

УДК 517.983+517.982

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-275-286

EDN: NENHXZ

ДИФфуЗИЯ КВАНТОВЫХ СОСТОЯНИЙ, ПОРОЖДАЕМАЯ КЛАССИЧЕСКИМ СЛУЧАЙНЫМ БЛУЖДЕНИЕМ

Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Аннотация. Исследована модель, сопоставляющая случайным блужданиям в конечномерном евклидовом координатном пространстве классической системы случайные квантовые блуждания, т. е. случайные преобразования множества состояний квантовой системы, возникающей при квантовании классической. Как известно, сверточная полугруппа гауссовских мер на координатном пространстве допускает представление полугруппой самосопряженных сжатий в пространстве квадратично интегрируемых функций, описываемой уравнением теплопроводности. Получено представление сверточной полугруппы гауссовских мер на координатном пространстве квантовой динамической полугруппой в пространстве ядерных операторов. Дано описание квантовой динамической полугруппы решениями задачи Коши для вырожденного уравнения диффузии. Установлена обобщенная сходимости по распределению последовательности квантовых случайных блужданий к операторнозначному случайному процессу со значениями в абелевой алгебре операторов сдвига на вектор с нормальным распределением.

Ключевые слова: квантовое управляющее уравнение, квантовое состояние, квантовое случайное блуждание, теорема Чернова, квантовый канал.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Ю. Н. Орлов, В. Ж. Сакбаев. Диффузия квантовых состояний, порождаемая классическим случайным блужданием // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 275–286. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-275-286>

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе будет исследована эволюция множества квантовых состояний, порождаемая случайными блужданиями в евклидовом координатном пространстве E классической системы, при квантовании которой возникает гильбертово пространство векторных состояний $\mathcal{H} = L_2(E)$.

Случайным блужданием в евклидовом пространстве E называется последовательность E -значных случайных процессов $\{\eta_n(t), t \in \mathbb{R}_+\}$, допускающая представление

$$\eta_n(t) = \sum_{k=1}^n \xi_k\left(\frac{t}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

где $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных E -значных случайных процессов, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Унитарное представление π в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ абелевой группы E каждому случайному процессу ξ со значениями в пространстве E сопоставляет операторнозначный случайный процесс со значениями в унитарной абелевой алгебре операторов сдвига аргумента: $\pi(\xi(t)) = S_{\xi(t)}$, $t \geq 0$, где $S_{\xi(t)}u(x) = u(x + \xi(t))$, $x \in E$, $t \geq 0$; $u \in \mathcal{H}$.

Для операторнозначных процессов $\pi(\eta_n)$ со значениями в группе унитарных преобразований пространства $\mathcal{H}$, являющихся образами случайных блужданий (1.1) под действием унитарного представления π , в работах [9, 16, 17] получены предельные теоремы, устанавливающие сходимость по распределению и сходимость по вероятности операторнозначных случайных процессов.

В настоящей работе исследуются предельные свойства представления случайных блужданий (1.1) в пространстве квантовых состояний. Исследование представления квантовых систем с помощью вероятностных мер проведено в работе [3]. В работе [18] приведен пример динамики квантовых состояний с разрушением чистых состояний, порожденной сингулярным гамильтонианом. В работах [5, 12] исследуются случайные операторы со значениями в пространстве ограниченных линейных преобразований банахова пространства $T_1(\mathcal{H})$ ядерных операторов в пространстве $\mathcal{H}$, снабженного следовой нормой [6].

В [13] исследованы свойства квантовых каналов, порождаемых некоммутативными стационарными случайными процессами. В работе [7] предложена схема получения квантовых динамических полугрупп в пространстве квантовых состояний за счет усреднения по сверточной полугруппе гауссовских мер на множестве преобразований квантовых состояний, порожденных унитарными группами в пространстве векторных состояний. В настоящей статье эта схема исследована в случае гауссовских мер на подгруппе унитарных преобразований, порождаемых сдвигами аргумента. Исследовано представление τ случайных блужданий (1.1) в пространстве $T_1(\mathcal{H})$, задаваемых на чистых векторных состояниях $\rho_u = |u\rangle\langle u|$, $u \in S^1(\mathcal{H})$ равенством $T_\xi(\rho_u) = S_\xi \rho_u S_{-\xi} = \rho_{S_\xi u}$, продолженным по линейности и непрерывности на все пространство ядерных операторов $T_1(\mathcal{H})$.

В настоящей работе исследована полугруппа $\mathbb{T}$, реализующая представление τ в пространстве $T_1(\mathcal{H})$ сверточной полугруппы центрированных гауссовских мер на пространстве E . Теоремой 3.1 установлена сильная непрерывность полугруппы $\mathbb{T}$ и показано, что она является квантовой динамической полугруппой. Установлено, что существенной областью определения генератора этой полугруппы $\mathbb{T}$ в пространстве ядерных операторов является линейная оболочка операторов плотности чистых векторных состояний, соответствующих векторам из пространства Шварца. Доказано, что для произвольной орбиты $\mathbb{T}_t \rho$, $t \geq 0$, полугруппы $\mathbb{T}$ однопараметрическое семейство интегральных ядер операторов $\mathbb{T}_t \rho$, $t \geq 0$, является решением задачи Коши для уравнения Фоккера—Планка с вырожденным оператором диффузии. Установлена взаимосвязь дифференцируемости функции $\mathbb{T}_t \rho$, $t \geq 0$, со значениями в пространстве ядерных операторов $T_1(\mathcal{H})$ и дифференцируемости интегральных ядер однопараметрического семейства операторов плотности. С помощью полученного описания генератора квантовой динамической полугруппы $\mathbb{T}$ установлена сходимость к этой полугруппе представления в пространстве ядерных операторов $T_1(\mathcal{H})$ центрированных случайных блужданий вида (1.1).

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть E — конечномерное евклидово пространство размерности d , λ — мера Лебега на пространстве E , $\mathcal{H} = L_2(E, \lambda, \mathbb{C})$ — пространство комплекснозначных квадратично интегрируемых по мере Лебега функций на пространстве E . Пусть $B(\mathcal{H})$ — банахово пространство ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве $\mathcal{H}$. Через $T_1(\mathcal{H})$ обозначим банахово пространство действующих в $\mathcal{H}$ ядерных операторов, наделенное следовой нормой. Пусть $B(\mathcal{H})^*$ — банахово пространство, сопряженное пространству $B(\mathcal{H})$.

Для произвольного нормированного пространства $\mathcal{X}$ единичная сфера пространства $\mathcal{X}$ обозначается через $S_1(\mathcal{X})$, и пусть $\mathcal{X}^1$ — единичный шар в $\mathcal{X}$.

