ПРИКЛАДНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА ТЕКУЩЕЙ СТОИМОСТИ ДЕНЕЖНОГО ПОТОКА В ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТАХ

И.А. Смаржевский

Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Вопрос оценки текущей стоимости потока будущих поступлений в научной литературе проработан весьма тщательно. Ключевым фактором оценки является ставка дисконтирования, обычно определяемая как средневзвешенная стоимость инвестируемого капитала. Однако возможна иная точка зрения на соотношение между текущей стоимостью денег и их номинальной суммой, получение которой предстоит в будущем. В статье предложен новый подход к процедуре оценки текущей стоимости потока на основе вероятностной модели, в которой соотношение между текущим и будущим номиналами определяется как степень уверенности в получении номинала в будущем. Применение такой модели позволяет естественным образом ввести количественную меру риска для потока будущих поступлений. В статье проанализированы свойства предложенной меры риска, показано ее соответствие классическим представлениям о соотношении риска и доходности инвестиции, приведены примеры расчета абсолютного и относительного показателей риска потока.

Ключевые слова: текущая стоимость, денежный поток, вероятность, риск, мера, аннуитет.

Предметом исследования является процедура оценки текущей стоимости потока будущих поступлений, которая в научной литературе проработана весьма тщательно [1—4]. Соотношение между текущей стоимостью денег и их номинальной суммой, получение которой предстоит в будущем, определяется величиной ставки дисконтирования, обычно вычисляемой как средневзвешенная стоимость инвестируемого капитала. Однако возможна иная точка зрения на соотношение текущей (present value) стоимостью и номинальным значением, относящимся к будущему. В статье предложен новый подход, основанный на вероятностной модели, в которой соотношение между текущим и будущим номиналами определяется как степень уверенности в получении номинала в будущем. Применение такой модели позволяет естественным образом ввести количественную меру риска для потока будущих поступлений. Также проведен анализ свойства предложенной меры риска и показано ее соответствие классическим представлениям о соотношении риска и доходности инвестиции, приведены примеры расчета абсолютного и относительного показателей риска потока.

Модель. Рассмотрим следующую лотерею (назовем ее лотерея L_2), состоящую из двух шагов (возможностей получения выигрыша): на первом шаге с вероятностью p можно получить выигрыш в размере суммы денег A_1, или с вероятностью $1 - p$ не получить ничего. Второй шаг доступен только в случае получения выигрыша на первом шаге и, с такой же вероятностью p, дает выигрыш в размере A_2, или, с вероятностью $1 - p$, не дает ничего. Полная группа событий лотереи приведена в табл. 1.

Таблица 1

Полная группа событий лотереи L_2

Вероятность события	$(1 - p)$	$p(1 - p)$	p^2
Сумма выигрыша (значения случайной величины X)	0	A_1	$A_1 + A_2$

Математическое ожидание выигрыша в такой лотерее равно

$$M_2 = (1 - p)0 + p(1 - p)A_1 + p^2(A_1 + A_2) = pA_1 + p^2 A_2.$$

Далее, в качестве обобщения, рассмотрим лотерею L_n, состоящую из n шагов, правила выигрыша в которой аналогичны правилам лотереи L_2: вероятность выигрыша на каждом шаге лотереи равна p, шаг с номером $i + 1$ дает выигрыш A_{i+1} и доступен только в том случае, если на предыдущем шаге (с номером i) получен выигрыш A_i. Полная группа событий лотереи L_n приведена в табл. 2.

Таблица 2

Полная группа событий лотереи L_n

Вероятность события	$(1 - p)$	$p(1 - p)$	$p^2(1 - p)$	…	$p^{n-1}(1 - p)$	p^n
Сумма выигрыша (значения случайной величины X)	0	A_1	$A_1 + A_2$	…	$A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}$	$A_1 + A_2 + \ldots + A_n$

Математическое ожидание выигрыша в лотерее L_n имеет следующий вид:

$$M_n = pA_1 + p^2 A_2 + p^3 A_3 + \ldots + p^n A_n. \tag{1}$$

Функцией полезности $U_n(p, A_1, \ldots A_n)$ участия в лотерее L_n является (с точностью до неотрицательного линейного преобразования [5]) математическое ожидание выигрыша M_n. Такая модель является вероятностной интерпретацией ожиданий инвестора, оцеивающего будущий поток денежных поступлений $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Из (1) видно, что его функция полезности соответствует предпочтениям инвестора, не склонного к риску.

