

УДК 517.954.988.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-213-220

EDN: MMQHRH

СЛАБАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ВАРИАЦИОННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПО ВРЕМЕНИ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ

А. С. БОНДАРЕВ, А. А. ПЕТРОВА, О. М. ПИРОВСКИХ

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В сепарабельном гильбертовом пространстве для абстрактного линейного параболического уравнения с весовым интегральным условием специального вида по времени на решение доказаны существование и единственность слабого решения. Для этого задача решается приближённо полудискретным методом Галёркина. Для последовательности приближённых решений устанавливаются априорные оценки, после чего доказывается, что слабый предел этой последовательности и есть точное решение исходной задачи.

Ключевые слова: параболическое уравнение, нелокальное по времени условие, слабая разрешимость, метод Галёркина.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы выражают благодарность В. В. Смагину за постановку задачи. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. С. Бондарев, А. А. Петрова, О. М. Пировских. Слабая разрешимость вариационного параболического уравнения с нелокальным по времени условием на решение // Современ. мат. Фундам. направл. 2025. Т. 71, № 2. С. 213–220. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-213-220>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана тройка вложенных сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V , а пространство H отождествляется со своим двойственным H' . Оба вложения плотные и непрерывные. На $u, v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u, v)$. Пусть для всех $u, v \in V$ выполнены оценки:

$$|a(u, v)| \leq \eta \|u\|_V \|v\|_V, \quad \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2, \quad (1.1)$$

где $\alpha > 0$. Форма $a(u, v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \rightarrow V'$ такой, что $a(u, v) = (Au, v)$. Здесь под выражением типа (z, v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z, v) совпадает со скалярным произведением в H (см. [5, с. 58]). Из определения оператора A следует оценка $\|A\|_{V \rightarrow V'} \leq \eta$.

В пространстве V' на $[0, T]$ рассмотрим параболическую задачу:

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \quad \int_0^T p(t)u'(t) dt = \bar{u}. \quad (1.2)$$

В (1.2) на $[0, T]$ заданы функция $t \rightarrow f(t) \in V'$ и функция $t \rightarrow p(t) \in \mathbb{R}^1$, а также элемент $\bar{u}$. Производные функций в настоящей работе понимаются в обобщённом смысле.

Отметим, что вопросы разрешимости параболических задач с нелокальными по времени условиями на решение — активно разрабатываемая в настоящее время область исследования многих авторов. В работе [9] для абстрактных дифференциальных уравнений с нелокальным по времени условием на решение наиболее общего вида получен критерий единственности в терминах собственных значений. Разрешимость периодической по времени задачи для параболического уравнения с переменным оператором $A(t)$ изучалась в работе [1]. Вопросы слабой разрешимости абстрактного параболического уравнения с интегральными по времени условиями на решения рассматривались в работах [3, 6].

При доказательстве слабой разрешимости в настоящей работе, как и в работах [1, 3, 6], точная задача аппроксимируется приближённой задачей, использующейся в методе Галёркина, с последующим обоснованием слабого предельного перехода. При этом доказательство, приведенное в работе [6], здесь адаптировано для нелокального условия в (1.2). Так, получена равномерная оценка приближенного решения в начальной точке $\|u_m(0)\|_H$, отличная от подобной в работе [6]. Кроме того, ослаблено условие на элемент $\bar{u}$, что позволяет в приближённой задаче вместо проектора Ритца использовать оператор ортогонального проектирования. В априорной оценке приближенных решений оказывается необходимым оценить норму не только самого решения, но и его производной. Помимо этого, доказательство выполнения интегрального условия для слабого предела последовательности приближенных решений проводится аналогично работе [6], но с опорой на другие установленные факты. Некоторые требования на данные задачи (1.2) в сравнении с работой [6] усилены: так, большая гладкость необходима от правой части уравнения в (1.2), а также требуется компактность вложения $V \subset H$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 2.1. Пусть в задаче (1.2) выполнены условия (1.1) и вложение $V \subset H$ компактно. Пусть также функция $f \in L_2(0, T; H)$, а функция $p(t)$ является абсолютно непрерывной на $[0, T]$, невозрастающей и принимает положительные значения на $[0, T]$. Предположим, что $\bar{u} \in V$. Тогда существует единственная функция $u(t)$, такая что $u \in L_2(0, T; V) \cap C([0, T], H)$, $u' \in L_2(0, T; V')$, удовлетворяющая в (1.2) уравнению почти всюду на $[0, T]$ и интегральному условию. Кроме того, справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H^2 + \int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2) dt \leq C \left\{ \|\bar{u}\|_V^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt \right\}. \quad (2.1)$$

Доказательство.

