

УДК 518.5, 539.3

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-240-252

EDN: MVAOUM

АКТУАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В ТЕРМОУПРУГОСТИ

Л. В. ЛЕВИНА, В. Б. ПЕНЬКОВ, М. А. ЛАВРЕНТЬЕВА

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

Аннотация. Выполнен обзор работ последнего времени по термоупругости. Рекомендуется применение метода граничных состояний (МГС) для построения численно-аналитических решений задач средствами вычислительных систем, поддерживающих «компьютерные алгебры». Сформированы структуры гильбертовых пространств внутренних и граничных состояний термоэластостатической среды (ТЕ) и определен способ описания скалярных произведений обоих изоморфных пространств. Обнаружена возможность экономии вычислительных средств для выполнения процедуры ортогонализации базисов сепарабельных пространств. При решении связанных/несвязанных по граничным условиям (ГУ) задач термоупругости отпала необходимость в декомпозиции их на традиционную последовательность из температурной и упругой задачи. Проведена классификация ТЕ-задач. Выполнены расчеты и прокомментированы результаты для двух классов задач.

Ключевые слова: термоупругость, термоэластостатика, метод граничных состояний, МГС, задача Дирихле, задача Неймана, энергетические методы.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Л. В. Левина, В. Б. Пеньков, М. А. Лаврентьева. Актуальное состояние и перспективы исследований в термоупругости // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 240–252. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-240-252>

1. ОБЗОР АКТУАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Классические описания постановок задач термоупругости приведены в фундаментальных трудах [2, 3, 8, 12].

Актуальное состояние исследований отражено в ряде диссертационных работ последнего времени [15, 17, 20, 23, 25, 26, 30, 34]. Фоном для этих работ служат примыкающие к их тематикам исследования [4, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 27–29, 31–33]. Кратко обсудим тематику актуальных исследований.

Работа [26] посвящена динамике термоупругих пластин и имеет целью разработку эффективного метода решения сложных задач динамики физически нелинейных термоупругих объектов. Пластины подвержены возбуждающим поперечным силовым гармоническим воздействиям с задаваемой частотой. Обнаружены точки бифуркации и установлены две фазы разрушения. Вычислительные алгоритмы реализованы в MATCONF. Результаты исследований подтверждены средствами ANSYS.

Исследование [17] в контексте решения обратных задач термоупругости имеет целью идентификацию параметров среды на основе анализа общей информации о процессах, происходящих в теле. Выполнен глубокий обзор смежных работ; использованы средства теории игр для анализа неоднозначной информации о процессе в теле. Рекомендованы приложения этого подхода: 1) в медицине, в частности — электрокардиографии; 2) в термоупругости для идентификации зарождающихся трещин.

Тематика исследований [30] имеет целью обоснование эффективной численной схемы метода граничных элементов, организуемых на основе учета характеров включений в среде. Включение произвольной формы порождает окрестное состояние, оказывающее влияние на термоупругие характеристики на границе тела. Это влияние учитывается при формировании граничных элементов. Изучены приложения к анализу стационарных и стоковских потоков, теории упругости и теплопроводности.

Целью работы [23] является разработка численно-аналитического высокоскоростного метода граничных элементов для решения задач термоэластостатики и анализа причин разрушения тел произвольной геометрической формы. Эффективно строятся картины, отражающие концентрацию напряжений в теплопроводной среде, позволяющие делать прогнозы о достижении критических состояний в теле.

Исследования [20] посвящены разработке численных методов для использования в сложных инженерных приложениях, основанных на конечно-элементной дискретизации объекта и учёте решений, выполненных для гидродинамики «гладких» частиц. Оценена сложность и практическая невозможность построения аналитических решений задач термоупругости при наличии в описании нелинейностей физической и геометрической природы. Выполнен обзор численных методов, в частности, существенное внимание уделено методу конечных элементов.

В настоящее время также продолжается совершенствование конечно-элементного подхода к обеспечению устойчивости процесса построения решения задач термоупругости [33].

Прогнозированию зарождения микротрещин посвящена работа [25]. Ее цель — разработка численного метода анализа состояний среды неоднородной (поликристаллической) микроструктуры на основе использования «быстрого преобразования Фурье». Объектами исследования являются классическая и нелинейная механика. Изучен процесс развития термоупругого состояния в таблетке, подвергаемой различным видам нагружения вплоть до достижения хрупкого разрушения. Устанавливаются остаточные напряжения, отвечающие поликристаллической микроструктуре среды, включая микротрещины. Производится учет необратимости характера повреждений.

Терминологически нетрадиционным в формализации постановок задач термомеханики является «пространственно-временной» подход [15], посвящённый описанию релятивистской модели термоупругости для учета конечных деформаций. Изучаются термоэластические модели при больших деформациях. Сравняются предложенная «релятивистская» и ньютоновская модели. Уделено существенное внимание конкретному изучению меняющихся состояний в процессе сгибания труб, сопровождающегося развитием значительных деформаций. Описывающая этот процесс модель обозначена как «термоупругое поведение». Достоверность подтверждается совместностью результатов с таковыми для ньютоновской среды при малых деформациях.

Весьма полезной с практической точки зрения представляется работа [34], посвящённая проектированию форм для предстоящих к изготовлению отливок изделий. Конкретной целью является описание процедуры итерационного проектирования литейной полости «подходящей» формы. Рассматривается процесс литья под давлением. Остывание среды приводит к дефекту формы. Выполняется численное моделирование процесса отливки термовязкоупругого материала. Получена серия моделей для пошаговых этапов процесса. Итерационный подход позволил приблизиться к установлению эффективных параметров исходной полости для отливок.

Обзор рассмотренных выше диссертационных работ по тематике термоупругости выполнен за последние шесть лет. Параллельно с этими исследованиями в печати имеют место иные серьезные результаты.

В [16] обоснована реальная возможность формулировки граничных условий Вентцеля для задач анализа термоупругого состояния трехмерного тела, покрытого тонкослойной оболочкой.