Множество $\Sigma(\mathcal{H})$ состояний квантовой системы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ представляет собой пересечение единичной сферы $S_1(B(\mathcal{H})^*)$ с конусом $B(\mathcal{H})_+^*$ неотрицательных элементов пространства, сопряженного банахову пространству ограниченных линейных операторов $B(\mathcal{H})$, наделенному операторной нормой [4]. Множество нормальных квантовых состояний, обладающих свойством непрерывности относительно ультраслабой топологии [8], представимо как пересечение единичной сферы $S_1(T_1(\mathcal{H}))$ с конусом $T_1(\mathcal{H})_+$ неотрицательных элементов пространства $T_1(\mathcal{H})$ ядерных операторов, предсопряженного банахову пространству ограниченных линейных операторов $B(\mathcal{H})$, наделенному операторной нормой [4, 8].

Евклидово пространство E как абелева топологическая группа относительно операции сложения элементов имеет непрерывное в сильной операторной топологии унитарное представление $\pi : E \rightarrow B(\mathcal{H})$ в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\pi(h) = \mathbf{S}_h,$$

где

$$\mathbf{S}_h u(x) = u(x + h), \quad x \in E, \quad u \in \mathcal{H}.$$

Как известно, если h — центрированный гауссовский случайный вектор пространства E , обладающий ограниченным ковариационным оператором $\mathbf{D}$, то однопараметрическое семейство операторов $\mathbf{V}_t$, $t \geq 0$, задаваемое равенством

$$\mathbf{V}_t u(x) = \mathbf{M}[\mathbf{S}_{\sqrt{t}\mathbf{h}} u(x)], \quad t \geq 0, \quad x \in E, \quad u \in \mathcal{H},$$

является однопараметрической сильно непрерывной полугруппой самосопряженных сжатий в пространстве $\mathcal{H}$, реализующей представление в пространстве $\mathcal{H}$ сверточной полугруппы гауссовских мер $\gamma_{t\mathbf{D}}$, $t \geq 0$. При этом непрерывная функция $\|u(t)\|_{\mathcal{H}}$ монотонно убывает и стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Заметим, что сверточная полугруппа $\gamma_{t\mathbf{D}}$, $t \geq 0$, гауссовских мер имеет также представление в банаховом пространстве $L_1(E)$. Образом полугруппы $\gamma_{t\mathbf{D}}$, $t \geq 0$, при таком представлении является сильно непрерывная полугруппа сжимающих преобразований в пространстве $L_1(E)$, сохраняющих конус неотрицательных функций в $L_1(E)$ и $L_1(E)$ -норму в этом конусе.

Далее символом $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_1(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ обозначим двойственность между банаховым пространством ядерных операторов $T_1(\mathcal{H})$ и банаховым пространством ограниченных линейных операторов $B(\mathcal{H})$, действующую по правилу $\langle \rho, \mathbf{A} \rangle = \text{Tr}(\rho \mathbf{A})$.

В настоящей работе мы исследуем представление сверточной полугруппы $\gamma_{t\mathbf{D}}$, $t \geq 0$, гауссовских мер в пространстве ядерных операторов $T_1(\mathcal{H})$ (см. [15]). Будет установлено, что такое представление может быть задано отображением $\pi(\gamma_{t\mathbf{D}}) = \mathbb{T}$, где $\mathbb{T} = \{\mathbb{T}_t, t \geq 0\}$ — однопараметрическое семейство операторов в пространстве $T_1(\mathcal{H})$, при каждом $t \geq 0$ действующих на произвольный оператор $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ согласно равенству

$$\langle \mathbb{T}_t(\rho), \mathbf{A} \rangle = \int_E \langle \mathbf{S}_h \rho \mathbf{S}_h^*, \mathbf{A} \rangle d\gamma_{t\mathbf{D}}(h), \quad \forall \mathbf{A} \in B(\mathcal{H}). \quad (2.1)$$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала опишем динамику оператора состояния, связанную с гауссовскими случайными блужданиями.

Лемма 3.1. Пусть $\rho \in \Sigma_n(\mathcal{H}) = S_1^+(T_1(\mathcal{H}))$. При каждом $t \geq 0$ усреднение сдвигов квантового состояния ρ

$$\int_E \mathbf{S}_h \rho \mathbf{S}_h^* d\gamma_{t\mathbf{D}}(h) \equiv \sigma(t, \rho) \quad (3.1)$$

является нормальным квантовым состоянием.

Доказательство. Действительно, усредненное состояние $\sigma(t, \rho)$ действует на произвольный оператор $\forall \mathbf{A} \in B(\mathcal{H})$ согласно равенству (2.1):

$$\langle \sigma(t, \rho), \mathbf{A} \rangle = \int_E \langle \mathbf{S}_{\sqrt{t}\mathbf{h}} \rho \mathbf{S}_{\sqrt{t}\mathbf{h}}^*, \mathbf{A} \rangle d\gamma_{\mathbf{D}}(h) = \int_E \langle \rho, \mathbf{S}_h^* \mathbf{A} \mathbf{S}_h \rangle d\gamma_{t\mathbf{D}}(h).$$

Поэтому $\sigma(t, \rho)$ является линейным функционалом, определенным на пространстве $B(\mathcal{H})$, неотрицательным и удовлетворяющим условию нормировки $\langle \sigma(t, \rho), \mathbf{I} \rangle = 1$; таким образом, $\sigma(t, \rho) \in S_1^+((B(\mathcal{H}))^*)$.

Докажем, что состояние $\sigma(t, \rho)$ является нормальным. Сначала исследуем случай, когда оператор ρ в равенстве (2.1) является оператором плотности чистого квантового состояния, т. е.

является одномерным ортогональным проектором $\rho_u = |u\rangle\langle u|$ на некоторый единичный вектор $u \in S_1(\mathcal{H})$. В этом случае

$$\sigma(t, \rho_u) = \int_E \rho_{\mathbf{S}_h u} d\gamma_{t\mathbf{D}}(h) = \int_{S_1(\mathcal{H})} \rho_e d\mu_{u,t\mathbf{D}}(e), \quad (3.2)$$

где $\mu_{u,t\mathbf{D}}$ — мера на единичной сфере пространства $\mathcal{H}$, задаваемая на каждом борелевском множестве $B \subset S_1(\mathcal{H})$ равенством

$$\mu_{u,t\mathbf{D}}(B) = \gamma_{t\mathbf{D}}(\{h \in E : \mathbf{S}_h u \in B\}).$$

Поскольку образ борелевского множества B при непрерывном отображении $\Phi_u : h \rightarrow \mathbf{S}_h u$ является борелевским, то мера $\mu_{u,t\mathbf{D}}$ является борелевской. Поскольку мера $\gamma_{t\mathbf{D}}$ является вероятностной мерой на пространстве E , то мера $\gamma_{t\mathbf{D}} \circ \Phi_u^{-1}$ является вероятностной мерой на единичной сфере $S_1(\mathcal{H})$. Следовательно, в силу теоремы 2.2 работы [2], состояние (3.2) является нормальным.

