Современная математика. Фундаментальные направления. Том 66, № 4 (2020). С. 544–557

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-4-544-557 УДК 517.925+512.77

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ДЕТЕКТИРОВАНИЕ В ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУППАХ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ

© 2020 г. **И. С. ЗУБОВ**

Аннотация. В работе решается задача определения для отображения сферы в компактное ориентируемое многообразие $S^n \to M$, $n \geqslant 1$, представляет ли оно нетривиальный элемент в гомотопической группе многообразия $\pi_n(M)$. Для этого последовательно используется теория итерированных интегралов, разработанная К.-Т. Ченом. Надо заметить, что итерированные интегралы как повторное интегрирование были ранее содержательно использованы Лаппо-Данилевским для представления решений систем линейных дифференциальных уравнений и Уайтхедом для аналитического описания инварианта Хопфа отображений $f : S^{2n-1} \to S^n$, $n \geqslant 2$. В работе дано краткое описание теории Чена, в рамках которой представлены формулы Уайтхеда и Хефлигера для инварианта Хопфа и обобщенного инварианта Хопфа. Приведены примеры вычисления этих инвариантов с использованием техники итерированных интегралов. Далее показано, каким образом можно детектировать любой элемент фундаментальной группы римановой поверхности, используя итерированные интегралы от голоморфных форм. Это потребовало доказательства того, что пересечение членов нижнего центрального ряда фундаментальной группы римановой поверхности есть единичная группа.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение

Повторное интегрирование дифференциальных форм с целью определения гомотопических классов отображений впервые было использовано Уайтхедом [14] (1947 г.) для отображения многомерных сфер. Позднее, в начале 50-х годов прошлого века, Чен интерпретировал формулу Уайтхеда в рамках своей теории итерированных интегралов, которая сначала была развита для отображений окружности в многообразия [8, 9]. Методы Уайтхеда позволили придать дифференциально-аналитическую форму топологическим конструкциям Хопфа, который построил в начале 30-х годов XX века гомотопически нетривиальное отображение (то есть отображение, негомотопное постоянному отображению) S^3 в S^2 с инвариантом Хопфа, равным 1. В работах Чена [8, 9] были предъявлены повторные интегралы, значения которых на заданном отображении окружности позволяли определить гомотопическую нетривиальность этого отображения. Было показано, что для почти любого отображения окружности с помощью итерированных интегралов можно определить гомотопическую нетривиальность этого отображения.

Эти методы в последние 10–15 лет были востребованы в алгебраической геометрии в связи с изучением алгебро-геометрических вопросов в теории чисел. Сравнительно недавно Ю. И. Манин [12] определил обобщенный символ Дедекинда, представив его в виде итерированного интеграла, вдоль путей, заданных геодезическими в верхней комплексной полуплоскости. Французский математик И. Марен [13] опубликовал серию своих работ, в которых занимался изучением групп кос и их нижних центральных рядов. Для получения его результатов можно также использовать методы итерированных интегралов [3]. Р. М. Хейн [6, 11] активно пользуется этим методом для описания фундаментальных свойств пространств модулей алгебраических кривых и для решения обобщенной проблемы Римана—Гильберта на многомерных комплексных многообразиях. Стоит отметить, что в одномерном случае метод повторных интегралов, эквивалентный методу итерированных интегралов, значительно раньше был использован И. А. Лаппо-Данилевским [2] в аналитической теории дифференциальных уравнений.

В работе дано краткое описание теории Чена, в рамках которой представлены формулы Уайтхеда [14] и Хефлигера [10] для инварианта Хопфа и обобщенного инварианта Хопфа. Приведены примеры вычисления этих инвариантов [8, 10] с использованием техники итерированных интегралов. Далее показано, каким образом любой элемент фундаментальной группы римановой поверхности можно детектировать, используя итерированные интегралы от голоморфных форм [15]. Это потребовало доказательства того, что пересечение членов нижнего центрального ряда фундаментальной группы римановой поверхности есть единичная группа.

2. Итерированные интегралы и их свойства

Пусть X — дифференциальное пространство [8, 9]. *Дифференциальная форма* на таком дифференциальном пространстве — это семейство форм ω_U на выпуклых множествах $\{U\}$, содержащихся в $\mathbb{R}^n$ (в общем случае для любых $n \geqslant 0$) вместе с такими отображениями

$$\varphi_U : U \to X,$$

что выполняется равенство

$$\theta^* \omega_V = \omega_U.$$

При этом отображение $\theta : U \to V$ для любых двух выпуклых множеств U и V должно делать коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\varphi_U} & X \\ \theta\downarrow & & \| \\ V & \xrightarrow{\varphi_V} & X. \end{array}$$

Далее в качестве дифференциального пространства мы будем рассматривать пространство

$$P_{x_0}(M) = \{\gamma : I = [0,\,1] \to M,\, \gamma(0) = x_0 \in M\}$$

— пространство кусочно-гладких путей на гладком многообразии M, начинающихся в точке x_0 (см. [8, 9]).

Пусть $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ — дифференциальные формы на многообразии M степеней $p_1, p_2, \dots, p_r$ соответственно. *Итерированный интеграл* $\int \omega_1\omega_2 \cdots \omega_r$ — это дифференциальная форма на дифференциальном пространстве $P_{x_0}(M)$, которая определяется следующим образом. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — некоторое выпуклое множество, содержащееся в $\mathbb{R}^n$ и $\varphi_U : U \to P_{x_0}(M)$. Зададим надстройку $S(\varphi_U) : U \times I \to M$ по следующему правилу:

$$S(\varphi_U)(\xi, t) = \varphi_U(\xi)(t) \in M,$$

где $\xi \in U \subset \mathbb{R}^n$, $t \in I = [0, 1]$. По набору форм $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r$ определим дифференциальную форму $\int \omega_1\omega_2 \cdots \omega_r$ на U. Рассмотрим индуцированные формы на произведении $U \times I$, получим $(S(\varphi_U))^*\omega_1$, $(S(\varphi_U))^*\omega_2$, $\dots$, $(S(\varphi_U))^*\omega_r$. Каждую форму $(S(\varphi_U))^*\omega_i$ представляем в виде

$$(S(\varphi_U))^*\omega_i = f_i(\xi, t_i)dt_i \wedge \omega_i' + \omega_i'',$$

где ω_i', ω_i'' не содержат внутри себя дифференциала dt_i. Отбросим ω_i'' и рассмотрим произведение

$$(f_1(\xi, t_1)dt_1 \wedge \omega_1') \wedge (f_2(\xi, t_2)dt_2 \wedge \omega_2') \wedge \cdots \wedge (f_r(\xi, t_r)dt_r \wedge \omega_r').$$