Заметим, что постоянство вероятности выигрыша для всех шагов лотереи p допускает обобщение — можно предположить вероятность благоприятного исхода для i-го шага равной p_i, в этом случае в формуле (1) сомножители вида p_i примут вид $p_1 p_2 \ldots p_i$. Но поскольку это сделает формулу (1) менее наглядной, а для дальнейшего обсуждения существенного значения не имеет, воздержимся от такого предположения.

Применение модели. Рассмотренная лотерея L_n может быть использована в качестве модели при оценке текущей стоимости потока будущих доходов. Действительно, классической оценкой текущей стоимости (present value) потока доходов A_1, A_2, ..., A_n, планируемых к получению в будущем на протяжении n периодов времени, является сумма их дисконтированных значений [1; 3; 4]

$$PV = \sum_{i=0}^{n} A_i (1+r)^{-i},$$

где r — ставка дисконтирования.

Мы считаем ставку дисконтирования постоянной для всего периода расчета. Обобщение такого предположения возможно (вместо r в этом случае имеем набор ставок r_1, r_2, ..., r_n), однако приводит к более громоздким выражениям в формулах, поэтому в настоящей статье не используется.

Наиболее очевидными основаниями для дисконтирования денежных сумм относящихся к будущему являются [1; 2; 4]:

— неопределенность будущего (и, следовательно, предпочтение текущего владения денежной суммой его будущему владению);

— «депозитный подход», т.е. возможность наращивания имеющегося в настоящий момент денежного номинала по некоторой ставке доходности, из чего следует различная стоимость (ценность, value) денежных номиналов, относящихся к различным моментам времени.

К этим основаниям надо добавить конечность времени существования выгодоприобретателя как эмпирического объекта, что неизбежно ограничивает для него «период восприятия полезности». Это соображение относится как к физическим лицам, так и к организациям, хотя для последних оно менее наглядно.

Перечисленные основания относятся к экономике, в которой отсутствует инфляция, и, с точки зрения автора, более чем исчерпывающе объясняют различную стоимость денежных сумм, относящихся к различным моментам времени. Что касается уменьшения покупательной способности денег в будущем по отношению к настоящему моменту времени (являющегося проявлением инфляции), то учет этого фактора является отдельной темой, существенно связанной с прогнозированием (официальным или экспертным) темпов инфляции и соответствующими субъективными ожиданиями экономических агентов. Процедуры корректировки текущей стоимости потока будущих поступлений предложены, например в [4] и сводятся к ее пересчету на основании прогнозируемых (или, постфактум, фактических) темпов инфляции. Тем не менее природа различной стоимости денег во времени буквального отношения к инфляции не имеет и должна быть отделена от нее в научных рассуждениях.

При использовании лотереи L_n в качестве модели для оценки выгодоприобретателем текущей стоимости денежного потока A_1, A_2, ..., A_n, численное значение выражения

$$\frac{1}{(1+r)^i}, \tag{2}$$

где r — ставка дисконтирования, является мерой уверенности оценщика в получении денежной суммы A_i.

Значение ставки дисконтирования равное нулю (полная нечувствительность к фактору времени с точки зрения классического подхода к оценке будущей стоимости) соответствует абсолютной уверенности инвестора в получении суммы A_i. Механизм лотереи, исключающий получение дохода на шаге с номером $i + 1$ в случае неполучения дохода на i-м шаге, вполне естественен с точки зрения инвестора, оценивающего полезность потока будущих поступлений. Подразумеваемый моделью «обрыв» цепочки доходов после первого неполучения запланированной на i-м шаге суммы дохода приводит к более консервативной оценке текущей стоимости будущего потока, что вполне соответствует избеганию инвестором риска и столь часто декларируемому «принципу осмотрительности».

