

УДК 517.956.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-233-239

EDN: MUMPFR

ОБ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

В. И. Качалов

НИУ «МЭИ», Москва, Россия

Аннотация. Задача возмущения спектра линейного оператора линейным же оператором решена благодаря введенным понятиям голоморфных семейств операторов типа (А) и в смысле Като. Построенные при этом ряды Рэлея—Шрёдингера уже сходились в обычном смысле, а не асимптотически. В данной работе найдены условия голоморфности по малому параметру собственных пар в ситуации, когда линейный оператор возмущается нелинейным оператором, порожденным произведением в банаховой алгебре.

Ключевые слова: возмущение спектра, голоморфные семейства операторов, банахова алгебра, оснащенное банахово пространство.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-21-00496).

Для цитирования: В. И. Качалов. Об одной нелинейной спектральной задаче // Соврем. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 233–239. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-233-239>

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из вопросов, связанным с аналитическими аспектами теории возмущений, является вопрос зависимости от малого параметра собственных векторов и собственных значений операторов вида $L_\varepsilon = A + \varepsilon B$, когда оба оператора линейные и известен спектр оператора A . Такого рода задачи, как правило, решаются методом малого параметра (методом Пуанкаре), причем во многих случаях (см. [6, гл. XII, п. 3]) ряды, представляющие собственные векторы и собственные значения, сходятся асимптотически при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако для квантовой механики собственные значения — это уровни энергии атомов, и желательно было, чтобы вышеупомянутые ряды (ряды Рэлея—Шрёдингера) сходились в обычном смысле. В рассматриваемом линейном случае это имело место, когда L_ε представляло собой голоморфное семейство типа Като [2, гл. VII, § 2, п. 2]. Если $D_B \supset D_A$ и оператор B подчинен оператору A [6, гл. XII, п. 2], то L_ε является голоморфным семейством типа (А) и собственные пары спектральной задачи для L_ε также голоморфным образом зависят от ε . Следует также указать на фундаментальный труд К. Фридрихса [10], в котором детально изучена проблема возмущения спектра оператора в линейном случае.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ О НЕЛИНЕЙНОМ ВОЗМУЩЕНИИ СПЕКТРА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Пусть $\mathcal{B}$ — коммутативная банахова алгебра с единицей, оснащенная скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_s$. Норму в $\mathcal{B}$ обозначим через $\|\cdot\|$, а норму, порожденную скалярным произведением,

обозначим через $\|\cdot\|_s$. Рассмотрим в $\mathcal{B}$ спектральную задачу

$$Au + \varepsilon u \cdot Hu = \Lambda u, \quad (1)$$

с малым комплексным параметром ε , когда A и H являются замкнутыми неограниченными операторами с областями определения D_A и D_H соответственно.

Условие (α). Оператор A обладает системой нормированных собственных векторов $E = \{e_1, e_2, \dots\}$, являющейся ортонормированной в введенном скалярном произведении. Соответствующие собственные значения обозначим через $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$.

Условие (β). Обозначим через E_m одномерное подпространство, натянутое на вектор e_m , и пусть $\mathcal{B} \setminus E_m$ — подпространство в $\mathcal{B}$, причем $e_m \perp \mathcal{B} \setminus E_m$ в смысле введенного скалярного произведения, $m = 1, 2, \dots$

Условие (γ). При каждом натуральном m оператор $A - \lambda_m I$, где I — тождественный оператор, непрерывно обратим в пространстве $\mathcal{B} \setminus E_m$.

Будем искать собственные векторы и собственные значения в виде рядов по степеням малого параметра:

$$u_m(\varepsilon) = u_{0,m} + \varepsilon u_{1,m} + \dots + \varepsilon^n u_{n,m} + \dots, \quad (2)$$

$$\Lambda_m(\varepsilon) = \lambda_{0,m} + \varepsilon \lambda_{1,m} + \dots + \varepsilon^n \lambda_{n,m} + \dots \quad (3)$$