Далее мы проинтегрируем данное произведение по симплексу Δ_r:

$$\left(\int \omega_1\omega_2\cdots\omega_r\right)_U = \left(\int\limits_{\Delta_r}\prod_{i=1}^{r} f(t_i)dt_1\wedge\cdots\wedge dt_r\right)\omega_1'\wedge\omega_2'\wedge\cdots\wedge\omega_r',$$

где симплекс Δ_r определен следующим образом:

$$\Delta_r = \{(t_1,t_2,\ldots,t_r)\in\mathbb{R}^r|\ 0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\cdots\leqslant t_r\leqslant 1\}.$$

В результате мы определили дифференциальную форму степени $p_1+p_2+\cdots+p_r-r$ на U. В частности, когда все формы $\omega_1,\ldots,\omega_r$ имеют степень 1, итерированный интеграл представляет собой функцию на U, то есть форму степени 0.

В работах Чена [8, 9] показано выполнение условия согласованности

$$\theta^*\left(\int\omega_1\cdots\omega_r\right)_V = \left(\int\omega_1\cdots\omega_r\right)_U$$

для разных выпуклых множеств U, V и отображения $\theta : U\to V$. Таким образом, определена дифференциальная форма $\int\omega_1\cdots\omega_r$ на дифференциальном пространстве путей $P_{x_0}(M)$, которая называется итерированным интегралом от дифференциальных форм $\omega_1,\ldots,\omega_r$ на многообразии M.

Можно определить интегрирование [8] $\left\langle\int\omega_1\cdots\omega_r,\, N^m\right\rangle$ формы $\int\omega_1\cdots\omega_r$ для отображения $f : N^m\to P_{x_0}(M)$ любого многообразия размерности $p_1+\cdots+p_r-r$. При этом будет выполняться равенство для 1-итерированного интеграла от формы степени p

$$\left\langle\int\omega, N^{p-1}\right\rangle = \int\limits_{S(f)}\omega,$$

где $S(f)$ — надстройка над отображением f, определенным выше. Заметим, что в правой части равенства стоит обычный интеграл от дифференциальной формы степени p по p-мерному многообразию.

В частности, когда $m=0$, N^m — это точка, обозначим ее pt. Тогда значение $\left\langle\int\omega_1\cdots\omega_r,\, pt\right\rangle$ для дифференциальных 1-форм представляет собой число и, как правило, обозначается

$$\int\limits_{\gamma=f(pt)}\omega_1\cdots\omega_r.$$

2.1. Свойства итерированных интегралов от дифференцированных 1-форм. Рассмотрим свойства итерированных интегралов от 1-форм (свойства 1–6 ниже содержатся в [7]).

Свойство 1.

Теорема. *Произведение итерированных интегралов порядка k и l равно следующей сумме итерированных интегралов порядка $k+l$:*

$$\int\limits_{\gamma}\omega_1\cdots\omega_k\cdot\int\limits_{\gamma}\omega_{k+1}\cdots\omega_{k+l} = \sum_{\sigma\in S_{k,l}}\int\limits_{\gamma}\omega_{\sigma(1)}\cdots\omega_{\sigma(k+l)},$$

где сумма берется по всем тасовкам (k,l) в группе перестановок S_{n+k}.

Свойство 2. Рассмотрим дифференциальные формы $\omega_1,\ldots,\omega_r$, определенные на M^n и путь $\gamma : [0,1]\to M^n$. Обозначим $\gamma'(\tau)=\gamma(t(\tau))$, где $t(\tau) : [0,1]\to[0,1]$ — некоторая замена переменной.

Если функция $t(\tau)$ монотонно возрастает, то класс эквивалентности путей с точностью до такой замены переменной называется ориентированной кривой. Имеет место свойство инвариантности при дифференцируемой монотонно возрастающей замене:

$$\int\limits_{\gamma'}\omega_1\cdots\omega_r = \int\limits_{\gamma}\omega_1\cdots\omega_r.$$

Свойство 3.

Определение. Напомним определение *произведения* двух путей $\alpha \cdot \beta : [0,1] \to M^n$. Пусть заданы два пути, причем конец первого совпадает с началом второго:

$$\alpha : [0,1] \to M^n \quad \text{— первый путь,}$$
$$\beta : [0,1] \to M^n \quad \text{— второй путь,}$$
$$\alpha(1) = \beta(0).$$

Произведение определяется следующими формулами:

$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(2t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2};$$
$$(\alpha \cdot \beta)(t) = \beta(2t-1), \qquad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1.$$

Заметим, что если произведение путей определено, то умножение на классах эквивалентности путей является ассоциативной операцией.

Теорема. *Пусть α и β — два пути, для которых определено произведение $\gamma = \alpha \cdot \beta : [0,1] \to M^n$. Имеет место следующая формула для значения итерированного интеграла на произведении путей*:

$$\int\limits_{\gamma=\alpha\cdot\beta} \omega_1 \cdots \omega_r = \int\limits_{\alpha} \omega_1 \cdots \omega_r + \sum_{k=1}^{r-1} \int\limits_{\alpha} \omega_1 \cdots \omega_k \int\limits_{\beta} \omega_{k+1} \cdots \omega_r + \int\limits_{\beta} \omega_1 \cdots \omega_r.$$

Свойство 4.

Определение. *Путь* γ^{-1} определяется следующей формулой:

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t), \quad t \in [0,1].$$

Теорема. *Обобщением свойства* 2 *является формула для значения r-итерированного интеграла на обратном пути*:

$$\int\limits_{\gamma^{-1}} \omega_1 \cdots \omega_r = (-1)^r \int\limits_{\gamma} \omega_r \cdots \omega_1.$$

Свойство 5.