Работа [22] посвящена разработке метода «прямого» интегрирования для решения задач упругости и термоупругости «поперечной» анизотропии тел, составленных из цилиндрических слоев. Используются интегральные уравнения двойной размерности.

Процесс передачи тепла через гауссовские источники тепла в теле изучен в [24] средствами упрощающих дифференциальных преобразований, позволяющих построить аналитические решения. Объектами исследования явились круглая пластина с гауссовским круговым источником тепла, выполненная из меди.

Разработке аналитического метода решения на базе теории функций комплексного переменного для анализа термоупругих состояний при наличии трещин посвящена работа [31]. Тепло индуцируется электротоком. Роль трещины выполняет эллиптическая полость. При стремлении формы полости к линейной трещине обнаружено стремительное возрастание интенсивности напряжений у квазисингулярных вершин. Выполнена сверка результатов решения с классическими сведениями в частных случаях.

В статье [28] организован искусственный подход к описанию температурных полей комбинацией решений Треффца и вспомогательного поля, описываемого линейными функциями формы при неизвестных коэффициентах. Установка значений коэффициентов отвечает удовлетворению граничным условиям в узлах. Объектами пробных расчетов служат цилиндрические композитные слоистые материалы. Выполнено качественное тестирование.

Работа [18] посвящена построению «фоновому» решению в численно-аналитической форме для неоднородной термоупругой среды, содержащей большое количество включений. Изучаются плоские термоупругие поля, допускающие колебания температуры в условиях равномерного теплового потока. Численный подход строится при использовании конформных отображений.

Наряду с методами конечных и граничных элементов для анализа термоэластостатических полей трехмерных и двумерных тел при ударных нагрузках эффективно используется метод конечных разностей в работе [27].

При больших перепадах температуры и соответствующих им изменениях теплоёмкостных свойств среды потребовалось развитие конечно-элементного подхода в [32]. Усовершенствованный подход подтвержден сравнением результатов счёта с экспериментальными данными.

Для задач двумерной термоэластостатики анизотропных тел применен подход на основе использования фундаментальных решений в [21]. Естественная декомпозиция, весьма эффективная в описании подхода к решению несвязанных задач, приводит к последовательности постановок задач. На первом шаге строится явная форма решения, отвечающего температурному полю и его деформационным следствиям. На втором шаге используются фундаментальные решения задач со скорректированными граничными условиями. Выполнена оценка точности метода.

В работе [4] решена осесимметричная задача термоэластостатического состояния матрицы, содержащей шаровые термоупругие включения с теплоисточниками регулярного характера. Для конкретного примера построено высокоточное численное решение. Серьезного внимания заслуживает итерационный численно-аналитический подход к решению задачи о термомеханическом взаимодействии теплопроводящего индентора с поверхностью термоупругого тела произвольной формы в зоне контакта. Выполнены параметрические анализы для типичных форм основания индентора в [29].

Принципиальную новизну для практически-ориентированных вычислений представляет работа [19]. С целью преодоления трудностей расчета состояния традиционными вычислительными средствами, требующими серьезных вычислительных затрат (время счета, точность, сходимость) предложено и частично реализовано использование нейронной сети для приближенных оценок решений методом глубокого обучения.

Существенным «пробелом» в отмеченных работах является упор на использование компьютерных технологий, ориентированных на «число». Современные вычислительные системы, поддерживающие компьютерные алгебры, позволяют представлять результаты в численно-аналитической форме и даже выписывать полнопараметрические аналитические решения.

2. СРЕДСТВА МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ТЕРМОЭЛАСТОСТАТИКИ

Энергетический метод граничных состояний (МГС) представляется важнейшим средством анализа термоупругого состояний теплопроводных тел. Основные результаты по развитию МГС были получены в XXI веке и отражены в последовательной серии диссертационных работ [1, 5, 7, 9–11, 13, 14].

В [7] дано фундаментальное обоснование МГС, описаны процедуры назначения и совершенствования базиса пространства внутренних состояний для односвязного ограниченного тела, обоснованы средства решения основных задач линейной теории упругости.

Диссертация [13] посвящена применению МГС для восстановления гармонических полей и их характеристик в формулировках задач Дирихле, Неймана, основной смешанной задачи. Продемонстрированы приложения к задачам изучения призматических стержней, электростатики, движению идеальной жидкости.

Работа [10] посвящена теоретическому и алгоритмическому обоснованию МГС с возмущениями (МГСВ); рассмотрены задачи для неоднородных тел, задачи стационарной термоупругости.

Распространению МГС на анизотропные упругие тела посвящена диссертация [1]. Изучены плоские задачи для анизотропных объектов, рассмотрена обобщенная задача Сен-Венана.

МГС применён к решению задач о колебаниях изотропных тел в [11]: выработана методология решения основных задач (1-я, 2-я, основная смешанная) в условиях установившегося колебательного процесса.

Серьезным шагом стало развитие МГС для неограниченных 3D-областей (однополостных, многополостных) в работе [14]. Обоснованы алгоритмы наполнения базисов пространств состояний в случаях системы полостей в ограниченном или неограниченном теле.

Во всех вышеперечисленных случаях вырисовывались проблемы, связанные с наличием факторов, порождающих в решениях сингулярности физического и геометрического характера. Учёт специальных решений, «схватывающих» такие особенности, проведён в работе [9], но только в 2D-варианте.

Уникальный интерес при решении задач математической физики составляет возможность предъявления полнопараметрического аналитического решения (ППР), содержащего в символьном виде параметры геометрии тела, параметры среды, параметры нагружения. Исследования в [5] позволили успешно достигать такой цели использованием многочленов Чебышёва, Лагранжа и, в особенности, — метода возмущений.

