Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования
RUDN Journal of Engineering Research

2024;25(3):216–236

ISSN 2312-8143 (Print); ISSN 2312-8151 (Online)
journals.rudn.ru/engineering-researches

DOI: 10.22363/2312-8143-2024-25-3-216-236
УДК 671.372.542
EDN: WRWGCN

Научная статья / Research article

μ робастная устойчивая экстраполяция стационарного случайного процесса с интервально-ограниченной дисперсией

И.Г. Сидоров

Московский политехнический университет, *Москва, Россия*
✉ igor8i2016@ya.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 12 января 2024 г.
Доработана: 21 апреля 2024 г.
Принята к публикации: 14 мая 2024 г.

Заявление о конфликте интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Аннотация. Представлен метод синтеза μ робастно-устойчивого линейного минимаксного экстраполятора стационарного случайного процесса в условиях интервальной неопределенности параметров измеряемого сигнала. Показана в конструктивном виде μ робастно-устойчивая минимаксная экстраполяция как по результату, так и по решению. Сформулированы и доказаны теоремы детерминизации и редукции существования и единственности согласованной интервальной седловой точки в задаче экстраполяции с малыми нечетко-интервальными отклонениями в правых частях ограничений на спектральную плотность мощности возмущения измеряемого сигнала в форме согласованной интервальной функции Лагранжа. В конструктивной форме предложен 4-шаговый алгоритм детерминизации поиска оптимума неполностью определенного функционала дисперсии ошибки оценивания к нахождению одноименного оптимума двух полностью определенных (детерминированных) функционалов. Этот подход, в отличие от других (например, вероятностного), всегда обеспечивает существование устойчивого по результату и решению единственного оптимума в задаче интервальной минимаксной экстраполяции за счет регуляризации по малому параметру при производной от собственной функции сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с интегральным оператором типа Вольтера второго рода, определяемым симметрическим, замкнутым вещественным ядром. В отличие от классических методов прогнозирования и оценивания предложенный метод позволяет получить гарантированные интервально устойчивые робастные оценки состояния при некоторых отклонениях действительных вероятностных характеристик исходных данных от гипотетических.

Ключевые слова: седловая точка, некореллированный, спектральная плотность, робастная устойчивость, регуляризация, минимакс, экстраполяция

Для цитирования

Сидоров И.Г. μ робастная устойчивая экстраполяция стационарного случайного процесса с интервально-ограниченной дисперсией // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2024. Т. 25. № 3. С. 216–236. http://doi.org/10.22363/2312-8143-2024-25-3-216-236

μ Robust Stable Extrapolation of a Stationary Random Process with Interval Limited Variance

Igor G. Sidorov

Moscow Polytechnic University, *Moscow, Russia*

✉ igor8i2016@ya.ru

Article history

Received: January 12, 2024

Revised: April 21, 2024

Accepted: May 14, 2024

Conflicts of interest

The author declares that there is no conflict of interest.

Abstract. A method for synthesizing μ robust stable linear minimax extrapolator of a stationary random process under conditions of interval uncertainty of the parameters of the measured signal is presented. A robust and stable minimax extrapolation is shown in a constructive form of μ, both in terms of the result and the solution. The theorems of determinization and reduction on the existence and uniqueness of a consistent interval saddle point in the problem of extrapolation with small indistinct interval deviations in the right parts of the restrictions on the spectral power density of the perturbation of the measured signal in the form of a consistent interval Lagrange function are formulated and proved. In a constructive form, a 4-step algorithm is proposed for determinizing the search for the optimum of an imperfectly defined functional of the variance of the estimation error to find the optimum of the same name for two fully defined (deterministic) functionals. This approach, unlike others (for example, probabilistic), always ensures the existence of a stable result and solution of a single optimum in the problem of interval minimax extrapolation due to regularization by a small parameter with a derivative of the eigenfunction of a singularly perturbed integro-differential equation of the first order with an integral operator of the Voltaire type of the second kind, defined by a symmetric, closed real the core. Unlike classical forecasting and estimation methods, the proposed method allows us to obtain guaranteed interval-stable robust estimates of the state with some deviations of the actual probabilistic characteristics of the initial data from the hypothetical ones.

Keywords: saddle point, uncorrelated, spectral density, μ robust-stable, regularization, minimax, extrapolation

For citation

Sidorov IG. μ robust stable extrapolation of a stationary random process with interval limited variance. *RUDN Journal of Engineering Research.* 2024;25(3):216–236. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/2312-8143-2024-25-3-216-236

Введение

Большинство современных задач оптимизации решается в предположении детерминированных параметров оптимизируемой системы. Однако на практике системы в технике, экономике, социологии и т. д. имеют, как правило, недетерминированные параметры, в частности, ими могут быть интервально неопределенные параметры, такие как спектральные интервальные плотности ошибок измерения полезного сигнала и/или неизвестного интервально-нечеткого возмущения, присутствующего в измерениях полезного сигнала. В этих условиях получить аналитическое решение оптимальной задачи экстраполяции или фильтрации не представляется возможным. Достаточно часто математическая модель системы управления учитывает лишь допустимые области изменения наблюдаемых параметров управляемой системы и характеристик ее отдельных элементов без конкретизации самих этих параметров и характеристик. Указанные области могут определяться, например, интервальными ограничениями, соответствующими заданным техническим допускам на систему. Решение таких задач требует специальных методов, отличных от методов обычных детерминированных уравнений. В ряде работ группы авторов [1–4] предложили несколько фундаментальных подходов к решению задач линейной минимаксной экстраполяции для стационарного случайного процесса, получивших распространение в научной литературе в период 1991–2017-х гг. Среди них была рассмотрена задача минимаксной экстраполяции стационарного случайного процесса с непрерывным и дискретным временем поставлена и решена О.М. Куркиным [1]. Задача синтеза экстраполяции временных стационарных в широком смысле временных последовательностей на интервале времени исследовалась в [2]. Несколько результатов было получено M. Moklyachuk и A.Yu. Masyutka в [3], в которой была решена задача линейной минимаксно-робастной экстраполяции линейных функционалов для пропущенных значений стандартной векторной стационарной случайной последовательности с ортогональными значениями конечного ранга. Ими было показано, что максимальную среднеквадратическую ошибку в оценке линейных функционалов дает модель скользящего среднего первого порядка. Рассмотрена задача линейной экстраполяции процесса, когда спектральные интервальные плотности ошибок измерения сигнала удовлетворяют моментным условиям и известным априорным ограничениям в форме вещественно неотрицательно-определенных симметричных интервалов по отношению к ожидаемым незаданным границам своих ограничений требуемой ширины. Рассматривается μ робастно-устойчивая интервальная гарантирующая оценка, под которой понимается наилучшая оценка параметров полезного сигнала в смысле минимума ошибок измерений и возмущений с интервальными спектральными плотностями, принадлежащими множеству неотрицательно определенных плотностей. μ Робастно-устойчивая минимаксная экстраполяция понимается по параметру μ как множителю при производной от искомой собственной функции в интегральном уравнении Гренандера, определяющем оптимальный минимаксный экстраполятор, как регуляризация задачи, обеспечивающая устойчивость ее как по решению, так и по ее результату. Решение проблемы сводится к решению двух полностью определенных задач условной оптимизации того же вида [4]. При этом используется математическая теория сравнений интервалов, позволяющая заменить сравнение интервалов сравнением их нижних и верхних границ и выделить максимальный и минимальный интервал в рамках сохранения μ робастной устойчивости задачи экстраполяции. В исследовании показано, что линейный минимаксный μ робастно-устойчивый интервальный экстраполятор совпадает с оптимальным линейным экстраполятором для объединенных множеств всех нижних (верхних) значений игры, которые образованы нижними (верхними) значениями детерминированных «точечных» игр с интервальными стратегиями игроков и их функциями выигрыша. Показано, что оптимальный интервальный экстраполятор совпадает с минимаксным детерминированным экстраполятором в форме согласованной интервальной функции Лагранжа по ее первой компоненте искомого экстраполятора и второй, спектральной, компоненте наихудшего возмущения с регулярной областью допустимых ее нижней (верхней) граничной задачи. Указанный подход позволяет в конструктивной форме построить 4-шаговый μ робастно-устойчивый алгоритм решения интервальной задачи минимаксной экстраполяции, который реализует метод детерминизации.

1. Постановка задачи минимаксной экстраполяции при отсутствии ошибок измерений в непрерывном времени

Предположим, что фактическая составляющая измеренного сигнала была сформирована из определенного возмущения с помощью динамической системы управления

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{b}\tilde{u}(t). \quad (1)$$

Здесь постоянная матрица **A** размерности $n \times n$, $t \in (-\infty, +\infty)$, $\tilde{x}(t) \in R^n$ является вектором состояния системы; **b** — постоянный вектор; $\tilde{u}(t)$ — неизвестное интервально-нечеткое возмущение или управление, представляющее скалярный стационарный случайный процесс с нулевым средним значением с единственной информацией о его интервально нечеткой корреляционной функции об ограничении на его интервально-нечеткую дисперсию, которая удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{E}\,\tilde{u}^2(t) \le \tilde{a},$$

где E(•) обозначает математическое ожидание, $\tilde{u}^2(t)$; $\tilde{a} < \infty$ — фиксированная интервально-нечеткая мощность возмущения и, возможно, ограничение на область концентрации его спектральной плотности — $h_{\tilde{u}}(\lambda)$ в точке $\lambda \in \Lambda$; Λ — заданное подмножество частотной оси. Измеренный сигнал $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ по результатам наблюдений на временном интервале $t \in (-\infty, t_0)$ представим в виде

$$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\tilde{\mathbf{x}}(t). \quad (2)$$

Сделаем следующие предположения относительно матриц **A, b,** и **C**:

1) система «измеритель — объект» (1), (2) является наблюдаемой системой

$$rank\left(\mathbf{C}, \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}, \ldots, \left(\mathbf{A}^{\mathbf{n-1}}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{C}\right) = n.$$

На протяжении всей статьи *rank* будет матричным оператором принятия ранга над соответствующей составной матрицей:

$$\mathbf{C}, \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{C}, \ldots, \left(\mathbf{A}^{n-1}\right)^{\mathbf{T}}\mathbf{C}.$$

Это означает, что если хотя бы один из его миноров порядка n отличается от нуля, при этом каждый минор порядка $(n + 1)$ равен нулю;

2) система «измеритель — объект» (1), (2) является «маскируемой» возмущением, т.е. любое ее состояние можно всегда выразить в виде

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}\tilde{u}(t)d\tau \quad (3)$$

или эквивалентное условие

$$rank\left(\mathbf{b}, \mathbf{Ab}, \ldots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\right) = n.$$

Так как $y(t)$ — гауссовский случайный процесс, то наилучшей экстраполяцией является линейная экстраполяция, которая в данном случае имеет вид

$$\hat{s}(t+T) = \int_{-\infty}^{t} g(t+T-\tau)y(\tau)d\tau,$$

чтобы найти переходную функцию $g(t)$ физически реализованного фильтра, который оценивает процесс

$$s(t+T) = \int_{-\infty}^{t} q^T(t+T-\tau)x(\tau)d\tau$$

в момент времени $t+T$, $T>0$.

