

УДК 621.391

doi: 10.53816/23061456_2025_11-12_139

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СВЕТОВЫХ ПУТЕЙ В ОПТИЧЕСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЯХ

MODEL OF OPTIMAL DISTRIBUTION OF LIGHT PATHS IN OPTICAL TRANSPORT NETWORKS

Канд. техн. наук А.П. Бойко

Ph.D. A.P. Boiko

Военная академия связи им. С.М. Буденного

Современные оптические транспортные сети строятся на основе технологий спектрального уплотнения с гибкой сеткой частот и программным распределением спектрального ресурса. Задачей при проектировании таких сетей является маршрутизация и назначение спектра для составных оптических каналов, называемых световыми путями. Предлагается расширенная модель светового пути, в которой он рассматривается не только как маршрут прохождения по волоконно-оптической сети от источника к получателю, но и как связанный с ним непрерывный спектральный диапазон, выделяемый вдоль всего маршрута. Новизной является постановка и решение оптимизационной задачи распределения множества световых путей в сети с учетом требований к спектральной непрерывности, смежности частотных интервалов, и непересекаемости спектров.

Ключевые слова: оптическая транспортная сеть, световые пути, качество передачи, распределение световых путей.

Modern optical transport networks are built using wavelength-division multiplexing technology with a flexible frequency grid and software-controlled spectral resource allocation. The challenge in designing such networks is routing and interference assignment for composite optical channels called lightpaths. An extended lightpath model is proposed, in which the lightpath operates not only as a route through a fiber-optic line from the network source to the receiver, but also as an associated continuous spectral range distributed along the entire route. The novelty lies in the formulation and solution of an optimization problem for lightpath distribution in the network, taking into account requirements for spectral continuity, frequency interval connectivity, and spectral non-overlap.

Keywords: optical transport network, lightpaths, transmission quality, lightpath allocation.

Введение

Современные оптические транспортные сети (ОТС) строятся на базе волоконно-оптических систем передачи со спектральным разделением каналов (ВОСП СР). Технологии спектрального уплотнения каналов, лежащие

в основе ВОСП СР, позволяют использовать спектральный ресурс оптического волокна для формирования множества каналов, и тем самым условно разделить его на несколько виртуальных оптических волокон, в каждом из которых можно передавать оптический сигнал. До недавнего времени оптические сети связи формировались

по принципу «точка – точка», представляя собой объединение простейших топологий. Это было обусловлено ограничениями в технологиях оптической коммутации, отсутствием эффективных средств маршрутизации света и высокой стоимостью компонентов. Такие сети фактически были набором несвязанных или слабо связанных фрагментов, иногда объединенных на электронном уровне через опто-электронно-оптические (ОЭО)-преобразования, но не на оптическом. Появление таких устройств, как оптические кросс-коннекторы (optical cross-connect — OXC), реконфигурируемые оптические мультиплексоры ввода/вывода (reconfigurable optical add/drop multiplexer — ROADM) и селективные переключатели длин волн (wavelength selective switch — WSS), позволило не только изменять маршруты оптических сигналов без их преобразования в электрическую форму, но и строить полноценные сетевые структуры — ячеистые, кольцевые, произвольные графы.

В оптической связи особый интерес представляют полностью оптические соединения между двумя корреспондирующими узлами, позволяющие передавать оптические сигналы без ОЭО-преобразования в транзитных узлах. Образуемые отдельными спектральными каналами между двумя соседними узлами, данные оптические соединения являются собой составные оптические каналы с некоторыми дополнительными ограничениями, и носят название световых путей (lightpath) [1–3]. Отсутствие ОЭО-преобразования в процессе коммутации, маршрутизации и ретрансляции оптических сигналов способствует тому, что оптические сети на основе концепции световых путей имеют следующие особенности [4–6]:

- световые пути имеют низкую сквозную задержку передачи данных, что является одним из важнейших показателей при передаче мультимедийного трафика;

- оптические сигналы в волокнах обычно менее подвержены электромагнитным помехам, что повышает надежность передачи данных по световым путям;

- информацию, передаваемую по оптическим волокнам, сложнее перехватить в оптическом виде без специализированного оборудования, что обеспечивает дополнительный уровень безопасности;

- возможность программного управления и настройки световых путей позволяет оптимизировать сеть под конкретные требования пользователей и изменения в трафике;

- уменьшение количества ОЭО-преобразований способствует сохранению стабильности оптического и цифрового синхронизма;

- оптические сети требуют меньше энергии для передачи сигналов на дальние расстояния по сравнению с традиционными электрическими сетями, что способствует снижению энергопотребления;

- несмотря на тенденцию снижения, стоимость ОЭО-трансиверов по прежнему остается высокой и экспоненциально растет с увеличением скорости обрабатываемых в них сигналов;

- некачественные или несовместимые ОЭО-трансиверы могут вызывать искажение сигнала и привести к ошибкам в передаче данных и потере синхронизации между узлами сети, уменьшить дальность передачи или ухудшить производительность сети.

Создание световых путей в оптической транспортной сети возможно при выполнении определенных архитектурных требований к ее узлам и соединениям в них. Ключевым из таких требований является прозрачность оптической сети, которая означает способность передавать оптические сигналы от источника к получателю сквозь промежуточные узлы и сегменты сети без необходимости их преобразования в электрическую форму или в другие оптические форматы. Достижение прозрачности обеспечивается использованием безцветных, ненаправленных и безконфликтных (colorless, directionless, contentionless — CDC) ROADM, которые позволяют динамически маршрутизировать оптические каналы произвольного спектра без ОЭО-преобразований. Такая архитектура делает возможным реализацию гибких и масштабируемых схем распределения световых путей, полностью сохраняя спектральную непрерывность и согласованность сигнала вдоль всего маршрута [1, 2].

В ОТС с фиксированной сеткой частот, световой путь представляет собой последовательность узлов связи и соединяющих их волоконно-оптических линий связи (ВОЛС), определяющих его маршрут. Каждому световому пути назначается полоса пропускания и центральная

частота в соответствии с применяемой на сети стандартной сеткой частот, например, с шагом 50 ГГц или 100 ГГц. Задача поиска маршрутов для световых путей и выбора центральных частот, называется задачей маршрутизации и назначения длин волн (routing and wavelength assignment — RWA) [7]. В сетях на основе CDC-ROADM и гибкой сеткой частот у световых путей есть дополнительная «степень свободы», заключающаяся в возможности изменения полосы пропускания. Задача поиска маршрутов для световых путей, выбора полос пропускания и центральных частот в таких сетях называется задачей маршрутизации и назначения спектра (routing and spectrum assignment — RSA) и также, как и RWA относится к классу NP — трудных [8]. Задача RSA может решаться при проектировании ОТС и в процессе ее эксплуатации.

Существует несколько подходов к решению RSA [1, 2, 8–10]. Среди них последовательные методы, когда задачи маршрутизации и назначения спектра выполняются поочередно, являются одними из самых простых и широко используемых. Сначала выбирается один из найденных (например, с помощью алгоритма Дейкстры) маршрутов, затем на нем подбирается подходящий свободный непрерывный диапазон частот достаточной ширины с использованием одной из стратегий:

- первый подходящий по ширине диапазон частот;
- диапазон частот, который уже используется чаще других в сети;
- диапазон частот, который используется реже всего в сети;
- среди всех допустимых диапазонов частот выбирается случайный.