Использование лотереи L_n в качестве модели оценки стоимости потока означает вероятностный подход к текущей стоимости будущего потока и позволяет вычислить известные числовые характеристики случайной величины X, распределение которой задано табл. 2 (см.).

Мера риска потока. Прирост приведенной стоимости потока в данной статье используется как аналог доходности. При этом мы абстрагируемся от суммы первоначальных инвестиций I-й цены, за которую можно будет купить приведенную стоимость будущего потока. Доходность в буквальном смысле при такой сделке будет равна $(PV - I)/I$, т.е. прямо зависит от PV.

Наиболее важной характеристикой номинального потока после его приведенной стоимости является риск. При постоянном значении суммы элементов потока будущих доходов их «концентрация» в области «близкого будущего», т.е. большие значения слагаемых A_i с малыми значениями i дают большую гарантию получения ожидаемого значения (PV), тем не менее, было бы желательно построить количественный показатель риска. Используемый нами вероятностный подход к оценке текущей стоимости легко позволяет это сделать — естественной мерой риска потока $A_1, A_2, ..., A_n$, является дисперсия D_n случайной величины X и среднеквадратическое отклонение σ_n от ожидаемого значения ($PV_n = M_n$, заданного формулой (1)). Риск потока есть неопределенность получения ожидаемого дохода (PV), связанная исключительно с его свойствами как числового вектора, т.е. тем или иным распределением значений элементов потока во времени (по номерам индексов). Прочие факторы риска, присущие финансовому механизму, в результате действия которого выгодоприобретатель планирует получить доходы в будущем (транзакционный, заемщика, макроэкономический и т.д.), находятся вне компетенции излагаемого в данной статье подхода.

Для лотереи L_2 дисперсия D_2 равна

$$D_2 = M_2(X^2) - M_2^2(X) = p(A_1^2 + 2pA_1A_2 + pA_2^2) - p^2(A_1^2 + 2pA_1A_2 + p^2A_2^2).$$

С ростом n выражения для дисперсии становятся все более громоздкими, но практических трудностей расчет в электронной таблице не представляет. Расчет проводится по известной формуле $D_n = M_n(X^2) - M_n^2(X)$ [6] и с учетом формул, приведенных в примечании 1.

Для лотереи L_n дисперсия D_n случайной величины X может быть вычислена итерационно с использованием формул (3) и (4):

$$M_{n+1}(X^2) = M_n(X^2) + p^{n+1}(2\sum_i^n A_i A_{n+1} + A_{n+1}^2), \tag{3}$$

$$D_n = M_n(X^2) - M_n^2(X). \tag{4}$$

Отметим очевидные свойства D_n.

1. При $p = 1$ (что соответствует «абсолютной» уверенности в получении каждого из платежей и ставке дисконтирования равной нулю) $M_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$, $D_n = 0$.

2. При $n = 1$, $M_1 = pA_1$, $D_1 = p\,A_1^2 - p^2 A_1^2$. Заметим, что величина σ_n/PV, являющаяся относительной мерой риска, при $n = 1$ не зависит от планируемой к получению денежной суммы A, а только от значения вероятности p и меняется (при $p > 0$) по закону $(1/p - 1)^{1/2}$, т.е. при изменении p от 1 до 0,5 возрастает от 0 до 100%. Этот диапазон значений p (вероятность $p = 0{,}5$ соответствует ставке дисконтирования равной 100%) и является рабочим диапазоном модели.

3. Аналогично свойству 2 при любом n для потока $A_1, A_2, ..., A_n$ у которого $A_1 > 0, A_2 = ... = A_n = 0$ дисперсия $D_n = pA_1^2 - p^2 A_1^2$, т.е. добавление бессодержательных нулевых слагаемых в поток не влияет на степень риска.