В соответствии с методом неопределенных коэффициентов, имеем серию задач:

$$\begin{aligned} Au_{0,m} &= \lambda_{0,m} u_{0,m}, \\ Au_{1,m} + u_{0,m} \cdot Hu_{0,m} &= \lambda_{0,m} u_{1,m} + \lambda_{1,m} u_{0,m}, \\ &\dots \dots \dots \\ Au_{n,m} + \sum_{k=0}^{n-1} u_{k,m} \cdot Hu_{n-k-1,m} &= \sum_{k=0}^n \lambda_{k,m} u_{n-k,m}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Действуя так же, как и в линейной теории возмущений [6, гл. XII, п. 1], пользуясь условием (β), получим следующую серию равенств:

$$\begin{aligned} \lambda_{0,m} &= \lambda_m, \\ u_{0,m} &= e_m; \\ \lambda_{1,m} &= (u_{0,m} \cdot Hu_{0,m}, u_{0,m})_s, \\ (A - \lambda_m I)u_{1,m} &= -u_{0,m} \cdot Hu_{0,m} + \lambda_{1,m} u_{0,m}; \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_{n,m} &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k,m} \cdot Hu_{n-k-1,m}, u_{0,m})_s, \\ (A - \lambda_m I)u_{n,m} &= -\sum_{k=0}^{n-1} u_{k,m} \cdot Hu_{n-k-1,m} + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,m} u_{n-k}; \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Из условия (γ) следует, что λ_m принадлежит резольвентному множеству оператора A_m , являющемуся сужением оператора A на пространство $\mathcal{B} \setminus E_m$. Пусть $R_{A_m}(\lambda_m) = (A_m - \lambda_m I)^{-1}$ и $\|R_{A_m}(\lambda_m)\| = r_m$. Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. Пусть заданы две последовательности $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{q_n\}_{n=0}^\infty$ рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} p_0 &= 1, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n-1} q_k q_{n-k-1}; \\ q_0 &= 1, \quad q_n = \sum_{k=0}^{n-1} q_k q_{n-k-1} + \sum_{k=1}^n p_k q_{n-k}; \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда функции

$$\begin{aligned} S_p(z) &= 1 + zS_q^2(z), \\ S_q(z) &= \frac{2}{3}\sqrt{1 + \frac{1}{z}} \sin\left(\frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{(z+18)\sqrt{z}}{(z+3)\sqrt{z+3}}\right)\right) - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

являются производящими для них.

Доказательство. В соответствии с правилом Коши произведение рядов $S_p(z)$ и $S_q(z)$ удовлетворяет системе

$$\begin{cases} S_p(z) = 1 + zS_q^2(z), \\ S_q(z) = S_p(z) + S_q^3(z), \end{cases}$$

из которой следует уравнение для определения $S_q(z)$:

$$S_q^3(z) + zS_q^2(z) - S_q(z) + 1 = 0.$$

Решая это уравнение, получим доказываемые формулы (см. также [9]). Лемма 1 доказана. $\square$

Таким образом,

$$\begin{aligned} S_p(z) &= 1 + z + 4z^2 + 24z^3 + 172z^4 + 1360z^5 + \dots, \\ S_q(z) &= 1 + 2z + 10z^2 + 66z^3 + 498z^4 + 4066z^5 + \dots \end{aligned}$$

Можно доказать, что оба ряда сходятся в круге $|z| < \frac{5\sqrt{5}-11}{2} \approx 0,09$. В [10] приведена формула коэффициентов ряда $S_p(z)$:

$$p_n = 2 \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(2n+m-1)!}{m!(n-m-1)!(n+m+1)!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Обозначим через $\mathcal{L}(\mathcal{B})$ алгебру непрерывных в $\mathcal{B}$ операторов.

Теорема 1. Если выполнены условия (α) , (β) , (γ) , $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ и $D_H \supset D_A$, то собственные векторы и собственные значения спектральной задачи (1) голоморфны в точке $\varepsilon = 0$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $G = HA^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$. По теореме Банаха о замкнутом графике [7, гл. III, § 15, п. 4], $G \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$, так как H — замкнутый оператор, $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{B})$ и $D_H \supset D_A$. Пусть $\|G\| = g$. Также введем в рассмотрение операторы $T_m = AR_{A_m}(\lambda_m)$, $m = 1, 2, \dots$, которые также являются ограниченными по теореме Банаха о замкнутом графике, и пусть $\|T_m\|_{\mathcal{B} \setminus E_m} = t_m$. Будем считать, не ограничивая общности, что $\|A^{-1}\| = 1$ и $1 = |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$