В общем случае ρ является нормальным квантовым состоянием, допускающим представление $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \rho_{u_k}$, где $\{p_k\} \in S_1^+(\ell_1)$, $\{u_k\}$ — некоторый ОНБ в пространстве $\mathcal{H}$. Тогда состояние $\sigma(t, \rho)$

допускает представление $\sigma(t, \rho) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \sigma(t, u_k)$ и потому является нормальным. $\square$

Теорема 3.1. Пусть центрированный случайный вектор h имеет ограниченный ковариационный оператор $\mathbf{D}$. Тогда задаваемое равенством (2.1) семейство отображений $\mathbb{T}_t : \rho \rightarrow \sigma(t, \rho)$, $t \geq 0$, — квантовая динамическая полугруппа в пространстве нормальных состояний $T_1(\mathcal{H})$, непрерывная в сильной операторной топологии.

Доказательство. При каждом $t \geq 0$ преобразование $\mathbb{T}_t$, отображающее множество квантовых состояний в себя в силу леммы 3.1, допускает продолжение по линейности на все пространство $T_1(\mathcal{H})$ до линейного сжимающего преобразования, сохраняющего конус положительных элементов.

Докажем, что отображение $\mathbb{T}_t$ является вполне положительным. Это свойство следует из того, что отображение $\rho \rightarrow \mathbf{S}_h \rho \mathbf{S}_h^*$ является вполне положительным при каждом $h \in E$, а потому усреднение по вероятностной мере (3.1) набора вполне положительных отображений также является вполне положительным.

Докажем полугрупповое свойство у семейства отображение $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$. Пусть $t, \tau \geq 0$, тогда согласно свойству гауссовских мер $\gamma_{(t+\tau)\mathbf{D}} = \gamma_{\tau\mathbf{D}} * \gamma_{t\mathbf{D}}$.

Пусть $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ и $\mathbf{A} \in B(\mathcal{H})$. Тогда в силу свойства непрерывности в среднем квадратичном оператора сдвига функция $f_{\rho, \mathbf{A}}(h) = \langle \rho, \mathbf{S}_h^* \mathbf{A} \mathbf{S}_h \rangle$, $h \in E$, непрерывна на E . Потому

$$\begin{aligned} \langle s(\tau, s(t, \rho)), \mathbf{A} \rangle &= \int_E \langle s(t, \rho), \mathbf{S}_{h_1}^* \mathbf{A} \mathbf{S}_{h_1} \rangle d\gamma_{\tau\mathbf{D}}(h_1) = \int_E \int_E \langle \rho, \mathbf{S}_{h_1+h_2}^* \mathbf{A} \mathbf{S}_{h_1+h_2} \rangle d\gamma_{\tau\mathbf{D}}(h_1) d\gamma_{t\mathbf{D}}(h_2) = \\ &= \int_E \int_E f_{\rho, \mathbf{A}}(h_1 + h_2) d\gamma_{\tau\mathbf{D}}(h_1) d\gamma_{t\mathbf{D}}(h_2) = \int_E f_{\rho, \mathbf{A}}(h) d(\gamma_{\tau\mathbf{D}} * \gamma_{t\mathbf{D}})(h) = \langle s(t + \tau, \rho), \mathbf{A} \rangle. \end{aligned}$$

Докажем непрерывность в сильной операторной топологии однопараметрической полугруппы $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$, преобразований пространства $T_1(\mathcal{H})$. Пусть $u \in S_1(\mathcal{H})$ и ρ_u — соответствующее чистое векторное состояние. Поскольку $\mathbf{S}_{\tau h}$, $\tau > 0$, — сильно непрерывная однопараметрическая группа в пространстве $\mathcal{H}$, то $\mathbf{S}_{\sqrt{t}h} u$, $t \geq 0$, — непрерывная функция со значениями в $\mathcal{H}$. Поэтому при каждом $h \in E$ отображение $\mathbf{S}_{\sqrt{t}h} \rho_u \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^*$, $t \geq 0$, полуоси $\mathbb{R}_+$ в пространство $T_1(\mathcal{H})$ непрерывно. Поскольку интеграл $\int_E (\sup_{t \geq 0} \|\mathbf{S}_{\sqrt{t}h} \rho_u \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^*\|_{T_1(\mathcal{H})}) d\gamma_{t\mathbf{D}}(h)$ сходится, то интеграл $\int_E \mathbf{S}_{\sqrt{t}h} \rho_u \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^* d\gamma_{t\mathbf{D}}(h)$ сходится равномерно на полуоси $t \geq 0$. Следовательно, отображение $t \rightarrow \int_E \mathbf{S}_{\sqrt{t}h} \rho_u \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^* d\gamma_{t\mathbf{D}}(h)$, $\mathbb{R}_+ \rightarrow T_1(\mathcal{H})$, непрерывно.

Таким образом, $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$, — квантовая динамическая полугруппа в пространстве $T_1(\mathcal{H})$, непрерывная в сильной операторной топологии. $\square$

Теперь опишем класс случайных процессов, аппроксимирующих квантовую динамическую полугруппу $\mathbb{T}$.

Пусть h — центрированный гауссовский случайный вектор в пространстве $E = \mathbb{R}^n$ с невырожденным ковариационным оператором $\mathbf{D}$, т. е. $\mathbf{D} : M[(x, h)(h, y)] = (x, \mathbf{D}y) \forall x, y \in E$, и с конечным третьим моментом нормы $M[\|h\|_E^3] < +\infty$.

Положим $\mathbf{T}_h \rho = \mathbf{S}_h \rho \mathbf{S}_h^*$, $\rho \in T_1(\mathcal{H})$, для каждого $h \in E$.

Пусть $\mathbf{T}_{\sqrt{t}h}$, $t \geq 0$, — однопараметрическое семейство случайных линейных операторов в пространстве $B(T_1(\mathcal{H}))$, порожденное случайным вектором h в пространстве E .

Положим $\mathbf{F}(t)\rho = M[\mathbf{T}_{\sqrt{t}h}\rho]$, $t \geq 0$, для каждого $\rho \in T_1(\mathcal{H})$. Тогда $\mathbf{F}$ — однопараметрическое семейство линейных преобразований пространства $T_1(\mathcal{H})$.

Теорема 3.2. Пусть $E = \mathbb{R}^d$ и h — центрированный гауссовский случайный вектор в пространстве E с невырожденным ковариационным оператором $\mathbf{D}$ и с конечным третьим моментом нормы. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in [0, \tau]} \|(\mathbb{T}_t - (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n)\rho\|_{T_1(\mathcal{H})} = 0$$

для любого $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ и любого $\tau > 0$.

Для доказательства теоремы 3.2 нам потребуется установить свойства представления группы сдвигов на векторы конфигурационного пространства в пространстве ядерных операторов $T_1(\mathcal{H})$ и ее генератора, а также исследовать с помощью теоремы Чернова [10] сходимость последовательности представлений композиций независимых случайных сдвигов, чему посвящены дальнейшие рассмотрения.

