

УДК 623.436

doi: 10.53816/23061456_2025_3–4_135

**МОДЕЛЬ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СИСТЕМЕ
«ПОРАЖАЮЩИЙ ЭЛЕМЕНТ — ПРЕГРАДА» БАРРАЖИРУЮЩЕГО
БОЕПРИПАСА**

**MODEL OF HIGH-SPEED INTERACTION IN THE «DAMAGING
ELEMENT — OBSTACLE» SYSTEM OF LOAMING AMMUNITION**

П.С. Суздальцев, канд. техн. наук С.А. Куканов

P.S. Suzdaltsev, Ph.D. S.A. Kukanov

*Филиал Военной академии материально-технического обеспечения им. А.В. Хрулева
(г. Пенза)*

В статье представлено описание модели высокоскоростного взаимодействия в системе «поражающий элемент — преграда» барражирующего боеприпаса, которая позволяет проводить моделирование и анализировать динамику и механизмы разрушения преграды при взаимодействии с различными типами поражающих элементов. Модель основана на методе конечных элементов с использованием эволюционирующего во времени алгоритма адаптивного сгущения сетки и учитывает различные механизмы разрушения материала преграды, такие как хрупкое разрушение, пластическое течение и сдвиговую локализацию. Исследование демонстрирует точность и эффективность модели и показывает её способность предсказывать механизмы разрушения преграды и кинематические поля деформаций и напряжений. Модель может быть использована для анализа различных сценариев высокоскоростного взаимодействия и оптимизации конструкций средств поражения и преград. Разработанная модель имеет важное значение для понимания механизмов разрушения при высокоскоростном взаимодействии.

Ключевые слова: математическая модель, метод конечных элементов, высокоскоростное взаимодействие.

The article describes a model of high-speed interaction in the «striking element — barrier» system of a barrage munition, which allows modeling and analyzing the dynamics and mechanisms of barrier destruction when interacting with various types of striking elements. The model is based on the finite element method using a time-evolving adaptive mesh thickening algorithm and takes into account various mechanisms of fracture of the barrier material, such as brittle fracture, plastic flow and shear localization. The study demonstrates the accuracy and effectiveness of the model and shows its ability to predict the mechanisms of barrier failure and kinematic fields of deformations and stresses. The model can be used to analyze various scenarios of high-speed interaction and optimize the designs of weapons and obstacles. The developed model is important for understanding the mechanisms of destruction during high-speed interaction.

Keywords: mathematical model, finite element method, high-speed interaction.

Для описания процесса соударения барражирующего боеприпаса (ББ) с объектом поражения, как правило, используются модели сжимаемого упругопластического тела. Основные соотношения, описывающие движение сжимаемой упругопластической среды, базируются на законах сохранения массы, импульса и энергии, замыкаются соотношениями Прандтля — Рейсса при условии текучести Мизеса [3]. Условия разрушения зависят от температуры, скорости нагружения и прочностных свойств материалов. Рассмотрим основные уравнения, описывающие процесс соударения [1] (рис. 1).

Законы сохранения импульса, массы и энергии представим в виде [2]:

$$\frac{d\dot{u}_a}{dt} - \frac{1}{p} \frac{\partial \sigma_{a\beta}}{\partial x_\beta} = 0;$$

$$\frac{dp}{dt} + p \frac{d\dot{u}_a}{dx_a} = 0; \quad (1)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{p} \sigma_{a\beta} \dot{\epsilon}_{a\beta}, \quad (2)$$

где p — плотность;

$\dot{u}_a$ — компоненты скорости деформации;

$\sigma_{a\beta}$ — компоненты тензора напряжений;

$\dot{\epsilon}_{a\beta}$ — компоненты тензора скоростей деформации;

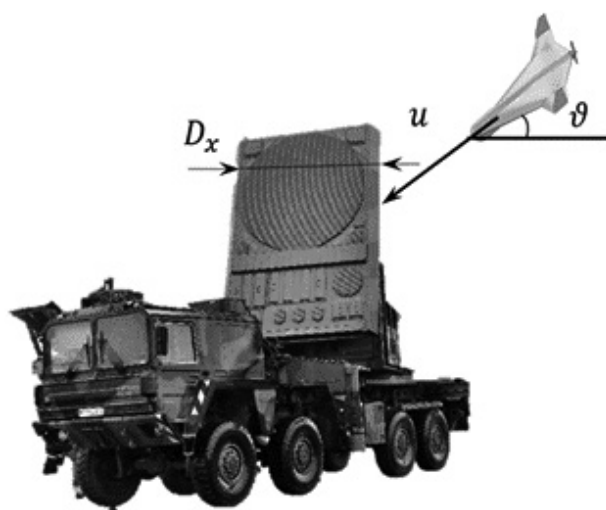


Рис. 1. Схема динамического взаимодействия ББ с объектом поражения

E — внутренняя энергия;

x_a, x_β — составляющие вектора координат;

α, β — индексы координатного вектора. Указание индексов α, β означает, что берется его соответствующая координата: $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$;

$\frac{d}{dt}$ — субстанциональная производная по времени [7].