2.1. Пространства состояний температурной и упругой сред. Состояние термоупругого объекта, заключённого в области V с границей ∂V представляет собой суперпозицию температурной T и эластостатической E сред. Внутреннее состояние ξ^T стационарной температурной среды описывается уравнением Пуассона

$$T_{,ii} + \frac{1}{\varkappa} Q = 0, \quad x \in V, \quad (2.1)$$

где Q — объёмный теплоисточник, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

Удобно элемент пространства внутренних состояний Ξ^T описывать избыточным набором взаимообусловленных характеристик: $\xi^T = \{T, T_{,i}\}$ (см. [10, 13]). Его след на границе тела ∂V составляет граничное состояние $\gamma^T = \left\{T, \frac{dT}{d\mathbf{n}}\right\}$, где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль. Если объёмный теплоисточник описывается многочленом произвольного конечного порядка, то частное решение уравнения (2.1) выписывается с абсолютной точностью (см. [6]). Декомпозиция решения (2.1) приводит к необходимости построения краевой задачи для уравнения Лапласа при скорректированных ГУ. Ниже будем полагать $Q = 0$, а возможные варианты для T считать гармоническими функциями.

Введение скалярных произведений

$$(\xi^{T(1)}, \xi^{T(2)})_{\Xi^T} \equiv \int_V T_{,i}^{(1)} T_{,i}^{(2)} dV = \int_{\partial V} T^{(1)} \frac{dT^{(2)}}{d\mathbf{n}} \equiv (\gamma^{T(1)}, \gamma^{T(2)})_{\Gamma^T},$$

для которых равенство значений интегралов для изоморфных пар элементов обеспечивается фундаментальными свойствами гармонических функций, устанавливает «гильбертов изоморфизм» обоих гильбертовых пространств: $\Xi^T \longleftrightarrow \Gamma^T$.

Внутренние состояния ξ^E уравновешенной изотропной упругой среды определяются набором соотношений (2.2)–(2.4) (см. [1, 7, 9, 10]). Соотношения Коши выражают связь между перемещением u_i^E и малыми деформациями ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij}^E = \frac{1}{2}(u_{i,j}^E + u_{j,i}^E). \quad (2.2)$$

Обобщенный закон Гука в форме Ламе определяет компоненты σ_{ij}^E тензора напряжений через деформации ε_{ij}^E :

$$\sigma_{ij}^E = \lambda \varepsilon_{kk}^E \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^E, \quad (2.3)$$

где λ, μ — упругие параметры Ламе, δ_{ij} — символ Кронекера.

Уравнения равновесия при наличии объемных сил X_i суть

$$\sigma_{ij,j}^E + X_i = 0. \quad (2.4)$$

Природа объемных сил может быть разнообразной. В любом случае, если силы выражаются многочленами конечного порядка, частное решение выписывается с абсолютной точностью (см. [6]). После декомпозиции построение базиса пространства состояний Ξ^E выполняется для однородного случая.

Внутреннему состоянию $\xi^E = \{u_i^E, \varepsilon_{ij}^E, \sigma_{ij}^E\} \in \Xi^E$ при фиксированном перемещении тела как жёсткого целого изоморфно соответствует граничное состояние $(x \in \partial V) \gamma^E = \{u_i^E, p_i^E\} \in \Gamma^E$, где $p_i^E = \sigma_{ij}^E n_j$. Оба пространства сопряжены «гильбертовым изоморфизмом» $\Xi^E \longleftrightarrow \Gamma^E$ при определении равных для изоморфных пар элементов скалярных произведений

$$(\xi^{E(1)}, \xi^{E(2)})_{\Xi^E} \equiv \int_V \sigma_{ij}^{E(1)} \varepsilon_{ij}^{E(2)} \partial V = \int_{\partial V} p_i^{E(1)} u_i^{E(2)} dS \equiv (\gamma^{E(1)}, \gamma^{E(2)})_{\Gamma^E}.$$

2.2. Пространства состояний термоэластостатической среды. В термоэластостатике под внутренним состоянием следует понимать набор $\xi = \{u_i^E, u_i^T, \varepsilon_{ij}^E, \varepsilon_{ij}^T, \sigma_{ij}^E, \sigma_{ij}^T, T, T_i\} \in \Xi$, $x \in V$. Предполагается, что распределённая по V температура вызывает шаровую деформацию интенсивности αT , где α — коэффициент температурного расширения. Каждая компонента тензора температурных деформаций

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha T \delta_{ij}$$

приобретена без силового воздействия. Она могла бы быть вызвана тензором напряжений, регламентируемым обобщённым законом Гука

$$\sigma_{ij}^* = \lambda \varepsilon_{kk}^T \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^T.$$

Это — «потерянные напряжения». Следовательно, термосостояние вносит поправку в поле напряжений, равную

$$\sigma_{ij}^T = -\sigma_{ij}^* = -(3\lambda + 2\mu)\alpha T \delta_{ij}.$$

Полная картина термоупругого НДС является суперпозицией:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^E + \sigma_{ij}^T, \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^E + \varepsilon_{ij}^T. \end{aligned}$$

Первое из этих соотношений является законом Дюамеля—Неймана:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk}^E \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}^E - (3\lambda + 2\mu)\alpha T \delta_{ij}. \quad (2.5)$$

Внутреннему состоянию ξ отвечает граничное состояние

$$\gamma = \left\{ u_i^E, u_i^T, p_i^E, p_i^T, T, \frac{dT}{d\mathbf{n}} \right\} \in \Gamma, \quad x \in \partial V.$$

Пространства внутренних и граничных состояний изоморфны: $\Xi \longleftrightarrow \Gamma$.