Из равенств (5) следует, что

$$\begin{aligned} \lambda_{0,m} &= \lambda_m, \\ u_{0,m} &= R_m; \\ \lambda_{1,m} &= (u_{0,m} \cdot Hu_{0,m}, u_{0,m})_s, \\ u_{1,m} &= R_{A_m}(\lambda_m)[-u_{0,m} \cdot Hu_{0,m} + \lambda_{1,m}u_{0,m}]; \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{n,m} &= \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k,m} \cdot Hu_{n-k-1,m}, u_{0,m})_s, \\ u_{n,m} &= R_{A_m}(\lambda_m) \left[-\sum_{k=0}^{n-1} u_{k,m} \cdot Hu_{n-k-1,m} + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,m}u_{n-k} \right]; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть $Au_{n,m} = v_{n,m}$, $n = 0, 1, \dots$, $m = 1, 2, \dots$. Запишем равенства для $v_{n,m}$, используя ранее введенные операторы:

$$\begin{aligned}
 \lambda_{0,m} &= \lambda_m, \\
 v_{0,m} &= Ae_m = \lambda_m e_m; \\
 \lambda_{1,m} &= (A^{-1}u_{0,m} \cdot Gv_{0,m}, A^{-1}v_{0,m})_s, \\
 v_{1,m} &= T_m[-A^{-1}v_{0,m} \cdot Gv_{0,m} + \lambda_{1,m}A^{-1}v_{0,m}]; \\
 &\dots\dots\dots \\
 \lambda_{n,m} &= \sum_{k=0}^{n-1} (A^{-1}v_{k,m} \cdot Gv_{n-k-1,m}, A^{-1}v_{0,m})_s, \\
 v_{n,m} &= T_m \left[-\sum_{k=0}^{n-1} A^{-1}v_{k,m} \cdot Gv_{n-k-1,m} + \sum_{k=1}^n \lambda_{k,m}A^{-1}v_{n-k} \right]; \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{7}$$

Докажем методом математической индукции, что

$$|\lambda_{n,m}| \leq p_n t_m^{n-1} g^n |\lambda_m|^{2n} \gamma^n, \tag{8}$$

$$\|v_{n,m}\| \leq q_n t_m^n g^n |\lambda_m|^{2n+1} \gamma^n, \tag{9}$$

с учетом того, что в банаховой алгебре $\|uv\| \leq \|u\| \cdot \|v\| \forall u, v \in \mathcal{B}$ (см. [1, гл. XI, п. 1]) и $(u, v)_s \leq \gamma \|u\| \cdot \|v\|$ для некоторого $\gamma > 0$ (см. [7, гл. I, § 6, п. 7]). При $n = 1$ неравенство (8) очевидно. Рассмотрим неравенство (9):

$$\|v_{1,m}\| \leq q_1 t_m g |\lambda_m|^2 \gamma + q_1 t_m g |\lambda_m|^3 \gamma \leq t_m g |\lambda_m|^3 \gamma,$$

т. е. оно также выполняется.

Пусть неравенства (8) и (9) верны при $n = s$. Докажем, что отсюда вытекает их справедливость при $n = s + 1$:

$$\begin{aligned}
 |\lambda_{s+1,m}| &\leq \gamma g \sum_{k=0}^s q_k t_m^k g^k |\lambda_m|^{2k+1} \gamma^k \cdot q_{s-k} t_m^{s-k} g^{s-k} |\lambda_m|^{2s-2k+1} \gamma^{s-k} = \\
 &= g \gamma \left(\sum_{k=0}^s q_k q_{s-k} \right) t_m^s g^s |\lambda_m|^{2s+2} \gamma^s = p_{s+1} t_m^s g^{s+1} |\lambda_m|^{2s+2} \gamma^{s+1}; \\
 \|v_{s+1,m}\| &\leq t_m \left[g \sum_{k=0}^s q_k t_m^k g^k |\lambda_m|^{2k+1} \gamma^k \cdot q_{s-k} t_m^{s-k} |\lambda_m|^{2s-2k+1} \gamma^{s-k} + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^{s+1} p_k t_m^{k-1} g^k |\lambda_m|^{2k} \gamma^k \cdot q_{s+1-k} t_m^{s+1-k} g^{s+1-k} |\lambda_m|^{2s-2k+3} \gamma^{s-k+1} \right] = \\
 &= \left(\sum_{k=0}^s q_k q_{s-k} \right) t_m^{s+1} g^{s+1} |\lambda_m|^{2s+1} \gamma^{s+1} + \\
 &\quad + \left(\sum_{k=1}^{s+1} p_k q_{s+1-k} \right) t_m^{s+1} g^{s+1} |\lambda_m|^{2s+3} \gamma^{s+1} \leq q_{s+1} t_m^{s+1} g^{s+1} |\lambda_m|^{2s+3} \gamma^{s+1}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, неравенства (8), (9) верны при всех натуральных n .