4. ГЕНЕРАТОР ПОЛУГРУППЫ $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$

Пусть $u \in \mathcal{H}$, $\|u\|_{\mathcal{H}} = 1$ и $\rho_u = |u\rangle\langle u|$ — оператор плотности чистого векторного состояния u , т. е. одномерный ортогональный проектор на подпространство $\text{span}(u)$ в пространстве $\mathcal{H}$.

Лемма 4.1. Если оператор $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ ранга 1 удовлетворяет условию

$$(\rho f, g) = (u, f)(g, v) \quad \forall f, g \in \mathcal{H}$$

при некоторых $u, v \in \mathcal{H}$ (т. е. если $\rho = v \otimes u$), то $\|\rho\|_{T_1(\mathcal{H})} \leq \|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}}$.

Доказательство. В условиях леммы 4.1 имеем

$$\|\rho\|_{T_1(\mathcal{H})} = \sup_{\|\mathbf{A}\|_{B(\mathcal{H})}=1} |\text{Tr}(\rho \mathbf{A})| \leq \|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.1)$$

□

Из оценки (4.1) следует утверждение.

Лемма 4.2. Если векторнозначная функция $u(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{H}$, непрерывна (дифференцируема) в точке $t_0 \in \mathbb{R}_+$, то операторнозначная функция $\rho_{u(\cdot)} : \mathbb{R}_+ \rightarrow T_1(\mathcal{H})$ также непрерывна (дифференцируема) в точке t_0 .

Доказательство. Если $u, v \in S_1(\mathcal{H})$ и ρ_u, ρ_v — соответствующие операторы плотности векторных состояний, то $\|\rho_u - \rho_v\|_{T_1(\mathcal{H})} \leq 2\|u - v\|_{\mathcal{H}}$. Поэтому, если векторнозначная функция $u(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{H}$, непрерывна (дифференцируема) в точке $t_0 \in \mathbb{R}_+$, то операторнозначная функция $\rho_{u(\cdot)} : \mathbb{R}_+ \rightarrow T_1(\mathcal{H})$ также непрерывна (дифференцируема) в точке t_0 . □

Каждому оператору плотности $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ сопоставим его ядро $\rho(x, y)$, $(x, y) \in E \times E$, определяемое условием $(\rho f, g)_{\mathcal{H}} = \int_{E \times E} \rho(x, y) f(x) \bar{g}(y) dx dy \quad \forall f, g \in \mathcal{H}$. Оператор плотности одно-

значно определяется своим ядром, причем отображение пространства $T_1(\mathcal{H})$ в пространство $\{\{\rho(x, y), (x, y) \in E^2\}, \rho \in T_1(\mathcal{H})\}$, сопоставляющее оператору плотности $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ его ядро $\rho(x, y)$, $(x, y) \in E^2$, биективно. Сюръективность следует из определения пространства образов, а инъективность следует из того, что если $\rho_1(x, y) = \rho_2(x, y) \quad \forall (x, y) \in E^2$, то

$$\int_{E^2} \rho_1(x, y) f(x) \bar{g}(y) dx dy = \int_{E^2} \rho_2(x, y) f(x) \bar{g}(y) dx dy \quad (4.2)$$

при всех $f, g \in \mathcal{H}$, а значит, $\rho_1 = \rho_2$.

Пусть $\mathcal{S}(E)$ — пространство основных функций Шварца на евклидовом пространстве E . Пусть $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в пространстве $\mathcal{H}$. Преобразование Фурье унитарно в пространстве $\mathcal{H}$, и пространство Шварца является инвариантным относительно преобразования Фурье плотным подпространством пространства $\mathcal{H}$. Заметим, что если $\mathbf{S}_h \in B(\mathcal{H})$ — оператор сдвига аргумента на вектор $h \in E$, то

$$\mathcal{F}\mathbf{S}_h\mathcal{F}^{-1} = \mathbf{M}_{e^{i(h,x)}},$$

где $\mathbf{M}_{e^{i(h,x)}}$ — оператор умножения на функцию $e^{i(h,x)}$ в пространстве $\mathcal{H}$; т. е. если $u \in \mathcal{H}$ и $\hat{u} = \mathcal{F}(u)$, то $\mathcal{F}(\mathbf{S}_h u) = \mathbf{M}_{e^{i(h,x)}} \hat{u}$. Кроме того, в силу унитарности преобразования Фурье выполняется равенство $\mathcal{F}\rho_u\mathcal{F}^{-1} = \rho_{\hat{u}}$ в том смысле, что $(\mathcal{F}\rho_u\mathcal{F}^{-1}f, g) = (\hat{u}, f)(g, \hat{u})$ для любых $f, g \in \mathcal{H}$.

Лемма 4.3. Пусть h — центрированный гауссовский вектор пространства E , обладающий ковариационным оператором $\mathbf{D}$. Если $u \in \mathcal{S}(E)$, то $\frac{d}{dt}\mathbb{T}_t\rho_u|_{t=0} = \mathbf{L}\rho_u$, где

$$(\mathbf{L}\rho_u f, g) = \left(\frac{1}{2} \left(\Delta_{\mathbf{D}}\rho_u + \rho_u\Delta_{\mathbf{D}} + 2 \sum_{j=1}^n d_j \rho_{\partial_j u} \right) f, g \right) \equiv (\mathbf{L}\rho_u f, g)$$

при всех $f, g \in \mathcal{H}$. Здесь $\Delta_{\mathbf{D}}u = \operatorname{div}(\mathbf{D}\nabla u)$, $u \in \mathcal{S}(E)$, $d_1, \dots, d_n$ — собственные значения ковариационного оператора $\mathbf{D}$, $e_1, \dots, e_n$ — ортонормированный базис из соответствующих собственных векторов оператора $\mathbf{D}$ и $\partial_j = \frac{\partial}{\partial e_j}$.

Доказательство. Заметим, что в силу унитарности преобразования Фурье операторнозначная функция $\rho : \mathbb{R}_+ \rightarrow T_1(\mathcal{H})$ дифференцируема в точке $t_0 \in \mathbb{R}_+$ тогда и только тогда, когда в точке t_0 дифференцируема функция $\tilde{\rho}(t) = \mathcal{F}\rho(t)\mathcal{F}^{-1}$, $t \in \mathbb{R}_+$, причем $\frac{d}{dt}\rho(t_0) = \mathcal{F}^{-1}\frac{d}{dt}\tilde{\rho}(t_0)\mathcal{F}$.

