

УДК 623.5.531

doi: 10.53816/23061456\_2025\_5–6\_18

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ТРАЕКТОРИИ ДЛЯ ПОРАЖЕНИЯ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

## MODELING THE OPTIMAL TRAJECTORY FOR HITTING A MOVING OBJECT

*Д-р техн. наук С.Д. Беляева, канд. техн. наук В.Ю. Калинин*

*D.Sc. S.D. Belyaeva, Ph.D. V.Y. Kalinin*

*Михайловская военная артиллерийская академия*

Рассмотрена задача поражения цели объектом поражения. При этом определено, что необходимым условием решения является необходимость поражения цели объектом поражения по нормали к ее траектории плоского или пространственного движения, что, по определению, обеспечит наибольший эффект воздействия. Из принципа оптимального управления сформированы условия оптимальности. Представлена математическая модель, позволяющая найти параметры искомой траектории встречи объекта поражения с целью, построенная на принципах решения вариационной задачи прогнозирования наиболее оптимальной длины пути, представленного в виде соответствующего функционала, с учетом условий трансверсальности. Проведено компьютерное моделирование и с помощью разработанной программы определены все параметры оптимизированной траектории для двумерной и трехмерной постановки задачи.

**Ключевые слова:** оптимальная траектория, вариационное исчисление, функционал, условия трансверсальности, моделирование оптимальной траектории.

The task of hitting a target with an object of destruction is considered. At the same time, it is determined that a necessary condition for the solution is the need to hit the target with an object of damage normal to its trajectory of flat or spatial movement, which, by definition, will provide the greatest impact effect. Optimality conditions are formed from the principle of optimal control. A mathematical model is presented that makes it possible to find the parameters of the desired trajectory of the collision of the target object, based on the principles of solving the variational problem of predicting the most optimal path length, represented as an appropriate functional, taking into account the conditions of transversality. Computer modeling was performed and all parameters of the optimized trajectory for two-dimensional and three-dimensional problem formulation were determined using the developed program.

**Keywords:** optimal trajectory, calculus of variations, functional, transversality conditions, optimal trajectory modeling.

### Вводная часть

Эффективность поражения различных объектов военного назначения противника напря-

мую зависит от технических характеристик поражающих объектов, а также существенным образом определяется принципами их функционирования при наведении на цель, основу которых

составляют математические методы, в том числе вариационного исчисления и оптимального управления. При этом с практической точки зрения представляется возможным формализовать несколько типовых задач, связанных с определением оптимального пути для поражения движущегося объекта перпендикулярно его боковой или верхней поверхности: поражение наземной цели, поражение беспилотного летательного аппарата (далее — БПЛА) противника с земли, поражение цели подвижным наземным или воздушным средством поражения. Указанные задачи могут иметь плоскую или пространственную постановку.

### Основная часть

1. Рассмотрим формальную постановку следующей задачи. Пусть точка «а» (цель) движется с постоянной скоростью  $V_a$  по заранее заданной кривой (траектории)  $r_a(t)$ ; точка «b» (средство поражения) движется с постоянной скоростью  $V_{b_1}$  по другой заданной траектории  $r_b(t)$ . Необходимо найти оптимальную траекторию, которая предполагает момент встречи средства поражения с целью ортогонально ее направлению движения в условиях того, что в некоторый момент времени  $t_0$ , при котором расстояние между точками станет минимальным, точка «b» изменит свою первоначальную заданную траекторию и начнет движение к точке «а» с постоянной скоростью  $V_{b_2} > V_{b_1}$  по оптимальной траектории, которая должна минимизировать затраченный путь.

Исходная точка переключения для точки «b» — это положение  $B_0 = r_b(t_0)$ .

Формулировка задачи предполагает, что конечная точка встречи  $A_f$  находится на траектории точки «а», то есть  $A_f = r_a(t_f)$  для некоторого конечного момента  $t_f$ .

Условием оптимальности (из принципа оптимального управления и вариационного исчисления) является то, что оптимальный (кратчайший) путь от  $B_0$  до  $A_f$  — это прямая, а в точке  $A_f$  эта прямая должна быть перпендикулярна касательной к траектории «а».

Итак, цель задачи — найти момент встречи  $t_f$  (и, соответственно, конечное положение  $A_f$  на траектории «а»), для которого выполняется условие:

$$r_a(t_f) - B_0 \cdot \overline{t_a(t_f)} = 0,$$

где  $\overline{t_a(t_f)}$  — единичный вектор, касательный к траектории «а» в точке  $A_f$ .

2. Математическая модель и постановка задачи.

Пусть траектория точки «а» задана функцией:

$$r_a(t) = [x_a(t); y_a(t)],$$

например,

$$x_a(t) = V_a \cdot 0,9t; \quad y_a(t) = \sin(t) + 0,2 \sin(3t),$$

где  $V_a$  — скорость точки «а».

Пусть траектория точки «b» задана функцией:

$$r_b(t) = [x_b(t); y_b(t)],$$

например,

$$\begin{aligned} x_b(t) &= V_{b_1} \cdot t; \\ y_b(t) &= \sin(t) + offset + 0,2 \cos(3t) + 2,5, \end{aligned}$$

где  $V_{b_1}$  — скорость точки «b» до изменения направления движения;

*offset* — смещение по оси  $y$ .