Если ввести скалярные произведения в обоих пространствах по правилу

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(m)})_{\Xi} = \tilde{\alpha}(\xi^{E(k)}, \xi^{E(m)})_{\Xi^E} + \tilde{\beta}(\xi^{T(k)}, \xi^{T(m)})_{\Xi^T}, \quad (2.6)$$

$$(\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)})_{\Gamma} = \tilde{\alpha}(\gamma^{E(k)}, \gamma^{E(m)})_{\Gamma^E} + \tilde{\beta}(\gamma^{T(k)}, \gamma^{T(m)})_{\Gamma^T}, \quad (2.7)$$

где $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} > 0$ — произвольные положительные действительные числа, то для изоморфных пар элементов выполняется равенство

$$(\xi^{(k)}, \xi^{(m)})_{\Xi} = (\gamma^{(k)}, \gamma^{(m)})_{\Gamma},$$

устанавливающее «гильбертов изоморфизм» обоих пространств.

Определяющие соотношения рассматриваемых сред приводятся к разрешающим уравнениям эллиптического типа относительно температуры или перемещения (уравнения Пуассона, Ламе). Базисы состояний в каждом случае строятся на основе однородных гармонических многочленов [7, 10, 14] посредством использования общих решений разрешающих уравнений [3, 8]. Процедуры дифференцирования в (2.2), (2.4) порождают три линейно-зависимых элемента. После «чистки» базис ортонормируется. Любое термоупругое состояние представляется рядом Фурье по элементам ортонормированных базисов:

$$\xi^T = \sum_k c_k^T \xi^{T(k)}, \quad \xi^E = \sum_k c_k^E \xi^{E(k)}. \quad (2.8)$$

Аналогичную форму имеют изоморфные объекты базиса граничных состояний (с теми же коэффициентами).

Использование ГУ сводит решение краевой задачи к системе уравнений относительно коэффициентов Фурье.

Структура скалярных произведений (2.6), (2.7) позволяет сделать важные выводы: 1) после организации базисов сепарабельных гильбертовых пространств Ξ^T, Ξ^E их ортогонализации можно проводить независимо друг от друга; 2) независимость процедур ортогонализации снижает объем вычислений более чем вдвое.

3. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕРМОЭЛАСТОСТАТИКИ

В качестве основы для классификации ТЕ-задач логично использовать классификации температурных и эластостатических задач: задачи Дирихле («D»), Неймана («N»); первая («1») и вторая («2») задачи теории упругости в терминах Н. И. Мусхелишвили. Возникает серия основных задач (1D, 1N, 2D, 2N) и их смешанных вариантов (12D, 12N, 1DN, 2DN, 12DN, ...), смысл постановок которых достаточно легко интерпретируется.

Например, «12D» означает, что граница области V разбита на два класса $\partial V = S_p \cup S_u$, $S_p \cap S_u = \emptyset$. Температура T задана на всей границе ∂V ; на S_p определены поверхностные усилия $\mathbf{p}$, на S_u — перемещения $\mathbf{u}$.

В каждом варианте порождаются особенности, которыми следует пользоваться, формируя эффективный и экономичный подход к процедуре построения решения.

В случаях ГУ линейного типа относительно характеристик граничного состояния задача сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов Фурье. Структура матрицы уравнений зависит от конкретного типа ГУ, а значения элементов определяются только базисными элементами. Вектор правых частей содержит также информацию о значениях характеристик ГУ. В основных задачах (1D, 1N, 2D, 2N) при $\tilde{\alpha} = \tilde{\beta} = 1$ матрицы систем уравнений — единичные.

Рассмотрим варианты первой основной задачи теории упругости при заданных на границе ∂V поверхностных усилиях и температуры (1D) либо нормальному потоку тела (1N). Естественное желание декомпозировать решение на последовательность термостатической, а затем упругой задач приводит к формированию как состояний $\xi^T \longleftrightarrow \gamma^T$, им отвечающих наборов характеристик $\{\varepsilon_{ij}^T, \sigma_{ij}^T\} \longleftrightarrow \{u_i^T, p_i^T\}$, а также объемных сил температурного характера X_i^T . При решении «упругой» части задачи формально возникает необходимость первоначального построения частного решения, отвечающего объемным силам, затем корректировке граничных условий за счет p_i^T и поправки от частного решения, и только потом можно строить состояние ξ^E . Обозначенную двухшаговую корректировку нет необходимости проводить. Этот вывод обусловлен тем, что поле $(-\xi^E)$ благодаря единственности решения первой основной задачи теории упругости и удовлетворяющих определяющим соотношениям объемным силам в сумме составляют тривиальное

нулевое состояние. Отсюда следует, что нет необходимости проводить обозначенную декомпозицию решения. Результат решения зависит от назначения последовательности задач из упругой и температурной.

Рассмотрим примеры решения задач 1D, 1N для кругового цилиндра. Полагаем все определяющие соотношения безразмерными: $\lambda = \mu = 1$, $\alpha = 0,0045$. Тело занимает область $V = \{(x, y, z) | x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \varphi \in [-\pi, \pi], r \in [0, 1], z \in [-1, 1]\}$, ограниченную поверхностями

$$S_{1,3} = \{(x, y, z) | x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \varphi \in [-\pi, \pi], r \in [0, 1], z = \pm 1\},$$

$$S_2 = \{(x, y, z) | x = \cos \varphi, y = \sin \varphi, \varphi \in [-\pi, \pi], r = 1, z \in [-1, 1]\}.$$

В обеих задачах цилиндр сжимается осевыми усилиями безразмерной интенсивности p_0 :

$$\mathbf{p} = p_0 \begin{cases} \{0, 0, 1\}, & S_1, \\ \{(1 - z^2) \cos \varphi, (1 - z^2) \sin \varphi, 0\}, & S_2, \\ \{0, 0, -1\}, & S_3. \end{cases}$$

В задаче 1D задано распределение температуры по границе тела:

$$T = \begin{cases} 0, & S_1, \\ \sqrt{4 - (z - 1)^2}, & S_2, \\ 2, & S_3. \end{cases}$$

В задаче 1N на поверхности тела указывается сбалансированный требованием стационарности поток температуры

$$\frac{dT}{d\mathbf{n}} = \begin{cases} 0, & S_1, \\ -1 - z, & S_2, \\ 8(1 - r^2), & S_3. \end{cases}$$

Формирование конечного отрезка счётного базиса проводилось в соответствии с рекомендациями, описанными в [7, 10, 13]. Точность решения, оценённая среднеквадратичной невязкой характеристик, фигурирующих в построенном граничном состоянии γ с соответствующими граничными условиями, составила $1,245 \cdot 10^{-14}$ ед. в задаче 1D, и $4,26 \cdot 10^{-10}$ ед. в задаче 1N.