4. При добавлении к уже имеющимся элементам потока $A_1 + A_2 + ... + A_n$ положительного слагаемого A_{n+1} численное значение D возрастает, т.е. увеличивая доходность (сумму поступлений) мы одновременно увеличиваем риск потока. Для доказательства этого утверждения нужно исследовать знак разности D_{n+1} и D_n. Так как $M_{n+1}(X^2) = M_n(X^2) + p^{n+1}(2\sum_i^n A_i A_{n+1} + A_{n+1}^2)$, а $M_{n+1} = M_n + p^{n+1}A_{n+1}$,

$$\begin{aligned} D_{n+1} - D_n &= M_{n+1}(X^2) - M_{n+1}^2 - (M_n(X^2) - M_n^2) = \\ &= M_n(X^2) + p^{n+1}(2\sum_i^n A_i A_{n+1} + A_{n+1}^2) - \\ &- (M_n + p^{n+1}A_{n+1})^2 - M_n(X^2) + M_n^2 = \\ &= 2p^{n+1}A_{n+1}\sum_i^n A_i + p^{n+1}A_{n+1}^2 - 2p^{n+1}M_n A_{n+1} - (p^{n+1}A_{n+1})^2. \end{aligned}$$

При $p < 1$ первое слагаемое больше третьего, а второе — больше четвертого, равенство имеет место только при $A_i = 0$ или $p = 1$. Тем самым разность D_{n+1} и D_n положительна при $p < 1$ и $A_i > 0$. Доказанное утверждение о знаке разности содержательно, так как D_{n+1} и D_n являются числовыми характеристиками разных случайных величин.

5. При постоянстве суммы номиналов $S = \sum A_i$ перераспределение номиналов слагаемых в сторону больших значений i приводит к росту риска.

Таким образом, предложенная мера риска соответствует классическим представлениям:

— росту доходности соответствует рост численного значения меры риска;

— безрисковым, в интуитивном понимании, операциям (при $p = 1$, т.е. $r = 0\%$) соответствует нулевое численное значение предложенной меры.

Ясно, что предложенная мера риска, как и само значение PV, является «сверткой» потока, т.е. одинаковым численным значениям риска могут соответствовать различные потоки. Такая потеря информации неизбежна при сопоставлении скалярного значения объекту, изначально заданному как вектор.

В практических целях удобнее использовать в качестве меры риска величину $\sigma_n = \sqrt{D_n}$, в частности потому, что ее размерность — денежная единица — совпадает с размерностью потока.

Относительная мера риска. Величина σ_n/PV_n является относительной мерой риска потока. Анализ поведения этой величины показывает, что при заданном p относительный риск потока зависит от распределения долей суммы номинальных значений элементов потока $S = \sum A_i$ по шагам расчета. При этом распределение вида $A_1 = S$, $A_2 = ... = A_n = 0$ соответствует минимальному относительному риску, а распределение $A_1 = A_2 = ... = A_{n-1} = 0$, $A_n = S$ — максимальному. Равномерное распределение долей $A_1 = A_2 = ... = A_{n-1} = A_n = S/n$ соответствует промежуточному значению относительного риска. Во всех трех случаях, при фиксированных p и n, относительная мера риска не зависит от S и PV (3).

Значения относительной меры риска для этих трех потоков при некоторых значениях p и n приведены в табл. 3.

Таблица 3

Относительная мера риска для некоторых потоков будущих поступлений

r, %	p, %	n	min σ_n/PV_n ($A_1 = S$), %	σ_n/PV_n для потока аннуитетов, %	max σ_n/PV_n ($A_n = S$), %
1	99	1	10,00		
1	99	2	10,00	11,18	14,18
1	99	3	10,00	12,47	17,41
1	99	10	10,00	19,62	32,35
1	99	20	10,00	26,77	46,92
10	91	1	31,62		
10	91	2	31,62	35,35	45,83
10	91	3	31,62	39,41	57,53
10	91	10	31,62	61,27	126,24
10	91	20	31,62	80,39	239,32
20	83	1	44,72		
20	83	2	44,72	49,96	66,33
20	83	3	44,72	55,62	85,32
20	83	10	44,72	83,96	227,85
20	83	20	44,72	101,93	611,05

Рассмотрим поведение характеристик потока, состоящего из n аннуитетов, при изменении n. При постоянном значении вероятности (и тем самым ставки дисконтирования) для каждого n потоку соответствует значение текущей стоимости PV_n и значение риска σ_n. На рисунке в координатах «риск—доход» показаны точки (σ_n, PV_n), соответствующие потокам длительности n при n = 1, ..., 20. Численное значение аннуитета (в данном случае равное 1) влияет только на номинальные значения делений вертикальной и горизонтальной шкал, но не на форму полученных кривых. Видно, что при росте n риск σ_n с определенного значения n = 2 растет быстрее дохода (PV) — кривые, отмеченные треугольными маркерами, вогнуты. На этом же графике показано соотношение σ_n/PV_n — точки, заданные координатами (σ_n, σ_n/PV_n). Поведение потоков приведено для двух значений вероятности p 0,9 и 0,8.