Очевидный и ключевой недостаток последовательного решения задачи RSA — это локальность принятия решений, которая приводит к неоптимальности в глобальном смысле.

На сегодняшний день важным направлением в развитии научно-методического аппарата для современных ОТС на основе CDC-ROADM является формализация и решение задачи выбора подмножества световых путей между заданными корреспондирующими узлами, удовлетворяющего системе ограничений и обеспечивающего оптимальное значение заданного функционала [11]. Для корректной постановки и решения

такой оптимизационной задачи требуется разработка математической модели светового пути с учетом следующих требований: смежность элементарных частотных интервалов в пределах каждого светового пути, непрерывность спектра вдоль всего маршрута, размещение в рамках ограниченного спектрального ресурса сети. Кроме того, необходимо также формализовать ограничения на одновременную реализацию подмножества световых путей в ОТС при условии непересекаемость их спектров, а также задать целевую функцию и свести задачу к одной из известных форм математического программирования. Данная задача называется задачей распределения световых путей, а ее решение, доставляющее оптимальное значение заданному функционалу, будет называться оптимальным распределением световых путей.

Модель оптической транспортной сети с гибкой сеткой частот

С появлением перестраиваемых транспондеров с переменной полосой пропускания (bandwidth-variable transponder — BVT), оптические сети с фиксированной сеткой частот стали неэффективны [1, 2]. Им на смену пришли сети с гибкой сеткой частот, в которых дискретное множество частот, доступных для назначения в качестве центральных частот оптических каналов f^n , определяется выражением [12]:

$$f^n = 193,1 + n \cdot 0,00625 \text{ ТГц}, n \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, возможные центральные частоты: 193,1 ТГц ($n = 0$), 193,10625 ТГц ($n = 1$), 193,1125 ТГц ($n = 2$) и т.д.

Так как гибкая сетка частот представляет собой возможные значения центральных частот оптических каналов через каждые 6,25 ГГц, минимальная возможная ширина оптического канала (не считая равную нулю), может составлять 12,5 ГГц, то есть базовый шаг 6,25 ГГц влево и базовый шаг 6,25 ГГц вправо от центральной частоты [12]. Вообще, в ОТС с гибкой сеткой частот ширина спектральных каналов выбирается кратной четному количеству базовых шагов по 6,25 ГГц. Для этого вводится понятие элементарного частотного интервала (ЭЧИ) $\Delta f^{\text{эч}}$, равного:

$$\Delta f^{\text{ЭЧИ}} = 2 \cdot 6,25 \text{ ГГц} = 12,5 \text{ ГГц}.$$

Таким образом ширина оптического канала всегда охватывает целое количество ЭЧИ, а значит, четное количество базовых шагов по 6,25 ГГц:

$$\Delta f^k = m \cdot \Delta f^{\text{ЭЧИ}} \text{ ГГц}, \quad m \in \mathbb{Z}^+.$$

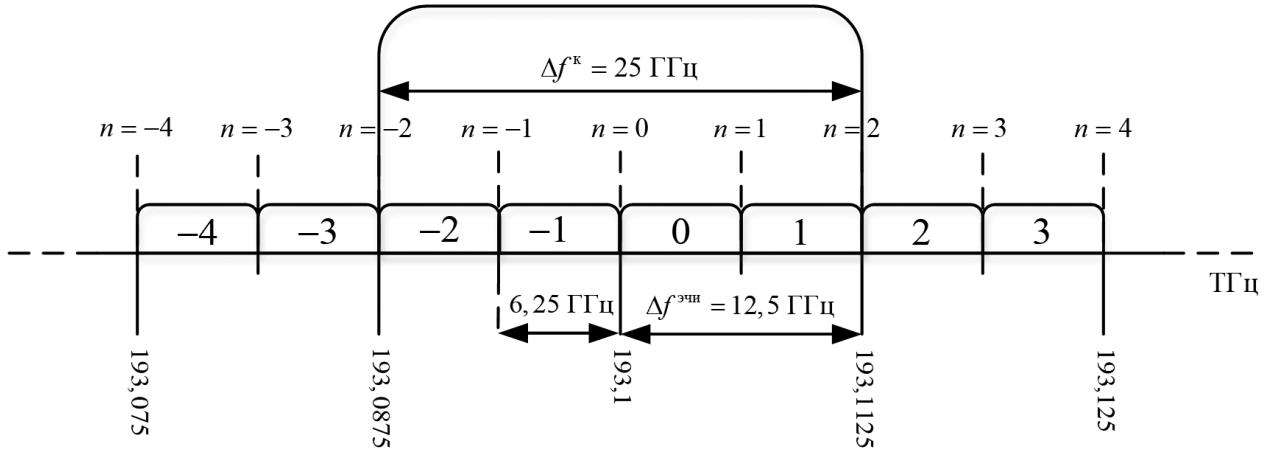
При этом нельзя сформировать оптический канал шириной равной нечетному количеству 6,25 ГГц, так как это неполный ЭЧИ. Типичные значения ширины оптического канала составляют: 12,5 ГГц, 25 ГГц, 50 ГГц, 75 ГГц, 100 ГГц, до ~ 400 ГГц, в зависимости от: модуляции, линейного кодирования, требуемой скорости передачи в оптическом канале, уровня гибкости сети. С более подробным объяснением почему именно 6,25 ГГц и 12,5 ГГц были выбраны как стандартизованные значения, и как это соотносится с модуляциями и скоростями передачи, можно ознакомиться в [12].

Используя вышеуказанные выражения, можно представить всю гибкую сетку частот в виде объединения полузамкнутых интервалов, образуемых базовыми шагами по 6,25 ГГц:

$$[193,1 + n \cdot 0,00625, 193,1 + (n+1) \cdot 0,00625], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Будем обозначать номер полузамкнутого интервала индексом, на основе которого вычисляется его нижняя граница. Так, если полузамкнутый интервал образован индексом $n = 4$:

$$n = 0, \quad m = 2$$



$$[193,1 + 4 \cdot 0,00625, 193,1 + (4+1) \cdot 0,00625] = \\ = [193,125, 193,1315],$$

то ему соответствует номер 4. На рис. 1 представлено пояснение к вводимым понятиям, а также к принципу целочисленной нумерации полузамкнутых интервалов, на которые разделена сетка частот в оптическом волокне.