Определение. *Шипом* называется путь вида $\alpha = \gamma\gamma^{-1}$. *Вставкой шипа* называется представление пути в виде произведения $\alpha = \beta_1\gamma\gamma^{-1}\beta_2$. Устранение сомножителя $\gamma\gamma^{-1}$ называется *удалением шипа*.

Теорема. *Итерированный интеграл не зависит от вставки или удаления шипов.*

Свойство 6.

Определение. *Петлей* называется путь, у которого начало и конец совпадают: $\gamma(0) = \gamma(1)$.

Обозначим $\Omega_{x_0}(M)$ пространство путей с начальной точкой x_0. Если мы будем рассматривать петли с точностью до вставки или удаления шипов, то нетрудно заметить, что здесь имеет место отношение эквивалентности на пространстве петель.

Множество классов эквивалентности является топологическим пространством относительно фактор-топологии исходной компактно-открытой топологии на пространстве петель. Обозначим полученное фактор-пространство через $\overline{\Omega_{x_0}(M)}$.

Это пространство является топологической группой относительно операции, отвечающей произведению петель в исходном пространстве петель.

Связная компонента единицы группы $\overline{\Omega_{x_0}(M)}$ является нормальным делителем в ней. Фактор-группа группы $\overline{\Omega_{x_0}(M)}$ по этому нормальному делителю является группой изоморфной фундаментальной группе многообразия M^n.

Свойство 5 показывает, что итерированные интегралы являются непрерывными (более того, дифференцируемыми того же класса гладкости, что и рассматриваемое пространство дифференциальных 1-форм и пространство петель) функциями на группе $\overline{\Omega_{x_0}(M)}$.

Свойство 7. Мы приведем и докажем формулу для значения 2-итерированного интеграла от замкнутых дифференциальных 1-форм на коммутаторе петель. Эта формула имеет обобщение для значений 2-итерированных интегралов от форм степени больше 1 на произведениях Уайтхеда в гомотопических группах (см. раздел 4).

Предложение. *Значение* 2-*итерированного интеграла* $\int \omega_1\omega_2$ *на коммутаторе* $[\alpha,\beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ *двух петель* α *и* β *вычисляется при помощи* 1-*итерированных интегралов по формуле*:

$$\int\limits_{[\alpha,\beta]} \omega_1\omega_2 = \int\limits_{\alpha}\omega_1\int\limits_{\beta}\omega_2 - \int\limits_{\beta}\omega_1\int\limits_{\alpha}\omega_2 = \begin{vmatrix} \int\limits_{\alpha_1}\omega_1 & \int\limits_{\alpha_1}\omega_2 \\ \int\limits_{\beta_1}\omega_1 & \int\limits_{\beta_1}\omega_2 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Для доказательства этого предложения расставим скобки в коммутаторе двух петель α и β следующим образом:

$$[\alpha,\beta] = (\alpha\beta)(\alpha^{-1}\beta^{-1}) = (\alpha\beta)((\beta\alpha)^{-1}).$$

Ранее было отмечено, что итерированный интеграл не зависит от расстановки скобок в произведениях петель. Требуемое равенство мы докажем прямой выкладкой с использованием рассмотренных свойств итерированных интегралов. Итак,

$$\int\limits_{[\alpha,\beta]}\omega_1\omega_2 = \int\limits_{(\alpha\beta)((\beta\alpha)^{-1})}\omega_1\omega_2 = \int\limits_{\alpha\beta}\omega_1\omega_2 + \int\limits_{(\beta\alpha)^{-1}}\omega_1\omega_2 + \int\limits_{\alpha\beta}\omega_1\int\limits_{(\beta\alpha)^{-1}}\omega_2 =$$

$$= \int\limits_{\alpha}\omega_1\omega_2 + \int\limits_{\beta}\omega_1\omega_2 + \int\limits_{\alpha}\omega_1\int\limits_{\beta}\omega_2 + \int\limits_{\beta\alpha}\omega_2\omega_1 -$$

$$-\left(\int\limits_{\alpha}\omega_1 + \int\limits_{\beta}\omega_1\right)\left(\int\limits_{\alpha}\omega_2 + \int\limits_{\beta}\omega_2\right) =$$

$$= \int\limits_{\alpha}\omega_1\omega_2 + \int\limits_{\beta}\omega_1\omega_2 + \int\limits_{\alpha}\omega_1\int\limits_{\beta}\omega_2 + \int\limits_{\beta}\omega_2\omega_1 +$$

$$+\int\limits_{\alpha}\omega_2\omega_1 + \int\limits_{\alpha}\omega_1\int\limits_{\beta}\omega_2 - \left(\int\limits_{\alpha}\omega_1 + \int\limits_{\beta}\omega_1\right)\left(\int\limits_{\alpha}\omega_2 + \int\limits_{\beta}\omega_2\right) =$$

$$= \left(\int\limits_{\alpha}\omega_1\omega_2 + \int\limits_{\alpha}\omega_2\omega_1\right) + \left(\int\limits_{\beta}\omega_1\omega_2 + \int\limits_{\beta}\omega_2\omega_1\right) +$$

$$+\int\limits_{\alpha}\omega_1\int\limits_{\beta}\omega_2 + \int\limits_{\alpha}\omega_1\int\limits_{\beta}\omega_2 - \left(\int\limits_{\alpha}\omega_1 + \int\limits_{\beta}\omega_1\right)\left(\int\limits_{\alpha}\omega_2 + \int\limits_{\beta}\omega_2\right) =$$

$$= \int\limits_{\alpha}\omega_1\int\limits_{\alpha}\omega_2 + \int\limits_{\beta}\omega_1\int\limits_{\beta}\omega_2 + \int\limits_{\alpha}\omega_1\int\limits_{\beta}\omega_2 + \int\limits_{\alpha}\omega_1\int\limits_{\beta}\omega_2 -$$

$$-\left(\int\limits_{\alpha}\omega_1 + \int\limits_{\beta}\omega_1\right)\left(\int\limits_{\alpha}\omega_2 + \int\limits_{\beta}\omega_2\right) = \int\limits_{\alpha}\omega_1\int\limits_{\beta}\omega_2 - \int\limits_{\beta}\omega_1\int\limits_{\alpha}\omega_2.$$