1. *Единственность решения задачи (1.2).* В силу линейности задачи (1.2) достаточно установить, что однородная задача

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad \int_0^T p(t)u'(t) dt = 0 \quad (2.2)$$

имеет только нулевое решение.

Как показано в [4, с. 116], задача Коши для однородного параболического уравнения

$$u'(t) + Au(t) = 0, \quad u(0) = u_0 \in H$$

имеет единственное решение в пространстве

$$W(0, T) = \{u \mid u \in L_2(0, T; V), u' \in L_2(0, T; V')\},$$

где T — произвольное конечное число. Таким образом, определено семейство линейных ограниченных операторов $G(t) : H \rightarrow H$, такое что решение задачи (2.2) записывается в виде $u(t) = G(t)u_0$. Функция $t \rightarrow G(t)u_0$ является непрерывным отображением $[0, \infty)$ в H , и выполнены свойства $G(0) = I$ и полугрупповое свойство $G(t)G(s) = G(s)G(t) = G(t+s)$ для всех $t, s \geq 0$.

Далее в работе полугруппу $G(t)$ будем обозначать e^{-At} , тогда решение задачи (2.2) задается формулой $u(t) = e^{-At}u(0)$, где элемент $u(0) \in H$. В работе [6] для полугруппы e^{-At} получена оценка

$$\|e^{-At}\|_{H \rightarrow H} \leq e^{-\lambda t}, \quad (2.3)$$

где $\lambda > 0$.

Поскольку функции $p(t)$ и $t \rightarrow u(t) \in V'$ абсолютно непрерывны на $[0, T]$, то, учитывая весовое интегральное условие, получим

$$0 = \int_0^T p(t)u'(t) dt = p(T)u(T) - p(0)u(0) - \int_0^T p'(t)u(t) dt. \quad (2.4)$$

Запишем равенство (2.4) в терминах оператора e^{-At} :

$$\left(I - \frac{p(T)}{p(0)}e^{-AT}\right)u(0) + \frac{1}{p(0)} \int_0^T p'(t)e^{-At}dt u(0) = 0.$$

Из последнего равенства, воспользовавшись результатами из [6], получим, что $u(0) = 0$, т. е. решение задачи (2.2) $u(t) = e^{-At}u(0) = e^{-At}0 = 0$. Значит, задача (1.2) имеет не более одного решения.

Перейдём к доказательству существования решения задачи (1.2).

2. *Приближённая задача.* Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ — полная линейно независимая система элементов в пространстве V . Определим конечномерное подпространство $V_m \subset V$ как линейную оболочку элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$.

На V_m можно рассматривать нормы пространств V , H и V' . Определим на элементах $u_m \in V_m$ двойственную норму

$$\|u_m\|_{V'_m} = \sup |(u_m, v_m)|,$$

где точная верхняя граница берётся по всем $v_m \in V_m$ таким, что $\|v_m\|_V = 1$.

Через P_m обозначим ортогональный проектор в пространстве H на V_m . В [2] было замечено, что оператор P_m допускает расширение по непрерывности до оператора $\bar{P}_m : V' \rightarrow V'_m$ и справедлива оценка

$$\|\bar{P}_m u\|_{V'_m} \leq \|u\|_{V'} \quad (u \in V').$$

Отметим также оценку [7]

$$\|u_m\|_{V'} \leq \|P_m\|_{V \rightarrow V} \|u_m\|_{V'_m} \quad (u_m \in V_m).$$

Если в последнем неравенстве возьмём $u_m = \bar{P}_m u$, то получим оценку

$$\|\bar{P}_m\|_{V' \rightarrow V'} \leq \|P_m\|_{V \rightarrow V}. \quad (2.5)$$

В пространстве V_m на отрезке $[0, T]$ рассмотрим приближённую для (1.2) задачу

$$u'_m(t) + \bar{P}_m A u_m(t) = P_m f(t), \quad \int_0^T p(t)u'_m(t) dt = \bar{u}_m. \quad (2.6)$$

Элемент $\bar{u}_m \in V_m$ определим позже.

