

УДК 620.17

doi: 10.53816/23061456_2025_9–10_57

**МЕТОДИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОЦЕНИВАНИЮ ТЯГИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
РАКЕТНОГО ДВИГАТЕЛЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ВРЕМЕНИ ПЕРЕЛЕТА
МЕЖДУ КРУГОВЫМИ КОМПЛАНАРНЫМИ ОРБИТАМИ**

**METHODICAL APPROACH TO ESTIMATING THE THRUST OF AN ELECTRIC
ROCKET ENGINE DEPENDING ON THE FIGHT TIME BETWEEN CIRCULAR
COPLANAR ORBITS**

*Канд. техн. наук Л.П. Зозуля, канд. техн. наук П.С. Гончаров,
канд. техн. наук А.Л. Копейка, В.В. Мартынов*

Ph.D. L.P. Zozulya, Ph.D. P.S. Goncharov, Ph.D. A.L. Kopeyka, V.V. Martynov

Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского

В статье рассмотрен методический подход к оцениванию требуемой тяги для перелета между компланарными круговыми орбитами с помощью электрического ракетного двигателя (ЭРД) за заданное время. Выведены аналитические зависимости тяги ЭРД от времени перелета между круговыми компланарными орбитами и текущего радиуса от полярного угла. Полученные зависимости могут использоваться для исследования орбитальной динамики космического аппарата под действием непрерывно приложенной тяги ЭРД, действующей по вектору скорости. Представленные зависимости получены относительно полярной системы координат.

Ключевые слова: электрический ракетный двигатель, тяга, орбитальный маневр, полярная система координат.

The article considers a methodical approach to estimating the required thrust for a flight between coplanar circular orbits using an electric rocket engine (ERE) for a given time. Analytical dependencies of the ERE thrust on the flight time between circular coplanar orbits and the current radius on the polar angle are derived. The obtained dependencies can be used to study the orbital dynamics of a spacecraft under the action of continuously applied thrust of an electric propulsion engine acting along the velocity vector. The presented dependencies are obtained relative to the polar coordinate system.

Keywords: electric rocket engine, thrust, orbital maneuver, polar coordinate system.

Введение

Одним из направлений развития ракетно-космической техники является разработка электрических ракетных двигателей (ЭРД). Кроме хорошей экономичности ЭРД обладают ресурсом работы в течение тысяч и десятков тысяч часов [1].

Электрические ракетные двигатели в составе космического аппарата (КА) позволяют обеспечить решение следующих задач:

- освоение дальнего космоса;
- доставка грузов к Луне;
- изменение и корректировка орбит космических аппаратов;
- высокоточное управление КА на орбите и др.

Важным этапом создания ЭРД являются проведение летных испытаний в составе КА.

При этом одной из задач при оценивании параметров работы ЭРД при выполнении проектных расчетов, а также при проведении летных испытаний является задача по оцениванию создаваемой ЭРД тяги. Как правило, ЭРД относятся к ракетным двигателям малой тяги и при работе создают малую тягу в диапазоне от 1 до 100 мН.

Один из способов оценивания тяги ЭРД КА при орбитальном полете основан на радиоконтроле траектории КА. В этом случае тяга ЭРД оценивается по изменению параметров движения КА или по изменению параметров орбиты [2].

В предлагаемом методическом подходе для оценивания тяги ЭРД используются данные об изменении высоты орбиты КА и продолжительности работы ЭРД.

В общем случае траектория полета КА в центральном поле сил, когда ЭРД развивает постоянную тягу, представляет собою спираль. Кроме того, считают, что исходная (начальная) орбита — круговая, а постоянная тяга ЭРД направлена по скорости.

Расчет перелета между орбитами с помощью ЭРД за заданное время остается сложной задачей, требующей учета нелинейности динамики орбитального движения [3]. Аналитические решения дифференциальных уравнений движения КА с ЭРД освещены в открытой печати недостаточно широко. Анализ литературы выявил три основных подхода к оцениванию тяги ЭРД, представленных в табл. 1.

При этом для оценивания тяги ЭРД необходимо знать радиус исходной круговой орбиты, изменение высоты орбиты за время работы ЭРД

и массу КА. Параметры орбиты могут быть достаточно точно измерены с помощью современных средств радиоконтроля, а масса КА должна быть известна заранее (например, по результатам наземных измерений).