Свойство доказано. □

Свойство 8. Значение 2-итерированного интеграла $\int \omega_1\omega_2$ для произведения нескольких коммутаторов петель

$$\gamma = \prod_{i=1}^{m}[\alpha_i, \beta_i]$$

равно сумме значений 2-итерированных интегралов на коммутаторных сомножителях, то есть:

$$\int\limits_{\prod_{i=1}^{m}[\alpha_i,\beta_i]} \omega_1\omega_2 = \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{[\alpha_i,\beta_i]} \omega_1\omega_2.$$

Используя предыдущее свойство, мы можем получим, что 2-итерированный интеграл равен сумме выражений коммутаторного типа

$$\int\limits_{\prod_{i=1}^{m}[\alpha_i,\beta_i]} \omega_1\omega_2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\int\limits_{\alpha}\omega_1\int\limits_{\beta}\omega_2 - \int\limits_{\beta}\omega_1\int\limits_{\alpha}\omega_2\right).$$

Свойство 9. Одно из наиболее важных свойств итерированных интегралов связано с их дифференцированием. Для итерированных интегралов и их дифференциалов имеет место формула Стокса, играющая важную роль при доказательстве гомотопической инвариантности итерированных интегралов. Итерированные интегралы от 1-форм являются функциями на пространстве петель $\Omega_{x_0}(M^n)$ с заданной начальной точкой x_0 на многообразии M^n. Другими словами, они являются дифференциальными 0-формами на $\Omega_{x_0}(M^n)$. Итак, мы имеем:

Предложение. *Для итерированных интегралов от дифференциальных* 1*-форм на пространстве петель* $\Omega_{x_0}M = P_{x_0}^{x_0}(M)$ *имеется формула для дифференцирования* [6, 8]:

$$d\int\omega_1\cdots\omega_q = -\sum_{i=1}^{q}\int\omega_1\cdots\omega_{i-1}d\omega_i\omega_{i+1}\ldots\omega_q -$$
$$-\sum_{i=1}^{q-1}(-1)^i\int\omega_1\cdots\omega_{i-1}(\omega_i\wedge\omega_{i+1})\omega_{i+2}\cdots\omega_q, \qquad (*)$$

и формула Стокса

$$\int\limits_{C}\left(d\int\omega_1\cdots\omega_q\right) = \int\limits_{\partial C}\left(\int\omega_1\cdots\omega_q\right) = \int\limits_{C(1)}\omega_1\cdots\omega_q - \int\limits_{C(0)}\omega_1\cdots\omega_q,$$

где $C : [0; 1] \to P_{x_0}^{x_1}(M)$ — *путь, представляющий собой сингулярный симплекс в пространстве* $P_{x_0}^{x_1}(M)$. *Этот симплекс определяет гомотопию между путями* γ_1 *и* γ_2. $C(0) = \gamma_1$ *и* $C(1) = \gamma_2$ *в пространстве путей* $P_{x_0}^{x_1}(X_n)$.

Определение. Линейная комбинация итерированных интегралов, дифференциал от которой равен нулю, называется *гомотопическим периодом*.

Обозначим векторное пространство итерированных интегралов на M длины не более s через $B_s(M)$. Обозначим постоянный путь в точке x на M через η_x (то есть $\eta_x(t) = x$ для всех t). Если $r \geqslant 1$, то

$$\left\langle\int\omega_1\ldots\omega_r, \eta_x\right\rangle = 0$$

для всех $x \in M$. Таким образом, значение на постоянном пути η_x определяет линейный функционал

$$\varepsilon : B_s(M) \to \mathbb{R},$$
$$I \to \langle I, \eta_x\rangle,$$

который не зависит от x. Если

$$I = \lambda + \sum a_i\int\omega_i + \sum a_{ij}\int\omega_i\omega_j + \cdots,$$

то $\varepsilon(I) = \lambda$. Обозначим ядро отображения ε через $\overline{B}_\varepsilon(M)$. Имеются итерированные интегралы длины $\leqslant s$ с нулевой постоянной. Имеется естественное включение $i : \mathbb{R} \to B_s(M)$, такое что $\varepsilon \circ i = id$. В результате у нас есть естественное разложение прямой суммы

$$B_s(M) \cong \mathbb{R} \oplus \overline{B}_s(M).$$

Для петель $\alpha, \beta \in P(M)$ в точке x можно рассмотреть коммутатор

$$[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}.$$

Довольно часто постоянную петлю η_x на x обозначают 1.

Для путей $\alpha\eta_x$ и $\eta_x\alpha$ и итерированного интеграла I имеет место равенство

$$I(\alpha) = I(\alpha\eta_x) = I(\eta_x\alpha).$$

Напомним, что классический криволинейный интеграл удовлетворяет следующим условиям:

$$\left\langle \int \omega, [\alpha, \beta] \right\rangle = 0,$$

где α и β — петли в точке x. *Детектирование* — это нахождение такого итерированного интеграла, который на петле, представляющий какой-то нетривиальный элемент фундаментальной группы, не обращается в ноль. Тем самым показывает, что этот элемент не может быть тривиальным, то есть гомотопным постоянной петле. Интеграл от коммутатора всегда равен нулю, поэтому 1-итерированные интегралы не годятся для детектирования нетривиальных коммутаторов в фундаментальной группе. Если I — итерированный интеграл порядка r и $r < s$, то

$$\langle I, [\alpha_1[\alpha_2[\ldots[\alpha_s]\ldots]]]\rangle = 0.$$

Итерированный интеграл порядка $r < s$ не детектирует коммутаторы порядка не ниже, чем s.

2.2. Свойства итерированных интегралов от дифференцированных форм произвольной степени. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ — дифференциальные формы степеней $\deg\ \omega_i = p_i$ на компактном замкнутом многообразии M^n. Итерированный интеграл $\int \omega_1 \cdots \omega_r$ будет дифференциальной формой степени $p_1+p_2+\cdots+p_r-r$ на пространстве путей $P(M)$. Если зафиксированы начальная точка x_0 и конечная точка x_1, то пространство путей обозначим $P_{x_0}^{x_1}(M)$. Если $x_0 = x_1$, то мы имеем пространство петель $\Omega_{x_0}(M)$, которое является подмножеством пространства путей $\Omega_{x_0}(M) \subset P(M)$.

