty)$ решения задачи (5.1)–(5.3) является единственным решением задачи (2.1), (1.1), (2.2), (2.3). При этом если $x \in \Gamma$, то $\omega(\mathcal{S}(x), t) = -u(x, t)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глотов Н. В., Прядиев В. Л. Описание решений волнового уравнения на конечном и ограниченном геометрическом графе при условиях трансмиссии типа «жидкого» трения // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2006. — № 2. — С. 185–193.
2. Копытин А. В., Прядиев В. Л. Об аналоге формулы Даламбера и спектре лапласиана на графе с соизмеримыми рёбрами // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2001. — № 1. — С. 104–107.
3. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004.
4. Покорный Ю. В., Прядиев В. Л., Боровских А. В. Волновое уравнение на пространственной сети // Докл. РАН. — 2003. — 388, № 1. — С. 16–18.
5. Прядиев В. Л. Один подход к описанию в конечной форме решений волнового уравнения на пространственной сети // Spectral and Evolution problems. — 2005. — 15. — С. 132–139.
6. Прядиев В. Л. Описание решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на одномерной пространственной сети через функцию Грина соответствующей краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Соврем. мат. и её прилож. — 2006. — 38. — С. 82–94.
7. Cattaneo C., Fontana L. D’Alembert formula on finite one-dimensional networks // J. Math. Anal. Appl. — 2003. — 284, № 2. — С. 403–424.

В. Л. Прядиев

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: pryad@mail.ru

UDC 517.958; 517.929

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-287-298

EDN: NGZDSK

The boundary regimes method in solving of the initial-boundary value problem for the wave equation on a geometrical graph

V. L. Pryadiev

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. An approach to describing the solution of the initial-boundary value problem for the wave equation on a finite and bounded geometrical graph Γ is implemented. The linear transmission conditions have a more general form than that considered in previous works. The approach is based on interpreting the behavior of the solution at the vertices of Γ as boundary regimes with respect to adjacent edges. The set of these boundary regimes turns out to be a solution to the initial value problem for a system of delays differential equations on $[0; +\infty)$ with the number of delaying arguments infinitely increasing with infinitely increasing of the argument.

Keywords: wave equation on geometrical graph, transmission condition, propagation of boundary regime, delays differential equations system, existence and uniqueness of solution, solution formula.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, grant No. 075-02-2025-1530.



For citation: V. L. Pryadiev, “The boundary regimes method in solving of the initial-boundary value problem for the wave equation on a geometrical graph,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 2, 287–298. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-287-298>

REFERENCES

1. N. V. Glotov, V. L. Pryadiev, “Opisaniye resheniy volnovogo uravneniya na konechnom i ogranichenom geometricheskom grafe pri usloviyakh transmissii tipa «zhidkogo» treniya” [Description of solutions of the wave equation on a finite and bounded geometric graph under «fluid» friction transmission conditions], *Vestn. Voronezh. gos. un-ta. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2006, No. 2, 185–193 (in Russian).
2. A. V. Kopytin, V. L. Pryadiev, “Ob analoge formuly D’Alemberta i spektre laplasiana na grafe s soizmerimymi rebrami” [On the analogue of D’Alembert’s formula and the spectrum of the Laplacian on a graph with commensurable edges], *Vestn. Voronezh. gos. un-ta. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2001, No. 1, 104–107 (in Russian).
3. Yu. V. Pokornyi, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, S. A. Shabrov *Differentsialnyye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential Equations on Geometrical Graphs], Fizmatlit, Moscow, 2004 (in Russian).
4. Yu. V. Pokornyi, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, “Volnovoye uravneniye na prostranstvennoy seti” [The wave equation on a spatial network], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2003, **388**, No. 1, 16–18 (in Russian).
5. V. L. Pryadiev, “Odin podkhod k opisaniyu v konechnoy forme resheniy volnovogo uravneniya na prostranstvennoy seti” [An approach to finite form describing of solutions to the wave equation on a spatial network], *Spectral and Evolution Problems*, 2005, **15**, 132–139 (in Russian).
6. V. L. Pryadiev, “Opisaniye resheniya nachalno-kraevoy zadachi dlya volnovogo uravneniya na odnomernoy prostranstvennoy seti cherez funktsiyu Grina sootvetstvuyushchey kraevoy zadachi dlya obyknovennogo differentsialnogo uravneniya” [Description of solutions to the initial-boundary value problem for a wave equation on a one-dimensional spatial network in terms of the Green function of the corresponding boundary-value problem for an ordinary differential equation], *Sovrem. mat. i yeye prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2006, **38**, 82–94 (in Russian).
7. C. Cattaneo, L. Fontana, “D’Alembert formula on finite one-dimensional networks,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2003, **284**, No. 2, 403–424.

V. L. Pryadiev
 Voronezh State University, Voronezh, Russia
 E-mail: pryad@mail.ru