Здесь $q(t)$ — заданная функция «вектор-строка» размера n линейного преобразования, которое задается строкой частотных характеристик $Q(\lambda)$ полезного сигнала $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)$ стационарного n-мерного процесса.

Критерием качества является дисперсия ошибки прогнозирования с периодом времени экстраполяции T:

$$\min_{g}\max_{\tilde{u}} \mathbf{E}\left[\hat{s}(t_0+T)-s(t_0+T)\right]^2 =$$

$$= \min_{G\in K^{ext}} \sup_{\tilde{h}\in\tilde{\Xi}} D(G,\tilde{h}), \quad (4)$$

где G — передаточная функция, связанная с функцией $g(t)$, $\tilde{h}$ — параметрический спектр неизвестного интервально-нечеткого возмущения $\tilde{u}(t)$, K^{ext} — класс комплекснозначных линейных экстраполяторов, $\tilde{\Xi}$ — класс спектра возмущений $\tilde{\Xi}\subseteq L_1(\Lambda)$, где $L_1(\Lambda)$ — класс абсолютно интегрированных вещественных функций на Λ, определяемый как

$$\tilde{\Xi} = \Big\{\tilde{h}(\lambda,q)\in L_1 : \tilde{I}(\tilde{h})=$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\Lambda} \tilde{h}(\lambda,q)\Psi(\lambda)d\lambda \le \tilde{D}_{\tilde{u}}. \quad (4a)$$

Для фиксированной спектральной плотности $\tilde{h}\in\tilde{\Xi}$ оптимальный линейный экстраполятор $G^{ext}(\lambda)$ находится путем решения экстремальной задачи

$$\min_{G\in K^{ext}} \sup_{\tilde{h}\in\tilde{\Xi}} D(G,\tilde{h}). \quad (5)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению частотных характеристик по минимаксному критерию (4). Представляет интерес рассмотрение ситуаций, в которых известна точная форма спектральной плотности мощности сигнала, но форма спектральной плотности мощности возмущения неизвестна. Относительно неизвестной компоненты $\tilde{h}(\lambda,q)$ известно лишь, что она удовлетворяет условию параметрической интервальной нечеткости:

$$\tilde{h}(\lambda,q) = (1-q)\underline{h}(\lambda) + q\overline{h}(\lambda), \quad (5a)$$

где $\underline{h}(\lambda)$ — неизвестная ожидаемая нижняя граничная реализация, $\overline{h}(\lambda)$ — неизвестная ожидаемая верхняя граничная неизвестных параметрических составляющих спектральных плотностей $\tilde{h}(\lambda,q)$, которые слабо меняются при изменении параметра q, $q\in[0,1]$ — параметр, задающий возможную степень девиации реализации $\tilde{h}(\lambda,q)$, на ее интервале нечеткости $\tilde{\Xi}=[\underline{h}(\lambda),\overline{h}(\lambda)]$, $\tilde{h}(\lambda,q)\in\tilde{\Xi}$ от ее ожидаемых граничных реализаций, $\tilde{h}(\lambda,q)$ сосредоточена на ожидаемой полосе частот Λ_1:

$$\tilde{h}(\lambda,q)=0, \quad \text{если } \lambda\notin\Lambda_1$$

положительной меры $mes\Lambda_1>0$ (возможна и бесконечная мера), интервальный параметр $\tilde{D}_u$ в правых частях ограничений (4.a) представлен в виде симметричного интервала

$$\tilde{D}_u = \left[D_u-\delta, D_u+\delta\right]$$

с малыми неотрицательными отклонениями δ, где $\tilde{D}_u<\infty$ — фиксированная мощность возмущения, $\Psi(\lambda)$ — неотрицательная заданная четная функция по частоте λ, удовлетворяющая условию Пейли — Винера:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\ln\Psi(\omega)|}{1+\omega^2}d\omega<\infty. \quad (6)$$

Мы будем рассматривать $\tilde{\Xi}$ в дальнейшем как подпространство $L_2(\lambda)$ гильбертова пространства комплекснозначных функций, заданных на частотной оси $[-\infty,\infty]$, интегрируемых по квадрату относительно меры Лебега с плотностью $\tilde{h}(\lambda,q)$, неравной нулю. Будем считать далее, что множество спектральных плотностей, заданных в виде (5a) и удовлетворяющих ограничениям (4a), принадлежит выпуклому слабому компакту $\tilde{\Xi}$ допустимых неотрицательно определенных спектральных плотностей возмущений помехи. В [5] впервые предложен такой подход к задаче интерполяции для стационарных процессов. Аналогичный причинный случай был рассмотрен для интервальной нечеткости линейной динамической системы с параметрической неопределенностью спецификации только в матрице состояний в рамках формы Н-устойчивости с ограниченной дисперсией случайного возмущения в полезной составляющей модели сигнала в [6]. Для этой задачи теперь мы можем сформулировать следующую теорему без очевидного доказательства, которая дает методику поиска наименее благоприятных спектров в определенных случаях.

Теорема 1. *Данная задача имеет седловую точку в силу того, что критерий оценивания* $D(G,\tilde{h})$ *является линейным функционалом по* $\tilde{h}$ *и множество всех* $\tilde{h}(\lambda,q)$ *с ограниченной интервальной дисперсией*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{h}(\lambda,q)\Psi(\lambda)\le\tilde{D}_u$$

является выпуклым, слабо компактным и функционал выигрыша $\tilde{D}(\tilde{G},\tilde{h})$ *является квадратичным по* $\tilde{G}$ *и линейным по* $\tilde{h}$. *Условия выпуклости-вогнутости, которые требуются при использовании известных теорем из теории игр [7], выполняется классическое условие существования седловой точки и мы имеем соответствующее соотношение, определяющее седловую точку:*

$$\min_{G\in K^{ext}}\max_{\tilde{h}\in\tilde{\Xi}}D(\tilde{G},\tilde{h})=$$
$$=\max_{\tilde{h}\in\tilde{\Xi}}\min_{G\in K^{ext}}D(\tilde{G},\tilde{h})=\tilde{D}_{opt}. \quad (7)$$

Таким образом, проблему следует интерпретировать как антагонистическую игру $\Gamma(D,\tilde{\Xi},K^{ext})$, где функционал выигрыша $\tilde{D}(\tilde{G},\tilde{h})$ связан с соответствующими стратегическими пространствами двух игроков: пространство первого игрока, названного природой, стремящегося максимизировать $\tilde{D}(\tilde{G},\tilde{h})$, и пространство второго K^{ext} игрока, названного исследователем, стремящегося минимизировать $\tilde{D}(\tilde{G},\tilde{h})$. Отметим, что в данной математической постановке алгоритма гарантированного решения интервальной задачи μ робастно-устойчивой линейной минимаксной экстраполяции соблюдаются все требования по обеспечению его возможности широкого применения на практике [8] — по оптимальности, однозначности, несмещенности и сходимости. Однозначность и несмещенность алгоритма гарантированного интервального μ робастно-устойчивого прогноза очевидна. Указанный алгоритм также и оптимален в том смысле, что экстремальные полиномы на интервале прогноза T выделяют из всего множества реализаций $y(t)$, $t\in(-\infty,\ t_0+T)$ область, содержащую только такие реализации, которые могли бы наблюдаться на интервале $t\in(-\infty,\ t_0)$ при условии, что ошибка измерений $\varepsilon(t)$ лежит в некоторых пределах $\varepsilon(t)\in[\Delta_1(t),\Delta_2(t)]$, т. е. область, ограниченная экстремальными полиномами на интервале T, является наименьшей из возможных, в которой находится гарантированно истинная реализация $y(t)$. Оптимальная оценка, характеризующая точность гарантированного прогноза, может быть записана как

$$\ell^*(t)=\min_{y_\alpha,y_\beta\in N}\max_{\forall t\in T}|\,y(t)_\alpha-y(t)_\beta\,|, \quad (7a)$$

где N — множество, содержащее на интервале T только такие реализации $y(t)$, которые лежат в интервале измерений $[z(t)-\Delta_1(t),$ $z(t)+\Delta_2(t)]$, где $z(t)$ — результаты наблюдений реализации случайного процесса $y(t)$. Асимптотическая сходимость рассматриваемых алгоритмов прогноза вытекает из свойств экстремальных полиномов, например полиномов Карлина [7], и может быть доказана с использованием теоремы 2.4 [7] в смысле критерия (7a).

Система соотношений, определяющих седловую точку в задаче минимаксной экстраполяции

Теорема 1 может быть применена для нахождения решений задачи экстраполяции для стационарного случайного процесса в случае спектральной неопределенности, когда спектральная плотность возмущения точно неизвестна.

Спектральная плотность сигнала из (2) может быть представлена в виде

$$X_u(\lambda,q)=T(\lambda)+\tilde{h}(\lambda,q), \tag{7б}$$

где известна неотрицательная составляющая $T(\lambda)$, удовлетворяющая условию Пейли — Винера (6) и $\tilde{h}(\lambda,q)\in K^{ext}$ является неизвестной составляющей в спектре сигнала. Решение задачи (5) можно найти для этого случая, применив результаты [1] относительно связи задачи минимаксной фильтрации с решением проблемы марковских моментов [9].