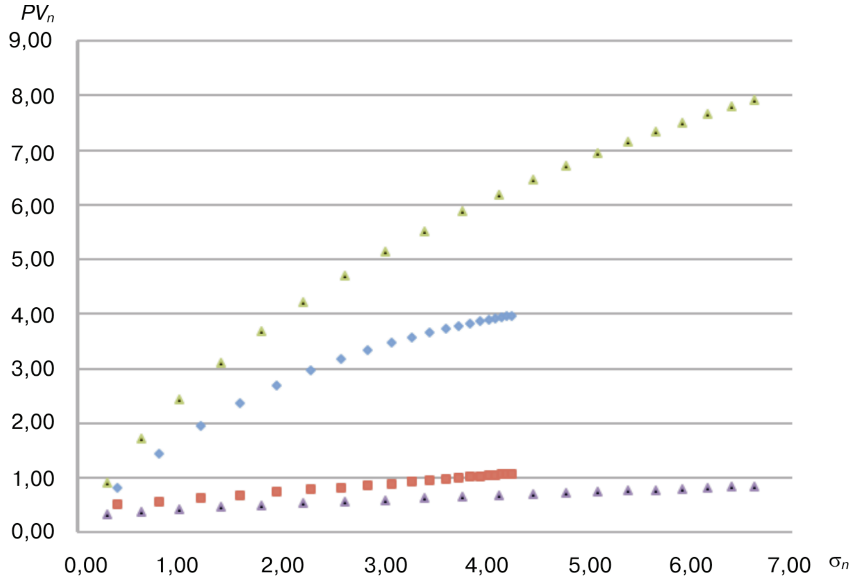

Рис. Текущая стоимость и риск потока аннуитетов

Два верхних графика — потоки аннуитетов (A = 1) при n = 1, ... 20, в координатах σ_n (ось x) PV (ось y). Две нижних графика — значения величины σ_n/PV для каждого n. Треугольные маркеры соответствуют p = 0,9, квадратные маркеры — p = 0,8.

Поток аннуитетов является характерным с точки зрения относительной меры риска в том смысле, что, при необходимости дать качественную оценку риска, хотя бы и бинарную, легко позволяет это сделать. Потоки, имеющие большее значение относительной меры риска, нежели, поток аннуитетов той же продолжительности для той ставки дисконтирования, объявляются «высоко рискованными», а имеющие меньшее значение «умеренно рискованными».

Например, поток с характерным для реальных инвестиций распределением доходов по шагам расчета (в процентах от общей суммы): {2,5 7,5 12,5 12,5 12,5

12,5 12,5 12,5 7,5 7,5}, что соответствует постепенному выходу производственных мощностей на плановую мощность, периоду устойчивой эксплуатации и последующему сворачиванию производства, при ставке дисконтирования равной 20% и 10 шагам расчета должен сравниваться с потоком аннуитетов, имеющим значение относительной меры риска равное 83,96% (см. табл. 3). Поскольку непосредственный расчет соотношения σ_n/PV для оригинального потока дает значение 97,08%, поток должен быть отнесен к высокорискованным.

Выводы

1. В качестве модели оценки текущей стоимости потока будущих поступлений предложена лотерея L_n, состоящая из n шагов, на каждом из которых вероятность выигрыша A_i равна p, причем шаг с номером $i + 1$ доступен только в том случае, если на шаге с номером i получен выигрыш A_i. Математическое ожидание выигрыша в такой лотерее равно $M_n = pA_1 + p^2A_2 + p^3A_3 + ... + p^nA_n$, что соответствует текущей стоимости PV_n потока $A_1 + A_2 + ... + A_n$ при ставке дисконтирования $r = 1/p - 1$.