Представление базовых шагов гибкой сетки частот в виде полузамкнутых интервалов, пронумерованных целыми числами, позволяет удобно представить диапазоны доступных частот в волоконно-оптических линиях связи в виде подмножества целых чисел $\{c_n, c_{n+1}, \dots, c_{N_1}\} \subset \mathbb{Z}, N_1 < \infty$. Действительно, если для передачи оптических сигналов в конкретной ВОЛС ОТС доступен диапазон частот $f^u \dots f^b$, где $f^u = 193,1 + 0 \cdot 0,00625 = 193,1 \text{ ТГц}$ и

$f^b = 193,1 + 21 \cdot 0,00625 = 193,23125 \text{ ТГц}$ — нижняя и верхняя частоты соответственно, то используя введенные обозначения, можно записать данный диапазон в виде подмножества целых чисел: $\{0, 1, \dots, 20\}$. Кроме того, полосу пропускания оптических каналов также можно представить в виде подмножества целых чисел. Действительно, если ширина оптического канала составляет $\Delta f^k = m \cdot \Delta f^{\text{ЭЧИ}} \text{ ГГц}$, а его центральная частота равна f^u , то нижние и верхние границы его полосы пропускания соответственно определяются с помощью выражений [13]:

$$f^u = f^u - \frac{\Delta f^k}{2}; \quad f^b = f^u + \frac{\Delta f^k}{2}.$$

Рис. 1. Пояснение к понятиям, используемым при описании ОТС с гибкой сеткой частот

После несложных преобразований получаем:

$$f^u = 193,1 + n \cdot 0,00625 - \frac{m \cdot 0,0125}{2} = \\ = 193,1 + (n - m) \cdot 0,00625;$$

$$f^b = 193,1 + n \cdot 0,00625 + \frac{m \cdot 0,0125}{2} = \\ = 193,1 + (n + m) \cdot 0,00625.$$

Используя переменные $(n - m)$ и $(n + m)$ можно определить полосу пропускания оптического канала в виде полузамкнутого целочисленного интервала: $[n - m, n - m + 1, \dots, n + m]$ или подмножества целых чисел: $\{n - m, n - m + 1, \dots, n + m - 1\}$. Так, например, если центральная частота оптического канала определяется переменной $n = 10$ и имеет ширину $m = 4$, то его полосу пропускания можно описать в виде следующего подмножества целых чисел: $\{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. На рис. 2 изображены пояснения к целочисленному представлению диапазона частот, доступного для передачи оптических сигналов в ВОЛС, и полосы пропускания оптического канала.

Диапазоны частот, доступные для формирования оптических каналов в каждой ВОЛС, в совокупности представляют собой спектральный ресурс ОТС, являющийся ее ключевой характеристикой. Именно спектральный ресурс ОТС порождает основные ограничения при решении задачи распределения оптических каналов и световых путей.

Представим ОТС в виде неориентированного графа $\mathbf{G}(\mathbf{V}, \mathbf{E})$, где: $\mathbf{V} = \{v_i\}$, $i \in \overline{1, N_2}$ — мно-

жество вершин, каждая из которых представляет собой узел ОТС; $\mathbf{E} = \{e_{ij}\} \subset V \times V$ — множество ребер, каждое из которых представляет собой ВОЛС между узлами ОТС. Пусть в каждой ВОЛС ОТС для передачи оптических сигналов доступен некоторый диапазон частот. Тогда, используя введенные ранее понятия и обозначения, поставим в соответствие каждому ребру $e_{ij} \in \mathbf{E}$ некоторое множество $C_{ij} = \{c_n, c_{n+1}, \dots, c_{N_1}\} \subset \mathbf{Z}$, описывающее в виде подмножества из целых чисел пропускную способность ВОЛС между узлами i и j . Тогда множество $C = \bigcup C_{ij} | e_{ij} \in \mathbf{E}$ — представляет собой спектральный ресурс ОТС в виде совокупности доступных во всех ВОЛС диапазонов частот, представленных целыми числами.

Зафиксируем две вершины графа s и t , образующие соответственно исток и сток. Тогда граф $\mathbf{G} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ представляет собой двухполюсную сеть с полюсами s и t . Обозначим через $\mu_{s,t}$ маршрут из s в t , представляющий собой упорядоченную последовательность ребер $(e_{sv_1}, e_{v_1v_2}, \dots, e_{v_nv_t})$, начинающуюся в вершине s , заканчивающуюся в вершине t и не проходящую через одну и ту же вершину дважды, причем каждые два соседних ребра имеют общую вершину. Для того, чтобы различать маршруты из s в t введем дополнительный индекс k , обозначающий порядковый номер. Будем описывать маршрут перечнем ребер его образующих, то есть $\mu_{s,t}^k = (e_{sv_1}, e_{v_1v_2}, \dots, e_{v_nv_t})$. Множество всех маршрутов из s в t будем обозначать как $M_{s,t} = \{\mu_{s,t}^k\}, k \in \overline{1, N_3}$.

Для эффективного решения задачи оптимального распределения световых путей в ОТС требуется разработка строгой математической

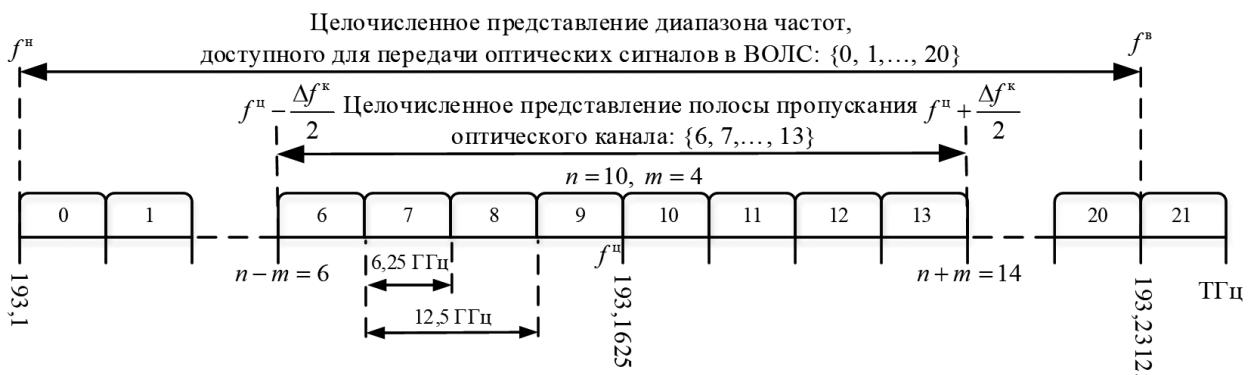


Рис. 2. Доступный диапазон частот и полоса пропускания оптического канала

модели, адекватно описывающей структурные и спектральные свойства световых путей, а также учитывающей физические ограничения среды передачи. Такая модель должна позволять формализовать ключевые требования к световому пути [14]: непрерывность спектра на всем маршруте, смежность ЭЧИ, характеризующих полосу пропускания светового пути, непересекаемость с другими световыми путями (в одной ВОЛС нельзя использовать одинаковые ЭЧИ двумя световыми путями). Кроме того, модель должна быть пригодной для использования в задачах маршрутизации, спектрального назначения, анализа фрагментации спектра и планирования сетевой архитектуры.

В данной работе под световым путем понимается не только маршрут между парой узлов ОТС, но и выделенный для передачи сигнала непрерывный спектральный ресурс (группа смежных ЭЧИ), занимаемый на всем протяжении маршрута. Такая трактовка позволяет рассматривать световой путь как единый ресурс, аналогичный выделенной полосе движения на всем маршруте, проходящем по множеству участков дорожной сети. Исходя из этого, выдвигается гипотеза о том, что комплексное моделирование светового пути — с одновременным учетом маршрута и спектрального ресурса — позволяет формулировать и решать задачу их оптимального распределения как единую, что повышает вероятность получения глобально оптимального решения, в отличие от традиционного поэтапного подхода (сначала выбор маршрута, затем назначение спектра). Вместе с тем, не трудно спрогнозировать, что такой подход сопровождается рядом трудностей. Он существенно увеличивает вычислительную сложность задачи и требует разработки эффективных алгоритмов оптимизации. Для сравнения существующих и предлагаемого подхода, разработаем математическую модель светового пути и решим оптимизационную задачу по их распределению.