Задача (2.6) сводится к конечной линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений с весовым интегральным условием на решение. Заметим также, что решение задачи (2.6), как и задачи (1.2), единственно. Покажем, что решение существует.

Поскольку линейный оператор $\bar{P}_m A : V_m \rightarrow V_m$ ограничен, то всякое абсолютно непрерывное решение уравнения (2.6) имеет вид

$$u_m(t) = e^{-\bar{P}_m A t} u_m(0) + \int_0^t e^{-\bar{P}_m A(t-s)} P_m f(s) ds. \quad (2.7)$$

Укажем значение $u_m(0) \in V_m$, при котором решение $u_m(t)$ удовлетворяет интегральному условию в (2.6).

Продифференцируем равенство (2.7):

$$u'_m(t) = -\bar{P}_m A e^{-\bar{P}_m A t} u_m(0) + e^{-\bar{P}_m A(0)} P_m f(t) = -\bar{P}_m A e^{-\bar{P}_m A t} u_m(0) + P_m f(t).$$

Умножим последнее равенство на $p(t)$ и проинтегрируем его по t от 0 до T :

$$\int_0^T p(t) u'_m(t) dt = -\bar{P}_m A \int_0^T p(t) e^{-\bar{P}_m A(t)} u_m(0) dt + P_m \int_0^T p(t) f(t) dt.$$

В силу интегрального условия в (2.6) получим:

$$\bar{u}_m = -\bar{P}_m A \int_0^T p(t) e^{-\bar{P}_m A t} dt u_m(0) + P_m \int_0^T p(t) f(t) dt. \quad (2.8)$$

В [6] установлено, что оператор $B_m : V_m \rightarrow V_m$, заданный равенством

$$B_m = \bar{P}_m A \int_0^T p(t) e^{-\bar{P}_m A t} dt,$$

обратим в пространстве V_m с нормой пространства H , причем

$$B_m^{-1} = \frac{1}{p(0)} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-\bar{P}_m A T} \right)^{-1} \left(I + \frac{1}{p(0)} \left(I - \frac{p(T)}{p(0)} e^{-\bar{P}_m A T} \right)^{-1} \int_0^T p'(t) e^{-\bar{P}_m A t} dt \right)^{-1}.$$

Из (2.8) тогда получим

$$u_m(0) = -B_m^{-1} \left(\bar{u}_m - P_m \int_0^T p(t) f(t) dt \right), \quad (2.9)$$

откуда следует однозначная разрешимость в V_m задачи (2.6).

3. *Априорные оценки приближённых решений.* Для решения $u_m(t)$ уравнения в (2.6) в [6] получена оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_H^2 + \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 dt \leq C \left\{ \|u_m(0)\|_H^2 + \int_0^T \|f(t)\|_V^2 dt \right\}. \quad (2.10)$$

Покажем, что $\|u_m(0)\|_H$ оценивается равномерно по $m \in \mathbb{N}$.

В [6] доказано, что

$$\|B_m^{-1}\|_{V_m \rightarrow V_m} \leq \left(\lambda \int_0^T p(t) e^{-\lambda t} dt \right)^{-1} = M, \quad (2.11)$$

где пространство V_m берется с нормой пространства H .

Теперь из (2.9) и (2.11) следует оценка

$$\|u_m(0)\|_H \leq M \|\bar{u}_m\|_H + M \left\| P_m \int_0^T p(t) f(t) dt \right\|_H. \quad (2.12)$$

Возьмём элемент

$$\bar{u}_m = Q_m \bar{u},$$

где Q_m — ортогональный проектор V на V_m .

В силу непрерывности вложения $V \subset H$ справедлива оценка

$$\|\bar{u}_m\|_H = \|Q_m \bar{u}\|_H \leq \beta \|Q_m \bar{u}\|_V \leq \beta \|\bar{u}\|_V,$$

где $\beta > 0$. Для второго слагаемого в правой части (2.12) получим оценку

$$\left\| \int_0^T p(t) P_m f(t) dt \right\|_H \leq \int_0^T |p(t)| \|P_m f(t)\|_H dt \leq p(0) \int_0^T \|f(t)\|_H dt,$$

поскольку $p(t)$ не возрастает и $p(t) > 0$.