Предложение. *Для итерированных интегралов от дифференциальных форм произвольной степени имеет место формула дифференцирования* [6, 8], *обобщающая формулу дифференцирования итерированных интегралов от дифференциальных* 1*-форм*:

$$d\int \omega_1\omega_2\cdots\omega_r = \sum_{i=1}^{r}(-1)^i \int J\omega_1\cdots J\omega_{i-1}d\omega_i\omega_{i+1}\cdots\omega_r - \sum_{i=1}^{r-1} J\omega_1\cdots J\omega_{i-1}(J\omega_i\wedge\omega_{i+1})\omega_{i+2}\cdots\omega_r,$$

где

$$J\omega_i = (-1)^{\deg\omega_i}\cdot\omega_i.$$

В этом общем случае имеет место аналог формулы Стокса [6, 8] *для итерированных интегралов на пространстве петель* $\Omega_{x_0}(M)$. *Запись формулы Стокса можно представить следующим образом*:

$$< d\int \omega_1\omega_2\cdots\omega_r, C >=< \int \omega_1\omega_2\cdots\omega_r, \partial C >,$$

где $C = N^m$ — *многообразие с краем,* $m = p_1 + p_2 + \cdots + p_r - r + 1$.

3. Формула Уайтхеда для инварианта Хопфа

В этом разделе мы перепишем формулу Уайтхеда для инварианта Хопфа в терминах итерированных интегралов, которые были определены в предыдущем разделе. Для этого мы перейдем от пространства путей $P_{x_0}(M)$ к пространству петель

$$\Omega_{x_0}(M) = P_{x_0}^{x_0}(M) \subset P_{x_0}(M).$$

Пусть M — гладкое ориентированное многообразие размерности n, и f — гладкое отображение

$$f : S^{2n-1} \to M^n,$$

ω^n — форма старшей степени, задающая ориентацию на многообразии. Формула Уайтхеда для инварианта Хопфа отображения f выглядит следующим образом [14]:

$$h(f) = \int\limits_{S^{2n-1}} f^*\omega^n \wedge \psi,$$

где $d\psi = \omega^n$.

Теорема. *Правую часть в формуле Уайтхеда мы можем записать в терминах итерированных интегралов следующим образом*:

$$\left\langle \int \omega^n\omega^n, S^{2n-2} \right\rangle = \int\limits_{S^{2n-1}} f^*\omega^n \wedge \psi,$$

где левая часть определена с помощью отображения $g : S^{2n-2} \to \Omega_{x_0}M^n$, надстройка $S(g)$ которого совпадает с f, то есть $S(g) = f$. Значит, инвариант Хопфа определяется значением итерированного интеграла

$$h(f) = \left\langle \int \omega^n\omega^n, S^{2n-2} \right\rangle.$$

Более подробно опишем, что такое отображение g. Отображение g — это распетливание отображения f, то есть для $x \in S^{2n-2}$ значение петли $g(x)(t)$ в точке t определяется равенством $g(x)(t) = f(x, t)$. Итак, $g(x) \in \Omega_{x_0}M^n$.

4. Произведение Уайтхеда и теорема Хефлигера

Определим произведение Уайтхеда. Пусть D^n — набор векторов в $\mathbb{R}^n$, каждый из которых имеет длину, не превышающую 1. Граница диска представляет сферу на единицу меньшей размерности $\partial D^n = S^{n-1}$. Пусть X — топологическое пространство с отмеченной точкой x_0.

Определение. Возьмем два непрерывных отображения

$$f_i : (D^{p_i}, \partial D^{p_i}) \to (X, x_0), \quad i = 1, 2.$$

Произведение Уайтхеда отображений f_1 и f_2 представляет собой отображение $[f_1, f_2]$ границы произведения дисков $\partial(D^{p1} \times D^{p_2})$ в топологическое пространство X по следующему правилу:

$$[f_1, f_2](x_1, x_2) = \begin{cases} [f_1, f_2](x_1, x_2) = f_1(x_1) & \text{при} \quad x_2 \in \partial D^{p_2}, \\ [f_1, f_2](x_1, x_2) = f_2(x_2) & \text{при} \quad x_1 \in \partial D^{p_1}. \end{cases}$$

При этом отображения f_i представляют элементы φ_i гомотопических групп $\pi_{p_i}(M, x_0)$. Заметим, что гомотопический класс

$$[\varphi_1, \varphi_2] \in \pi_{p_1+p_2-1}(M, x_0)[f_1, f_2]$$

зависит только от φ_1 и φ_2 и называется *произведением Уайтхеда* φ_1 и φ_2. Отметим, что когда размерности сфер равны единице, то отображения f_1 и f_2 представляют элементы φ_1 и φ_2 в фундаментальной группе многообразия. В этом случае произведение Уайтхеда $[\varphi_1, \varphi_2]$ как гомотопический класс отображения совпадает с коммутатором этих элементов в фундаментальной группе

$$[\varphi_1, \varphi_2] = \varphi_1\varphi_2\varphi_1^{-1}\varphi_2^{-1}.$$

Дифференциальные формы можно использовать для детектирования произведения Уайтхеда. Пусть ω_1 и ω_2 — две формы на дифференцируемом многообразии M, имеющие степени p_1 и p_2 соответственно, каждая из которых больше 1. Предположим, что $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$ и $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$.

Для гладкого отображения $f : S^{p_1+p_2-1} \to M$ и формы $f^*\omega_1$ степени $p_1 < p_1 + p_2 - 1$ имеется такая форма α_1, что $d\alpha_1 = f^*\omega_1$.