Пусть $T(\lambda)=0$, тогда система соотношений, определяющих седловую точку в этом случае, определяется формулами

$$\Psi(\lambda)=|\varphi(\lambda)|^2; \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left|\left[Q(\lambda)X_{\tilde{u}}^{+}(\lambda,q)\right]_{-}\right|^2}{\tilde{\alpha}\Psi(\lambda)}d\lambda;$$

$$\sqrt{\tilde{\alpha}}X_{\tilde{u}}(t,q)=\int_0^T K(t,\xi)X_{\tilde{u}}(\xi,q)\,d\xi; \tag{9}$$

$$K(t,\xi)=\int_{-\infty}^{\min[t;T-\xi]}P(t-\tau)a(t+\xi)\,d\tau. \tag{9a}$$

$$\tilde{G}^{ext}(\lambda,q)=\frac{\left[Q(\lambda)X_{\tilde{u}}^{+}(\lambda,q)\right]}{X_{\tilde{u}}^{+}(\lambda,q)}=$$

$$=Q(\lambda)-\tilde{\mu}_{\max}\frac{X_{\tilde{u}}^{-}(\lambda,q)}{X_{\tilde{u}}^{+}(\lambda,q)}\varphi^{*}(\lambda), \tag{10}$$

где $\tilde{\alpha}$ — интервальный коэффициент Лагранжа, удовлетворяющий системе соотношений, определяющий седловую точку минимаксного экстраполятора [1, пункт 3. 6. 1] $X_{\tilde{u}}(t,q)$ — функция оригинал изображения $X_{\tilde{u}}^{+}(\lambda,q)$, $P(t)$ — оригинал изображения $1/\varphi(\lambda)$; $a(t)$ — оригинал изображения $Q(\lambda)$ на отрезке времени $0\le t\le T$; $\varphi(\lambda)$ — результат факторизации $\Psi(\lambda)=\varphi^{+}(\lambda)\varphi^{-}(\lambda)$, $\varphi^{*}(\lambda)=\varphi^{-}(\lambda)$; $\tilde{\lambda}_{\max}$ — максимальное нечетко интервальное собственное значение, соответствующее собственной функции $X_{\tilde{u}}(\lambda,q)$ в однородном интегральном уравнении Гренандера [10]. Дисперсию ошибки экстраполяции с периодом времени экстраполяции можно в этом случае представить в виде

$$\tilde{D}^{ext}(\lambda,q)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|G(\lambda,q)-Q(\lambda)\right|^2\tilde{h}(\lambda,q)d\lambda=\tilde{a}\tilde{\lambda}_{\max}^2. \tag{11}$$

В соотношениях (9), (10) и далее подразумевается использование α-уровневого принципа обобщения с интервальной арифметикой для выполнения алгебраических и арифметических операций с нечеткими числами или функциями [10], символы в уравнениях (9), (10) для функций и символы $A_{+}(\lambda)$ и $A_{-}(\lambda)$ были введены как соответствующие операции разделения функции $A(\lambda)$ в нижней и верхней аналитической полуплоскости, соответственно $A^{+}(\lambda)$, $A^{-}(\lambda)$ и являются причинной и непричинной частями удовлетворяющей факторизации функции $A(\lambda)=A^{+}(\lambda)A^{-}(\lambda)$, при фиксированной $G(\lambda,q)$, $\tilde{h}(\lambda,q)$ является решением задачи проблемы моментов Маркова [9], касающейся возмущения спектральной плотности (точно неизвестной), связанной с критерием минимаксной среднеквадратичной ошибки (4).

2. μ робастно-устойчивая минимаксная экстраполяция по результату и решению

Для того чтобы продемонстрировать разработку методики, мы предлагаем рассмотреть переход от интегрального уравнения (9.1) к эквивалентному сингулярно возмущенному интегро-дифференциальному уравнению [12] первого порядка с интегральным оператором типа Вольтера второго рода, определяемым симметрическим, замкнутым вещественным ядром $K(t,\xi)$, содержащим малый параметр μ как множитель при производной от собственной функции $X_{\tilde{u}}(t,q)$. Такая процедура вполне корректна и целесообразна при наличии незначительных малых возмущений, неизбежно возникающих, например, при появлении небольших изменений в границах изменения параметров модели для данной задачи в верхней оценке $\tilde{a}$ дисперсии возмущения $\tilde{u}(t)$ в уравнении объекта (1). Решение интегрального уравнения второго рода (в отличие от уравнения первого рода) — корректная задача. В результате такого перехода мы получим эквивалентное в указанном выше смысле равносильное интегро-дифференциальное уравнение в нечетко-интервальном виде

$$\mu\dot{X}_{\tilde{u}}(t,q) = -\sqrt{\tilde{\alpha}}\,X_{\tilde{u}}(t,q) + \\ +\int_0^T K(t,\xi)X_{\tilde{u}}(\xi,q)d\xi + f(t), \qquad (12)$$

$$X_{\tilde{u}}(0,q,\mu) = X_{\tilde{u}}^0, \qquad (13)$$

где функцию $f(t)\in L_2$, согласно лемме 1, будем считать ортогональной всем собственным функциям союзного ядра $K(\xi,t)$ уравнения (12), отвечающим тому же собственному числу $\tilde{\lambda} = \sqrt{\tilde{\alpha}}$. Лемма 1 «*о возможном выборе ортогональной функции $f(t)$ к собственным функциям ядра $K(\xi,t)$*» приведена в приложении. В этом случае, как известно [12, теорема 6.7]), существует регуляризируемое решение уравнения (12). При малом параметре регуляризации μ связь между решением уравнения (12) и союзным, однородным к нему уравнением устанавливается *альтернативой Фредгольма* (разрешимость при любой $f(t)$ из гильбертова пространства) [13]. Ядро $K(\xi,t)$ в уравнении (12) обладает свойством $K(\xi,t) = 0$ при $t > \xi$, то есть уравнение (12) является уравнением типа Вольтерра, поэтому в силу теоремы [13, с. 461] для него всегда имеет место первый случай альтернативы Фредгольма. Для уравнения (12) справедлива теория, развитая в [14].

Докажем теорему об устойчивости задачи экстраполяции относительно ошибок вычисления функций $X_{\tilde{u}}(t,q)$ и результата задачи $\tilde{D}^{ext}(\lambda,q)$, которая указывает соотношение между параметром регуляризации μ и вычислительной погрешностью $\tilde{\varepsilon}$, обеспечивающее сходимость вычисленного гарантированного результата к истинному.

В дальнейшем задачу экстраполяции (5) будем называть задачей (E), а задачу экстраполяции (5) с малыми нечетко-интервальными отклонениями в правых частях ограничений на спектральную плотность мощности возмущения в классе (5а) задачей ($E_{\tilde{\varepsilon}}$). Число $\tilde{\varepsilon}$ будем интерпретировать как интервальную погрешность определения параметра в задаче ($E_{\tilde{\varepsilon}}$) и считать, что справедливо в нечетко интервальном смысле неравенство $|\tilde{D}_{\tilde{u}} - \tilde{D}_{\tilde{u}}^{\tilde{\varepsilon}}| \le \tilde{\varepsilon}$.

Введем определения робастной устойчивости задачи ($E_{\tilde{\varepsilon}}$) по результату и по решению.

Определение 1. Задача ($E_{\tilde{\varepsilon}}$) называется робастно-устойчивой по результату, если найдется такое интервально-нечеткое число $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$, что при всех $\tilde{\varepsilon} \le \tilde{\varepsilon}_0$ задача ($E_{\tilde{\varepsilon}}$) разрешима и для любой последовательности $\{\tilde{\varepsilon}_k\} \to 0$ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \tilde{D}_{opt}^{\tilde{\varepsilon}_k} = \tilde{D}_{opt}$.

Определение 2. Задача ($E_{\tilde{\varepsilon}}$) называется робастно-устойчивой по решению, если для любого интервально-нечеткого числа $\tilde{\delta} > 0$ найдется такое $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$, что при всех $\tilde{\varepsilon} \le \tilde{\varepsilon}_0$ задача ($E_{\tilde{\varepsilon}}$) разрешима и множество ее решений принадлежит интервально-нечеткой окрестности множества решений $\boldsymbol{P}$ задачи (E).

Теорема 2. Для робастной устойчивости задачи ($E_{\tilde{\varepsilon}}$) по результату необходимо и достаточно, чтобы она была робастно-устойчивой по решению.

Доказательство:

1) *Достаточность.* Зададим произвольное интервально-нечеткое $\tilde{\omega} > 0$. Пусть $\tilde{\varepsilon}_0$ таково, что при всех $\tilde{\varepsilon} \le \tilde{\varepsilon}_0 \le \tilde{\omega}$ решения $X_{\tilde{u}}^{\tilde{\varepsilon}}(t)$ принадлежат $\tilde{\omega}$ — окрестности множества решений P задачи (E). Тогда согласно уравнению (11)

$$| D_{opt} - D_{opt}^{\tilde{\varepsilon}_k} | = | \tilde{a}\tilde{\lambda}_{\max}^2 - -(\tilde{a} + \tilde{\varepsilon}_k)\tilde{\lambda}_{\max}^2 | = \tilde{\varepsilon}_k \tilde{\lambda}_{\max}^2 \to 0$$

при $\{\varepsilon_k\} \to 0$, поскольку ядро $K(t,\xi)$ уравнения (12) в этих условиях не изменилось, не изменилось и максимальное интервально-нечеткое собственное значение $\tilde{\lambda}_{\max}$ ядра $K(t,\xi)$.

Замечание 1. Отметим без доказательства, что в условиях небольшого изменения ядра $K(t,\xi)$ по малому возмущению $f(t)$ уравнения (12), достаточное условие теоремы 2 также верно.