Тогда (2.12) примет вид

$$\|u_m(0)\|_H \leq M \cdot \beta \|\bar{u}\|_V + p(0) M \int_0^T \|f(t)\|_H dt. \quad (2.13)$$

Из уравнения в (2.6), оценки (2.5) и непрерывности вложения $H \subset V'$ для $u'_m(t)$ получим:

$$\begin{aligned} \|u'_m(t)\|_{V'}^2 &= \|P_m f(t) - \overline{P_m} A u_m(t)\|_{V'}^2 \leq 2 (\|P_m f(t)\|_{V'}^2 + \|\overline{P_m} A u_m(t)\|_{V'}^2) \leq \\ &\leq 2 (\gamma \|f(t)\|_H^2 + \|P_m\|_{V \rightarrow V} \|A u_m(t)\|_{V'}^2) \leq 2 (\gamma \|f(t)\|_H^2 + \eta \|P_m\|_{V \rightarrow V} \|u_m(t)\|_V^2), \end{aligned}$$

где $\gamma > 0$. Тогда

$$\int_0^T \|u'_m(t)\|_{V'}^2 dt \leq 2 \left(\gamma \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt + \eta \|P_m\|_{V \rightarrow V} \int_0^T \|u_m(t)\|_V^2 dt \right). \quad (2.14)$$

Поскольку вложение $V \subset H$ компактно, то в пространстве V существует полная линейно независимая система $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\|P_m\|_{V \rightarrow V}$ равномерно ограничены [8]. Будем считать, что выбранная ранее в доказательстве теоремы система $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ обладает необходимым свойством.

В результате, из оценок (2.10) и (2.14) с учётом (2.13) получим

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u_m(t)\|_H^2 + \int_0^T (\|u_m(t)\|_V^2 + \|u'_m(t)\|_{V'}^2) dt \leq C \left\{ \|\bar{u}\|_V^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt \right\}. \quad (2.15)$$

4. *Обоснование слабого предельного перехода.* Оценка (2.15) показывает, что последовательность $\{u_m(t)\}$ ограничена в пространстве $W(0, T)$. А значит, существует подпоследовательность $\{u_{\mu}(t)\} \subset \{u_m(t)\}$, слабо сходящаяся в пространстве $W(0, T)$ к некоторому элементу $u \in W(0, T)$. Покажем, следуя работам [1, 3, 6], что функция $u(t)$ является решением задачи (1.2).

Из (2.6) следует, что для любых $\mu \in \mathbb{N}$ и всех $i \in \overline{1, \mu}$ справедливо равенство

$$(u'_\mu(t), \varphi_i) + a(u_\mu(t), \varphi_i) = (f(t), \varphi_i). \quad (2.16)$$

Умножим (2.16) на скалярную функцию $\psi \in C_0^\infty(0, T)$, полученное равенство проинтегрируем по t от 0 до T . После интегрирования по частям первого слагаемого придем к равенству

$$-\int_0^T (u_\mu(t), \psi'(t) \varphi_i) dt + \int_0^T a(u_\mu(t), \psi(t) \varphi_i) dt = \int_0^T (f(t), \psi(t) \varphi_i) dt. \quad (2.17)$$

Заметим, что функции $\psi'(t) \varphi_i$, $\psi(t) \varphi_i \in L_2(0, T; V)$. Тогда из (2.17), устремив $\mu \rightarrow \infty$, для всех $i \in \mathbb{N}$ получим

$$-\int_0^T (u(t), \psi'(t) \varphi_i) dt + \int_0^T a(u(t), \psi(t) \varphi_i) dt = \int_0^T (f(t), \psi(t) \varphi_i) dt. \quad (2.18)$$

Так как система элементов $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ является полной в пространстве V , то из (2.18) предельным переходом установим, что для всех $v \in V$ выполняется

$$-\int_0^T (u(t), v) \psi'(t) dt + \int_0^T a(u(t), v) \psi(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \psi(t) dt.$$

Последнее равенство означает, что в смысле обобщённых функций выполнено равенство

$$\frac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v),$$

из чего следует (см. [4, с. 113]), что функция $u(t)$ является решением уравнения в (1.2). В частности, имеем $\|u'_\mu - u'\|_{V'} \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$.