Здесь для сокращения записи используется форма с немymi индексами, которая означает, что если в произведении встречаются величины с одинаковыми индексами, то по ним ведется суммирование. Например, из уравнения (1) имеем:

$$\frac{\partial \dot{u}_a}{\partial x_a} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x_x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x_y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x_z} = \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}$$

для случая трехмерного пространства, а из уравнения (2) следует:

$$\begin{aligned} \sigma_{a\beta} \dot{\epsilon}_{a\beta} = & \sigma_{xx} \dot{\epsilon}_{xx} + \sigma_{xy} \dot{\epsilon}_{xy} + \sigma_{xz} \dot{\epsilon}_{xz} + \sigma_{yx} \dot{\epsilon}_{yx} + \\ & + \sigma_{yy} \dot{\epsilon}_{yy} + \sigma_{yz} \dot{\epsilon}_{yz} + \sigma_{zx} \dot{\epsilon}_{zx} + \sigma_{zy} \dot{\epsilon}_{zy} + \sigma_{zz} \dot{\epsilon}_{zz}. \end{aligned}$$

Реологические соотношения запишем в гиперупругой форме в следующем виде [4]:

$$\frac{dS_{a\beta}}{dt} = 2G_0 \left(\dot{\epsilon}_{a\beta} - \frac{1}{3} \delta_{a\beta} \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} \right) + S_{ay} R_{\beta y} + S_{y\beta} R_{ay},$$

где $S_{a\beta}$ — девиатор тензора напряжений для координатных составляющих α и β , определяющий напряжения в точке, не связанный с гидростатическим напряжением (всесторонним давлением);

G_0 — модуль сдвига;

$$R_{ay} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_a}{\partial y} - \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial a} \right);$$

$\delta_{a\beta}$ — символ Кронекера;

$$\delta_{a\beta} = \begin{cases} 1, & \text{если } a = \beta, \\ 0, & \text{если } a \neq \beta. \end{cases}$$

Для описания пластических течений используется теория Прандтля — Рейсса. В этой теории для определения начала пластического течения используется критерий Мизеса [3]. При $q_{\Pi} = S_{a\beta} S_{a\beta} = 2K^2$, K — предел текучести на сдвиг, считается, что имеет место пластическое течение. При $q_{\Pi} < 2K^2$ движение среды считается упругим. Для учета эффекта пластичности

в правую часть уравнения (2) необходимо добавить член $\theta(q_{\Pi})(S_{a\beta}\dot{\epsilon}_{a\beta})S_{a\beta}$, где:

$$\theta(q_{\Pi}) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_{\Pi} = 2K^2; \\ 0, & \text{если } q_{\Pi} = 2K^2, S_{a\beta}\dot{\epsilon}_{a\beta} \leq 0; \\ \frac{G_0}{K^2}, & \text{если } q_{\Pi} = 2K^2, S_{a\beta}\dot{\epsilon}_{a\beta} > 0. \end{cases} \quad (3)$$

В этом случае выражение $S_{a\beta}\dot{\epsilon}_{a\beta}$ не выходит за границы поверхности Мизеса. В качестве уравнения состояния моделируемой среды использовано уравнение состояния [1]

$$\begin{aligned} p &= p_n + \Gamma p(E - E_n); \\ p_n &= \frac{p_0 c_0 \mu (1 + \mu)}{[1 - (-1)\mu]^2}; \\ E_n &= \frac{p_n}{2p_0} \left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right); \\ p\Gamma &= p_0\Gamma_0 = \text{const}; \\ \mu &= \frac{p}{p_0} - 1, \end{aligned} \quad (4)$$

где p — полное давление системы;

p_n — давление в начальном состоянии;

Γ — коэффициент Грюнайзена в текущий момент времени;

Γ_0 — коэффициент Грюнайзена при нормальных условиях, который характеризует термическое давление со стороны колеблющихся атомов;

E_n — внутренняя энергия в начальном состоянии;

p_0 — плотность материала при нормальных условиях;

c_0 — скорость звука в материале;

μ — изменение плотности в процессе исследования. Константы Γ_0 , c_0 определяются экспериментальным путем.