2) *Необходимость.* Пусть задача ($E_{\tilde{\varepsilon}}$) робастно устойчива по результату, по определению 2 имеем $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$ такое, что при всех $\tilde{\varepsilon} \le \tilde{\varepsilon}_0$ выполнимо условие

$$| \tilde{D}_{opt} - \tilde{D}_{\tilde{\varepsilon}_k} | \le \tilde{\varepsilon}$$

Определим необходимое число $\tilde{\varepsilon}(\tilde{\delta})$ по произвольному числу $\tilde{\delta}$, для которого должно соблюдаться условие

$$| X_{\tilde{u}}^{opt}(t,q) - X_{\tilde{u}}^{\tilde{\varepsilon}}(t,q) | \le \tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon}).$$

Из уравнения (11) имеем

$$| \tilde{D}_{opt}(\lambda,q) - \tilde{D}^{\tilde{\varepsilon}}(\lambda,q) | = = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda,q) - Q(\lambda)^2| (\tilde{h}(\lambda,q) - -\tilde{h}^{\tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon})}(\lambda,q)) d\lambda \le \tilde{\varepsilon}. \quad (14)$$

Вынесем за знак интеграла в (14) максимум функции $\tilde{h}(\lambda,q) - \tilde{h}^{\tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon}_k)}(\lambda,q)$, последний достигается в силу принадлежности функции $\tilde{h}(\lambda,q)$ классу положительных функций, интегрируемых по Лебегу вместе с квадратом модуля функций $L_2(\Lambda)$, заданных на измеримом подмножестве Λ действительной прямой, и обозначим значение интеграла $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |G(\lambda,q) - Q(\lambda)|^2 d\lambda$ через $M(q)$ при фиксированной частотной характеристике фильтра-экстраполятора $G(\lambda,q)$, тогда получим оценку сверху для абсолютного изменения искомой функции $\tilde{h}(\lambda,q)$ в виде

$$\sup_{-\infty<\lambda<\infty} | \tilde{h}(\lambda,q) - \tilde{h}^{\tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon}_k)}(\lambda,q) | \le \frac{1}{M(q)} \tilde{\varepsilon}_k.$$

Выбирая $\tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon}_k)$ равным $\frac{1}{M(q)}\tilde{\varepsilon}_k$, будем иметь устойчивость задачи (E) по решению при $\{\tilde{\varepsilon}_k\} \to 0$ и в оригинале $X_{\tilde{u}}^{opt}(t,q)$, поскольку выполнимо равенство Парсеваля [13], связывающее малые изменения функции $\tilde{h}(\lambda,q)$ с малыми изменениями ее оригинала $X_{\tilde{u}}^{opt}(t,q)$, выполнимыми не только в пространстве функций с суммируемым квадратом $L_2[-\pi,\pi]$ на отрезке $[-\pi,\pi]$ или в пространстве функций с суммируемым квадратом $L_2(-\infty,+\infty)$ на всей прямой $(-\infty,+\infty)$, но и для пространства обобщенных функций S_{∞}^{*}, соответствующего пространству функций S_∞, бесконечно дифференцируемых и убывающих на бесконечности вместе со своими производными быстрее, чем любая степень [13], включающего и обобщенную функцию путем введения понятия преобразования Фурье для обобщенных функций с сохранением равенства Планшереля:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\,\tilde{h}(\lambda,q) - \tilde{h}^{\tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon}_k)}(\lambda,q)\,|^2 d\lambda\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |\,X_{\tilde{u}}^{opt}(t,q) - X_{\tilde{u}}^{\tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon}_k)}(t,q)\,|^2 dt,$$

следовательно, число $\tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon}_k) = \dfrac{1}{M(q)}\tilde{\varepsilon}_k$ — также приемлемо и для искомой функции $X_u^{opt}(t,q)$. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим экстраполяцию на один шаг вперед в дискретном времени в соответствии с уравнением (12). Дисперсия ошибки экстраполяции в этом случае имеет выражение, аналогичное выражению для этой величины, полученному в [1]

$$D_{ext} = 2\pi e^{2\beta_0},$$

а наименее благоприятная спектральная плотность полезного сигнала реализует решение задачи

$$\beta_0 = \beta_0(\tilde{h},q) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln[\tilde{h}(\lambda,q) + T(\lambda)]d\lambda \to$$

$$\to \max;\ \tilde{h}(\lambda,q) \in \tilde{\Xi}.$$

В частности, когда $T(\lambda) = 0$,

$$\beta_0(\tilde{h}) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln[\tilde{h}(\lambda,q)]d\lambda.$$

Отметим, что β_0 с точностью до постоянного множителя совпадает с функционалом удельной энтропии наблюдаемого процесса, поэтому в случае $Q(\lambda) = 1; e^{i\lambda}$ наименее благоприятная спектральная плотность полезного сигнала должна максимизировать функционал удельной энтропии наблюдаемого процесса [15].

Покажем, что задача робастно устойчива по результату. Зададим произвольное $\tilde{\varepsilon} > 0$. Пусть $\tilde{h}^{\tilde{\varepsilon}}(\lambda,q)$ принадлежит $\tilde{\varepsilon}$-окрестности решения задачи экстраполяции функции $\tilde{h}(\lambda,q) > 0$:

$$|\,\tilde{h}^{\tilde{\varepsilon}}(\lambda,q) - \tilde{h}(\lambda,q)\,| \le \tilde{\varepsilon},$$

в силу неравенства $\ln(1+x) < x,\ \ x > 0$, получим верхнюю оценку границы в изменении результата задачи $\tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon})$ в зависимости от заданного малого положительного числа $\tilde{\varepsilon}$:

$$\left|\ln \tilde{h}^{\tilde{\varepsilon}}(\lambda,q) - \ln \tilde{h}(\lambda,q)\right| \le$$

$$\le \left|\ln(\tilde{h}(\lambda,q) + \tilde{\varepsilon}) - \ln \tilde{h}(\lambda,q)\right| =$$

$$= \left|\ln \frac{\tilde{h}(\lambda,q) + \tilde{\varepsilon}}{\tilde{h}(\lambda,q)}\right| =$$

$$= \left|\ln\left(1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{h}(\lambda,q)}\right)\right| \le \frac{\tilde{\varepsilon}}{\tilde{h}(\lambda,q)} = \tilde{\delta}(\tilde{\varepsilon}) = \tilde{\varepsilon}.$$

Случай обращения в ноль функции $\tilde{h}(\lambda,q)$ при $|\lambda| \to \infty$ учитывается с учетом абсолютной интегрируемости функции $\tilde{h}(\lambda,q)$, а значит, и функции $\tilde{h}^{\tilde{\varepsilon}}(\lambda,q)$ на устойчивость по результату в силу выполнимого выше указанного логарифмического неравенства для малых значений положительной функции $\tilde{h}(\lambda,q) \to 0$ при $\lambda \ge \lambda_0, \lambda \to \infty$, поскольку крайние интегралы

$$\int_{-\infty}^{-\lambda_0} \ln[\tilde{h}(\lambda,q)]d\lambda,\ \int_{\lambda_0}^{+\infty} \ln[\tilde{h}(\lambda,q)]d\lambda$$

при $|\lambda| \to \infty$ в разложении исходного интеграла в параметре $\beta_0(\tilde{h})$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ln[\tilde{h}(\lambda,q)]d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{-\lambda_0} \ln[\tilde{h}(\lambda,q)]d\lambda +$$

$$+\int\limits_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} \ln[\tilde{h}(\lambda,q)]d\lambda +$$

$$+\int\limits_{+\lambda_0}^{+\infty} \ln[\tilde{h}(\lambda,q)]d\lambda$$

будут в этом случае стремиться к 0, а средний интеграл $\int\limits_{-\lambda_0}^{+\lambda_0} \ln[\tilde{h}(\lambda,q)]d\lambda$ оценивается по рассмотренному выше способу оценки изменения результата задачи в зависимости от малого положительного числа $\tilde{\varepsilon}$, задающего малые изменения решения задачи.

Следовательно, задача экстраполяции на один шаг вперед в непрерывном времени робастно устойчива по результату, а значит, как было показано выше, и по решению. Можно показать, что аналогичный результат имеет место и при произвольном числе шагов вперед как в дискретном, так и в непрерывном времени, что очень важно при решении практических задач прогнозирования на кратко- или среднесрочную перспективу, в частности в различных сферах управления экономикой и физико-технических задачах, в присутствии неизбежных малых возмущений в системе «измеритель — объект» (1), (2) исследуемой модели.

3. Статистическая робастная устойчивость задачи экстраполяции ($E_{\tilde{\varepsilon}}$) по малому параметру регуляризации μ

Теорема 3. При достаточно малых $\mu \le \mu_0$ для решения $X_{\tilde{u}}^{opt}(t,q,\mu)$ задачи ($E_{\tilde{\varepsilon}}$) на сегменте $-\pi \le t \le \pi$ справедливо представление (аналог четкого представления из [13])

$$X_{\tilde{u}}(t,q,\mu) = \bar{X}_{\tilde{u}}(t,q) + \Pi_0 + R_1(t,q,\mu), \quad (15)$$

где $|R_1| \le C\mu$ (C — не зависящая от μ постоянная).

Доказательство. Подставим выражение для $X_{\tilde{u}}(t,q,\mu)$ в виде (15) в (12) и (13). Для построения асимптотической формулы, которая дает равномерное приближение, нужно к решению вырожденной системы прибавить так называемую пограничную функцию, которая определяется дифференциальным уравнением

$$\frac{d\Pi_0}{dt} = -\sqrt{\tilde{\alpha}}\Pi_0 \quad \left(\xi = \frac{x}{\mu}\right) \quad (16)$$

при условии

$$\Pi_{0|\xi=0} = X_{\tilde{u}}^0 - \bar{X}_{\tilde{u}}(0).$$

В явном виде выражение имеет вид

$$\Pi_0 = [X_{\tilde{u}}^0 - \bar{X}_{\tilde{u}}(0)]e^{-\sqrt{\tilde{\alpha}}\frac{x}{\mu}}. \quad (17)$$

Отметим, что необходимое условие устойчивости для предельного перехода

$$X_{\tilde{u}}(t,q,\mu) \to \bar{X}_{\tilde{u}}(t,q)$$

при $0 \le t \le T$, которое в данном случае имеет вид $-\sqrt{\tilde{\alpha}} < 0$, выполнено. Свойства R_1 пока неизвестны, мы просто перешли к новой неизвестной функции R_1. Учитывая определение $\bar{X}_{\tilde{u}}(t,q)$ и Π_0, получим для R_1 уравнение

$$\mu\frac{dR_1}{dt} = -\sqrt{\tilde{\alpha}}R_1(t,q,\mu) +$$

$$+\int\limits_0^T K(t,\xi)R_1(s,q,\mu)ds + F(t,q,\mu), \quad (18)$$

где

$$F(t,q,\mu) = \int\limits_0^T K(t,s)\Pi_0\left(\frac{t}{\mu},q\right)ds - \mu\frac{d\bar{X}_{\tilde{u}}}{dt}.$$

Пользуясь (17), нетрудно получить при достаточно малых $\mu \le \mu_0$ оценку

$$| F(t,q,\mu) | < C_1\mu , \tag{19}$$

где C_1 некоторая не зависящая от μ постоянной. Начальное условие для $R_1(t,q,\mu)$ следующее:

$$R_1(0,q,\mu) = 0. \tag{20}$$

Из (18), (20), интегрируя уравнение (18) как дифференциальное с неоднородностью

$$\int_0^T (...)\, ds + F,$$

имеем

$$R_1(t,q,\mu) = \int_0^T e^{-\frac{\sqrt{\tilde\alpha}}{\mu}(T-\xi)} d\xi \frac{1}{2}\int_0^\xi K(\xi,s)R_1(s,q,\mu)ds +$$

$$+\int_0^T e^{\frac{\sqrt{\tilde\alpha}}{\mu}(T-\xi)} \frac{t}{\mu} F\,(\xi,q,\mu)\,d\xi .$$

Изменяя в полученном выражении в первом слагаемом порядок интегрирования, получим

$$R_1(T,q,\mu) = \int_0^T \tilde K(T,s,\mu)R_1(s,q,\mu)ds + \tilde F(T,q,\mu),$$

где

$$\tilde K = \int_0^T e^{-\frac{\sqrt{\tilde\alpha}}{\mu}(T-\xi)} d\xi \frac{1}{\mu}\int_0^\xi K(\xi,s),$$

$$\tilde F = \int_0^T e^{-\frac{\sqrt{\tilde\alpha}}{\mu}(T-\xi)} \frac{1}{\mu}F(\xi,q,\mu)d\xi.$$

Пользуясь условием устойчивости $-\sqrt{\alpha} < 0$ решения уравнения (12) и оценкой (19), нетрудно получить неравенства

$$\left|\tilde K(T,s,\mu)\right| \le \bar K = const, \left|\tilde F(T,q,\mu)\right| < C_2\mu.$$

Отсюда оценка $\left|R_1\right| \le C_2\mu$ получается точно таким же способом, как и в [13, с. 202]. Доказанная теорема свидетельствует о том, что выражение

$$\bar X_{\tilde u}(t,q) + \Pi_0\left(\frac{t}{\mu}, q\right)$$

является асимптотической формулой для решения задачи (12), (13) с остаточным членом. Можно получить более точную асимптотическую формулу с остаточным членом $R_n(t,\mu) = O(\mu^n)$, $n \ge 1$.