Из леммы 1 и оценок (8), (9) вытекает сходимость ряда (3) и ряда

$$v_m(\varepsilon) = v_{0,m} + \varepsilon v_{1,m} + \dots + \varepsilon^n v_{n,m} + \dots$$

Но тогда, ввиду ограниченности оператора A^{-1} , сходится и ряд (2). Итак,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_{n,m} &= u_m(\varepsilon), \\
 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n A u_{n,m} &= A \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_{n,m} = v_m(\varepsilon),
 \end{aligned}$$

что ввиду замкнутости оператора A означает, что $u_m(\varepsilon) \in D_A$ и $v_m(\varepsilon) = A(u_m(\varepsilon))$. Вместе с тем фактом, что ряды (2), (3) обращают уравнение (1) в тождество, это доказывает, что $\{u_m(\varepsilon), \Lambda_m(\varepsilon)\}$ — собственная пара, голоморфная в точке $\varepsilon = 0$. Теорема 1 доказана. $\square$

Пример 1. Пусть $\mathcal{B}$ — банахова алгебра вещественнозначных функций

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

с нормой $\|w\| = \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$. Оснастим $\mathcal{B}$ скалярным произведением по формуле

$$(u, v)_s = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(x)v(x)dx. \quad (10)$$

Ясно, что $|(u, v)_s| \leq \gamma \|u\| \cdot \|v\|$ с $\gamma = 2$.

Пусть в уравнении (1) $A = -\partial_x^2$, $D_A = \{w \in \mathcal{B} : \partial_x^2 w \in \mathcal{B}, w(0) = w(2\pi) = 0\}$, $H = \partial_x$, $D_H = \{w \in \mathcal{B} : \partial_x w \in \mathcal{B}, w(0) = 0\}$.

Ясно, что $D_H \supset D_A$, $e_m = \sin mx$, $\lambda_m = m^2$, $\|e_m\| = \|e_m\|_s = 1$, $E_m = \{\mu \sin mx, \mu \in \mathbb{R}\}$, $E_m \perp \mathcal{B} \setminus E_m$ в смысле скалярного произведения (10). Итак, имеем спектральную задачу

$$\begin{aligned} -\partial_x^2 u + \varepsilon u \cdot \partial_x u &= \Lambda u, \quad u \in \mathcal{B}, \\ u(0) &= u(2\pi) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Если воспользоваться формулами (5), (6), то можно найти несколько первых членов рядов (2), (3) при $m = 1, 2, \dots$, представляющих решение спектральной задачи (11):

$$\begin{aligned} u_m(x, \varepsilon) &= \sin mx - \frac{\varepsilon}{6m} \sin 2mx + \frac{\varepsilon^2}{32m^2} \sin 3mx - \dots; \\ \Lambda_m(\varepsilon) &= m^2 + \frac{1}{12} \varepsilon^2 + \frac{1}{384m^2} \varepsilon^4 + \dots \end{aligned}$$

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если $D_H \not\supset D_A$, то возмущение оператора A является сингулярным [5, гл. I, § 1], [11], а ряд (2) не будет аналитическим образом зависеть от ε . В этом случае нужно будет искать условия псевдоголоморфности $u(\varepsilon)$ (см. [3]). Примечательно, что задача построения рядов по степеням малого параметра, сходящихся в обычном смысле, систематически начала изучаться именно в теории сингулярных возмущений, в рамках метода регуляризации С. А. Ломова [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида К. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
3. Качалов В. И. Псевдоголоморфные и ε -псевдoreгулярные решения сингулярно возмущенных задач // Дифф. уравн. — 2022. — 58, № 3. — С. 361–370.
4. Качалов В. И., Ломов С. А. Псевдоаналитические решения сингулярно возмущенных задач // Докл. РАН. — 1994. — 334, № 6. — С. 694–695.
5. Ломов С. А., Ломов И. С. Основы математической теории пограничного слоя. — М.: МГУ, 2011.
6. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. — М.: Мир, 1982.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
8. Фридрихс К. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Мир, 1969.
9. Deutch E. Number of paths from $(0, 0)$ to $(3n, 0)$ that stay in first quadrant (but may touch horizontal axis) and where each step is $(2, 1)$, $(1, 2)$ or $(1, -1)$ // On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. — 2000. — URL: <http://oeis.org/A027307>.
10. Deutch E. Number of paths from $(0, 0)$ to $(3n, 0)$ that stay in first quadrant (but may touch horizontal axis), where each step is $(2, 1)$, $(1, 2)$ or $(1, -1)$ and start with $(2, 1)$ // On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. — 2000. — URL: <http://oeis.org/A032349>.