Достаточно интенсивное ударное нагружение преград часто приводит к возникновению нарушений сплошности материала в результате разрушения. Например, при ударе пластиной происходит откол (рис. 2, а), под которым понимают образование макроскопической полости внутри материала преграды, которая может быть замкнутой, либо выходить на поверхность преграды, а в некоторых случаях возможно отделение тыльной части преграды (рис. 2, б).

Численное моделирование процессов разрушения можно осуществлять несколькими путями. В континуальном подходе определяется область поврежденной среды и корректируется напряженно-деформированное состояние материала в этой области. В качестве критерия разрушения могут быть выбраны различные модели. В настоящей работе используется модель Джонсона — Кука, согласно которой предел текучести определяется формулой (3).

Рассмотрим метод сплаженных частиц, он является бессточным лагранжевым численным методом для расчетов процессов высокоскоростного соударения, а также иного интенсивного динамического нагружения тел, в особенности, когда имеет место существенное изменение топологии моделируемых объектов (разлет вещества). Производные вычисляются с помощью сплайн-ин-



Рис. 2. Схема динамического взаимодействия ББ с объектом поражения

терполяции, в соответствии с чем каждая гладкая частица является точкой интерполяции, в которой известны параметры деформируемой среды. Численное решение во всей области интегрирования получается с помощью интерполяционных функций, для которых эти частицы являются интерполяционными узлами. Таким образом, вычисление градиентов сводится к аналитическому дифференцированию гладких функций.

Основная суть метода заключается в приближении формулы следующей цепочкой преобразований:

$$a(x) = \int_R^I a(\tilde{x}) \delta(\tilde{x} - x) d\tilde{x},$$

где $a(x)$ — некоторое свойства материала, на месте данной величины может быть плотность, скорость, положение в пространстве;

$\tilde{x}$ — конкретное значение координаты;

$\delta(\tilde{x} - x)$ — дельта-функция (функция Дирака):

$$\delta(\tilde{x} - x) = \begin{cases} +\infty, & x = \tilde{x}, \\ 0, & x \neq \tilde{x}; \end{cases}$$

R — некоторая область, где представляет интерес определение величины $a(x)$. Сначала обобщенная функция $\delta(x)$ заменяется аналитической функцией $\omega(\tilde{x} - x, h)$, которую называют ядром сглаживания, а h — радиусом сглаживания. В результате получаем:

$$a^*(x) = \int_R^I a(\tilde{x}) \omega(\tilde{x} - x, h) d\tilde{x}.$$

В случае если рассматривается среда плотности $\rho(x)$, то удобна бывает запись с использованием нормировки. Ядро $\omega(\tilde{x} - x, h)$ должно удовлетворять условиям

$$\int_R^I \omega(x, h) d\tilde{x} = 1;$$

$$\omega(x, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \delta(x).$$

В работе Моногана установлено, что при соблюдении этих условий и выборе $\omega(x, h) = e^{-\left(\frac{x}{h}\right)^2}$ аппроксимация обеспечивает порядок $O(h^2)$.

Далее требуется рассмотреть численные методы вычисления этих интегралов. Будем полагать, что среда разбита на маленькие, по сравне-

нию с характерными размерами рассчитываемой модели, элементы. Каждый такой элемент имеет свое значение аппроксимируемого параметра $a(x)$, равное a^i . Так же будем считать известными его плотность — p^i , место положения — x^i и массу — m^i . Здесь и далее, если не оговорено другое, верхний индекс у параметра будет обозначать его принадлежность к конкретному дискретному элементу. Вопрос расположения этих элементов (далее частиц), так, чтобы наиболее лучше аппроксимировать параметр $a(x)$, пока является открытым. Будем использовать самое простое и очевидное начальное расположение — кубическую равномерную решетку.

Заменой интегрирования суммированием по частицам-соседям получаем выражение:

$$a^*(x) = \sum_i \frac{m^i a^i}{p^i} \omega(x^i - x, h).$$

Использование такой аппроксимации существенно упрощает вычисление градиента функции $\frac{\partial a(x)}{\partial x_a}$, так как достаточно аналитически продифференцировать ядро сглаживания, что даст

$$\frac{\partial a^*}{\partial x_a} = \sum_i \frac{m^i a^i}{p^i} \frac{\partial \omega(x^i - x, h)}{\partial x_a}.$$