Доказанная выше теорема 1 показывает устойчивость решения уравнения (12) по Ляпунову и асимптотическую устойчивость по малым изменениям параметра $\mu \le \mu_0$ в задаче $E_{\tilde\varepsilon}$.

Существование и единственность согласованной интервальной седловой точки в задаче ($E_{\tilde\varepsilon}$) минимаксной экстраполяции

Следуя [17], можно доказать теорему, аналогичную теореме детерминизации для решения интервальной задачи интерполяции.

Теорема 4 (детерминизации). Для того чтобы выпуклая интервальная задача экстраполяции $E_{\tilde\varepsilon}$ с регулярной областью допустимых решений граничных задач линейной минимаксной экстраполяции (4а), (5) имела решение $\tilde G^0$, $\tilde h^0$, $\tilde\alpha^0$ необходимо и достаточно, чтобы ее нижняя и верхняя граничные задачи имели согласованные функции Лагранжа с согласованной парой седловых точек [18–23] вида $\tilde G^0$, $\tilde h^0$, $\underline{\alpha}^0$; $\tilde G^0$, $\tilde h^0$, $\overline{\alpha}^0$ с интервальным множителем Лагранжа $\tilde\alpha^0$, соответствующим ограничению (4а). Справедлива также теорема (*о редукции)* о сведении оптимальной задачи интервальной минимаксной робастной экстраполяции $E_{\tilde\varepsilon}$ с ограничениями к задаче E без ограничений.

Теорема 5 (о редукции). В выпуклой интервальной минимаксной задаче экстраполяции (4а), (5) с регулярной областью допустимых решений согласованных граничных задач точка $\tilde{G}^0$, $\tilde{h}^0$, $\tilde{\alpha}^0$ является решением тогда и только тогда, когда существует множитель Лагранжа $\tilde{\alpha}^0 \geq 0$ такой, что $\tilde{G}^0$, $\tilde{h}^0$, $\tilde{\alpha}^0$ — согласованная интервальная седловая точка интервальной функции Лагранжа задачи (4а), (5).

Отметим, что множители Лагранжа $\underline{\alpha}^0$ $(\overline{\alpha})^0$ в нижних и верхних граничных задачах робастной экстраполяции $E_{\tilde{\varepsilon}}$ определяют седловые граничные точки. В силу слабой линейной зависимости от параметра q спектральной плотности возмущения (5а) интервальный линейно зависимый от нее целевой функционал выигрыша $\tilde{D}$ и связанная с ним интервальная функция Лагранжа представимы в виде линейной комбинации их границ в зависимости от q. Как известно, в этом случае утверждение из § 4. 3. 2 в [24] решения нижней и верхней граничных задач оптимизации граничных функций (экстремальных функций) целевого функционала выигрыша задачи оптимизации и связанной с ним функции Лагранжа $\tilde{F}(\tilde{G}, \tilde{h}, \tilde{\alpha})$ неразличимы, если их интервальные оценки вложены друг в друга. Очевидно, что это условие соблюдается в задаче (4а), (5), так как в предельном случае, когда $\tilde{\delta} \to 0$, решение нижней и верхней граничных задач совпадают. Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Решение интервальной задачи робастной экстраполяции $E_{\tilde{\varepsilon}}$ всегда существует в предельном случае, когда параметры в правых частях моментных ограничений задачи робастной экстраполяции (4а) $\tilde{\delta} \to 0$, и представляется в виде пересечения решений ее нижней $\left\{M_н\left(G^0, \tilde{h}^0, \underline{\alpha}\right)\right\}$ и верхней $\left\{M_в\left(G^0, \tilde{h}^0, \underline{\alpha}\right)\right\}$ граничных задач

$$\left(G^0, \tilde{h}^0\right) = \left\{M_н\left(G^0, \tilde{h}^0, \underline{\alpha}\right)\right\} \cap \left\{M_в\left(G^0, \tilde{h}^0, \overline{\alpha}\right)\right\}, \quad (21)$$

$$\tilde{\Upsilon}_{\min}(\tilde{\alpha}) = \left[\min_{\underline{\alpha}} \Upsilon(\underline{\alpha}), \min_{\overline{\alpha}} \Upsilon(\overline{\alpha})\right],$$

$$\sup_{\tilde{h} \in \tilde{\Xi}} \underline{D}(\tilde{G}, \tilde{h}) = \Upsilon(\underline{\alpha}), \sup_{\tilde{h} \in \tilde{\Xi}} \overline{D}(\tilde{G}, \tilde{h}) = \Upsilon(\overline{\alpha}).$$

4. Алгоритм детерминизации

Для решения интервальной задачи (4а), (5) методом детерминизации [23–30] необходимо действовать по следующему алгоритму.

Шаг 1. Используя формулы интервальной арифметики, выражающие элементарные преобразования интервалов [21–30], представляем целевой функционал нашей задачи в интервальной форме

$$\tilde{D}\left(\tilde{G}^0, \tilde{h}\right) = \left[\underline{D}\left(\tilde{G}^0, \tilde{h}^0\right), \overline{D}\left(\tilde{G}^0, \tilde{h}^0\right)\right],$$

а линейные функционалы в левых частях ограничений (5а) и параметры в правых частях в виде интервалов

$$\tilde{I} = \left[\underline{I}(\tilde{h}), \overline{I}(\tilde{h})\right],$$

$$\left(\tilde{G}^0, \tilde{h}^0\right) = M_н\left(G^0, \underline{h}^0, \underline{\alpha} - \delta\right) \cap M_в\left(G^0, \overline{h}^0, \overline{\alpha} + \delta\right).$$

Шаг 2. Используя полученные на шаге 1 представления, формируем нижнюю граничную и верхнюю граничную задачи решаемой нами интервальной задачи условной оптимизации — линейной минимаксной экстраполяции (5), (5а):

$$D\left(\tilde{G}^0, \underline{h}(\lambda)\right) = \text{minsup},$$

$$D\left(\tilde{G}^0, \overline{h}(\lambda)\right) = \text{minsup};$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{h}(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda \leq a - \delta;$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h}(\lambda) \psi(\lambda) d\lambda \leq a + \delta;$$

$$\forall \tilde{G} \in K^{ext}, \underline{h} = \underline{h}(\lambda) \in \tilde{\Xi}, \overline{h} = \overline{h}(\lambda) \in \tilde{\Xi}.$$

Шаг 3. Решаем нижнюю и верхнюю граничную задачи интервальной задачи экстраполяции, сформированные на предыдущем шаге программирования, получаем решения нижней и верхней граничных задач. При этом множество точек решения нижней граничной задачи, на котором ее целевой функционал выигрыша достигает своего нижнего оптимума, и множество точек решения верхней граничной задачи, в которых ее целевой функционал выигрыша достигает своего верхнего оптимума имеет вид

$$\left(\tilde{G}^0,\tilde{h}^0\right)=M_{\text{н}}\left(\tilde{G}^0,\underline{h}^0,\underline{\alpha}\text{-}\delta\right)\cap M_{\text{в}}\left(\tilde{G}^0,\overline{h}^0,\overline{\alpha}+\delta\right). \quad (22)$$

При этом в качестве оптимального значения целевого функционала берем интервал $\tilde{D}\left(\tilde{G}^0,\tilde{h}\right)=\left[\underline{D}\left(\tilde{G}^0,\tilde{h}^0\right),\overline{D}\left(\tilde{G}^0,\tilde{h}^0\right)\right]$ от оптимума целевого функционала нижней граничной задачи $\underline{D}^0$ до оптимума целевого функционала верхней граничной задачи $\overline{D}^0$, переход к предельному случаю, когда $\delta\to 0$, дает представление искомого решения в виде

$$\left(\tilde{G}^0,\tilde{h}^0\right)=\left(\tilde{G}^0,\underline{h}^0\right)=\left(\tilde{G}^0,\overline{h}^0\right).$$

Пример 2. Рассмотрим объект 2-го порядка

$$x_1(n)=x_1(n-1)+x_2(n);$$
$$x_2(n)=x_2(n-1)+\tilde{u}(n);$$
$$M\tilde{u}^2(n)\le\tilde{a};$$
$$\tilde{a}=[a-\delta,a+\delta]. \quad (23)$$

Пусть

$$s(n)=x_1(n)+\xi(n),n\le N,M\xi^2=\sigma^2.$$

Тогда

$$\psi(\lambda)=|(1-e^{-i\lambda})^2|^2=16\sin^4(\lambda/2).$$

По результатам наблюдения $s(n)$, $n\le N$, требуется оценить $s(N+2)$, $Q(\lambda)=e^{2i\lambda}$.