Определим обобщенный инвариант Хопфа для сферы $S^{p_1+p_2-1}$ в гладкое многообразие M

$$h_f(\omega_1, \omega_2) = \int\limits_{S^{p_1+p_2-1}} \alpha_1 \wedge f^*\omega_2 = \left\langle \int \omega_1\omega_2, S^{p_1+p_2-2} \right\rangle.$$

Последнее выражение представляет обобщенный инвариант Хопфа $h_f(\omega_1, \omega_2)$ в терминах 2-итерированных интегралов Чена. Отметим, что обобщенный инвариант Хопфа не зависит от выбора дифференциальной формы α_1, делающей ω_1 точной, и зависит только от гомотопического класса отображения f. Это число определяет гомоморфизм $\pi_{p_1+p_2-1}(M)$ в $\mathbb{R}$.

Если $h_f(\omega_1, \omega_2) \neq 0$, то отображение f представляет ненулевой элемент гомотопической группы $\pi_{p_1+p_2-1}(M)$.

Сформулируем теорему Хефлигера [10] о значении обобщенного инварианта Хопфа на произведении Уайтхеда двух отображений сфер. Однако перепишем формулу из этой теоремы в терминах итерированных интегралов.

Пусть $f = [f_1, f_2]$ — произведение Уайтхеда 2-х отображений сфер S^{p_i}, $p_i > 1$, $i = 1, 2$.

Теорема. *Пусть ω_1 и ω_2 — две замкнутые дифференциальные формы на гладком многообразии M и $\omega_1 \wedge \omega_2 = 0$. Пусть $f_i : (S^{p_i}, y_i) \to (M, x_0)$ — гладкие отображения сфер размерностей p_1, p_2, представляющие элементы гомотопических групп $\pi_{p_i}(M, x_0)$, $i = 1, 2$.*

Тогда для произведения Уайтхеда $f = [f_1, f_2]$ имеет место формула вычисления обобщенного инварианта Хопфа

$$h_f(\omega_1, \omega_2) = \omega_1(f_1)\omega_2(f_2) + (-1)^{p_1 p_2}\omega_1(f_2)\omega_2(f_1),$$

где

$$\omega_i(f_j) = \left\langle \int \omega_i, S^{p_j - 1} \right\rangle.$$

Здесь $\int \omega_i$ является 1-итерированным интегралом от формы ω_i, интегрирование которого осуществляется для отображения в $g_j : S^{p_j-1} \to \Omega_{x_0}(M)$ (где g_j — распетливание отображения f_j).

Отметим, что для случая, когда $p_1 = p_2 = 1$, эта формула также имеет место. Так как произведение Уайтхеда для $p_1 = p_2 = 1$ совпадает с коммутатором петель, то в этом случае формула из теоремы выше совпадает со значением 2-итерированного интеграла на коммутаторе петель, указанном в свойстве 7 итерированных интегралов (см. раздел 2).

5. Детектирование нетривиальных элементов в гомотопических группах гладких многообразий

5.1. Примеры. Сначала приведем два примера для отображения многомерных сфер, который можно найти в работах [4, 10, 14].

Пример 1. Пусть $M = S^n$, ω — n-форма на S^n, такая что $\int\limits_{S^n} \omega = 1$. Пусть f — гладкое отображение степени 1 диска D^n на сферу S^n, при котором граница диска ∂D^n отображается в точку. Тогда

$$h_{[f,f]}(\omega, \omega) = \begin{cases} 0, & n \text{ — нечетное,} \\ 2, & n \text{ — четное.} \end{cases}$$

Такой результат следует из теоремы Хефлигера, так как

$$\int\limits_{D^n} f^*\omega = \int\limits_{S^n} \omega = 1.$$

Пример 2. Пусть M — дополнение к точкам $(1, 0, 0)$ и $(-1, 0, 0)$ в $\mathbb{R}^3$. Тогда M ретрагируется на букет 2-х сфер S_+ и S_- радиусов 1 с центрами $(1, 0, 0)$ и $(-1, 0, 0)$.

Пусть ω'_+ — 2-форма на S_+, чей носитель содержится в малой окрестности точки $(2, 0, 0)$. При этом

$$\int\limits_{S_+} \omega'_+ = 1.$$

Пусть ω_+ можно представить как индуцированную 2-форму $\rho_+^*\omega'_+$, где ρ_+^* — радиальная ретракция M на S_+.

Значит, ω_+ — замкнутая 2-форма, чей носитель содержится в полуплоскости $x_1 > 0$. Аналогичные рассуждения проведем для ω_- с использованием симметрии относительно плоскости $x_1 = 0$. Так как носители форм не пересекаются, то $\omega_+ \wedge \omega_- = 0$.

Пусть i_+ и i_- — два естественных вложения S^2 в M с образами S_+ и S_-. Мы хотим показать, что их произведение Уайтхеда $[i_+, i_-]$ представляет собой нетривиальный элемент в гомотопической группе $\pi_3(M) = \pi(S^2 \vee S^2)$.

Так как

$$\int_{S_+} \omega_+ = \int_{S_-} \omega_- = 1 \quad \text{и} \quad \int_{S_+} \omega_- = 0,$$

то

$$h_{[i_+, i_-]}(\omega_+, \omega_-) = 1.$$

Аналогичные примеры можно сконструировать для отображения в букеты сфер больших размерностей S^{p_1} и S^{p_2}, $p_i > 1$ (см. [10]).

5.2. Детектирование нетривиальных петель на римановых поверхностях. Здесь мы рассмотрим проблему детектирования гомотопически нетривиальных петель на римановых поверхностях [15]. Мы будем детектировать, используя итерированные интегралы Чена только от голоморфных или мероморфных 1-форм на римановых поверхностях, которые являются гомотопическими периодами.

Гомотопическая нетривиальность петель на римановых поверхностях определяется ненулевыми значениями гомотопических периодов на этих петлях. Напомним, что гомотопическими периодами являются итерированные интегралы от голоморфных или мероморфных форм, которые зависят только от гомотопического класса петель. Таким образом, гомотопический период корректно определен на элементе фундаментальной группы, который соответствует петле. Гомотопические периоды определяют функции на фундаментальной группе римановой поверхности. Мы рассмотрим римановы поверхности, у которых фундаментальная группа является группой с конечным числом образующих и конечным числом соотношений (конечно представленные группы). Мы опишем некоторые свойства фундаментальной группы таких римановых поверхностей.