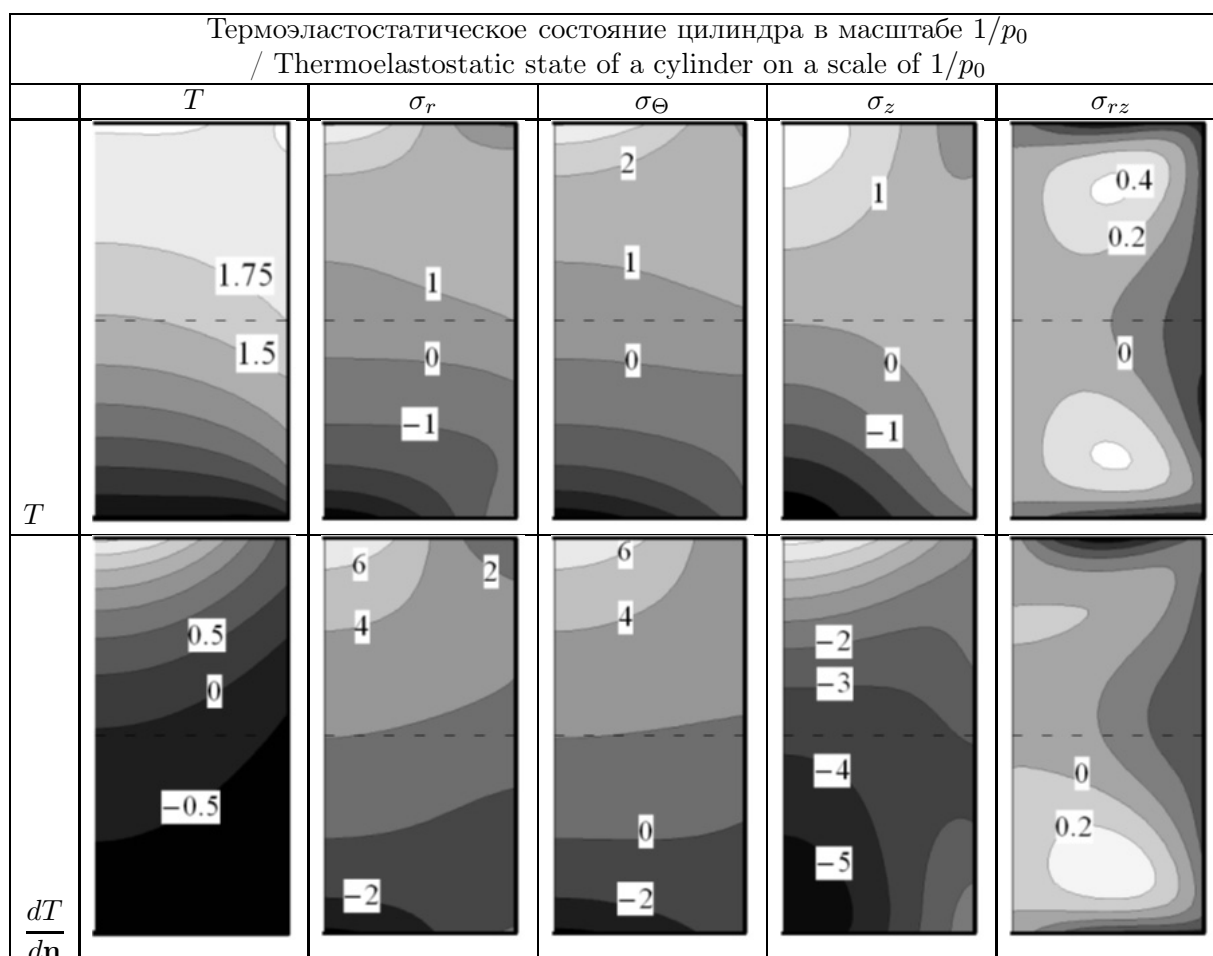
В таблице приведён график распределения температуры и напряжений в масштабе $1/p_0$ (радиальные σ_r , окружные σ_θ , осевые σ_z , сдвиговые σ_{rz} в осевом сечении $\varphi = 0$).

Анализ распределения характеристик термоупругого состояния позволяет сделать ряд качественных выводов.

3.1. Задача 1D. В силу единичности матрицы коэффициентов системы уравнений значения коэффициентов Фурье вычисляются «напрямую»:

$$c_k^T = \int_{\partial V} T \frac{dT^{(k)}}{d\mathbf{n}} ds, \quad c_k^E = \int_{\partial V} p_i u_i^{E(k)} ds.$$

Искажение поля температуры обусловлено неравномерностью её распределения по границе S_2 тела: наибольшее значение достигается в верхней половине боковой поверхности цилиндра. При этом наибольшие растягивающие значения главных напряжений наблюдаются в центре нижнего основания. Осевые волокна на боковой поверхности S_2 почти всюду — растягивающие. Исключение имеют участки, примыкающие к верхней кромке цилиндра, но, возможно, этот эффект обусловлен не внешним температурным воздействием, а наличием геометрической сингулярности на границе тела (включение в базис Ξ специальных решений, «схватывающих» особенности границы, требует специальных исследований; пока таковые отсутствуют в 3D-варианте). Сдвиговые напряжения σ_{rz} свидетельствуют о том, что область тела, примыкающая к его центру, практически формы не меняет. Выпучивание происходит вблизи середины боковой поверхности. Белые пятна на графике говорят о том, что в их окрестности происходит сужение углов между любой парой волокон, выделенных в плоскости сечения.