В обозначениях теоремы 3.8 [6, с. 140]

$$T(\lambda)=0,\Lambda=[-\pi,\pi],n=1.$$

Зададим произвольное малое число $\varepsilon>0$, на которое могут отличаться граничные оценки спектральной плотности $\tilde{h}^0(\lambda,q)$:

$$\overline{h}^0(\lambda)=\underline{h}^0(\lambda)+\varepsilon, \quad (24)$$

тогда с учетом полученного изменения границ спектральной плотности возмущения $\tilde{u}(n)$ получим верхние оценки в изменившихся параметрах оптимизации минимаксной экстраполяции задачи $E_{\tilde{\varepsilon}}$ — $\tilde{d}_0,\tilde{d}_1,\tilde{\beta}_0,\tilde{\beta}_1$:

$$\tilde{d}_0=e^{-\tilde{\beta}_0};\ \tilde{d}_1=-e^{\tilde{\beta}_0}\tilde{\beta}_1;$$

$$\tilde{\beta}_0=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left[\tilde{h}(\lambda,q)\right]d\lambda\le$$

$$\le\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left[\underline{h}(\lambda)+\varepsilon\right]d\lambda;$$

$$\tilde{\beta}_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\tilde{h}(\lambda,q)\cos\lambda d\lambda\le$$

$$\le\overline{\beta}_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left[\underline{h}(\lambda,q)+\varepsilon\right]\cos\lambda d\lambda. \quad (25)$$

При оценивании $s(N+2), Q(\lambda)=e^{2i\lambda}$ в интервальной задаче $E_{\tilde{\varepsilon}}$, согласно [1, с. 140] система соотношений, определяющих седловую точку в игре экстраполяции, принимает верхний (нижний) граничный вид

$$\tau^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\max\left[0;\frac{\overline{d}_0^2+\overline{d}_1^2+2\overline{d}_1\overline{d}_0\cos\lambda}{\underline{\alpha}}-16\sin^4\frac{\lambda}{2}\right]d\lambda=(a+\delta);\right.$$

$$\tau^2\int_{-\infty}^{+\infty}\{\max\left[0;\frac{\underline{d}_0^2+\underline{d}_1^2+2\underline{d}_1\underline{d}_0\cos\lambda}{\overline{\alpha}}-16\sin^4\frac{\lambda}{2}\right]d\lambda=(a-\delta).$$

Выражения для значений множителя Лагранжа $\tilde{\alpha}^0 = \left[\underline{\alpha}^0, \overline{\alpha}^0\right]$ в нижних и верхних граничных задачах экстраполяции будут определяться из выражения для спектра возмущения $\tilde{u}(n)$:

$$\tilde{h}(\lambda,q) = \begin{cases} 0, |\lambda| > \pi \\ \tau^2\left[\tilde{c}\left(1+\tilde{\beta}_1^2-2\tilde{\beta}_1\cos\lambda\right)-16\sin^4(\lambda/2)\right] | \lambda| \le \lambda_\Gamma, \end{cases}$$

где константа $\tilde{c}$ имеет вид $\tilde{c} = e^{-2\tilde{\beta}_0} / \tilde{\alpha}_0$.

Отсюда находим оптимальную нижнюю и верхнюю границы для множителя Лагранжа:

$$\underline{\alpha}^0 = \frac{\underline{h}(\lambda)}{\tau^2\left[\left(1+\overline{\beta}_1^2-2\underline{\beta}_1\cos\lambda\right)-16\sin^4(\lambda/2)\right]},$$

$$\overline{\alpha}^0 = \frac{\overline{h}(\lambda)+\varepsilon}{\tau^2\left[\left(1+\underline{\beta}_1^2-2\overline{\beta}_1\cos\lambda\right)-16\sin^4(\lambda/2)\right]}. \quad (26)$$

Как видно из выражения (26), в пределе при $\delta \to 0$ множители Лагранжа сколь угодно близки при любом заданном малом числе ε. Следовательно, при $\delta \to 0$ согласно (24) выполнимо и соотношение

$$\overline{h}(\lambda) = \underline{h}(\lambda) = h^0(\lambda)$$

и предельная оценка искомого функционала в точке $\tilde{\alpha}^0 = \overline{\alpha}^0 = \underline{\alpha}^0$ при наихудшем возмущении $\tilde{u}(n) = const$ будет равна

$$\underline{D}\left(\tilde{G}^0,\tilde{h}^0\right) = \overline{D}\left(\tilde{G}^0,\tilde{h}^0\right) = \tilde{\alpha}^0\left(1+\sqrt{2}\right)^2,$$

где $\tilde{\alpha}^0$ определяется из соотношения (28), поскольку пересечение множеств решений нижней $\left\{M_{\text{н}}\left(\tilde{G}^0,\underline{h}^0,\underline{\alpha}\right)\right\}$ и верхней $\left\{M_{\text{в}}\left(\tilde{G}^0,\overline{h}^0,\overline{\alpha}\right)\right\}$ граничных задач в этом случае непусто, в соответствии с теоремой 7 решение интервальной задачи существует и принимает вид

$$\tilde{G}^0(\lambda) = \frac{3+2/\sqrt{\tilde{\alpha}^0} - z\left(2+1/\sqrt{\tilde{\alpha}^0}\right)}{1+z/\sqrt{\tilde{\alpha}^0}}, z = e^{-i\lambda};$$

$$\lambda \in [-\pi,\pi];$$

$$\tilde{h}^0(\lambda,q) = \begin{cases} 0, |\lambda| > \pi \\ \tau^2\left[\tilde{c}\left(1+\tilde{\beta}_1^2-2\tilde{\beta}_1\cos\lambda\right)-16\sin^4(\lambda/2)\right], \end{cases}$$

$$|\lambda| \le \lambda_\Gamma;$$

$$\tilde{\alpha}^0 = \frac{\tilde{h}^0(\lambda,q)}{\tau^2\left[1\left(1+\tilde{\beta}_1^2-2\tilde{\beta}_1\cos\lambda\right)-16\sin^4(\lambda/2)\right]}.$$

Выигрыш в точности оценки прогноза наблюдения составляет

$$\left[3/\left(1+\sqrt{2}\right)-1\right]*100\,\% \approx 25\,\%.$$

На рис. 1. приведены графики весовых функций $\tilde{g}_э(n)$ экстраполяции при $k = \frac{\sigma^2}{\tilde{a}} = 1{,}05$; $0{,}95$; $k = 1$ и $\delta = 0{,}05$.

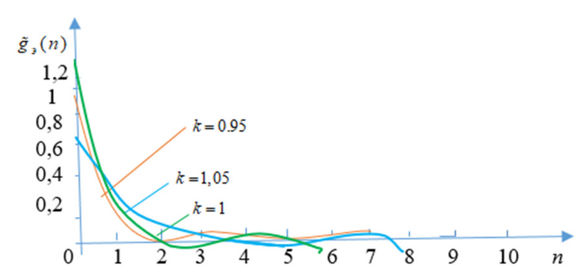

Рис. 1. Графики весовых функций $\tilde{g}_э(n)$ экстраполяции при разных значениях параметра k
Источник: выполнено И.Г. Сидоровым

Figure 1. Graphs of $\tilde{g}_э(n)$ extrapolation weight functions for different values of the k parameter
Source: made by I.G. Sidorov

Пример 3. Покажем возможность практического применения данной методики робастной экстраполяции на примере прогнозирования сезонного спроса в задачах с экономическим содержанием при экстраполяции на $N \le N_0$ шагов, где N_0 — период сезонных колебаний спроса. Пусть полезная составляющая

$$\tilde{s}(n) = \tilde{x}_1(n) + \tilde{z}(n),$$

где $\tilde{x}_1(n)$ — «регулярная» составляющая, относительно медленно изменяющаяся во времени (инерционная); $\tilde{z}(n)$ — «сезонная» составляющая, относительно быстро изменяющаяся во времени. Пусть $\tilde{x}_1(n)$ описывается уравнениями объекта 2-го порядка:

$$\tilde{x}_1(n) = \tilde{x}_1(n-1) + \tilde{x}_2(n-1);$$
$$\tilde{x}_2(n) = \tilde{x}_2(n) + \tilde{u}(n);$$
$$M\tilde{u}(n) = \tilde{0}.$$

$\tilde{z}(n)$ описывается уравнением объекта 1-го порядка, учитывающим сезонность,

$$\tilde{z}(n) = \tilde{z}(n-2) + \tilde{v}(n);$$
$$M\tilde{v}(n) = 0.$$

Здесь $\tilde{u}(n)$, $\tilde{v}(n)$ — нечетко-интервальные возмущения, дисперсии которых могут быть оценены сверху:

$$M\tilde{u}^2(n) \le \tilde{a}_1; M\tilde{v}^2(n) \le \tilde{a}_2;$$

$$\tilde{a}_1 = [a_1 - \delta, a_1 + \delta],$$

$$\tilde{a}_2 = [a_2 - \delta, a_2 + \delta].$$

Требуется оценить значение $\tilde{s}(N+1)$ по результатам наблюдения процесса $\tilde{s}(n)$ на интервале времени $(-\infty, N]$. Для синтеза робастного минимаксного устойчивого фильтра воспользуемся системой соотношений [1, с. 157–158]. По этим соотношениям найдем $\tilde{\lambda}_г$ из уравнения

$$tg^2\left(\frac{\tilde{\lambda}_г}{2}\right)\frac{\tilde{\lambda}_г}{\pi - \tilde{\lambda}_г} = \frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2}.$$

Решив это нечетко-интервальное уравнение, получим

$$\tilde{\Lambda}_1(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2,) = [-\tilde{\lambda}_г, \tilde{\lambda}_г],$$

$$\tilde{\Lambda}_2(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2,) = [-\pi, -\tilde{\lambda}_г) \cup (\tilde{\lambda}_г, \pi],$$

$$\tilde{\alpha}_1 = 2\tilde{\lambda}_г / \tilde{a}_1,$$
$$\tilde{\alpha}_2 = 2(\pi - \tilde{\lambda}_г) / \tilde{a}_2;$$

$$h_{\tilde{u}}(\lambda) = \begin{cases} 2\tilde{\lambda}_г \,/\, \tilde{a}_1 & \text{при } |\lambda| \le \tilde{\lambda}_г \\ \tilde{0} & \text{при } |\lambda| > \tilde{\lambda}_г \end{cases} \quad —$$

спектр процесса $\tilde{u}(n)$;

$$h_{\tilde{v}}(\lambda) = \begin{cases} \tilde{0} & \text{при } |\lambda| < \tilde{\lambda}_г \\ 2(\pi - \lambda) \,/\, \tilde{a}_2 & \text{при } |\lambda| \ge \tilde{\lambda}_г \end{cases} \quad —$$

спектр процесса $\tilde{v}(n)$.