В работе приняты следующие ограничения и допущения:

- гравитационное поле Земли — центральное;
- масса КА — постоянная;
- начальная и конечная орбиты — компланарные.

Математическая постановка задачи

В заданный начальный момент времени $t_0 = 0$ КА движется по круговой орбите радиуса r_0 . Требуется оценить требуемую тягу ЭРД для осуществления перелета между двумя компланарными орбитами. Движение происходит в центральном гравитационном поле Земли. КА оснащен ЭРД, который обеспечивает непрерывное, направленное по вектору скорости действие тяги $\vec{F}$. Расчет ведется относительно полярной системы координат (ПСК), заданной радиальным $\vec{r}_0$ и трансверсальным $\vec{p}_0$ единичными векторами (рис. 1). Центр ПСК, совпадает с центром масс Земли.

Состояние КА, находящегося на переходной орбите, описывается относительно ПСК набором из четырех переменных $\{r, \varphi, V_r, V_p\}$, где r — радиус орбиты КА;

φ — полярный угол;

$V_r = \frac{dr}{dt}$ радиальная составляющая скорости;

$V_p = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$ трансверсальная составляющая скорости.

Таблица 1

Основные подходы к оцениванию тяги ЭРД

Подход к оцениванию тяги ЭРД	Автор	Особенности
Энергетический метод	Эдельбаум Т.Н., 1965 [4]	Оценивает маневры с тангенциальными ускорениями
Оптимальное управление	Понтрягин Л.С., 1961 [5–8]	Требуется сложное численное решение
Параметрические аппроксимации	Петропулос А., 2003 [9, 10]	Предоставляет ограниченную точность определения тяги, так как расчет произведен для центрального гравитационного поля

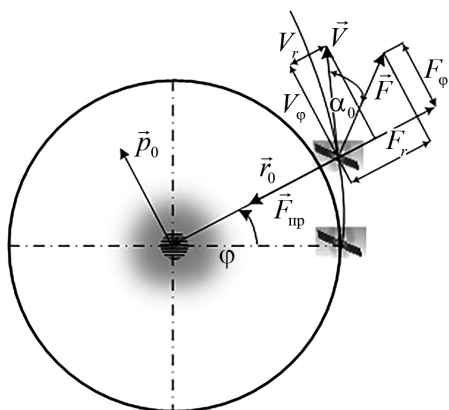


Рис. 1. Расчетная схема движения
под действием постоянно приложенной тяги $\vec{F}$

Двумерная динамика КА описывается следующими нелинейными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{dV_r}{dt} = \frac{F}{m} \cdot \sin \alpha - \frac{\mu}{r^2} + \frac{V_p^2}{r}; \\ \frac{dV_p}{dt} = \frac{F}{m} \cdot \cos \alpha - \frac{V_r \cdot V_p}{r}, \end{cases} \quad (1)$$

где m — масса КА;

α — угол между вектором скорости и силой:

$$\alpha = \alpha_0 + \arctan \frac{V_r}{V_\infty} \approx \alpha_0 + \frac{V_r}{V_\infty}$$

при следующих начальных условиях:

$$r_{|t=0} = r_{\text{H}}; \varphi_{||t=0} = 0; V_{r|t=0} = 0; V_{p|t=0} = \sqrt{\frac{\mu}{r_{\text{u}}}},$$

где φ — полярный угол.

С учетом уравнения (1) необходимо определить полярный угол $\varphi(t)$, радиус вектор $r(t)$, время перелета $t(\varphi)$ и на основании определенных параметров найти тягу F .

Аналитическое решение

Уравнения (1) содержат малый параметр F . Решение данной задачи будет выполнено мето-

дом разложения в ряд по степеням малого параметра F [11, 12] (все дальнейшие расчеты произведены при $\alpha = 0$):

$$\begin{aligned} V_p(t) &= F^0 \cdot V_{p0} + F^1 \cdot V_{p1} + F^2 \cdot V_{p2}; \\ r(t) &= F^0 \cdot r_0 + F^1 \cdot r_1 + F^2 \cdot r_2; \\ \varphi(t) &= F^0 \cdot \varphi_0 + F^1 \cdot \varphi_1 + F^2 \cdot \varphi_2, \end{aligned} \quad (2)$$

где $V_{p0}, V_{p1}, V_{p2}, r_0, r_1, r_2, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ — коэффициенты разложения.