Модель светового пути

Расширим понятие светового пути и будем под ним понимать совокупность смежных полузамкнутых частотных интервалов в последовательности ВОЛС, обеспечивающих распространение оптического сигнала в заданной полосе

частот между двумя узлами без ОЭО-преобразования.

Обозначим через $p_{s,t}^{k,q}$ световой путь из s в t на основе k -го маршрута $\mu_{s,t}^k$ (q — порядковый номер светового пути), представляющий собой одинаковое упорядоченное множество элементов $\{c_g, c_{g+1}, \dots, c_l\}$ в каждом из ребер маршрута $\mu_{s,t}^k = (e_{v_1}, e_{v_2}, \dots, e_{v_l})$, такое, что $c_{g+1} = c_g + 1$. Будем описывать q -й путь из s в t на основе k -го маршрута подмножеством образующих его элементов, то есть $p_{s,t}^{k,q} = \{c_g, c_{g+1}, \dots, c_l\}$. Множество всех световых путей из s в t на основе маршрута $\mu_{s,t}^k$ будем обозначать как $P_{s,t}^k = \{p_{s,t}^{k,q}\}, q \in 1, N_4$, а множество всех световых путей из s в t во всей ОТС будем обозначать как $P_{s,t} = \{P_{s,t}^k\}, k \in 1, N_5$.

Целочисленную функцию d_p , определенную на множестве $P_{s,t}$ так, что $d_p : P_{s,t} \rightarrow \mathbb{Z}^+$, будем называть шириной светового пути, если:

$$d_p(p_{s,t}^{k,q}) = |p_{s,t}^{k,q}|,$$

где $|p_{s,t}^{k,q}|$ — мощность множества $p_{s,t}^{k,q} = \{c_g, c_{g+1}, \dots, c_l\}$. По сути, при таком описании ширина светового пути представляет собой количество полузамкнутых частотных интервалов, характеризующих его полосу пропускания.

Зададим функцию $f_\mu : M_{s,t} \rightarrow C$, определенную на множестве $M_{s,t}$ так, что:

$$f_\mu(\mu_{s,t}^k) = \bigcap C_{ij} \mid e_{ij} \in \mu_{s,t}^k,$$

где $\bigcap C_{ij} \mid e_{ij} \in \mu_{s,t}^k$ — пересечение подмножеств весов всех ребер e_{ij} принадлежащих маршруту $\mu_{s,t}^k$. Функцию f_μ будем называть пропускной способностью маршрута.

Целочисленную функцию d_μ , определенную на множестве $M_{s,t}$ так, что $d_\mu : M_{s,t} \rightarrow \mathbb{Z}$, будем называть шириной маршрута, если:

$$d_\mu(\mu_{s,t}^k) = |f_\mu(\mu_{s,t}^k)|.$$

Примем без доказательства ряд утверждений.

Утверждение 1. На основе маршрута $\mu_{s,t}^k$ с шириной $d_\mu(\mu_{s,t}^k)$ можно сформировать множество световых путей $P_{s,t}^k = \{p_{s,t}^{k,q}\}, q \in 1, N_6$ с шириной $1 \leq d_p(p_{s,t}^{k,q}) \leq d_\mu(\mu_{s,t}^k)$, где:

$$N_6 = \frac{d_\mu(\mu_{s,t}^k) \cdot (d_\mu(\mu_{s,t}^k) + 1)}{2}.$$

Рассмотрим конкретные примеры, поясняющие суть введенных понятий и обозначений. На рис. 3 изображен граф с множеством вершин $V = \{v_i\}, i \in \overline{1,6}$ и множеством ребер $E = \{e_{12}, e_{23}, e_{14}, e_{25}, e_{36}, e_{45}, e_{56}\}$. Вершины $v_1 = s$ и $v_6 = t$ представляют собой исток и сток соответственно, и образуют двухполюсную сеть. Множество маршрутов из s в t состоит из четырех элементов: $M_{1,6} = \{\mu_{1,6}^k\}, k \in \overline{1,4}$, где $\mu_{1,6}^1 = (e_{12}, e_{23}, e_{36})$, $\mu_{1,6}^2 = (e_{12}, e_{25}, e_{56})$, $\mu_{1,6}^3 = (e_{14}, e_{45}, e_{52}, e_{23}, e_{36})$ и $\mu_{1,6}^4 = (e_{14}, e_{45}, e_{56})$.

Веса ребер маршрута $\mu_{1,6}^1$ представляют собой подмножества $C_{12} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $C_{23} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ и $C_{36} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Маршрут $\mu_{1,6}^1$ имеет пропускную способность $f_{\mu}(\mu_{1,6}^1) = \{3, 4, 5, 6\}$ и ширину $d_{\mu}(\mu_{1,6}^1) = 4$. Всего, на основе маршрута $\mu_{1,6}^1$ можно сформировать множество $P_{1,6}^1 = \{p_{1,6}^{1,q}\}, q \in \overline{1, N_6}$ из $N_6 = 10$ световых путей с шириной $1 \leq d_p \leq 4$.

Утверждение 2. На основе маршрута $\mu_{s,t}^k$ с шириной $d_{\mu}(\mu_{s,t}^k)$ можно сформировать множество путей $\{p_{s,t}^{k,q}\} | d_p(p_{s,t}^{k,q}) = \text{const}, q \in \overline{1, N_7}$ с одинаковой шириной $d_p(p_{s,t}^{k,q}) = \text{const} \leq d_{\mu}(\mu_{s,t}^k)$, такое, что $N_7 = d_{\mu}(\mu_{s,t}^k) - d_p(p_{s,t}^{k,q}) + 1$.

На рис. 4 приведен пример формирования множества путей $\{p_{s,t}^{k,q}\} | d_p(p_{s,t}^{k,q}) = 3, q \in \overline{1, N_7}$ ши-

риной $d_p(p_{s,t}^{k,q}) = 3$ на основе маршрута с шириной $d_{\mu}(\mu_{s,t}^1) = 8$.

Формализовав понятие обобщенного светового пути, оговорив импользуемые термины и понятия, а также введя ряд утверждений — решим задачу оптимального распределения световых путей в ОТС.

Модель оптимального распределения световых путей в ОТС

Пусть $P_{s,t}$ — множество всех световых путей из s в t в ОТС, описываемой графом $G(V, E)$.

Для каждого светового пути $p_{s,t}^{k,q} \in P_{s,t}$, $q \in \overline{1, N_8}$ (N_8 — общее количество световых путей из s в t) введем переменную $x_q \in \{0, 1\}$, такую, что $x_q = 1$ если световой путь реализуется в ОТС для передачи оптического сигнала и $x_q = 0$ в противном случае.