Частотная характеристика минимаксного нечетко-интервального робастного устойчивого фильтра имеет вид при любом заданном малом числе нечеткости $\delta \to 0$ в дисперсиях нечетко-интервальных возмущений

$$G(\lambda) = [e^{i\lambda} - e^{\tilde{\beta}_0} e^{i\lambda} / \tilde{X}^+(\lambda)];$$

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln \tilde{X}^+(\lambda) d\lambda;$$

$$\tilde{X}^+(\lambda) = h_{\tilde{u}}(\lambda) + h_{\tilde{v}}(\lambda);$$

$$(\tilde{X}^+(\lambda))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n e^{-i\lambda n}.$$

Отсюда значения интервально нечеткой весовой функции фильтра

$$\tilde{g}(n) = -\frac{\tilde{b}_{n+1}}{\tilde{b}_0}.$$

Для дисперсии ошибки оценивания справедливо соотношение [1, (3.167), с. 157]

$$\tilde{D} = 2\pi e^{2\tilde{\beta}_0}.$$

Характерно, что наибольшее значение весовая функция $\tilde{g}(n)$ достигает при $n = 1$, т. е. интервальный прогноз

$$\tilde{s}(n+1) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{g}(k)\tilde{y}(n-k)$$

процесса $\tilde{s}(n)$ с наибольшим весом входит не «измерение» $\tilde{y}(n)$, а $\tilde{y}(n-1)$ — «измерение» процесса $\tilde{s}(n)$ за предыдущий «сезон». На рис. 2. показаны графики весовой функции $\tilde{g}_э(n)$ экстраполяции для случая влияния только возмущения $\tilde{u}$ и для случая одновременного влияния обоих возмущений $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$.

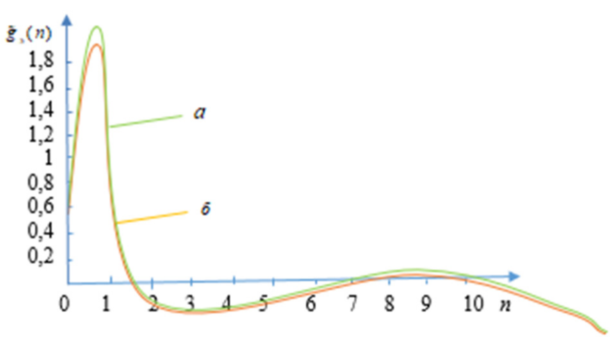

Рис. 2. Графики весовой функции $\tilde{g}_э(n)$ экстраполяции:
а — для случая влияния только возмущения $\tilde{u}$;
б — для случая одновременного влияния обоих возмущений $\tilde{u}$ и $\tilde{V}$
Источник: выполнено И.Г. Сидоровым

Figure 2. Graphs of the $\tilde{g}_э(n)$ extrapolation weight function:
а — for the case of influence only $\tilde{u}$ perturbations;
б — for the case of simultaneous influence of both $\tilde{u}$ and $\tilde{V}$ perturbations
Source: made by I.G. Sidorov

Заключение

В исследовании показано, что проблема интервальной μ-робастной нечеткой линейной минимаксной экстраполяции в условиях интервальной неопределенности параметров достаточно просто разрешима, если использовать конструктивную теорию сравнения интервальных величин, которая сводит указанное сравнение к сравнению одноименных неизвестных границ этих интервалов с использованием μ робастной регуляризации в задаче экстраполирования стационарного случайного процесса с учетом интервальных моментных ограничений, которым удовлетворяют неизвестные параметрические составляющие спектральных плотностей полезной составляющей и помехи. Тем самым поиск оптимума неполностью определенного функционала дисперсии ошибки оценивания можно свести к нахождению одноименного оптимума двух полностью определенных (детерминированных) функционалов. Наш детерминизационный подход примечателен тем, что позволяет вполне строго свести оптимизацию неполностью определенных согласованных функций Лагранжа к хорошо известным и эффективным методам оптимизации уже полностью определенных согласованных функций Лагранжа. Этот подход, в отличие от других (например, вероятностного), всегда обеспечивает существование устойчивого по результату и решению единственного оптимума в задаче интервальной минимаксной экстраполяции за счет регуляризации по малому параметру μ при производной от собственной функции сингулярно-возмущенного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с интегральным оператором типа Вольтерры второго рода, определяемым симметрическим, замкнутым вещественным ядром. Предлагаемый подход можно обобщить и на нестационарную — слабо стационарную динамическую линейную систему с медленно изменяющимися коэффициентами линейной системы «объект — измеритель», в предположении выполнимости аналогов слабой робастной теоремы В.Л. Харитонова для непрерывного случая и дискретного случаев. Рассмотренный минимаксный подход к решению робастно устойчивой линейной экстраполяции процесса по результату и решению по малому параметру регуляризации μ является крайне актуальным в своем применении в областях автоматического управления, радиотехники, радиолокации, в математических моделях обработки слабоструктурированной информации о состоянии параметров движения воздушного судна и их оперативного мониторинга, разработки и эксплуатации систем автоматизированного контроля и диагностирования, в экономике в отсутствие достоверных статистических моделей сигналов и помех в очень многих стохастических измерительных системах, необходимых для использования байесовских алгоритмов типа Винера — Колмогорова, Калмана.

Приложение

Лемма 1 (о возможном выборе ортогональной функции $f(t)$ к собственным функциям $X_{\tilde{u}}(t,q)$ ядра $K(\xi,t)$ в уравнении (12) в задаче ($E_{\tilde{\varepsilon}}$)).

Функция $f(t)$ будет ортогональна к собственным функциям $X_{\tilde{u}}(t,q)$ в том случае, если Фурье-изображение этой функции $\tilde{\xi}_0(\lambda) = \xi_0(\lambda) / X_{\tilde{u}}^-(\lambda,q)$ является аналитической в верхней полуплоскости функцией, такой что в соответствии с теоремой 1.1 (см. [1, с. 21]) выполняется условие оптимальности фильтра-экстраполятора, которое можно записать в случае возможной факторизации функции $X_{\tilde{u}}(\lambda)$ в виде

$$X_{\tilde{u}}^+(\lambda)(G^{ext}(\lambda,q) - Q(\lambda)) = \xi_0(\lambda) / X_{\tilde{u}}^-(\lambda),$$

$X_{\tilde{u}}(\lambda,q) = \tilde{h}(\lambda,q)$ или в случае невозможности факторизации функции $X_{\tilde{u}}(\lambda,q)$ в виде

$$X_{\tilde{u}}(\lambda,q)(G^{ext}(\lambda,q) - Q(\lambda)) = \xi_0(\lambda),$$

где $\xi_0(\lambda)$ — некоторая аналитическая в верхней полуплоскости функция.

Доказательство. Поскольку никаких дополнительных условий аналитичности на функцию $P(\lambda) = 1/\varphi(\lambda)$ в задаче $E_{\tilde{\varepsilon}}$ не накладывается, то условия оптимальности экстраполятора в соответствии с теоремой 1.1 [1, с. 21] заключаются в выполнении соотношения (с учетом ограничения $T(\lambda) = 0$ в задаче $E_{\tilde{\varepsilon}}$):

$$X_{\tilde{u}}(\lambda,q)(G^{ext}(\lambda,q) - Q(\lambda)) = \xi_0(\lambda)$$

или с учетом факторизации функции $X_{\tilde{u}}(\lambda,q) = X_{\tilde{u}}^+(\lambda,q) X_{\tilde{u}}^-(\lambda,q)$ это соотношение можно переписать в виде

$$X_{\tilde{u}}^+(\lambda,q)(G^{ext}(\lambda,q) - Q(\lambda)) = \xi_0(\lambda) / X_{\tilde{u}}^-(\lambda,q),$$

при этом скалярное произведение функции $\tilde{\xi}_0(\lambda) = \xi_0(\lambda) / X_{\tilde{u}}^-(\lambda,q)$ и собственной функции $X_{\tilde{u}}^+(\lambda,q)$ будет равно нулю:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi_0(\lambda) / X_{\tilde{u}}^-(\lambda,q))X_{\tilde{u}}^+(\lambda,q)d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)X_{\tilde{u}}(t,q)dt = 0.$$

Это следует из теоремы Планшереля [15, с. 431], что и требовалось доказать. Лемма 1 доказана.

Список литературы

1. *Куркин О.М., Коробочкин Ю.Б., Шаталов С.А.* Минимаксная обработка информации. М.: Энергоатомиздат, 1990. 212 с.

2. *Голубев Г.К., Пинскер М.С.* Минимаксная экстраполяция последовательностей // Проблемы передачи информации. 1983. Т. 19. № 4. С. 31–42. URL: https://www.mathnet.ru/rus/ppi1200 (дата обращения: 21.03.2024).

3. *Сидоров И.Г., Левин В.И.* Линейная минимаксная стационарного случайного процесса с интервальными параметрами // Системы управления, связи и безопасности. 2021. № 1. С. 215–242. https://doi.org/10.24411/2410-9916-2021-10109

4. *Kurkin O.M.* Guaranteed Estimation Algorithms for Prediction and Interpolation of Random Processes // Automation and Remote Control. 2001. Vol. 62. P. 568–579. https://doi.org/10.1023/A:1010229411351

5. *Sidorov I.G.* Linear minimax filtering of a stationary random process under the condition of the interval fuzziness in the state matrix of the system with a restricted variance // Journal of Communications Technology and Electronics. 2018. Vol. 63. No. 8. P. 902–907.https://doi.org/10.1134/S106422691807015X

6. *Карлин С.* Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1954. 835 с

7. *Абрамов О.В., Розенбаум А.Н.* Прогнозирование состояния технических систем. М.: Наука, 1990. 125 с. ISBN 5-02-006720-2

8. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М.: Наука, 1968.

9. *Гренандер У.* Об одной проблеме предсказания в связи в связи с теорией игр // Бесконечные антагонистические игры / под ред. Н.Н. Воробьева. М.: Физматгиз, 1963. С. 403– 413.

10. *Левин В.И.* Интервальная математика и изучение неопределенных систем // Информационные технологии. 1998. № 6. С. 27–33.

11. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973

12. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.

13. *Васильев А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения. Санкт-Петербург: Лань, 2009. 159 с. ISBN 978-5-8114-0911-2

14. *Стратонович Р.Л.* Теория информации интерполяция. М.: Советское радио, 1975.

15. *Левин В.И.* Интервальная модель общей задачи линейного программирования // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 1998. Т. 3. № 4. С. 401–407. EDN: NUWAVD

16. *Левин В.И.* Интервальный подход к оптимизации в условиях неопределенности // Информационные технологии. 1999. № 1. С. 7–12.