3.2. Задача 1N. Коэффициенты c_k^E вычисляются так же, как в 1D. Для температурных разложений справедливо:

$$c_k^T = \int_{\partial V} \frac{dT}{dn} T^{(k)} ds.$$

В соответствии с ГУ первоначально равномерный поток тепла у нижнего основания концентрируется в форму приосевой струи у верхнего основания. Радиальные и окружные напряжения у нижнего основания — сжимающие, у верхнего — растягивающие, причем концентрируются вблизи оси цилиндра. Осевые напряжения имеют существенные отличия от такого варианта: вблизи нижней кромки цилиндра ощущается ослабление эффекта сжатия. Характер сдвиговых напряжений вблизи боковой поверхности не меняется в сравнении с 1D, но есть особенность: сужение угла между парой волокон тела наблюдается в сравнении с 1D только в нижней части. В верхней части этого не наблюдается за исключением малого участка вблизи оси посередине верхней части.

3.3. Выводы.

1. Выполнен обзор диссертационных работ последнего времени, посвящённых изучению термомеханических процессов. «Очерчен» фон соответствующих научных исследований, проведённых в мире. Серьёзных результатов в плане построения численно-аналитических решений задач не наблюдается.
2. Изложены основные результаты в плане зарождения и развития метода граничных состояний, позволяющего строить не только численно-аналитические решения задач математической физики (в первую очередь — механики), но даже выписывать их полнопараметрические аналитические решения. Метод обоснованно приспособлен к задачам термоэластостатики.
3. Актуальный подход не оговаривает возможности использования декомпозиции процесса построения решения на последовательность сначала температурной задачи, затем упругой.

Это открывает возможность для решения задач с граничными условиями, в которых температурные и механические характеристики связаны общим соотношением.

4. Выполнено решение двух классов задач для термоупругого цилиндра в условиях стационарности анализируемого состояния среды. Даны комментарии.

Ближайшие перспективы исследований в термоэластостатике связаны: 1) с анализом влияния сингулярностей физического и геометрического характера 3D-тела на его внутреннее состояние; 2) с решением задач термоэластостатики, в которых температурные и механические факторы «завязаны» в граничных условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванычев Д. А.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости для анизотропных сред// Дисс. к.ф.-м.н. — Тула: ТулГУ, 2010.
2. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. — Киев: Наукова Думка, 1970.
3. *Лурье А. И.* Теория упругости. — М.: Наука, 1970.
4. *Николаев О. Г., Скицка М. В.* Thermoelastic problem for a space with two inclusions and heat generation// Пробл. обчисл. мех. і міцн. констр. — 2024. — 1, № 38. — С. 248–268.
5. *Новикова О. С.* Построение полнопараметрических аналитических решений задач теории упругости на основе метода граничных состояний// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2019.
6. *Пеньков В. Б., Левина Л. В.* Метод опорного базиса построения частного решения линейного неоднородного операторного уравнения математической физики// Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2022. — № 3. — С. 91–101.
7. *Пеньков В. В.* Метод граничных состояний в задачах линейной механики// Дисс. к.ф.-м.н. — Тула, 2002.
8. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1979.
9. *Рязанцева Е. А.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости с сингулярностями физического и геометрического характера// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2015.
10. *Саталкина Л. В.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости неоднородных тел и термоупругости// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2010.
11. *Стебенев И. Н.* Метод граничных состояний в задачах теории упругости об установившихся колебаниях изотропных тел// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2003.
12. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. — М.: Мир, 1975.
13. *Харитоненко А. А.* Моделирование состояний гармонических сред// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2006.
14. *Шульмин А. С.* Равновесие изотропного упругого пространства, содержащего полости и включения// Дисс. к.ф.-м.н. — Липецк, 2014.
15. *Al Nahas R.* On the use of a spacetime formalism for thermomechanical applications// Дисс. PhD. — Troyes: Univ. de Technologie de Troyes, 2021.
16. *Boudrahem N., Berboucha A.* Theoretical justification of Ventcel's boundary conditions for a thin layer three-dimensional thermoelasticity problem// Miskolc Math. Notes. — 2021. — 22, № 2. — С. 581–598.
17. *Chamekh R.* Stratégies de jeux pour quelques problèmes inverses// Дисс. PhD. — COMUE Univ. Côte d'Azur, 2015–2019; Univ. de Tunis El Manar, 2019.
18. *Ebrahimi M. T., Balint D. S., Dini D.* An analytical solution for multiple inclusions subject to a general applied thermal field// J. Thermal Stresses. — 2023. — 46, № 11. — С. 1180–1198.
19. *Fang R., Zhang K., Song K., Kai Y.* A deep learning method for solving thermoelastic coupling problem// Z. Naturforschung A. — 2024. — 79, № 8. — С. 851–871.
20. *Ghavamian A. A.* Computational framework for a first-order system of conservation laws in thermoelasticity// Дисс. PhD. — Ecole centrale de Nantes, Swansea Univ., 2020.
21. *Hematiyan M. R., Mohammadi M., Tsai Ch.-Ch.* Method of fundamental solutions for anisotropic thermoelastic problems// Appl. Math. Model. — 2021. — 95. — С. 200–218.
22. *Kushnir R. M., Tokovyy Y. V., Boiko D. S.* Direct integration method in three-dimensional elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous transversely isotropic solids: governing equations in terms of stresses// Bull. T. Shevchenko Natl. Univ. Kyiv. Ser. Phys. Math. — 2019. — № 1. — С. 102–105.
23. *Liu B.* A high-performance boundary element method and its applications in engineering// Дисс. PhD. — Swansea: Swansea Univ., 2022.
24. *Pimpale S. B., Sutar C. S., Chaudhari K. K.* An analytical approach of heat transfer modelling with thermal stresses in circular plate by means of Gaussian heat source and stress function// Phys. Scripta. — 2021. — 97, № 1. — 015205.