Очевидно, что реализовать в ОТС все найденные световые пути невозможно. Два световых пути ОТС считаются одновременно реализуемыми, если:

— маршруты, на основе которых они формируются не имеют общих ребер;

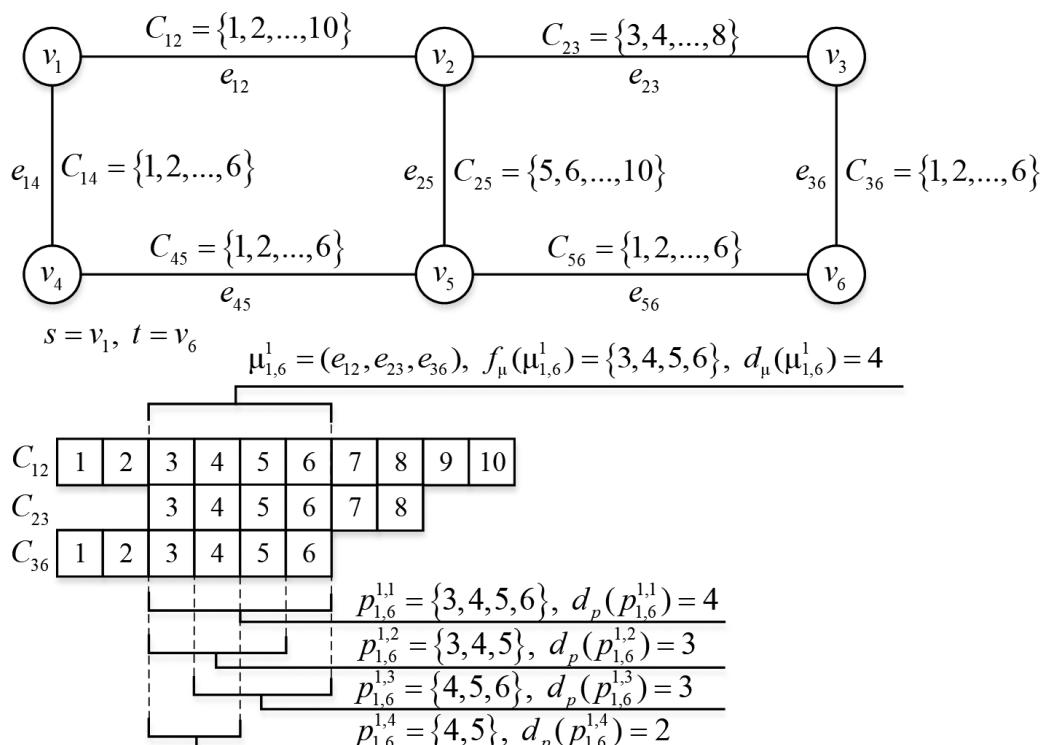


Рис. 3. Граф двухполюсной сети

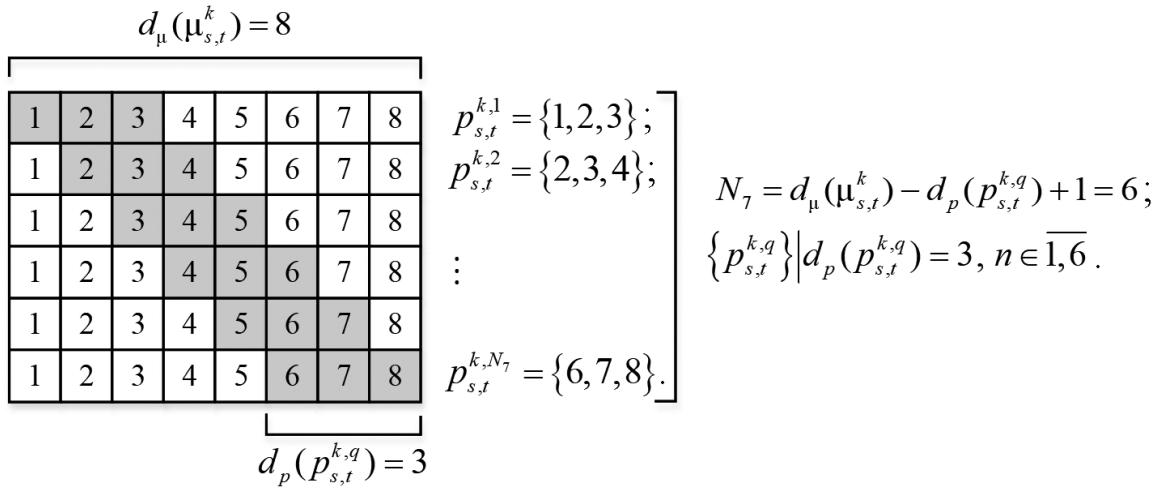


Рис. 4. Определение количества световых путей фиксированной ширины

— маршруты имеют общие ребра, но световые пути не имеют общих элементов, характеризующих используемые ими интервалы частот.

Таким образом, каждый полузамкнутый интервал частот в каждой ВОЛС ОТС, может быть использован только для формирования одного светового пути. Формализуем данное ограничение. Система ограничений на одновременную реализацию световых путей, образованных маршрутом $\mu_{s,t}^k$ имеет вид:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{1}_{d_\mu(\mu_{s,t}^k)},$$

где $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{N_8})^T$ — вектор, элементами которого являются двоичные переменные x_q ;

$\mathbf{1}_{d_\mu(\mu_{s,t}^k)} = \begin{pmatrix} 1_1 & 1_2 & \dots & 1_{d_\mu(\mu_{s,t}^k)} \end{pmatrix}^T$ — вектор из единиц;

\mathbf{A} — матрица размерности $N_8 \times d_\mu(\mu_{s,t}^k)$, строки которой соответствуют q -м световым путям, а столбцы — соответствуют элементам пропускной способности маршрута $c_g \in f_\mu(\mu_{s,t}^k)$. Элементы a_{qg} матрицы \mathbf{A} принимают значения 1 в том случае, если для реализации q -го светового пути используется g -й элемент (интервал частот). Все остальные элементы матрицы \mathbf{A} равны 0.

Пример. Пусть пропускная способность маршрута $\mu_{s,t}^k$ определяется множеством $f_\mu(\mu_{s,t}^k) = \{1, 2, 3, 4\}$. На его основе возможна реализация $N_6 = 10$ световых путей: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$.

Тогда вектор \mathbf{x} состоит из 10 элементов, а матрица \mathbf{A} имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

После перемножения матрицы \mathbf{A}^T и вектора \mathbf{x} , система ограничений на одновременную реализацию световых путей в пределах одного маршрута имеет вид:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{1}_{d_\mu(\mu_{s,t}^k)} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_5 + x_8 + x_{10} \leq 1; \\ x_2 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + x_{10} \leq 1; \\ x_3 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \leq 1; \\ x_4 + x_7 + x_9 + x_{10} \leq 1. \end{cases}$$

Общую систему ограничений на одновременную реализацию световых путей и обеспечивающую их непересекаемость, можно формировать путем попарного перебора всех маршрутов или на основе ребер. Так как для графов сетей

реальных размерностей количество маршрутов на порядки превосходит количество ребер, формировать ограничения удобнее на основе перебора всех элементов пропускной способности каждого ребра. Далее на примере будет продемонстрирована суть данного подхода.

Для решения задачи оптимального распределения световых путей в ОТС, помимо системы ограничений, на основе которой формируется бюджетное множество, также необходимо сформировать целевую функцию. Особый интерес представляет задача поиска такого подмножества одновременно реализуемых световых путей, сумма величин пропускных способностей которых является максимальной для данного графа сети. Целевая функция данной задачи имеет вид:

$$f_0(x) = \sum_{q=1}^{N_8} x_q \cdot d_p(p_{s,t}^{k,q}) \rightarrow \max.$$

При этом на ширину световых путей могут накладывать дополнительные ограничения, то есть $P_{s,t} = \{p_{s,t}^{k,q} \mid d_p(p_{s,t}^{k,q}) \geq d_p^*\}$, где d_p^* — некоторое значение ширины светового пути, меньше которого не рассматриваются в задаче. Запишем окончательный вид задачи в матричной форме:

$$f_0(x) = \mathbf{x}^T \cdot \mathbf{d}_p \rightarrow \max,$$

при условии, что:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{1}, \quad x_q \in \{0,1\},$$

где $\mathbf{d}_p = (d_p(p_{s,t}^{k,1}) \quad d_p(p_{s,t}^{k,2}) \dots d_p(p_{s,t}^{k,N_8}))^T$ — вектор, элементы которого представлены значениями ширины соответствующих световых путей.