11. Glizer V. Y. Asymptotic analysis of spectrum and stability for the one class of singularity perturbed neutral time delay systems // *Axioms*. — 2021. — 10, № 4. — С. 325.

В. И. Качалов
НИУ «МЭИ», Москва, Россия
E-mail: vikachalov@rambler.ru

UDC 517.956.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-233-239

EDN: MUMPFR

On a nonlinear spectral problem

V. I. Kachalov

NRU "MPEI," Moscow, Russia

Abstract. The problem of perturbation of the spectrum of a linear operator by a linear operator is solved thanks to the introduced concepts of holomorphic families of operators of type (A) and in the sense of Kato. The Rayleigh–Schrödinger series constructed in this case already converged in the usual sense, and not asymptotically. In this paper, conditions for holomorphy with respect to a small parameter of eigenpairs are found in the situation when a linear operator is perturbed by a nonlinear operator generated by a product in a Banach algebra.

Keywords: spectrum perturbation, holomorphic families of operators, Banach algebra, framed Banach space.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out with the financial support of the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00496).

For citation: V. I. Kachalov, “On a nonlinear spectral problem,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. **71**, No. 2, 233–239. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-233-239>

REFERENCES

1. K. Iosida, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
2. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
3. V. I. Kachalov, “Psevdogolomorfnye i ε -pseudoregulyarnye resheniya singulyarno vozmushchennykh zadach” [Pseudoholomorphic and ε -pseudoregular solutions of singularly perturbed problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **58**, No. 3, 361–370 (in Russian).
4. V. I. Kachalov and S. A. Lomov, “Psevdoanaliticheskie resheniya singulyarno vozmushchennykh zadach” [Pseudoanalytical solutions of singularly perturbed problems], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **334**, No. 6, 694–695 (in Russian).
5. S. A. Lomov and I. S. Lomov, *Osnovy matematicheskoy teorii pogranichnogo sloya* [Fundamentals of the Mathematical Theory of the Boundary Layer], MGU, Moscow, 2011 (in Russian).
6. M. Reed and B. Simon, *Metody sovremennoy matematicheskoy fiziki. T. 4. Analiz operatorov* [Methods of Modern Mathematical Physics IV: Analysis of Operators], Mir, Moscow, 1982 (Russian translation).
7. V. A. Trenogin, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).

8. K. Friedrichs, *Vozmushchenie spektra operatorov v gil'bertovom prostranstve* [Perturbation of Spectra in Hilbert Space], Mir, Moscow, 1969 (Russian translation).
9. E. Deutch, "Number of paths from $(0, 0)$ to $(3n, 0)$ that stay in first quadrant (but may touch horizontal axis) and where each step is $(2, 1)$, $(1, 2)$ or $(1, -1)$," *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, 2000, URL: <http://oeis.org/A027307>.
10. E. Deutch, "Number of paths from $(0, 0)$ to $(3n, 0)$ that stay in first quadrant (but may touch horizontal axis), where each step is $(2, 1)$, $(1, 2)$ or $(1, -1)$ and start with $(2, 1)$," *On-Line Encyclopedia of Integer Sequence*, 2000, URL: <http://oeis.org/A032349>.
11. V. Y. Glizer, "Asymptotic analysis of spectrum and stability for the one class of singularity perturbed neutral time delay systems," *Axioms*, 2021, **10**, No. 4, 325.

V. I. Kachalov

E-mail: vikachalov@rambler.ru

NRU "MPEI," Moscow, Russia