17. *Левин В.И.* Интервальные методы оптимизации систем в условиях неопределенности Пенза: Изд-во Пенз. технол. ин-та, 1999. 215 с.

18. *Левин В.И.* Сравнение интервальных величин и оптимизация неопределенных систем // Информационные технологии. 1998. № 7. С. 22–32.

19. *Левин В.И.* Антагонистические игры с интервальными параметрами // Кибернетика и системный анализ. 1999. № 4. С. 149–159. EDN: VUFLJN

20. *Левин В.И.* Интервальный подход к оптимизации в условиях неопределенности // Системы управления, связи и безопасности. 2015. № 4. С. 123–141. EDN: VBLVEL

21. *Левин В.И.* Дискретная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 97–107. EDN: VUFLOD

22. *Левин В.И.* Нелинейная оптимизация в условиях интервальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. 1999. Т. 35. № 2. 138–147.

23. *Нейман Д., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 708 с.

24. *Moklyachuk M.P., Masyutka A.Yu.* Minimax-robust estimation technique: For stationary stochastic processes. Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publ.; 2012. 289 p.

25. *Moklyachuk M.P., Sidei M.I.* Extrapolation Problem for Stationary Sequences with missing observations // Statistics, optimization and information computing. 2017. Vol. 5. No. 3. P. 212–233. https://doi.org/10.19139/soic.v5i3.284

26. *Taniguchi M.* Robust regression and interpolation for time series // Journal of Time Series Analysis. 1981. Vol. 2. Iss. 1. P. 53–62. https://doi.org/10.1111/J.1467-9892.1981.TB00311.X

27. Kazakos D., Makki K.S. Robust Time Series Estimation // Proceedings of the 5th WSEAS Int. Conf. on System Science and Simulation in Engineering. Tenerife, Canary Islands, Spain, December 16–18. 2006. P. 284–287. URL: http://wseas.us/e-library/conferences/2006tenerife/papers/541-366.pdf (accessed: 21. 03.2024)

28. *Kassam S.A., Poor H.V.* Robust Techniques for Signal Processing: A survey // Proceedings of the IEEE. 1985. Vol. 73. No. 3. P. 433–481.

29. *Franke J.* On the prediction and interpolation of time series in the presence of correlated noise // Journal of Time Series Analysis. 1984. Vol. 5. Iss. 4. P. 227–244. https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1984.tb00389.x

30. *Ohrn K., Ahlen A., Sternad M.* A probabilistic approach to multivariable robust filtering and open-loop control // IEEE Transactions on Automatic Control. 1995. Vol. 40. P. 405–418. https://doi.org/10.1109/9.376052

31. *Mangoubi R.* Robust Estimation and Failure Detection, A Concise Treatment. Springer – Verlag, Berlin, Germany, 1998. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-1586-1

32. *Xie L., Soh Y.C.* Robust Kalman filtering for uncertain systems // Systems and Control Letters. 1994. Vol. 22. Iss. 2. P. 123–129. https://doi.org/10.1016/0167-6911(94)90106-6

33. *Kaucher E.* Interval analysis in the extended interval space IR // Computing Supplement. 1980. Vol. 2. P. 33–49. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-8577-3_3

34. *Пек Дж. Э.Л., Далмидж А.Л.* Игры на компактных множествах // Бесконечные антагонистические игры. М.: Физматгиз, 1963. С. 85–97.

35. *Вощинин А.П., Сотиров Г.Р.* Оптимизация в условиях неопределенности. М.: Изд-во МЭИ, 1989. 224 с.

36. *Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В.* Универсальные решения интервальных задач оптимизации и управления. М.: Наука, 2006. 285 с.

References

1. Kurkin OM, Korobochkin JuB, Shatalov SA. *Minimax information processing*. Moscow: Energoatomizdat Publ.; 1990. (In Russ.)

2. Golubev GK, Pinsker MC. Minimax extrapolation of sequences. *Problems Inform. Transmission.* 1983;19(4): 275–283. Available from: https://www.mathnet.ru/rus/ppi1200 (accessed: 22.03.2024).

3. Sidorov IG, Levin VI. Linear Minimax Interpolation of a Stationary Random Process with Interval Parameters. *Systems of Control, Communication and Security.* 2021;(1):215–241. (In Russ.) https://doi.org/10.24411/2410-9916-2021-10109

4. Kurkin OM. Guaranteed Estimation Algorithms for Prediction and Interpolation of Random Processes. *Automation and Remote Control*. 2001;62:568–579. https://doi.org/10.1023/A:10102294113516

5. Sidorov IG. Linear minimax filtering of a stationary random process under the condition of the interval fuzziness in the state matrix of the system with a restricted variance. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2018;63(8):902–907. https://doi.org/10.1134/S106422691807015X7.

6. Karlin S. *Mathematical methods and theory in games, programming, and econohic.* Moscow: Mir Publ; 1954. (In Russ.)

7. Abramov OV, Rozenbaum AN. *Forecasting the state of technical systems.* Moscow: Nauka Publ.; 1990. (In Russ.) ISBN 5-02-006720-2

8. Krejn MG, Nudel'man AA. *The problem of Markov moments and extreme problems.* Moscow: Nauka Publ.; 1968. (In Russ.)

9. Grenander U. A prediction problem in game theory. *Endless antagonistic games*. Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1963. p. 403–413. (In Russ.)

10. Levin VI. Interval mathematics and the study of indefinite systems. *Information technologies.* 1998;(6): 27–33. (In Russ.)

11. Vasil'eva AB, Butuzov VF. Asymptotic expansions of solutions of singularly perturbed equations. Moscow: Nauka Publ.; 1973. (In Russ.)

12. Kolmogorov AN, Fomin SV. *Elements of the theory of functions and functional analysis*. Moscow: Nauka Publ.; 1968. (In Russ.)

13. Vasil'ev AB, Tihonov NA. *Integral equations.* Saint Petersburg: Lan Publ.; 2009. (In Russ.) ISBN 978-5-8114-0911-2

14. Stratonovich RL. *Theory of information interpolation*. Moscow: Sovetskoe radio Publ.; 1975. (In Russ.)

15. Levin VI. The interval model for the general problem of linear programming: a uniform case. *Tambov University Reports. Series Natural and Technical Sciences.* 1998;3(4):401–407. EDN: NUWAVD

16. Levin VI. Interval approach to optimization in conditions of uncertainty. *Information technologies*. 1999;(1):7–12. (In Russ.)

17. Levin VI. *Interval methods of optimization of systems in conditions of uncertainty.* Penza; 1999. (In Russ.)

18. Levin VI. Comparison of interval values and optimization of uncertain systems. *Information technologies.* 1998;(7):22–32. (In Russ.)

19. Levin VI. Antagonistic games with interval parameters. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1999;35(3): 149–160. (In Russ.) EDN: VUFLJN

20. Levin VI. Interval approach to optimization with uncertainty. *Systems of control, communication and security.* 2015;(4):123–141. (In Russ.) EDN: VBLVEL

21. Levin VI. Discrete optimization under conditions of interval uncertainty. *Automation and telemechanics.* 1992;(7):97–106. (In Russ.) EDN: VUFLOD

22. Levin VI. Nonlinear optimization under conditions of interval uncertainty. *Cybernetics and system analysis.* 1999;35(2):138–147. (In Russ.)

23. Neiman D, Morgenstern O. *Game theory and economic behavior.* Moscow: Nauka Publ.; 1970. (In Russ.)

24. Moklyachuk MP, Masyutka AYu. *Minimax-robust estimation technique: For stationary stochastic processes.* Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publ.; 2012.

25. Moklyachuk MP, Sidei MI. Extrapolation Problem for Stationary Sequences with missing Observations. *Statistics, optimization and information computing.* 2017; 5(3):212–233. https://doi.org/10.19139/soic.v5i3.284

26. Taniguchi M. Robust regression and interpolation for time series. *Journal of Time Series Analysis.* 1981; 2(1):53–62. https://doi.org/10.1111/J.1467-9892.1981.TB00311.X

27. Kazakos D, Makki KS. Robust Time Series Estimation. *Proceedings of the 5th WSEAS Int. Conf. on System Science and Simulation in Engineering*. Tenerife, Canary Islands, Spain, December 16–18. 2006. p. 284–287. Available from: http://wseas.us/e-library/conferences/2006tenerife/papers/541-366.pdf (accessed: 21. 03.2024).

28. Kassam SA, Poor HV. Robust Techniques for Signal Processing: A survey. *Proceedings of the IEEE.* 1985;73(3):433–481. https://doi.org/10.1109/PROC.1985.13167

29. Franke J. On the robust prediction and interpolation of time series in the presence of correlated noise. *Journal of Time Series Analysis.* 1984;5(4):227–244. https://doi.org/10.1111/j.1467-9892.1984.tb00389.x

30. Ohrn K, Ahlen A, Sternad M. A probabilistic approach to multivariable robust filtering and open-loop control. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1995; 40(3):405–418. https://doi.org/10.1109/9.376052

31. Mangoubi R. *Robust Estimation and Failure Detection, A Concise Treatment*. Springer — Verlag, Berlin, Germany; 1998. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-1586-1

32. Xie L, Soh YC. Robust Kalman filtering for uncertain systems. *Systems and Control Letters.* 1994;22(2): 123–129. https://doi.org/10.1016/0167-6911(94)90106-6

33. Kaucher E. Interval analysis in the extended interval space IR. *Computing Supplement*. 1980;2:33–49. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-8577-3_3

34. Pek Dzh EL, Dalmidzh AL. Games on compact sets. *Infinite antagonistic games*. Moscow: Fizmatgiz Publ.; 1963. p. 85–97. (In Russ.)

35. Voshchinin AP, Sotirov GR. Optimization under uncertainty. Moscow: MEI Publ.; 1989. (In Russ.)

36. Ashchepkov LT, Davydov DV. *Universal solutions to interval optimization and management problems.* Moscow: Nauka Publ.; 2006. (In Russ.)

Сведения об авторе:

Сидоров Игорь Геннадиевич, кандидат технических наук, доцент департамента программного обеспечения и математических методов, Московский политехнический университет, Москва, Россия; eLIBRARY SPIN-код: 1676-7269, ORCID: 0000-0003-4691-4855; e-mail: igor8i2016@ya.ru

About the author

Igor G. Sidorov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Automation and Control Processes, Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia; eLIBRARY SPIN code: 1676-7269, ORCID: 0000-0003-4691-4855; e-mail: igor8i2016@ya.ru