Поскольку $\rho_u(t) \equiv \mathbb{T}_t\rho_u = \int_E \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}\rho_u\mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^* d\gamma_{\mathbf{D}}(h)$, то $\rho_{\hat{u}}(t) = \mathcal{F}\mathbb{T}_t\rho_u\mathcal{F}^{-1}$, $t \in \mathbb{R}_+$, и при всех $t \geq 0$

$$\rho_{\hat{u}}(t) = \mathcal{F} \int_E \mathbf{S}_{\sqrt{t}h}\rho_u\mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^* d\gamma_{\mathbf{D}}(h) \mathcal{F}^{-1} = \int_E \mathcal{F}\mathbf{S}_{\sqrt{t}h}\rho_u\mathbf{S}_{\sqrt{t}h}^* \mathcal{F}^{-1} d\gamma_{\mathbf{D}}(h) = \int_E \mathbf{M}_{e^{i\sqrt{t}(h,x)}}\rho_{\hat{u}}\mathbf{M}_{e^{-i\sqrt{t}(h,x)}} d\gamma_{\mathbf{D}}(h).$$

Поэтому для $u \in \mathcal{S}(E)$ в силу формулы Тейлора второго порядка с остаточным членом в форме Лагранжа существует такая принимающая значения на отрезке $[0, 1]$ измеримая функция $\theta(t, x, h)$, $(t, x, h) \in \mathbb{R}_+ \times E \times E$, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} \rho_{\hat{u}}(t) = \int_E \left(\mathbf{I} + i\sqrt{t}\mathbf{M}_{(h,x)} - \frac{t}{2}\mathbf{M}_{(h,x)^2} - i\frac{t^{3/2}}{6}\mathbf{M}_{\theta(t,x,h)(h,x)^3} \right) \rho_{\hat{u}} \times \\ \times \left(\mathbf{I} - i\sqrt{t}\mathbf{M}_{(h,x)} - \frac{t}{2}\mathbf{M}_{(h,x)^2} + i\frac{t^{3/2}}{6}\mathbf{M}_{\theta(t,x,h)(h,x)^3} \right) d\gamma_{\mathbf{D}}(h). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Здесь и далее символ $\mathbf{M}_{f(x)}$ обозначает действующий в пространстве $\mathcal{H}$ оператор умножения на функцию f .

Поскольку случайный вектор h — центрированный гауссовский, то ряд слагаемых в выражении (4.3) обращаются в нуль. Потому с учетом утверждения леммы 4.1 получаем

$$\rho_{\hat{u}}(t) = \rho_{\hat{u}} + t\hat{\mathbf{L}}\rho_{\hat{u}} + \hat{r}_{\hat{u}}(t), \quad (4.4)$$

где оператор $\hat{\mathbf{L}}\rho_{\hat{u}}$ задан значением своей полуторалинейной формы на векторах $\phi, \psi \in H$

$$(\psi, (\hat{\mathbf{L}}(\rho_{\hat{u}})\phi) = -\frac{1}{2}(\psi, \mathbf{M}_{(\mathbf{D}x,x)}\hat{u})(u, \phi) - \frac{1}{2}(\psi, u)(\mathbf{M}_{(\mathbf{D}x,x)}\hat{u}, \phi) + \int_E (\psi, \mathbf{M}_{(h,x)}\hat{u})(\mathbf{M}_{(h,x)}\hat{u}, \phi) d\gamma_{\mathbf{D}}(h)$$

и, в силу леммы 4.1,

$$\|\hat{r}_{\hat{u}}(t)\|_{T_1(\mathcal{H})} \leq C(1 + \mathbf{M}[|h|^6])t^{3/2}\|\mathbf{M}_{\sqrt{1+\|x\|_E^6}}\hat{u}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Здесь C — константа, не зависящая от u .

Отсюда и из равенства (4.4) следует, что операторнозначная функция $\rho_{\hat{u}}(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow T_1(\mathcal{H})$ дифференцируема в точке $t_0 = 0$ и справедливо равенство

$$\frac{d}{dt}\rho_{\hat{u}}(t)|_{t=0} = \hat{\mathbf{L}}\rho_{\hat{u}}.$$

Следовательно, ρ_u входит в область определения генератора полугруппы $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$, и существует производная $\left(\frac{d}{dt}\mathbb{T}_t\rho_u\right)\Big|_{t=0} = \mathcal{F}^{-1}\hat{\mathbf{L}}\mathcal{F}\rho_u = \mathbf{L}\rho_u$. Таким образом, справедливо утверждение леммы 4.3. $\square$

Рассмотрим задачу Коши для ядра $\rho_t(x, y)$, $x, y \in E$, оператора плотности

$$\frac{d}{dt}\rho_t(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^d d_k \left(\frac{d^2}{dx_k^2} + \frac{d^2}{dy_k^2} + 2 \frac{d^2}{dx_k dy_k} \right) \rho_t(x, y), \quad t > 0, (x, y) \in E^2, \quad (4.5)$$

$$\rho_t(x, y)|_{t=0} = \rho_0(x, y) \equiv u(x)\bar{u}(y). \quad (4.6)$$

Совершив ортогональную замену переменных $\xi_k = \frac{x_k + y_k}{\sqrt{2}}$, $\eta_k = \frac{x_k - y_k}{\sqrt{2}}$, $k = 1, \dots, d$, и известной функции $\tilde{\rho}_t(\xi, \eta) = \rho_t\left(\frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}\right)$, получим

$$\frac{d}{dt}\tilde{\rho}_t(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^d d_k \frac{d^2}{d\xi_k^2} \tilde{\rho}_t(\xi, \eta), \quad t > 0, (\xi, \eta) \in E^2, \quad (4.7)$$

$$\tilde{\rho}_t(\xi, \eta)|_{t=0} = \rho_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\right) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)\right)\bar{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\right). \quad (4.8)$$

Каждому оператору плотности чистого векторного состояния ρ_u , $u \in S_1(\mathcal{H})$ (каждому оператору плотности $\rho \in T_1(\mathcal{H})$) сопоставим однопараметрическое семейство абсолютно интегрируемых на пространстве E функций $\{\tilde{\rho}_\eta, \eta \in E\} \subset L_1(E)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_\eta(\xi) &= u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)\right)\bar{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\right), \quad \xi \in \mathbb{R} \\ \left(\tilde{\rho}_\eta(\xi) &= \rho\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\right), \quad \xi \in \mathbb{R}\right). \end{aligned}$$

Тогда в силу неравенства Коши—Буняковского $\rho_\eta(\cdot) \in L_1(E) \forall \eta \in E$ и $\rho(\xi) \in L_1(E) \forall \xi \in E$.

Пусть $\Delta_{\mathbf{D}}$ — оператор, действующий в пространстве $L_1(E)$ с областью определения $\mathcal{D} = \mathcal{S}(E)$ согласно правилу

$$\Delta_{\mathbf{D}}f(\xi) = \sum_{k=1}^d d_k \frac{d^2}{d\xi_k^2} f(\xi), \quad \xi \in E, f \in \mathcal{D}.$$

Известно (см. [11]), что оператор $\Delta_{\mathbf{D}} : \mathcal{D} \rightarrow L_1(E)$ замыкаем, а его замыкание является генератором C_0 -полугруппы сжимающих операторов $e^{t\Delta_{\mathbf{D}}}$, $t \geq 0$, в пространстве $L_1(E)$.