2. В качестве меры риска потока будущих поступлений предложена величина $\sigma_n = \sqrt{D_n}$, где D_n — дисперсия выигрыша в лотерее L_n.

3. Исследование свойств предложенной меры риска показывает, что она соответствует классическим представлениям: росту доходности соответствует рост численного значения меры риска; безрисковым операциям (при $p = 1$, т.е. $r = 0\%$) соответствует нулевое численное значение меры.

4. Предложен способ классификации потоков по уровню рискованности на основании сравнения рассчитанного для потока значения относительного показателя риска σ_n/PV_n с относительным показателем риска потока аннуитетов продолжительности n при равной с оригинальным потоком ставке дисконтирования.

ПРИМЕЧАНИЯ

(1) Для лотереи L_3 математическое ожидание квадрата случайной величины $M_3 = M(X^2)$ содержит уже шесть слагаемых.

$$M_3(X^2) = pA_1^2 + p^2(2A_1A_2 + A_2^2) + p^3(2A_1A_3 + 2A_2A_3 + A_3^2).$$

Полезно заметить что

$$M_{n+1}(X^2) = M_n(X^2) + p^{n+1}(2\sum_i^n A_iA_{n+1} + A_{n+1}^2).$$

В частности, $M_1(X^2) = pA_1^2; M_2(X^2) = pA_1^2 + p^2(2A_1A_2 + A_2^2);$

$$M_3(X^2) = pA_1^2 + p^2(2A_1A_2 + A_2^2) + p^3(2\sum_i^2 A_iA_3 + A_3^2).$$

Отсюда видно, что при $A_{n+1} = 0$, $M_{n+1}(X^2) = M_n(X^2)$.

(2) Вопрос определения значения n при котором меняется характер поведения графика (σ_n, PV_n), в данной работе не исследуется.

(3) Для потока аннуитетов A и вероятности p имеем: $M_n(X^2) = \sum_i^n p^i(2n-1)A^2$

$$\lim_{n\to\infty} PV_n = \frac{p}{1-p}; \ \lim_{n\to\infty} M_n\left(X^2\right) = \frac{p+p^2}{\left(1-p\right)^2}; \ \lim_{n\to\infty} D_n = \frac{p}{\left(1-p\right)^2}.$$

И, в пределе, $\frac{\sigma}{PV} = \frac{1}{\sqrt{p}}$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Шарп У., Александер Г. Бейли Дж.* Инвестиции. — М.: ИНФРА-М, 2001.

[2] *Шефер Д., Крушвиц Л., Шваке М.* Финансирование и инвестиции: Задачник. — СПб.: Питер, 2001.

[3] *Багриновский К.А., Матюшок В.М.* Экономико-математические методы и модели. Микроэкономика. — М.: Изд-во РУДН, 2010.

[4] Энциклопедия финансового риск-менеджмента / Под ред. А.А. Лобанова и А.В. Чугунова. — М.: Альпина Паблишер, 2003.

[5] *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. — М.: КноРус, 2010.

[6] *Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.

PROBABILISTIC INTERPRETATION OF THE PRESENT VALUE OF AN INVESTMENT PROJECT CASH FLOW

I.A. Smarzhevsky

Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 177198

The question of assessing the current value of the flow of future earnings in the scientific literature worked out very carefully. A key factor in assessing a discounted rate, usually defined as the weighted average cost of capital invested. However, it is possible different perspective on the relationship between the present value of money and its nominal amount, receipt of which is to be in the future. This paper proposes a new approach to the assessment procedure, the current value of the flow based on a probabilistic model in which the relation between the current and future nominal values defined as the confidence level in obtaining value in the future. Application of this model provides a natural way to introduce a quantitative measure of risk for the flow of future earnings. The paper analyzes the properties of the proposed measures of risk, shows its conformity with classical ideas of the relationship between risk and return investments, are examples of the calculation of absolute and relative indicators of the potential flow.

Key words: present value, cash flow, probability, risk measure, an annuity.