При этом поперечные и радиальные скорости определяются в соответствии с [13]:

$$\begin{cases} V_{p0} = r_0 \cdot \frac{d\varphi_0}{dt}; \\ V_{p1} = r_0 \cdot \frac{d\varphi_1}{dt} + r_1 \cdot \frac{d\varphi_0}{dt}; \\ V_{r0} = \frac{dr_0}{dt}; \quad V_{r1} = \frac{dr_1}{dt}. \end{cases}$$

После подстановки рядов (2) в уравнения (1) и приравнивания членов при одинаковых степенях F , в результате математических преобразований получены коэффициенты нулевого порядка по F :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_0 = r_{\text{H}}; \quad V_{r0} = 0; \\ V_{\varphi 0} = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}; \\ \varphi_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} \cdot t \end{array} \right. \quad (3)$$

и коэффициенты первого порядка по F :

$$V_{p1} = \frac{1}{m \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}} \cdot \left(2 \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} \cdot t \right) - \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} \cdot t \right);$$

$$r_1 = \frac{1}{m \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}} \cdot \sin \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} \cdot t \right) + 2 \cdot t \right);$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{r_0} \left(\frac{1}{m \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}} \left(-\frac{4}{\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}} \cdot \cos \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} \cdot t \right) - \frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} \cdot t^2 \right) + \frac{4 \cdot r_0^3}{m \cdot \mu} \right). \quad (4)$$

В виду малости F рассматриваем только первые два члена разложения рядов (2). Подставляя (3) в формулу (2), после преобразований получены полярный угол $\varphi(t)$, радиус вектор $\vec{r}(t)$ и время перелета $t(\varphi)$ под действием тяги двигательной установки малой тяги (ДУМТ).

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} \cdot t - \frac{F \cdot t^2}{2 \cdot r_0 \cdot m}; \\ \vec{r}(t) &= r_0 + \frac{F}{\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} \cdot m} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} \cdot t\right) + 2 \cdot t \right); \\ t(\varphi) &= \frac{m \cdot r_0 \left(\sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} - \sqrt{\frac{m \cdot \mu - 2 \cdot F \cdot r_0^2 \cdot \varphi}{m \cdot r_0^3}} \right)}{F}. \quad (5)\end{aligned}$$

После преобразований уравнений (7) получается искомое выражение для оценивания тяги в зависимости от начальной и конечной орбиты и времени перелета:

$$F(t) = \frac{m \cdot (r_k - r_n) \cdot \mu}{\left(2 \cdot t \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}} - 2 \cdot \sin\left(t \cdot \sqrt{\frac{\mu}{r_0^3}}\right) \right) \cdot r_0^3}.$$

Уравнение траектории $r(\varphi)$ перелета между компланарными орбитами получается путем математических преобразований из уравнений (5):

$$\begin{aligned}r(\varphi) &= r_n + \\ &+ \frac{F}{\sqrt{\frac{\mu}{r_n^3}} \cdot m} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{\frac{\mu}{r_n^3}}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{\mu}{r_n^3}} \cdot t(\varphi)\right) + 2 \cdot t(\varphi) \right).\end{aligned} \quad (6)$$

Пример оценивания тяги ЭРД

В качестве примера использования разработанного подхода приведены результаты моделирования движения КА при исходных данных, представленных в табл. 2.

Результаты расчета представлены в виде зависимостей приложенной тяги от времени перелета на рис. 2.

В качестве примера траектории перелета между компланарными орбитами, построенной по уравнению (6), представлен график на рис. 3. Ввиду малости действующей тяги ЭРД и большом числе витков, траектория перелета показана для увеличения высоты на $\Delta H = 30$ км.