Если $u \in \mathcal{S}(H)$, то при каждом значении $\eta \in E$ принадлежащее пространству $C(\mathbb{R}_+, L_1(E))$ решение дифференциального уравнения (4.7) с начальным условием

$$\tilde{\rho}_0(\xi, \eta) = \rho_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta), \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\right), \quad \xi \in E,$$

существует, единственно и имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_t(\xi, \eta) &= \left(\prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi d_k t}} \right) \int_E \tilde{\rho}_0(z, \eta) \exp\left(-\sum_{k=1}^d \frac{1}{4td_k} (z_k - \xi_k)^2\right) dz = \\ &= \left(\prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi d_k t}} \right) \int_E u_0\left(\frac{z + \eta}{\sqrt{2}}\right) \bar{u}_0\left(\frac{z - \eta}{\sqrt{2}}\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^d \frac{1}{4td_k} (z_k - \xi_k)^2\right) dz, \quad t \geq 0, \xi \in E; \quad \eta \in E. \end{aligned}$$

Следовательно, переходя с помощью обратной замены переменных от задачи (4.7), (4.8) к задаче (4.5), (4.6), получаем утверждение.

Лемма 4.4. Пусть $u \in \mathcal{S}(H)$. Тогда решение задачи (4.5), (4.6), значения которого при каждом $x \in E$ абсолютно интегрируемы на E по y и наоборот, существует, единственно и задается равенством

$$\rho_t(x, y) = \left(\prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{8\pi d_k t}} \right) \int_E u_0 \left(\frac{z+x-y}{2} \right) \bar{u}_0 \left(\frac{z-x+y}{2} \right) \exp \left(- \sum_{k=1}^n \frac{1}{8td_k} (z_k - x_k - y_k)^2 \right) dz. \quad (4.9)$$

Лемма 4.5. Пусть $u \in \mathcal{S}(E)$. Если $\rho(t, x, y)$ — решение задачи Коши для уравнения

$$\frac{d}{dt} \rho = \frac{1}{2} \left(\Delta_{\mathbf{D}} + \Delta_{\mathbf{D}} + 2 \sum_{j=1}^n d_j \partial_j \rho \partial_j \right) \equiv \mathbf{L} \rho_u$$

с начальным условием $\rho_0(x, y) = u(x)\bar{u}(y)$, то $\rho(t, x, y)$ является ядром оператора плотности $(\mathbb{T}_t \rho_u)(x, y)$.

Доказательство. Проверим, что ядро $\rho(t, \cdot, \cdot)$ задает неотрицательный ограниченный оператор как неотрицательный функционал, определенный на пространстве ядерных операторов. Для этого покажем, что функционал определен и неотрицателен на множестве всех одномерных ортогональных проекторов. Для произвольного единичного вектора $v \in H$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{E \times E} \rho_t(x, y) v(x) \bar{v}(y) dx dy &= \int_{E \times E} \tilde{\rho}_t(\xi, \eta) v \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta) \right) \bar{v} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta) \right) d\xi d\eta = \\ &= \int_{E \times E} \int_E \tilde{\rho}_0(s, \eta) \prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi t d_k}} e^{-\frac{(\xi-s)^2}{4t}} v \left(\frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} \right) \bar{v} \left(\frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}} \right) ds d\xi d\eta = \\ &= \int_{E^3} \prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi t d_k}} \exp \left[-\frac{(\xi - s)^2}{4t} \right] u_0 \left(\frac{s + \eta}{\sqrt{2}} \right) \bar{u}_0 \left(\frac{s - \eta}{\sqrt{2}} \right) v \left(\frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} \right) \bar{v} \left(\frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}} \right) ds d\xi d\eta = \\ &= \int_{E^3} \prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi t d_k}} \exp \left[-\frac{(h)^2}{4t} \right] u_0 \left(\frac{\xi - h + \eta}{\sqrt{2}} \right) \bar{u}_0 \left(\frac{\xi - h - \eta}{\sqrt{2}} \right) v \left(\frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}} \right) \bar{v} \left(\frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}} \right) dh d\xi d\eta = \\ &= \int_E \prod_{k=1}^d \frac{1}{\sqrt{4\pi t d_k}} \exp \left[-\frac{(h)^2}{4t} \right] \int_E u_0 \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}h \right) v(x) dx \int_E \bar{u}_0 \left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}h \right) \bar{v}(y) dh dx dy = \\ &= \int_E (\mathbf{S}_h u, v)(v, \mathbf{S}_h u) d\gamma_{t\mathbf{D}}(h). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Следовательно, при каждом $t \geq 0$ решение $\rho_t(x, y)$, $(x, y) \in E^2$, задачи Коши (4.5), (4.6) задает неотрицательный функционал на множестве одномерных ортогональных проекторов, который продолжается по линейности до неотрицательного функционала ρ_t на пространстве $T_1(H)$, действующего, согласно (4.10), по правилу

$$\langle \rho_t, \mathbf{P}_f \rangle = \int_E (\mathbf{S}_h u, f)(f, \mathbf{S}_h u) d\gamma_{t\mathbf{D}}(h).$$

При этом если $\{f_k\}$ — ОНБ в пространстве $\mathcal{H}$ и $\mathbf{P}_N = \sum_{k=1}^N \mathbf{P}_{e_k}$, то числовая последовательность $\{\langle \rho_t, \mathbf{P}_N \rangle\}$ возрастает. Поскольку последовательность функций $\{(\mathbf{S}_h u, \mathbf{P}_N \mathbf{S}_h u), h \in E\}$ монотонно возрастает с ростом N и равномерно на каждом компакте $K \subset E$ сходится к предельной функции, тождественно равной единице, то в силу регулярности счетно-аддитивной гауссовской меры $\gamma_{t\mathbf{D}}$ имеем, что независимо от выбора ОНБ $\{f_k\}$ $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle \rho_t, \mathbf{P}_N \rangle = \langle \rho_t, \mathbf{I} \rangle = 1$. Значит, неотрицательный функционал ρ_t непрерывен на пространстве операторов в ультра-слабой топологии. Следовательно, он является нормальным квантовым состоянием.

Согласно (4.10), $\rho_t(\mathbf{P}_v) = \mathbb{T}_t \rho_u(\mathbf{P}_v) \forall v \in S_1(\mathcal{H})$, следовательно, $\rho_t = \mathbb{T}_t \rho_u \forall t \geq 0$. $\square$

Рассмотрим в пространстве $T_1(H)$ линейное подпространство $\mathbb{D}$ операторов плотности вида $\rho = \sum_{k=1}^{\infty} w_k \rho_{u_k}$, где $w_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = 1$; $\{u_k\}$ — последовательность единичных векторов в пространстве $\mathcal{H}$, каждый из которых принадлежит пространству $\mathcal{S}(E)$. Данное подпространство, введенное в работах [1, 14] для изучения операторов плотности и их томографического представления, послужит нам в качестве существенной области определения генератора квантовой динамической полугруппы.