25. *Rabette F.* Prédiction de la microfissuration par champ de phase et méthode FFT pour les matériaux énergétiques comprimés// Дисс. PhD. — Paris: Univ. Paris Sciences et Lettres, 2021.
26. *Soni D.* Nonlinear dynamics of thermoelastic plates// Master's Thesis. — West Lafayette: School of Mechanical Engineering, Purdue University, 2023.
27. *Tan Ch.-H., Xu B.-B., Zheng Y.-T., Zhang S.-Q., Jiang W.-W., Yang K., Gao X.-W.* Analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems based on element differential method// Int. J. Heat Mass Transfer. — 2024. — 222. — 125216.
28. *Wang K., Li P., Zhang K.* Hybrid Trefftz finite element method for heat conduction in cylindrical composite laminates// J. Thermal Stresses. — 2023. — 46, № 12. — С. 1296–1312.
29. *Wang Y., Li J., Wang L., Hu C., Shen H., Liu J.* Semi-analytical solutions of the three-dimensional size-dependent thermoelastic contact of the microstructured materials under a hot indenter// Math. Mech. Solids. — 2025. — DOI: doi:10.1177/10812865251315955.
30. *Wu C.* Virtual experiments and designs of composites with the inclusion-based boundary element method (iBEM)// Дисс. PhD. — New York: Columbia University, 2021.
31. *Xie K., Song H., Schiavone P., Gao C.* Analytical solution of the temperature-dependent thermoelastic problem induced by Joule heating and the presence of an elliptic cavity// J. Thermal Stresses. — 2024. — 47, № 1. — С. 115–142.
32. *Zhang H. L., Kim S., Choi G., Xie D. M., Cho H. H.* Analysis of thermoelastic problems in isotropic solids undergoing large temperature changes based on novel models of thermoelasticity// Int. J. Heat Mass Transfer. — 2021. — 177. — 121576.
33. *Zhao M.-J., Cen S., Shang Y., Li C.-F.* Development of new thermoelastic Petrov–Galerkin finite elements with enhanced precision and distortion tolerance// Acta Mech. — 2025. — 236, № 3. — С. 2233–2268. — DOI: 10.1007/s00707-025-04260-6.
34. *Zwicke F.* Design of inverse molds in pressure casting based on the finite element method// Дисс. PhD. — Aachen: RWTH Aachen Univ., 2020.

Л. В. Левина

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

E-mail: sataalkina_lyubov@mail.ru

В. Б. Пеньков

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

E-mail: vbpenkov@mail.ru

М. А. Лаврентьева

Липецкий государственный технический университет, Липецк, Россия

E-mail: masy1997@gmail.com

UDC 518.5, 539.3

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-240-252

EDN: MVAOUM

Current state and prospects of research in thermoelasticity

L. V. Levina, V. B. Pen'kov, and M. A. Lavrentieva

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

Abstract. A review of recent works on thermoelasticity is provided. It is recommended to use the boundary state method (BSM) for constructing numerical-analytical solutions of problems by means of computing systems supporting “computer algebras”. The structures of Hilbert spaces of internal and boundary states of a thermoelastostatic medium (TE) are formed and a method for describing scalar products of both isomorphic spaces is determined. A possibility of saving computational resources for performing the procedure of orthogonalization of bases of separable spaces is discovered. When solving problems of thermoelasticity coupled/uncoupled by boundary conditions (BC), one does not need to decompose them into a traditional sequence of a temperature and elastic problems. A classification of TE problems is given. Calculations are performed and the results are commented for two classes of problems.

Keywords: thermoelasticity, thermoelastostatics, boundary state method, BSM, Dirichlet problem, Neumann problem, energy methods.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: L. V. Levina, V. B. Pen'kov, M. A. Lavrentieva, “Current state and prospects of research in thermoelasticity,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 2, 240–252. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-240-252>

REFERENCES

1. D. A. Ivanychev, “Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti dlya anizotropnykh sred” [The method of boundary states in problems of elasticity theory for anisotropic media], *PhD Thesis*, Tula State Univ., Tula, 2010 (in Russian).
2. A. D. Kovalenko, *Osnovy termouprugosti* [Fundamentals of Thermoelasticity], Naukova Dumka, Kiev, 1970 (in Russian).
3. A. I. Lurie, *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
4. O. G. Nikolaev and M. V. Skitska, “Thermoelastic problem for a space with two inclusions and heat generation,” *Probl. obchisl. mekh. i mitsn. konstr.* [Probl. Comp. Mech. Strength Constr.], 2024, 1, No. 38, 248–268.
5. O. S. Novikova, “Postroenie polnoparametricheskikh analiticheskikh resheniy zadach teorii uprugosti na osnove metoda granichnykh sostoyaniy” [Construction of full-parametric analytical solutions of elasticity theory problems based on the boundary state method], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2019 (in Russian).
6. V. B. Pen'kov and L. V. Levina, “Metod opornogo bazisa postroeniya chastnogo resheniya lineynogo neodnorodnogo operatornogo uravneniya matematicheskoy fiziki” [The method of the support basis for constructing a particular solution of a linear inhomogeneous operator equation of mathematical physics], *Vestn. VGU. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2022, No. 3, 91–101 (in Russian).
7. V. V. Pen'kov, “Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh lineynoy mekhaniki” [The boundary state method in problems of linear mechanics], *PhD Thesis*, Tula, 2002 (in Russian).