Заключение

Разработанный подход позволяет оценивать тягу ЭРД для перелета между заданными компланарными орбитами за требуемое время. Аналитические выражения дают возможность быстро проводить предварительные расчеты без необходимости численного интегрирования системы уравнений движения. Показано, что время

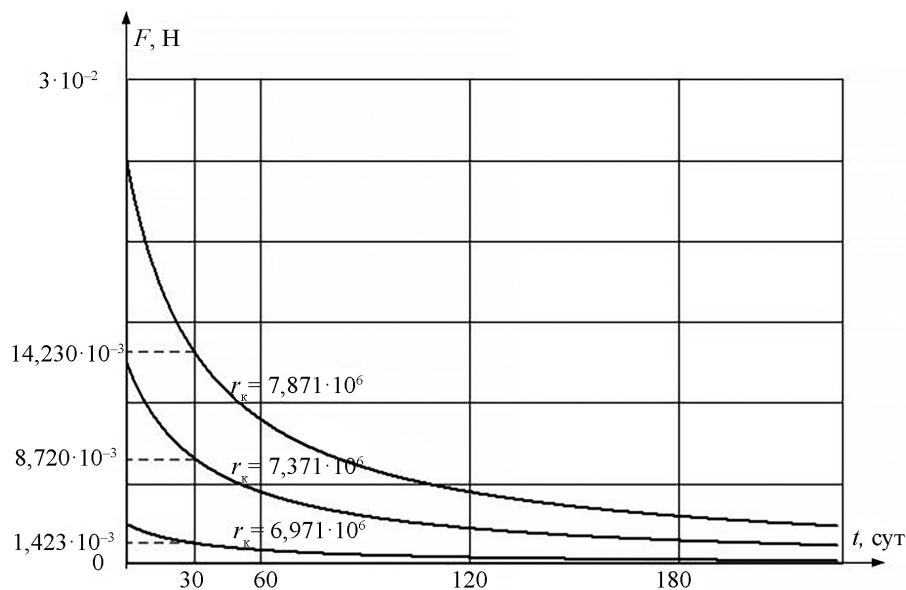


Рис. 2. Зависимость постоянно приложенной тяги $\vec{F}$ от времени t

Таблица 2

Исходные данные

Характеристика	Значение
Начальный радиус r_n , м	$6,871 \cdot 10^6$
Конечный радиус r_k , м	$6,971 \cdot 10^6$; $7,871 \cdot 10^6$; $8,371 \cdot 10^6$
Масса КА, кг	20
Гравитационный параметр Земли μ , $\text{м}^3/\text{с}^2$	$3,986 \cdot 10^{14}$

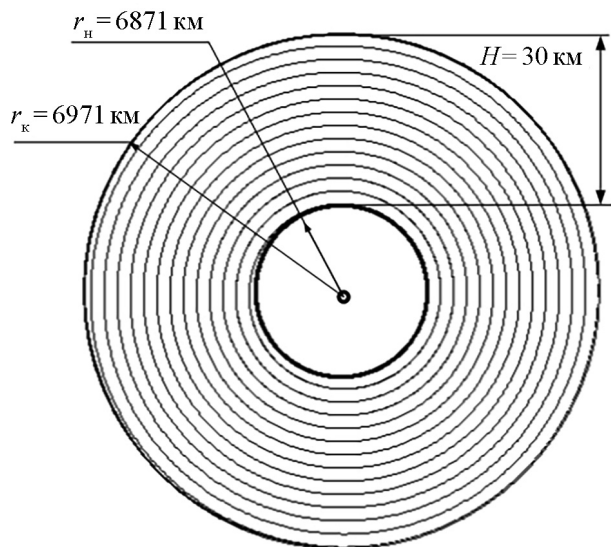


Рис. 3. Траектория перелета между орбитами

перелета существенно зависит от высоты между орбитами, массы КА и тяги ЭРД.

Дальнейшее развитие методического подхода может включать учет влияния нецентральной гравитационного поля Земли, наличие остаточной атмосферы и конструктивных особенностей ЭРД. Применение данного подхода позволит сократить время по обоснованию требований к тяге ЭРД на этапе проектирования КА. Также на основе полученных аналитических зависимостей могут быть выполнены исследования по обоснованию требований к тяге ЭРД сверхнизкоорбитального КА, как для поддержания заданной высоты орбиты, так и для увеличения высоты орбиты на требуемую величину.

Список источников

1. Гончаров П.С., Шуневич Н.А., Копейка А.Л., Бабин А.М. Система измерения силы тяги электрического ракетного двигателя // Известия Тульского государственного уни-

верситета. Технические науки. 2021. Вып. 10. С. 573–577.