Лемма 4.6. *Оператор $\mathbf{L} : \mathbb{D} \rightarrow T_1(\mathcal{H})$ является генератором сильно непрерывной сжимающей полугруппы $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$, в пространстве $T_1(\mathcal{H})$.*

Пусть $\rho_u \in T_1(\mathcal{H})$ — чистое векторное состояние, соответствующее вектору $u \in S^1(\mathcal{H})$. Тогда $\rho_u(x, y) = u(x)\bar{u}(y)$ и $\tilde{\rho}(\xi, \eta) = u\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \eta)\right)\bar{u}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \eta)\right)$, а в силу леммы 4.5 задача Коши (4.7), (4.8) имеет единственное решение $\tilde{\rho}_t$, являющееся орбитой полугруппы $\mathbb{T}_t \rho_u$, $t \geq 0$.

Произвольное состояние $\rho \in T_1(\mathcal{H})$ представимо как барицентр некоторой вероятностной меры на множестве чистых векторных состояний. В частности, существует такой ОНБ $\{u_k\}$ в пространстве $\mathcal{H}$ и такая вероятностная мера ν на множестве натуральных чисел, что $\rho = \int_{\mathbb{N}} \rho_{u_k} d\nu(k)$. Тогда однопараметрическое семейство преобразований $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$, заданных на пространстве начальных условий $\rho_u(x, y)$, $u \in S_1(\mathcal{H})$, продолжается по линейности и по непрерывности до полугруппы линейных преобразований пространства $\{\rho(x, y), \rho \in T_1(\mathcal{H})\}$.

Для каждого $u \in \mathcal{S}(E)$ состояние ρ_u входит в область определения генератора $\mathbf{T}'_0$ полугруппы $\mathbb{T}$. Этот факт доказывается также, как и лемма 4.3, с помощью разложения (4.3) и оценок (4.1) леммы 4.1.

Поскольку пространство $\mathcal{S}(E)$ инвариантно относительно полугруппы $e^{t\Delta_D}$, $t \geq 0$, то пространство $\mathbb{D}$ инвариантно относительно полугруппы $\mathbb{T}_t$, $t \geq 0$, и входит в область определения генератора $\mathbf{T}'_0$ согласно лемме 4.3. Поскольку при этом пространство $\mathbb{D}$ плотно в пространстве $T_1(\mathcal{H})$ в силу леммы 4.1, то оно является существенной областью определения генератора в силу [11, предложение 1.7, с. 53].

5. АППРОКСИМАЦИЯ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРАМИ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ

Пусть h — центрированный гауссовский случайный вектор в пространстве $E = \mathbb{R}^n$ с невырожденным ковариационным оператором $\mathbf{D}$, т. е. $\mathbf{D} : M[(x, h)(h, y)] = (x, \mathbf{D}y) \forall x, y \in E$, и с конечным третьим моментом нормы $M(\|h\|_E^3) < +\infty$.

Положим $\mathbf{T}_h \rho = \mathbf{S}_h \rho \mathbf{S}_h^*$, $\rho \in T_1(\mathcal{H})$, для каждого $h \in E$. Пусть $\mathbf{T}_{\sqrt{th}}$, $t \geq 0$, — однопараметрическое семейство случайных линейных операторов в пространстве $B(T_1(\mathcal{H}))$, порожденное случайным вектором h в пространстве E .

Положим $\mathbf{F}(t)\rho = M[\mathbf{T}_{\sqrt{th}}\rho]$, $t \geq 0$, для каждого $\rho \in T_1(\mathcal{H})$. Тогда $\mathbf{F}$ — однопараметрическое семейство линейных преобразований пространства $T_1(\mathcal{H})$.

Лемма 5.1. *Однопараметрическое семейство преобразований обладает следующими свойствами:*

- i) $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}_{T_1(\mathcal{H})}$ — тождественный оператор;
- ii) если $\rho \in T_1(\mathcal{H})$, $\rho \geq 0$, то $\mathbf{F}(t)\rho \geq 0$;
- iii) $\|\mathbf{F}(t)\|_{B(T_1(\mathcal{H}))} \leq 1$ при всех $t \geq 0$;
- iv) $\mathbf{F}$ является непрерывным в сильной операторной топологии отображением $\mathbb{R}_+ \rightarrow T_1(\mathcal{H})$.

Доказательство. Свойства i)–iii) очевидны. Доказательство свойства iv) подобно доказательству аналогичного свойства в теореме 3.1. $\square$

Лемма 5.2. *Пусть $u \in \mathbb{D}$. Тогда вектор-функция $\mathbf{F}(t)\rho_u$, $t \geq 0$ имеет производную в нуле и*

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)\rho_u\right)\Big|_{t=0} = \frac{1}{2}\left(\Delta_D \rho_u + \rho_u \Delta_D + 2 \sum_j d_j \partial_j \rho_u \partial_j\right) \equiv \mathbf{L}\rho_u.$$

Доказательство. Поскольку пространство $\mathbb{D}$ инвариантно относительно операторов $\mathbf{T}_h$, $h \in E$, то оно инвариантно относительно операторов $\mathbf{F}(t)$, $t \geq 0$. Как и в доказательстве леммы 4.3, наряду с оператор-функцией $\mathbf{F}(t)\rho_u$ рассмотрим и оператор-функцию $\mathcal{F}\mathbf{F}(t)\rho_u\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}\mathbf{F}(t)\mathcal{F}^{-1}\rho_u$.

Для последней в доказательстве леммы 4.3 установлено равенство (4.3). Следовательно, оператор-функция $\mathcal{F}\mathbf{F}(t)\rho_u\mathcal{F}^{-1}$ допускает асимптотическое разложение (4.4), из чего следует дифференцируемость справа функции $\mathbf{F}(t)\rho_0$ в точке $t_0 = 0$ и утверждаемое леммой 5.2 равенство. $\square$