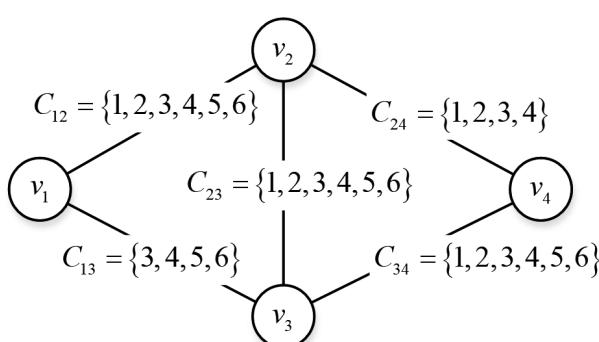


Рис. 5. Граф ОТС из четырех узлов

Пример моделирования и оценка эффективности

Рассмотрим конкретный пример нахождения оптимального распределения световых путей и сравним результаты, с полученными на основе последовательных методов.

Пусть ОТС описывается графом $G(V, E)$ изображенном на рис. 5. Между вершинами v_1 и v_4 необходимо найти такое одновременно реализуемое подмножество световых путей $P_{1,4}^* \subset P_{1,4}$, что сумма их ширины является максимальной. При этом ширина световых путей должна быть не меньше 2 и не более 4:

$$2 \leq d_p(p_{1,6}^{k,q}) \leq 4, \quad p_{1,6}^{k,q} \in P_{1,6}.$$

Между вершинами v_1 и v_4 существует 4 маршрута: $\mu_{1,4}^1 = (e_{12}, e_{24})$, $\mu_{1,4}^2 = (e_{12}, e_{23}, e_{34})$, $\mu_{1,4}^3 = (e_{13}, e_{32}, e_{24})$ и $\mu_{1,4}^4 = (e_{13}, e_{34})$ с пропускными способностями $f_{\mu}(\mu_{1,4}^1) = \{1, 2, 3, 4\}$, $f_{\mu}(\mu_{1,4}^2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f_{\mu}(\mu_{1,4}^3) = \{3, 4\}$ и $f_{\mu}(\mu_{1,4}^4) = \{3, 4, 5, 6\}$ соответственно. На основе каждого маршрута возможно сформировать подмножество световых путей, представленное в таблице.

Всего существует 25 световых путей и для удобства их индексацию можно заменить на сквозную, в соответствии с индексацией x_q . Тогда индекс q будет принимать значения от 1 до 25.

$P_{1,4} = \{p_{1,4}^{k,q}\}$, $q \in \overline{1, 25}$. Вектор \mathbf{x} будет иметь размерность \mathbb{R}^{25} , а элементы вектора \mathbf{d}_p , после несложных вычислений, будут иметь значения:

$$\mathbf{d}_p = (2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 3 \ 3 \ 4 \ 4 \ 4 \ 2 \ 2 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3 \ 4)^T.$$

Система ограничений, будет формироваться на основе каждого элемента из подмножества целых чисел, характеризующих пропускную способность каждого ребра. Так, полузамкнутый интервал, пронумерованный цифрой 1 в ребре e_{12} , может быть использован для формирования световых путей $p_{1,4}^{1,1} = \{1, 2\}$, $p_{1,4}^{1,4} = \{1, 2, 3\}$, $p_{1,4}^{1,6} = \{1, 2, 3, 4\}$, $p_{1,4}^{2,1} = \{1, 2\}$, $p_{1,4}^{2,6} = \{1, 2, 3\}$ и $p_{1,4}^{2,10} = \{1, 2, 3, 4\}$. Тогда ограничение, на одновременную реализацию множества световых путей, порождаемое данным полузамкнутым интервалом, будет иметь вид:

$$x_1 + x_4 + x_6 + x_7 + x_{12} + x_{16} \leq 1.$$

Световые пути, образованные на основе маршрутов

Пропускная способность маршрута	Световые пути и соответствующие им переменные x_q со сквозной нумерацией			
$f_{\mu}(\mu_{1,4}^1) = \{1, 2, 3, 4\}$	$p_{1,4}^{1,1} = \{1, 2\}$	x_1	$p_{1,4}^{1,4} = \{1, 2, 3\}$	x_4
	$p_{1,4}^{1,2} = \{2, 3\}$	x_2	$p_{1,4}^{1,5} = \{2, 3, 4\}$	x_5
	$p_{1,4}^{1,3} = \{3, 4\}$	x_3	$p_{1,4}^{1,6} = \{1, 2, 3, 4\}$	x_6
$f_{\mu}(\mu_{1,4}^2) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$p_{1,4}^{2,1} = \{1, 2\}$	x_7	$p_{1,4}^{2,7} = \{2, 3, 4\}$	x_{13}
	$p_{1,4}^{2,2} = \{2, 3\}$	x_8	$p_{1,4}^{2,8} = \{3, 4, 5\}$	x_{14}
	$p_{1,4}^{2,3} = \{3, 4\}$	x_9	$p_{1,4}^{2,9} = \{4, 5, 6\}$	x_{15}
	$p_{1,4}^{2,4} = \{4, 5\}$	x_{10}	$p_{1,4}^{2,10} = \{1, 2, 3, 4\}$	x_{16}
	$p_{1,4}^{2,5} = \{5, 6\}$	x_{11}	$p_{1,4}^{2,11} = \{2, 3, 4, 5\}$	x_{17}
	$p_{1,4}^{2,6} = \{1, 2, 3\}$	x_{12}	$p_{1,4}^{2,12} = \{3, 4, 5, 6\}$	x_{18}
$f_{\mu}(\mu_{1,4}^3) = \{3, 4\}$	$p_{1,4}^{3,1} = \{3, 4\}$	x_{19}		
$f_{\mu}(\mu_{1,4}^4) = \{3, 4, 5, 6\}$	$p_{1,4}^{4,1} = \{3, 4\}$	x_{20}	$p_{1,4}^{4,4} = \{3, 4, 5\}$	x_{23}
	$p_{1,4}^{4,2} = \{4, 5\}$	x_{21}	$p_{1,4}^{4,5} = \{4, 5, 6\}$	x_{24}
	$p_{1,4}^{4,3} = \{5, 6\}$	x_{22}	$p_{1,4}^{4,6} = \{3, 4, 5, 6\}$	x_{25}

Перебирая каждый полузамкнутый интервал каждого ребра, сформируем общую систему ограничений. Чтобы не показаться излишне педантичными, но в то же время внести определенную ясность, отобразим лишь несколько строк общей системы ограничений:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_6 + x_7 + x_{12} + x_{16} \leq 1; \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + \\ + x_{12} + x_{13} + x_{16} + x_{17} \leq 1; \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_8 + x_9 + \\ + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{16} + x_{17} + x_{18} \leq 1; \\ \dots \\ x_{11} + x_{15} + x_{18} + x_{22} + x_{24} + x_{25} \leq 1. \end{cases}$$

Данная система ограничений формируется путем перемножения матрицы \mathbf{A}^T на вектор \mathbf{x} , в результате чего в матричном виде имеет вид:

$$\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{1}.$$

Имея все необходимое для формирования целевой функции и системы ограничений: \mathbf{x} , \mathbf{d}_{μ} , \mathbf{A} , с использованием известных методов, разработанных для решения задач целочисленного линейного программирования [15, 16], находим оптимальное распределение световых путей: $x_6 = x_{11} = x_{20} = 1$. Световые пути, соответствующие данным переменным представлены в табл. Все остальные переменные x_q принимают значения 0. Оптимальное значение целевой функции составляет: $f_0(\mathbf{x}) = 4 + 2 + 2 = 8$.