Предложение. *Пересечение членов нижнего центрального ряда конечно представленной фундаментальной группы римановой поверхности является единичной группой.*

Доказательство.

1. Если риманова поверхность C не компактна, то ее фундаментальная группа является свободной группой $\pi_1(C, x_0) = F_n,\ n > 0$ с конечным числом образующих:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k F_n = \{e\}.$$

2. Если риманова поверхность является компактной, то ее фундаментальная группа является или тривиальной группой $G = \{e\}$, или группой с конечным числом образующих и одним соотношением. Удалим одну точку из такой римановой поверхности C, т. е. $X = C \backslash \{x\}$. Фундаментальная группа получившейся поверхности X будет свободной группой F_{2g}, где g — это род C. Вложение $i : X \to C$ индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп

$$\pi_1(X) \to \pi_1(C) \to 1$$

и эпиморфизм их нижних центральных рядов

$$\Gamma_k \pi_1(X) \to \Gamma_k \pi_1(C) \to 1, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Из факта пересечения

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \pi_1(X) = \{e\}$$

следует, что

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \pi_1(C) = \{e\}.$$

Таким образом, для конечно представленной фундаментальной группы римановой поверхности $\pi_1(C)$ пересечение членов нижнего центрального ряда является тривиальным. $\square$

Итак, для компактной римановой поверхности группа $\pi_1(C)$ имеет тривиальное пересечение членов нижнего центрального ряда

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \Gamma_k \pi_1(C) = \{e\}.$$

Значит, для каждого нетривиального элемента g фундаментальной группы $\pi_1(C)$ существует максимальное натуральное число r, для которого g имеет ненулевой образ в фактор-группе $\Gamma_r(C)/\Gamma_{r+1}(C)$.

Выберем систему канонических петель $a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g$ на C. Затем вдоль этих петель разрежем C и превратим эту риманову поверхность в $2g$-многоугольник. Мы можем выбрать каноническую систему петель, начинающихся в точке $x_0 \in C$ и представляющих образующие в фундаментальной группе $\pi_1(C,x_0)$. Мы обозначим их теми же символами. Каждый итерированный интеграл $\int \omega_1 \cdots \omega_r$ длины $r \geqslant 1$ от голоморфных 1-форм на римановой поверхности представляет собой гомотопический период. Действительно, пусть две петли $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega_{x_0}(C)$ будут гомотопны, т. е. существует отображение

$$h : [0,1] \to \Omega_{x_0}(C), \quad h(0) = \gamma_1, \quad h(1) = \gamma_2.$$

Тогда из свойств итерированных интегралов мы имеем равенства

$$\int\limits_{\gamma_2} \omega_1 \cdots \omega_r - \int\limits_{\gamma_1} \omega_1 \cdots \omega_r = \int\limits_{\partial h} \omega_1 \cdots \omega_r = \int\limits_{h} d \int \omega_1 \cdots \omega_r =$$

$$= -\int\limits_{h} \sum_{i=1}^{r} \int \omega_1 \cdots d\omega_i \cdots \omega_r - \sum_{i=1}^{r-1} \int \omega_1 \cdots (\omega_i \wedge \omega_{i+1}) \cdots \omega_r = 0.$$

Последнее равенство вытекает из того факта, что для голоморфных форм на римановой поверхности $d\omega_i = 0$, $i = 1,\ldots,r$ и $\omega_i \wedge \omega_{i+1} = 0$ для $i = 1,\ldots,r-1$. Значит,

$$\int\limits_{\gamma_1} \omega_1 \cdots \omega_r = \int\limits_{\gamma_2} \omega_1 \cdots \omega_r,$$

т. е. итерированный интеграл $\int \omega_1 \cdots \omega_r$ от голоморфных форм является гомотопическим периодом.

Хорошо известно, что имеется голоморфная 1-форма ω_i на C такая, что

$$\operatorname{Re} \int\limits_{a_i} \omega_i = 1, \quad \operatorname{Re} \int\limits_{a_j} \omega_i = 0, \quad j \neq i, j = 1,\ldots,r$$

и

$$\operatorname{Re} \int\limits_{b_j} \omega_i = 0, \quad j = 1,\ldots,r$$

для b-периодов. Аналогично, имеется такая голоморфная форма ω_j, для которой

$$\operatorname{Re} \int\limits_{b_j} \omega_j = 1,$$

другие периоды от этой формы равны нулю. Такая 1-форма детектирует гомотопическую нетривиальность образующих $a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g$.

Теорема Чена устанавливает изоморфизм между пространством гомотопических периодов, определяемыми итерированными интегралами от вещественно-значных дифференциальных форм, и пространством гомоморфизмов групповой алгебры фундаментальной группы $\mathbb{R}[\pi_1(M)]$ в вещественные числа [8, 9]:

$$H^0(B_r, x_0) = \operatorname{Hom}\left(\mathbb{R}[\pi_1(M,x_0)]/J^{r+1}, \mathbb{R}\right),$$