Покажем, что выполняется и интегральное условие в (1.2). Напомним, что для всех $\mu \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $\int_0^T p(t)u'_\mu(t) dt = \bar{u}_\mu$. Следовательно, для любого $v \in V$

$$\left(\int_0^T p(t)u'_\mu(t) dt, v \right) = (\bar{u}_\mu, v). \quad (2.19)$$

Отметим, что в силу полноты системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ в пространстве V выполняется $\|\bar{u}_m - \bar{u}\|_V \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ (см. [5, с. 41]). Тогда в (2.19) $(\bar{u}_\mu, v) \rightarrow (\bar{u}, v)$ при $\mu \rightarrow \infty$. Заметим теперь, что на функциях $z \in L_2(0, T; V')$ отображение $F_v(z) = \left(\int_0^T p(t)z(t) dt, v \right)$ при всяком фиксированном $v \in V$ есть линейный функционал. Отметим также, что этот функционал на $L_2(0, T; V')$ ограничен:

$$|F_v(z)| \leq \left\| \int_0^T p(t)z(t) dt \right\|_{V'} \|v\|_V \leq \left(\int_0^T p^2(t) dt \right)^{1/2} \|v\|_V \left(\int_0^T \|z(t)\|_{V'}^2 dt \right)^{1/2}.$$

В таком случае $F_v(u'_\mu) \rightarrow F_v(u')$ при $\mu \rightarrow \infty$. В результате из (2.19) предельным переходом получим

$$\left(\int_0^T p(t)u'(t) dt, v \right) = (\bar{u}, v)$$

для любого $v \in V$, т. е. $\int_0^T p(t)u'(t) dt = \bar{u}$.

Покажем, что решение задачи (1.2) $u \in W(0, T)$ обладает дополнительной гладкостью $u \in C([0, T], H)$, а также обоснуем оценку (2.1).

Поскольку $u(t)$ есть слабый предел в $W(0, T)$ последовательности функций $\{u_\mu(t)\}$, для которых выполняется оценка (2.15), то и для $u(t)$ верно

$$\int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2) dt \leq C \left\{ \|\bar{u}\|_V^2 + \int_0^T \|f(t)\|_H^2 dt \right\}. \quad (2.20)$$

Заметим, что если функция $u \in L_2(0, T; V)$ и производная $u' \in L_2(0, T; V')$, то функция $u \in C([0, T], H)$ (см. [4, с. 110]) и справедлива оценка

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_H^2 \leq K \int_0^T (\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|_{V'}^2) dt. \quad (2.21)$$

Из (2.20) и (2.21) следует окончательная оценка (2.1). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бондарев А. С. Разрешимость вариационного параболического уравнения с периодическим условием на решение // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2015. — № 4. — С. 78–88.
2. Вайникко Г. М., Оя П. Э. О сходимости и скорости сходимости метода Галёркина для абстрактных эволюционных уравнений // Дифф. уравн. — 1975. — 11, № 7. — С. 1269–1277.
3. Критская Е. А., Смагин В. В. О слабой разрешимости вариационной задачи параболического типа с интегральным условием // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2008. — № 1. — С. 222–225.
4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972.

5. *Обэн Ж.-П.* Приближённое решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
6. *Петрова А. А., Смагин В. В.* Разрешимость вариационной задачи параболического типа с весовым интегральным условием // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2014. — № 4. — С. 160–169.
7. *Смагин В. В.* Оценки погрешности проекционного метода для параболических уравнений с несимметричными операторами // Тр. мат. ф-та. Воронеж. гос. ун-та. — 1997. — № 2. — С. 63–67.
8. *Смагин В. В., Тужикова М. В.* О слабой разрешимости нелинейной вариационной задачи параболического типа // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Мат. — 2004. — № 1. — С. 153–156.
9. *Тихонов И. В.* Теоремы единственности в линейных нелокальных задачах для абстрактных дифференциальных уравнений // Изв. РАН. Сер. мат. — 2003. — 67, № 2. — С. 133–166.