Для сравнения, решим задачу распределения световых путей для этой же ОТС последовательными методами. Множество маршрутов $M_{s,t} = \{\mu_{s,t}^k\}, k \in \overline{1, 4}$ и их пропускная способность уже известны. Начнем с маршрута $\mu_{1,4}^2$, имеющего наибольшую ширину: $d_{\mu}(\mu_{1,4}^2) = 6$. Поскольку все световые пути имеют одинаковую ценность, не зависимо от ширины, то нет принципиальной разницы в том, как распорядиться пропускной способностью маршрута. Это могут

быть световые пути $p_{1,4}^{2,10} = \{1, 2, 3, 4\}$ и $p_{1,4}^{2,5} = \{5, 6\}$, или $p_{1,4}^{2,6} = \{1, 2, 3\}$ и $p_{1,4}^{2,7} = \{2, 3, 4\}$. Главное, чтобы все 6 полузамкнутых интервалов были задействованы максимально эффективно. Таким образом, после того как вся пропускная способность самого широкого маршрута задействована, значение целевой функции увеличивается на 6 и становится: $f_0(x) = 6$. Далее веса ребер обновляются и формируется остаточная сеть $G'(V, E)$ (рис. 6).

В остаточной сети нет маршрутов с ненулевой пропускной способностью и значение целевой функции остается равным $f_0(x) = 6$. Но нам известно, что оптимальное значение целевой функции составляет $f_0(x) = 8$. Таким образом стратегия выбора самого широкого маршрута не дает оптимального решения.

Попробуем использовать стратегию выбора маршрута $\mu_{1,4}^3$ с наименьшей шириной: $d_\mu(\mu_{1,4}^3) = 2$. После выбора данного маршрута значение целевой функции становится равным $f_0(x) = 2$, веса ребер обновляются и формируется остаточная сеть $G'(V, E)$ (рис. 7, a). Пропускные способности маршрутов обновляются и становятся: $f_\mu(\mu_{1,4}^1) = \{1, 2\}$, $f_\mu(\mu_{1,4}^2) = \{1, 2, 5, 6\}$, $f_\mu(\mu_{1,4}^4) = \{5, 6\}$. Выбирая маршрут с наименьшей шириной (например маршрут $f_\mu(\mu_{1,4}^1) = \{1, 2\}$), увеличиваем значение целевой функции на 2:

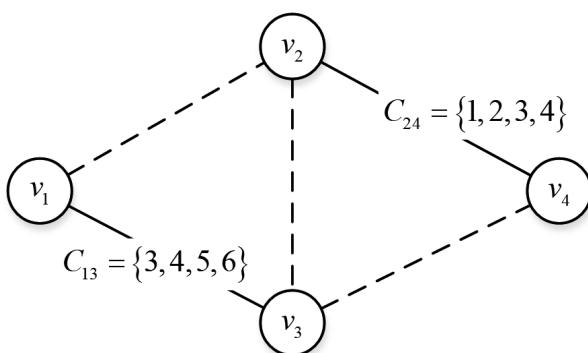


Рис. 6. Остаточная сеть

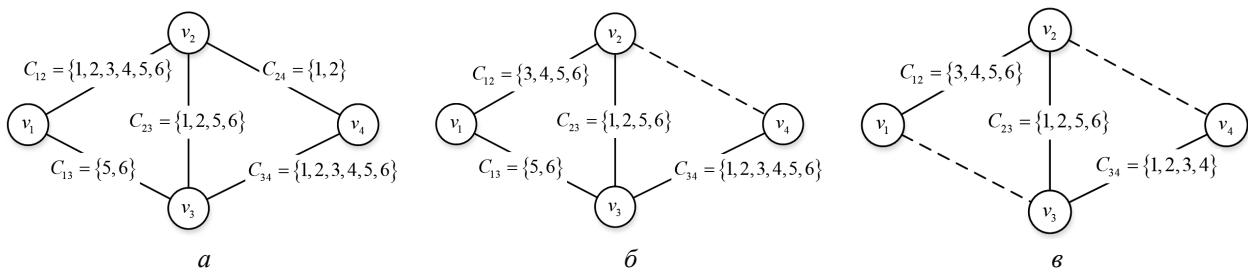


Рис. 7. Остаточные сети

$f_0(x) = 2 + 2 = 4$ и получаем остаточную сеть $G'(V, E)$ (рис. 7, б). Снова обновляем пропускные способности маршрутов и выбираем с наименьшей шириной $f_\mu(\mu_{1,4}^4) = \{5, 6\}$. Значение целевой функции становится $f_0(x) = 4 + 2 = 6$, а в остаточной сети не остается маршрутов с ненулевой пропускной способностью (рис. 7, в).

Таким образом стратегия выбора маршрута с наименьшей шириной, также не дает оптимального решения. Строгое оптимальное решение можно получить путем последовательного выбора маршрутов $f_\mu(\mu_{1,4}^1)$ и $f_\mu(\mu_{1,4}^4)$ и задействуя максимально их пропускную способность $f_0(x) = 4 + 4 = 8$. Данные маршруты являются кратчайшими, с точки зрения количества ребер их образующих. Однако строго утверждать, что данная стратегия всегда приводит к строгому оптимальному решению — нельзя. Авторами были исследованы множества стратегий последовательного решения задачи оптимального распределения световых путей, лишь две из которых представлены в данной статье. Результаты исследования позволяют утверждать, что лишь в ряде частных случаев удается получить строгое оптимальное решение путем поиска маршрутов и последовательного назначения частот для световых путей.

Заключение

В данной статье предложен комплексный подход к формализации и решению задачи оптимального распределения световых путей в оптических транспортных сетях с гибкой сеткой частот. Введено расширенное определение светового пути как совокупности маршрута и непрерывного спектрального ресурса, выделенного вдоль всего маршрута в виде смежных элементарных частотных интервалов. Разработанная математическая модель учитывает ключевые

ограничения, накладываемые на спектральные ресурсы: непрерывность, смежность, непересекаемость и ограниченность общей полосы частот в волоконно-оптических линиях.

Поставленная оптимизационная задача сведена к задаче целочисленного линейного программирования, что позволяет находить решения с гарантированным глобальным оптимумом. На конкретном примере продемонстрировано преимущество предлагаемого подхода по сравнению с распространенными последовательными стратегиями, основанными на локальных критериях выбора маршрутов и назначения спектра. Результаты показывают, что только комплексное моделирование, сочетающее маршруты и спектральные характеристики, позволяет получить строго оптимальное распределение световых путей и эффективно использовать ограниченный спектральный ресурс сети.