Рассмотрим более подробно ядро сглаживания. Важно, чтобы носитель функции $\omega(x, h)$ был конечным, так как в сплошной среде все взаимодействия короткодействующие. Однако $e^{-\left(\frac{x}{h}\right)^2}$ этим свойством не обладает. Из-за вышеперечисленных причин удобно использовать следующий сплайн:

$$\omega(x, h) = \begin{cases} \frac{1 - 1,75\varphi^2 + 0,75\varphi^3}{\pi h^3}, & \varphi \in [0, 1]; \\ \frac{(2 - \varphi)^3}{4\pi h^3}, & \varphi \in [1, 2]; \\ 0, & \varphi \in [2, \infty], \end{cases}$$

$$\text{где } \varphi = \frac{|x - \tilde{x}|}{h}.$$

Численные аппроксимации уравнений механики деформируемого тела, построенные с помощью метода конечных элементов, пример

такого объемного восьмиузловой элемента представлен на рис. 3, описан следующим образом:

$$f_1^i = -\sum_k m^k (\dot{u}_a^k - \dot{u}_a^i) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_a^i}; \quad (5)$$

$$f_{2,a}^i = \sum_k m^k \left(\frac{\sigma_{a\beta}^i}{(p^i)^2} + \frac{\sigma_{a\beta}^k}{(p^k)^2} \right) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_\beta^i}; \quad (6)$$

$$f_3^i = \sum_k m^k (\dot{u}_a^i - \dot{u}_a^k) \left(\frac{\sigma_{a\beta}^i}{(p^i)^2} + \frac{\sigma_{a\beta}^k}{(p^k)^2} \right) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_\beta^i}; \quad (7)$$

$$f_{4,a\beta}^i = 2G_0 \left(\dot{\varepsilon}_{a\beta}^i - \frac{1}{3} \delta_{a\beta} \dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha}^i \right) + S_{\alpha\gamma}^i R_{\beta\gamma}^i + S_{\gamma\beta}^i R_{\alpha\gamma}^i; \quad (8)$$

$$\dot{\varepsilon}_{a\beta}^i = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m^k}{p^k} \left[(\dot{u}_a^i - \dot{u}_a^k) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_\beta^i} + (\dot{u}_\beta^k - \dot{u}_\beta^i) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_a^i} \right]; \quad (9)$$

$$R_{a\beta}^i = \frac{1}{2} \sum_k \frac{m^k}{p^k} \left[(\dot{u}_a^k - \dot{u}_a^i) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_\beta^i} - (\dot{u}_\beta^k - \dot{u}_\beta^i) \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_a^i} \right]. \quad (10)$$

Производные типа $\frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_\beta^i}$ и $\frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x_\beta^i}$ берутся от аналитической весовой функции, поэтому справа от знака равенства в уравнениях (5)–(10) стоят алгебраические выражения. Интегрирование уравнений для i -й частицы производится, как правило, по явной схеме Эйлера:

$$\begin{cases} \vec{x}^{i,n+1} = \vec{x}^{i,n} + \Delta t \left(\vec{u}^{i,n} + \frac{1}{2} \Delta t \vec{f}_2^{i,n} \right); \\ E^{i,n+1} = E^{i,n} + \Delta t \vec{f}_3^{i,n}; \\ p^{i,n+1} = p^{i,n} + \Delta t \vec{f}_1^{i,n}; \\ \vec{u}^{i,n+1} = \vec{u}^{i,n} + \Delta t \vec{f}_2^{i,n}; \\ \hat{S}^{i,n+1} = \hat{S}^{i,n} + \Delta t \vec{f}_4^{i,n}; \\ \hat{\sigma}^{i,n+1} = -\hat{\delta} \Delta p(p^{i,n+1}, E^{i,n+1}) + \hat{S}^{i,n+1}, \end{cases}$$

где $\hat{S}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\sigma}$ — тензорные величины;

$\vec{u} = (\dot{u}_x, \dot{u}_y, \dot{u}_z)$ — вектор скорости деформации;

Δt — шаг по времени;

значение p — вычисляется по формуле (4);

индексы n и $n+1$ указывают на предыдущий и текущий временные слои.

Видно, что значение компонента тензора напряжений $\sigma^{i,n+1}$ вычисляется с помощью уравне-

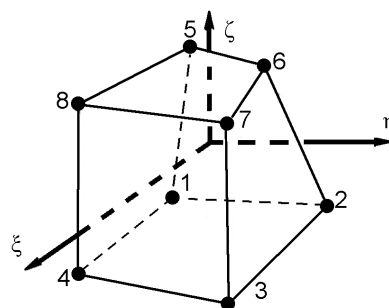


Рис. 3. Объемный восьмиузловой элемент в параметрических координатах

ния состояния по вычисленным значениям плотности $p^{i,n+1}$ и девиатора $S^{i,n+1}$.