А. С. Бондарев

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: bondarev@math.vsu.ru

А. А. Петрова

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: rezolwenta@mail.ru

О. М. Пировских

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: pirovskiholeg@yandex.ru

UDC 517.954.988.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-2-213-220

EDN: MMQHRH

Weak solvability of a variational parabolic equation with a nonlocal-in-time condition on the solution

A. S. Bondarev, A. A. Petrova, and O. M. Pirovskikh

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In a separable Hilbert space, for an abstract linear parabolic equation with a weighted integral condition of a special type in time on the solution, the existence and uniqueness of a weak solution are proved. For this, the problem is solved approximately by the semidiscrete Galerkin method. A priori estimates are established for a sequence of approximate solutions, after which it is proved that the weak limit of this sequence is the exact solution of the original problem.

Keywords: parabolic equation, nonlocal-in-time condition, weak solvability, Galerkin method.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors express their gratitude to V. V. Smagin for posing the problem. The authors declare no financial support.

For citation: A. S. Bondarev, A. A. Petrova, O. M. Pirovskikh, “Weak solvability of a variational parabolic equation with a nonlocal-in-time condition on the solution,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2025, vol. 71, No. 2, 213–220. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-2-213-220>

REFERENCES

1. A. S. Bondarev, “Razreshimost’ variatsionnogo parabolicheskogo uravneniya s periodicheskim uslovиеm na reshenie” [Solvability of a variational parabolic equation with a periodic condition on the solution], *Vestn. Voronezh. Gos. Un-ta. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2015, No. 4, 78–88 (in Russian).
2. G. M. Vaynikko and P. É. Oja, “O skhodimosti i bystrote skhodimosti metoda Galerkina dlya abstraktnykh evolyutsionnykh uravneniy” [The convergence and rate of convergence of the Galerkin method for abstract evolution equations], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1975, **11**, No. 7, 1269–1277 (in Russian).
3. E. A. Kritskaya and V. V. Smagin, “O slaboy razreshimosti variatsionnoy zadachi parabolicheskogo tipa s integral’nym uslovиеm” [On the weak solvability of a variational problem of parabolic type with an integral condition], *Vestn. Voronezh. Gos. Un-ta. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2008, No. 1, 222–225 (in Russian).
4. J.-L. Lions, *Optimal’noe upravlenie sistemami, opisываемыми уравнениями с частными производными* [Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
5. J.-P. Aubin, *Priblizhennoe reshenie ellipticheskikh kraevykh zadach* [Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
6. A. A. Petrova and V. V. Smagin, “Razreshimost’ variatsionnoy zadachi parabolicheskogo tipa s vesovym integral’nym uslovиеm” [Solvability of a variational problem of parabolic type with a weighted integral condition], *Vestn. Voronezh. Gos. Un-ta. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2014, No. 4, 160–169 (in Russian).
7. V. V. Smagin, “Otsenki pogreshnosti proektsionnogo metoda dlya parabolicheskikh uravneniy s nesimmetrichnymi operatorami” [Error estimates of the projection method for parabolic equations with nonsymmetric operators], *Tr. Mat. F-ta. Voronezh. Gos. Un-ta* [Proc. Math. Fac. Voronezh State Univ.], 1997, No. 2, 63–67 (in Russian).
8. V. V. Smagin and M. V. Tuzhikova, “O slaboy razreshimosti nelineynoy variatsionnoy zadachi parabolicheskogo tipa” [On the weak solvability of a nonlinear variational problem of parabolic type], *Vestn. Voronezh. Gos. Un-ta. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2004, No. 1, 153–156 (in Russian).
9. I. V. Tikhonov, “Teoremy edinstvennosti v lineynykh nelokal’nykh zadachakh dlya abstraktnykh differentsial’nykh uravneniy” [Uniqueness theorems in linear nonlocal problems for abstract differential equations], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2003, **67**, No. 2, 133–166 (in Russian).

A. S. Bondarev

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: bondarev@math.vsu.ru

A. A. Petrova

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: rezolwenta@mail.ru

O. M. Pirovskikh

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: pirovskiholeg@yandex.ru