Предложенная модель может быть положена в основу интеллектуальных систем планирования, применяемых как на этапе проектирования, так и в процессе динамической настройки и перенастройки сетевой инфраструктуры. Дальнейшие исследования будут направлены на разработку эффективных эвристических и приближенных методов решения задачи распределения световых путей для сетей реальных масштабов, а также на расширение модели с учетом факторов деградации сигнала, качества передачи и требований к надежности.

Список источников

1. Lupez V., Velasco L. Elastic Optical Networks: Architectures, Technologies, and Control. Springer, 2016. 299 с.
2. Bijoy C.C., Eiji O. Elastic Optical Networks: Fundamentals, Design, Control, and Management. New Delhi: South Asian University, 2020. 232 с.
3. Фокин В.Г., Ибрагимов Р.З. Гибкие оптические сети: учеб. пособие. СПб.: Лань, 2022. 252 с.
4. Mukherjee B. Optical WDM Networks. University of California, Davis. URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-29188-1> (дата обращения: 20.07.2025).
5. Фокин В.Г. Когерентные оптические сети. 2-е изд., испр. СПб.: Лань, 2023. 440 с.
6. Shimada T., Iiyama N., Kimura H., Hadama H. Dynamic Control Method of Queuing Delay with/without OEO Conversion in a Multi-Stage Access Network // Proc. of 2012 World Telecommunications Congress. Miyazaki, Japan, 2012. Pp. 1–6.

7. Wang Y., Cao X., Pan Y. Routing and Spectrum Allocation in Elastic Optical Path Networks with Spectrum-Slicing // 2011 Proceedings IEEE INFOCOM. Shanghai, China, 2011. Pp. 1503–1511.

8. Behera S., Das G. Dynamic Routing and Spectrum Allocation in Elastic Optical Networks with Minimal Disruption // 2020 National Conference on Communications (NCC). Kharagpur, India, 2020. Pp. 1–5.

9. Cheng B. et al. Routing and Spectrum Assignment Algorithm based on Spectrum Fragment Assessment of Arriving Services // 2019 28th Wireless and Optical Communications Conference (WOCC). Beijing, China, 2019. Pp. 1–4.

10. Adhikari D.A. Dynamic Spectrum Allocation Scheme to Limit the FWM Effects in Elastic Optical Networks // 2022 International Conference on Smart Applications, Communications and Networking (SmartNets). Palapye, Botswana, 2022. Pp. 1–6.

11. Карапузов А.Н., Панкин А.А., Курочкин П.В., Кузин П.И. Модель оценки вспомогательного служебного трафика при сетевом контроле // Известия Высшей военной школы Генерального штаба Вооруженных сил Республики Ангола. 2025. № 3. С. 43–45.

12. Кузин П.И., Челахов Д.М., Miguel Domingos P. Предложения по применению беспроводных сенсорных сетей в военной отрасли // Известия Высшей военной школы Генерального штаба Вооруженных сил Республики Ангола. 2025. № 1. С. 34–38.

13. Бойко А.П., Шевченко А.А., Кузин П.И. Модель оптической транспортной сети специального назначения в условиях деструктивных воздействий // Вестник компьютерных и информационных технологий. 2025. Т. 22, № 1 (247). С. 42–50.

14. Бойко А.П., Ясинский С.А., Одоевский С.М. Обобщенная модель светового пути в оптических транспортных сетях на основе реконфигурируемых оптических мультиплексоров ввода/вывода // Электросвязь. 2024. № 7. С. 43–48.

15. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях; пер. с англ. П.Л. Бузыцкого и др.; под ред. А.А. Фридмана. М.: Мир, 1974. 519 с.

16. Taxa X.A. Введение в исследование операций; пер. с англ. М.: Вильямс, 2001. 912 с.

References

1. Lupez V. & Velasco L. (2016). Elastic Optical Networks: Architectures, Technologies, and Control. Optical Networks Series, Springer. 299 p.
2. Bijoy C.C. & Eiji O. (2020). Elastic Optical Networks: Fundamentals, Design, Control, and Management. New Delhi: South Asian University. 232 p.
3. Fokin V.G. & Ibragimov R.Z. (2022). Flexible Optical Networks: Textbook. Saint Petersburg: Lan Publishing. 252 p.
4. Mukherjee B. (2006). Optical WDM Networks. Department of Computer Science, University of California, Davis. Springer. Available at: <https://link.springer.com/book/10.1007/0-387-29188-1> (accessed: July 20, 2025).
5. Fokin V.G. (2023). Coherent Optical Networks (2nd ed.). Saint-Petersburg: Lan Publishing. 440 p.
6. Shimada T., Iiyama N., Kimura H. & Hadama H. (2012). Dynamic Control Method of Queuing Delay with/without OEO Conversion in a Multi-Stage Access Network. 2012 World Telecommunications Congress, Miyazaki, Japan. Pp. 1–6.
7. Wang Y., Cao X. & Pan Y. (2011). Study on Routing and Spectrum Allocation in Spectrum-Sliced Elastic Optical Path Networks. Proceedings IEEE INFOCOM 2011, Shanghai, China. Pp. 1503–1511.
8. Behera S., & Das G. (2020). Dynamic Routing and Spectrum Allocation in Elastic Optical Networks with Minimal Disruption. 2020 National Conference on Communications (NCC), Kharagpur, India. Pp. 1–5.
9. Cheng B. et al. (2019). Routing and Spectrum Assignment Algorithm Based on Spectrum Fragment Assessment of Arriving Services. 2019 28th Wireless and Optical Communications Conference (WOCC), Beijing, China. Pp. 1–4.
10. Adhikari D. (2022). A Dynamic Spectrum Allocation Scheme to Limit the FWM Effects in Elastic Optical Networks. 2022 International Conference on Smart Applications, Communications and Networking (SmartNets), Palapye, Botswana. Pp. 1–6.
11. Karapuzov A.N., Pankin A.A., Kurochkin P.V., Kuzin P.I. Model for assessing auxiliary service traffic during network control // News of the Higher Military School of the General Staff of the Armed Forces of the Republic of Angola. 2025. No 3. Pp. 43–45.
12. Kuzin P.I., Chelakhov D.M., Miguel Domingos P. Proposals for the use of wireless sensor networks in the military industry. // News of the Higher Military School of the General Staff of the Armed Forces of the Republic of Angola. 2025. No 1. Pp. 34–38.
13. Boyko A.P., Shevchenko A.A., Kuzin P.I. (2025). A Model of a Special-Purpose Optical Transport Network under Destructive Impacts. Bulletin of Computer and Information Technologies, 22 (1). Pp. 42–50.
14. Boyko A.P., Yasinsky S.A., Odoyevsky S.M. (2024). Generalized Model of a Lightpath in Optical Transport Networks Based on Reconfigurable Optical Add-Drop Multiplexers. Elektrosvyaz. 2024 (7). Pp. 43–48.
15. Hu T.C. (1974). Integer Programming and Network Flows. Translated from English by P.L. Buzynsky et al., ed. by A. A. Fridman. Moscow: Mir Publishers. 519 p.
16. Taha H.A. (2001). Operations Research: An Introduction. Translated from English. Moscow: Williams Publishing House. 912 p.