Доказательство теоремы 3.2. Согласно леммам 5.1 и 5.2, функция $\mathbf{F} : \mathbb{R}_+ \rightarrow B(T_1(\mathcal{H}))$ удовлетворяет всем условиям теоремы Чернова, а значит, справедливо утверждение теоремы 3.2. $\square$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована квантовая динамическая полугруппа, возникающая при усреднении квантовых случайных блужданий, порожденных унитарными операторами сдвига аргумента на векторы координатного пространства с гауссовским распределением. Установлено, что эволюция ядра оператора плотности под действием такой полугруппы описывается решением задачи Коши для вырожденного уравнения диффузии. Доказана сходимость последовательности композиций преобразований квантовых состояний, порожденных операторами сдвига на независимые случайные векторы, к рассматриваемой квантовой динамической полугруппе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амосов Г. Г. О различных функциональных представлениях пространства операторов Шварца // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. — 2018. — 151. — С. 3–9.
2. Амосов Г. Г., Бикчентаев А. М., Сакбаев В. Ж. О крайних точках множеств в пространствах операторов и пространствах состояний // Тр. МИАН. — 2024. — 324. — С. 10–23.
3. Амосов Г. Г., Манько В. И. Эволюция вероятностных мер, связанных с квантовыми системами // Теор. и мат. физ. — 2005. — 142, № 2. — С. 365–370.
4. Браттели У., Робинсон Д. Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. — М.: Мир, 1982.
5. Гоф Дж., Орлов Ю. Н., Сакбаев В. Ж., Смолянов О. Г. Рандомизированное квантование гамильтоновых систем // Докл. РАН. — 2021. — 498, № 1. — С. 31–36.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
7. Холevo А. С. Квантовая вероятность и квантовая статистика // Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1991. — 83. — С. 5–132.
8. Шерстнев А. Н. Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла. — М.: Физматлит, 2008.
9. Berger M. A. Central limit theorem for products of random matrices // Trans. Am. Math. Soc. — 1984. — 285, № 2. — С. 777–803.
10. Chernoff P. Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. — 1968. — 2, № 2. — С. 238–242.
11. Engel K. J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. — New York: Springer-Verlag, 2000.
12. Gough J. E., Ding H., Amini N. Reproducing kernel Hilbert space approach to non-Markovian quantum stochastic models // ArXiv. — 2024. — 2407.07231 [quant-ph].
13. Holevo A. S. Quantum noise as noncommutative stationary random process // Int. J. Modern Phys. A. — 2022. — 37, № 20–21. — 2243011.
14. Keyl M., Kiukas J., Werner R. F. Schwartz operators // Rev. Math. Phys. — 2016. — 28, № 3. — 1630001.
15. Kossakowski A. On quantum statistical mechanics of non-Hamiltonian systems // Rept. Math. Phys. — 1972. — 3, № 4. — С. 247–274.
16. Orlov Yu. N., Sakbaev V. Zh., Shmidt E. V. Operator approach to weak convergence of measures and limit theorems for random operators // Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 10. — С. 2413–2426.
17. Sakbaev V. Zh. On the law of large numbers for compositions of independent random semigroups // Russ. Math. — 2016. — 60, № 10. — С. 72–76.
18. Volovich I. V., Sakbaev V. Zh. On quantum dynamics on C^* -algebras // Proc. Steklov Inst. Math. — 2018. — 301, № 1. — С. 25–38.

Ю. Н. Орлов

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

E-mail: ov3159f@yandex.ru

В. Ж. Сакбаев

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
E-mail: fumi2003@mail.ru

UDC 517.983+517.982

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-275-286

EDN: NEHHXZ

Diffusion of quantum states generated by a classical random walk

Yu. N. Orlov and V. Zh. Sakbaev

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS, Moscow, Russia

Abstract. We investigate a model that associates random walks in a finite-dimensional Euclidean coordinate space of a classical system with random quantum walks, i.e. random transformations of the set of states of a quantum system arising from quantization of a classical system. As is known, the convolution semigroup of Gaussian measures on a coordinate space admits a representation by a semigroup of self-adjoint contractions in the space of square-integrable functions described by the heat equation. We obtain a representation of the convolution semigroup of Gaussian measures on a coordinate space by a quantum dynamic semigroup in the space of nuclear operators. We give a description of the quantum dynamic semigroup by solutions of the Cauchy problem for a degenerate diffusion equation. We establish the generalized convergence in distribution of a sequence of quantum random walks to an operator-valued random process with values in the Abelian algebra of shift operators by a vector with a normal distribution.

Keywords: quantum master equation, quantum state, quantum random walk, Chernoff's theorem, quantum channel.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, “Diffusion of quantum states generated by a classical random walk,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 2, 275–286. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-275-286>

REFERENCES

1. G. G. Amosov, “O razlichnykh funktsional'nykh predstavleniyakh prostranstva operatorov Shvartsa” [On various functional representations of the space of Schwartz operators], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2018, **151**, 3–9 (in Russian).
2. G. G. Amosov, A. M. Bikchentaev, and V. Zh. Sakbaev, “O kraynikh tochkakh mnozhestv v prostranstvakh operatorov i prostranstvakh sostoyaniy” [On extreme points of sets in operator spaces and state spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2024, **324**, 10–23 (in Russian).
3. G. G. Amosov and V. I. Man'ko, “Evolutsiya veroyatnostnykh mer, svyazannykh s kvantovymi sistemami” [Evolution of probability measures associated with quantum systems], *Teor. i mat. fiz.* [Teor. Math. Phys.], 2005, **142**, No. 2, 365–370 (in Russian).
4. O. Bratteli and D. Robinson, *Operatornye algebry i kvantovaya statisticheskaya mekhanika* [Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics], Mir, Moscow, 1982 (Russian translation).
5. J. E. Gough, Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, and O. G. Smolyanov, “Randomizirovannoe kvantovanie gamil'tonovykh sistem” [Random quantization of Hamiltonian systems], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2021, **498**, No. 1, 31–36 (in Russian).

6. I. Ts. Gokhberg and M. G. Krein, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov* [Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
7. A. S. Kholevo, “Kvantovaya veroyatnost’ i kvantovaya statistika” [Quantum probability and quantum statistics], *Sovrem. probl. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 1991, **83**, 5–132 (in Russian).
8. A. N. Sherstnev, *Metody bilineynykh form v nekommutativnoy teorii mery i integrala* [Methods of Bilinear Forms in Noncommutative Measure and Integral Theory], Fizmatlit, Moscow, 2008 (in Russian).
9. M. A. Berger, “Central limit theorem for products of random matrices,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1984, **285**, No. 2, 777–803.
10. P. Chernoff, “Note on product formulas for operator semigroups,” *J. Funct. Anal.*, 1968, **2**, No. 2, 238–242.
11. K. J. Engel and R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Springer-Verlag, New York, 2000.
12. J. E. Gough, H. Ding, and N. Amini, “Reproducing kernel Hilbert space approach to non-Markovian quantum stochastic models,” *ArXiv*, 2024, 2407.07231 [quant-ph].
13. A. S. Holevo, “Quantum noise as noncommutative stationary random process,” *Int. J. Modern Phys. A*, 2022, **37**, No. 20-21, 2243011.
14. M. Keyl, J. Kiukas, and R. F. Werner, “Schwartz operators,” *Rev. Math. Phys.*, 2016, **28**, No. 3, 1630001.
15. A. Kossakowski, “On quantum statistical mechanics of non-Hamiltonian systems,” *Rept. Math. Phys.*, 1972, **3**, No. 4, 247–274.
16. Yu. N. Orlov, V. Zh. Sakbaev, and E. V. Shmidt, “Operator approach to weak convergence of measures and limit theorems for random operators,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 10, 2413–2426.
17. V. Zh. Sakbaev, “On the law of large numbers for compositions of independent random semigroups,” *Russ. Math.*, 2016, **60**, No. 10, 72–76.
18. I. V. Volovich and V. Zh. Sakbaev, “On quantum dynamics on C^* -algebras,” *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2018, **301**, No. 1, 25–38.

Yu. N. Orlov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: ov3159f@yandex.ru

V. Zh. Sakbaev

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: fumi2003@mail.ru