Шаг интегрирования выбирается следующим образом:

$$\Delta t = \min_i \frac{ah^i}{\sqrt{\max(c^i, \dot{u}^i)^2 + \left(\frac{h^i \dot{p}^i}{p^i} \right)^2}};$$

$$a = 0, 1 \div 0, 4,$$

где $\dot{u}^i$ — скорость i -й частицы;

c^i — скорость звука в i -й частице;

h^i — радиус сглаживания i -й частицы;

p^i — плотность i -й частицы;

$\dot{p}^i = f_1^i$ — производная по времени i -й частицы;

α — зависит от используемого метода.

Практика показала, что методы дают устойчивое решение при значении $a = 0, 1$. Так как в задачах возможно возникновение сверхзвуковых течений, то в знаменателе содержится максимум скорости частицы и продольной скорости звука в этой частице. При наличии сверхзвуковых течений возможно сильное увеличение плотности и в этом случае существенную роль играет член $\left(\frac{h^i \dot{p}^i}{p^i} \right)^2$.

Выводы

Разработана модель высокоскоростного взаимодействия в системе «поражающий элемент — преграда», основанная на методе конечных элементов с использованием эволюционирующего во времени алгоритма адаптивной

сетки. Модель учитывает различные механизмы разрушения материала преграды, включая хрупкое разрушение, пластическое течение и сдвиговую локализацию. Исследование демонстрирует точность и эффективность модели и её способность предсказывать механизмы разрушения преграды и кинематические поля деформаций и напряжений. Модель может быть использована для анализа различных сценариев высокоскоростного взаимодействия и оптимизации конструкций средств поражения и преград. Разработанная модель имеет важное значение для понимания механизмов разрушения при высокоскоростном взаимодействии. Она предоставляет исследователям и инженерам мощный инструмент для анализа и оптимизации конструкций средств поражения и преград. Модель может способствовать разработке более эффективных средств защиты от высокоскоростных поражающих элементов.

Список источников

1. Бабкин А.В., Селиванов В.В. Механика разрушения деформируемого тела. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 424 с.
2. Cai S., Feng J., Xu H. et al. The concentration of deformation caused by the closed end contributes to the destruction of the sleeve in the lower part[J]. Defence Technology 2020; 16 (6): 1151–9.
3. LS-DYNA Theory Manual. Livermore: LSTC, 2019. 686 p.
4. Бабкин А.В., Колпаков В.Н., Охитин В.Н. и др. Численные методы в задачах физики быстротекающих процессов. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2005. 518 с.
5. Велданов В.А., Тихонов К.М., Тишков В.В. Прикладная теория удара. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016. 44 с.
6. Галлагер Р.М. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
7. Басов К.А. ANSYS справочник пользователя. М.: Изд-во ДМК-Пресс, 2005. 640 с.

8. Герасимов А.В. Высокоскоростной удар. Моделирование и эксперимент. Томск: изд. НТЛ, 2016. 568 с.

9. Зарубин В.С., Селиванов В.В. Вариационные и численные методы механики сплошной среды. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. 508 с.

10. Зенкевич О.В., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. М.: Мир, 1974. 239 с.

References

1. Babkin A.V., Selivanov V.V. Mechanics of fracture of a deformable body. M.: Publishing house of MSTU im. N.E. Bauman, 2005. 424 p.
2. Cai S., Feng J., Xu H. et al. The concentration of deformation caused by the closed end contributes to the destruction of the sleeve in the lower part[J]. Defence Technology 2020; 16 (6): 1151–9.
3. LS-DYNA Theory Manual. Livermore: LSTC, 2019. 686 p.
4. Babkin A.V., Kolpakov V.N., Okhitin V.N. et al. Numerical methods in problems of physics of fast-flowing processes. M.: Publishing house of MSTU im. N.E. Bauman, 2005. 518 p.
5. Veldanov V.A., Tikhonov K.M., Tishkov V.V. Applied theory of impact. M.: Publishing house of MSTU named after N.E. Bauman, 2016. 44 p.
6. Gallagher R.M. Finite element method. Fundamentals. M.: Mir, 1984. 428 p.
7. Basov K.A. ANSYS user guide. M.: Publishing house DMC-Press, 2005. 640 p.
8. Gerasimov A.V. High-speed impact. Modeling and experiment. Tomsk: ed. NTL, 2016. 568 p.
9. Zarubin V.S., Selivanov V.V. Variational and numerical methods of continuum mechanics. M.: Publishing house of MSTU im. N.E. Bauman, 1993. 508 p.
10. Zenkevich O.V., Chang I. Finite element method in the theory of structures and continuum mechanics. M.: Mir, 1974. 239 p.