8. Yu. N. Rabotnov, *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of Deformable Solids], Nauka, Moscow, 1979 (in Russian).
9. E. A. Ryazantseva, “Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti s singulyarnostyami fizicheskogo i geometricheskogo kharaktera” [The method of boundary states in problems of elasticity theory with singularities of physical and geometric nature], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2015 (in Russian).
10. L. V. Satalkina, “Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti neodnorodnykh tel i termouprugosti” [The method of boundary states in problems of the theory of elasticity of inhomogeneous bodies and thermoelasticity], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2010 (in Russian).
11. I. N. Stebenev, “Metod granichnykh sostoyaniy v zadachakh teorii uprugosti ob ustanovivshikhsya kolebaniyakh izotropnykh tel” [The method of boundary states in problems of elasticity theory on steady-state oscillations of isotropic bodies], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2003 (in Russian).
12. C. Truesdell, *Pervonachal'nyy kurs ratsional'noy mekhaniki sploshnykh sred* [A First Course in Rational Continuum Mechanics], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
13. A. A. Kharitonenko, “Modelirovanie sostoyaniy garmonicheskikh sred” [Modeling of States of Harmonic Media], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2006 (in Russian).
14. A. S. Shul'min, “Ravnovesie izotropnogo uprugogo prostranstva, sodержashchego polosti i vklyucheniya” [Equilibrium of an isotropic elastic space containing cavities and inclusions], *PhD Thesis*, Lipetsk, 2014 (in Russian).
15. R. Al Nahas, “On the use of a spacetime formalism for thermomechanical applications,” *PhD Thesis*, Univ. de Technologie de Troyes, Troyes, 2021.
16. N. Boudrahem and A. Berboucha, “Theoretical justification of Ventcel's boundary conditions for a thin layer three-dimensional thermoelasticity problem,” *Miskolc Math. Notes*, 2021, **22**, No. 2, 581–598.
17. R. Chamekh, “Stratégies de jeux pour quelques problèmes inverses,” *PhD Thesis*, COMUE Univ. Côte d'Azur, 2015–2019; Univ. de Tunis El Manar, 2019.
18. M. T. Ebrahimi, D. S. Balint, and D. Dini, “An analytical solution for multiple inclusions subject to a general applied thermal field,” *J. Thermal Stresses*, 2023, **46**, No. 11, 1180–1198.
19. R. Fang, K. Zhang, K. Song, and Y. Kai, “A deep learning method for solving thermoelastic coupling problem,” *Z. Naturforschung A*, 2024, **79**, No. 8, 851–871.
20. A. A. Ghavamian, “Computational framework for a first-order system of conservation laws in thermoelasticity,” *PhD Thesis*, Ecole centrale de Nantes, Swansea Univ., 2020.
21. M. R. Hematiyan, M. Mohammadi, and Ch.-Ch. Tsai, “Method of fundamental solutions for anisotropic thermoelastic problems,” *Appl. Math. Model.*, 2021, **95**, 200–218.
22. R. M. Kushnir, Y. V. Tokovyy, and D. S. Boiko, “Direct integration method in three-dimensional elasticity and thermoelasticity problems for inhomogeneous transversely isotropic solids: governing equations in terms of stresses,” *Bull. T. Shevchenko Natl. Univ. Kyiv. Ser. Phys. Math.*, 2019, No. 1, 102–105.
23. B. Liu, “A high-performance boundary element method and its applications in engineering,” *PhD Thesis*, Swansea Univ., Swansea, 2022.
24. S. B. Pimpare, C. S. Sutar, and K. K. Chaudhari, “An analytical approach of heat transfer modelling with thermal stresses in circular plate by means of Gaussian heat source and stress function,” *Phys. Scripta*, 2021, **97**, No. 1, 015205.
25. F. Rabette, “Prédiction de la microfissuration par champ de phase et méthode FFT pour les matériaux énergétiques comprimés,” *PhD Thesis*, Univ. Paris Sciences et Lettres, Paris, 2021.
26. D. Soni, “Nonlinear dynamics of thermoelastic plates,” *Master's Thesis*, School of Mechanical Engineering, Purdue University, West Lafayette, 2023.
27. Ch.-H. Tan, B.-B. Xu, Y.-T. Zheng, S.-Q. Zhang, W.-W. Jiang, K. Yang, and X.-W. Gao, “Analysis of dynamic coupled thermoelasticity problems based on element differential method,” *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2024, **222**, 125216.
28. K. Wang, P. Li, and K. Zhang, “Hybrid Trefftz finite element method for heat conduction in cylindrical composite laminates,” *J. Thermal Stresses*, 2023, **46**, No. 12, 1296–1312.
29. Y. Wang, J. Li, L. Wang, C. Hu, H. Shen, and J. Liu, “Semi-analytical solutions of the three-dimensional size-dependent thermoelastic contact of the microstructured materials under a hot indenter,” *Math. Mech. Solids*, 2025, DOI: doi:10.1177/10812865251315955.
30. C. Wu, “Virtual experiments and designs of composites with the inclusion-based boundary element method (iBEM),” *PhD Thesis*, Columbia University, New York, 2021.
31. K. Xie, H. Song, P. Schiavone, and C. Gao, “Analytical solution of the temperature-dependent thermoelastic problem induced by Joule heating and the presence of an elliptic cavity,” *J. Thermal Stresses*, 2024, **47**, No. 1, 115–142.

32. H. L. Zhang, S. Kim, G. Choi, D. M. Xie, and H. H. Cho, “Analysis of thermoelastic problems in isotropic solids undergoing large temperature changes based on novel models of thermoelasticity,” *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2021, **177**, 121576.
33. M.-J. Zhao, S. Cen, Y. Shang, and C.-F. Li, “Development of new thermoelastic Petrov–Galerkin finite elements with enhanced precision and distortion tolerance,” *Acta Mech.*, 2025, **236**, No. 3, 2233–2268. — DOI: 10.1007/s00707-025-04260-6.
34. F. Zwicke, “Design of inverse molds in pressure casting based on the finite element method,” *PhD Thesis*, RWTH Aachen Univ., Aachen, 2020.

L. V. Levina

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

E-mail: sataalkina_lyubov@mail.ru

V. B. Pen'kov

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

E-mail: vbpenkov@mail.ru

M. A. Lavrentieva

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia

E-mail: masy1997@gmail.com