2. Яковлев Е.А. Испытания космических электроракетных двигательных установок. М.: Машиностроение, 1981. 208 с.

3. Иванов Н.М., Лысенко Л.Н. Баллистика и навигация космических аппаратов. М.: Дрофа, 2004. 544 с.

4. Edelbaum T.N. Optimum Power-Limited Orbit Transfer in Strong Gravity Fields // Aiaaj. 1965. V. 3, No 5. Pp. 921–925.

5. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Изд-во физико-математической литературы, 1961. 394 с.

6. Тихонов В.Б., Хартов В.В. Оптимизация межорбитальных перелетов с использованием электроракетных двигателей // Космические исследования. 2018. Т. 56, № 4. С. 315–326.

7. Анализ эффективности электроракетных двигателей для межорбитальных маневров: отчет ФГУП «ЦНИИмаш». Королев, 2021. 120 с.

8. Смирнов А.С., Курицын А.В. Численное моделирование ионных двигателей с учетом пространственного заряда // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение. 2020. № 3 (138). С. 45–62.

9. Petropoulos B. Physical parameters of the atmosphere of Venus. Earth Moon Planet, 1988. V. 42, No 1. Pp. 29–40.

10. Petropoulos A.E., Longuski J.M. Shape-Based Algorithm for the Automated Design of Low-thrust, Gravity-Assist Trajectories // Journal of Spacecraft and Rockets. 2003. Vol. 41, No 5. Pp. 787–796.

11. Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. М.: Наука, 1989. 670 с.

12. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. 3-е, испр. и доп. М.: МЦНМ, 2012. 344 с.

13. Дубошин Г.Н. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 863 с.

References

1. Goncharov P.S., Shunevich N.A., Kopeyka A.L., Babin A.M. Sistema izmereniya sily tyagi elektricheskogo raketnogo dvigatelya // Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tekhnicheskiye nauki. 2021. V. 10. Pp. 573–577.
2. Yakovlev Ye.A. Ispytaniya kosmicheskikh elektroraketnykh dvigatel'nykh ustanovok. M.: Mashinostroyeniye, 1981. 208 p.
3. Ivanov N.M., Lysenko L.N. Ballistika i navigatsiya kabinnykh apparatov. M.: Drofa, 2004. 544 p.
4. Edel'baum T.N. Optimal'nyy perekhod na orbitu s ogranicheniyem moshchnosti v polyakh sil'noy gravitatsii // Aiaaj. 1965. T. 3. No 5. Pp. 921–925.
5. Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V. Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov. M.: Izd-vo fiziko-matematicheskoy literatury, 1961. 394 p.
6. Tikhonov V.B., Khartov V.V. Optimizatsiya mezhorbital'nykh pereletov s ispol'zovaniyem elektroraketnykh dvigateley // Kosmicheskiye issledovaniya. 2018. V. 56, No 4. Pp. 315–326.
7. Analiz effektivnosti elektroraketnykh dvigateley dlya mezhorbital'nykh manovrov: Otchet FGUP «TSNIImash». Korolov, 2021. 120 p.
8. Smirnov A.S., Kuritsyn A.V. Chislennoye modelirovaniye ionnykh dvigateley s uchotom prostranstvennogo zaryada // Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroyeniye. 2020. No 3 (138). Pp. 45–62.
9. Petropoulos B. Physical parameters of the atmosphere of Venus. Earth Moon Planet. 1988. V. 42. No 1. Pp. 29–40.
10. Petropoulos A.E., Longuski J.M. Shape-Based Algorithm for the Automated Design of Low-thrust, Gravity-Assist Trajectories // Journal of Spacecraft and Rockets. 2003. Vol. 41, No 5. Pp. 787–796.
11. Grodzovskiy G.L., Ivanov Yu.N., Tokarev V.V. Mekhanika kosmicheskogo poleta s maloy tyagoy. M.: Nauka, 1989. 670 p.
12. Arnol'd V.I. Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya. 3-ye izd., ispr. i dop. M.: MTSNM, 2012. 344 p.
13. Duboshin G.N. Spravochnoye rukovodstvo po nebesnoy mekhanike i astrodinamike. M.: Nauka, 1976. 863 p.