где $H^0(B_r, x_0)$ — гомотопические периоды из r-итерированных интегралов. Применяя теорему Чена к римановым поверхностям и используя предложение, сформулированное выше, мы можем доказать гомотопическую нетривиальность любого элемента $\pi_1(M, x_0)$ с помощью итерированных интегралов от голоморфных или мероморфных форм, так как в нашем случае идеал J для римановых поверхностей нулевой.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Пусть M — компактная риманова поверхность рода g с k выколотыми точками. Тогда любой элемент фундаментальной группы этой поверхности детектируется итерированными интегралами от голоморфных или мероморфных форм на этой римановой поверхности.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дубровин Б. А.* Уравнение Кадомцева—Петвиашвили и соотношения между периодами голоморфных дифференциалов на римановых поверхностях// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1981. — *45*, № 5. — С. 1015–1028.
2. *Лаппо-Данилевский И. А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во ГИТТЛ, 1957.
3. *Лексин В. А.* Метод Лаппо—Данилевского и тривиальность пересечения радикалов членов нижнего центрального ряда некоторых фундаментальных групп// Мат. заметки. — 2006. — *79*, № 4. — С. 577–580.
4. *Новиков С. П.* Аналитический обобщенный инвариант Хопфа. Многозначные функционалы// Усп. мат. наук. — 1984. — *39*, № 5. — С. 97–106.
5. *Хатчер А.* Алгебраическая топология. — М.: МЦНМО, 2011.
6. *Хейн Р. М.* Итерированные интегралы и проблема гомотопических периодов. — М.: Наука, 1988.
7. *Chen K.-T.* Algebras of iterated path integrals and fundamental groups// Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — *156*. — С. 359–379.
8. *Chen K.-T.* Iterated integrals of differential forms and loop space homology// Ann. of Math. (2). — 1973. — *97*. — С. 217–246.
9. *Chen K.-T.* Iterated path integrals// Bull. Am. Math. Soc. — 1977. — *83*, № 5. — С. 831–879.
10. *Haefliger A.* Whitehead products and differential forms// В сб.: «Differential Topology, Foliations and Gelfand—Fuks Cohomology». — Berlin—Heidelberg: Springer, 1978. — С. 13–24.
11. *Hain R. M.* On a generalization of Hilbert's 21st problem// Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4). — 1986. — *19*, № 4. — С. 609–627.
12. *Manin Yu. I.* Non-commutative generalized Dedekind symbols// Pure Appl. Math. Q. — 2014. — *10*, № 1. — С. 245–258.
13. *Marin I.* Residual nilpotence for generalizations of pure braid groups// arXiv:1111.5601 [math.GR]. — 2011.
14. *Whitehead J. H. C.* An expression of Hopf's invariant as an integral// Proc. Natl. Acad. Sci. USA. — 1947. — *33*, № 5. — С. 117–123.
15. *Zubov I. S.* Analytic detection of non-trivial elements in fundamental groups of Riemann surfaces// J. Phys. Conf. Ser. — 2019. — *1203*. — 012099.

И. С. Зубов
Государственный социально-гуманитарный университет, г. Коломна, ул. Зеленая, д. 30
E-mail: `reestr_rr@mail.ru`

DOI: 10.22363/2413-3639-2020-66-4-544-557 UDC 517.925+512.77

Analytic Detection in Homotopy Groups of Smooth Manifolds

© 2020 **I. S. Zubov**

Abstract. In this paper, for the mapping of a sphere into a compact orientable manifold $S^n \to M$, $n \geqslant 1$, we solve the problem of determining whether it represents a nontrivial element in the homotopy group of the manifold $\pi_n(M)$. For this purpose, we consistently use the theory of iterated integrals developed by K.-T. Chen. It should be noted that the iterated integrals as repeated integration were previously meaningfully used by Lappo-Danilevsky to represent solutions of systems of linear differential equations and by Whitehead for the analytical description of the Hopf invariant for mappings $f : S^{2n-1} \to S^n$, $n \geqslant 2$.We give a brief description of Chen's theory, representing Whitehead's and Haefliger's formulas for the Hopf invariant and generalized Hopf invariant. Examples of calculating these invariants using the technique of iterated integrals are given. Further, it is shown how one can detect any element of the fundamental group of a Riemann surface using iterated integrals of holomorphic forms. This required to prove that the intersection of the terms of the lower central series of the fundamental group of a Riemann surface is a unit group.

REFERENCES

1. B. A. Dubrovin, "Uravnenie Kadomtseva—Petviashvili i sootnosheniya mezhdu periodami golomorfnykh differentsialov na rimanovykh poverkhnostyakh" [Kadomtsev–Petviashvili equation and relations between periods of holomorphic differentials on Riemann surfaces], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1981, **45**, No. 5, 1015–1028 (in Russian).
2. I. A. Lappo-Danilevsky, *Primenenie funktsiy ot matrits k teorii lineynykh sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Application of Functions From Matrices to the Theory of Linear Systems of Ordinary Differential Equations], GITTL, Moscow, 1957 (in Russian).
3. V. A. Leksin, "Metod Lappo-Danilevskogo i trivial'nost' peresecheniya radikalov chlenov nizhnego tsentral'nogo ryada nekotorykh fundamental'nykh grupp" [The Lappo-Danilevskii method and trivial intersections of radicals in lower central series terms for certain fundamental groups], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2006, **79**, No. 4, 577–580 (in Russian).
4. S. P. Novikov, "Analiticheskiy obobshchennyy invariant Khopfa. Mnogoznachnye funktsionaly" [Analytical generalized Hopf invariant. Multivalued functionals], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1984, **39**, No. 5, 97–106 (in Russian).
5. A. Hatcher, *Algebraicheskaya topologiya* [Algebraic Topology], MTsNMO, Moscow, 2011 (Russian translation).
6. R. M. Hain, *Iterirovannye integraly i problema gomotopicheskikh periodov* [Iterated Integrals and Algebraic Cycles], Nauka, Moscow, 1988 (Russian translation).
7. K.-T. Chen, "Algebras of iterated path integrals and fundamental groups," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1971, **156**, 359–379.
8. K.-T. Chen, "Iterated integrals of differential forms and loop space homology," *Ann. of Math. (2)*, 1973, **97**, 217–246.
9. K.-T. Chen, "Iterated path integrals," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1977, **83**, No. 5, 831–879.
10. A. Haefliger, "Whitehead products and differential forms," In: *Differential Topology, Foliations and Gelfand–Fuks Cohomology*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1978, pp. 13–24.
11. R. M. Hain, "On a generalization of Hilbert's 21st problem," *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 1986, **19**, No. 4, 609–627.
12. Yu. I. Manin, "Non-commutative generalized Dedekind symbols," *Pure Appl. Math. Q.*, 2014, **10**, No. 1, 245–258.
13. I. Marin, "Residual nilpotence for generalizations of pure braid groups," *arXiv:1111.5601 [math.GR]*, 2011.

14. J. H. Whitehead, “An expression of Hopf’s invariant as an integral,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 1947, **33**, No. 5, 117–123.
15. I. S. Zubov, “Analytic detection of non-trivial elements in fundamental groups of Riemann surfaces,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2019, **1203**, 012099.

I. S. Zubov
State Socio-Humanitarian University, Kolomna, Russia
E-mail: reestr_rr@mail.ru