Моментом  $t_0$  изменения направления движения средства поражения в сторону цели, согласно условию, выбран момент минимального расстояния между траекториями (его можно определить программно, найдя минимум  $d(t) = |r_a(t) - r_b(t)|$ ).

3. Функционал оптимальности для точки «b» после переключения.

После момента  $t_0$  точка «b» переходит на оптимальную траекторию, которая определяется как прямая из начальной точки переключения  $B_0 = r_b(t_0)$  в некоторую точку.

$A_f = r_a(t_f)$  на траектории «а». При постоянной скорости (например, если управление минимизирует длину пути) оптимальный (минимальный) путь — это именно прямая линия.

Для оптимизации пути часто рассматривается функционал длины пути [2, 4]:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, y, x', y') dt,$$

где  $L = \sqrt{(x'^2 + y'^2)}$ .

Задача минимизации длины траектории при постоянной скорости сводится к поиску кратчайшей линии, вместе с тем, сам процесс минимизации на самом деле приводит к необходимости решения уравнений Эйлера — Лагранжа, которые являются основой вариационного исчисления и используются для определения условий экстремума функционалов. Решением эйлеровского уравнения для данного функционала является прямая линия [1, 2].

4. Условие трансверсальности (концевое условие оптимальности).

При наличии свободного конечного момента  $t_f$  применяется условие трансверсальности. Для данной задачи (свободное  $t_f$ ) условие имеет вид:

$$r_a(t_f) - B_0 \cdot \overline{\mathbf{t}_a(\mathbf{t}_f)} = 0,$$

то есть в оптимальной точке встречи вектор, соединяющий начальное значение  $B_0$  и  $A_f$ , должен быть перпендикулярен касательной в точке  $A_f$  к траектории цели. Это условие используется для определения времени  $t_f$ , в котором точка  $A_f$  находится на траектории

«a» и удовлетворяет тому, что прямая линия  $B_0 \rightarrow A_f$  перпендикулярна касательной к траектории «a».

#### 5. Численное решение.

Для того чтобы найти момент встречи  $t_f$  (и, соответственно, конечное положение  $A_f$  на траектории «a»), необходимо численно решить уравнение:

$$F(t_f) = r_a(t_f) - B_0 \cdot \overline{\mathbf{t}_a(\mathbf{t}_f)} = 0.$$

Выражения для  $r_a(t_f)$  и касательной  $\tau_a(t_f)$  в условиях рассматриваемой задачи вычисляются как:

$$r_a(t_f) = V_a \cdot t_f;$$

$$\sin(t_f) + 0,2 \cdot \sin(3t_f);$$

$$\tau_a(t_f) \approx \frac{r_a(t_f + \Delta t) - r_a(t_f)}{|r_a(t_f + \Delta t) - r_a(t_f)|}.$$

Для решения уравнения  $F(t_f) = 0$  численным методом средствами программы Матлаб, можно использовать оператор «fsolve».

Для демонстрации решения поставленной задачи была разработана компьютерная программа. Результаты расчета показаны на рис. 1.

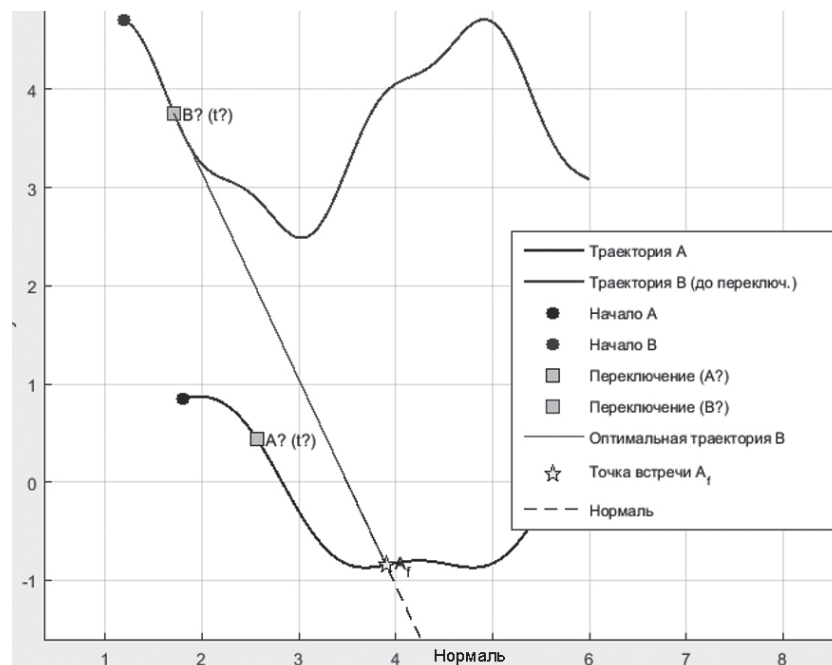


Рис. 1. Оптимизация траектории объекта поражения на основе использования уравнения Эйлера — Лагранжа и условий трансверсальности

Представленный рисунок иллюстрирует работу двумерной модели построения оптимальной траектории для поражения цели.

Алгоритм программы построен на обработке следующих шагов.

1. Инициализация параметров и построение траекторий: задаются все используемые параметры (скорости, смещения, временной интервал), строятся траектории для точек «a» и «b» до момента времени  $t_0$  минимального сближения траекторий.

2. Нахождение момента переключения  $t_0$ : вычисляется расстояние между точками на траекториях «a» и «b» по всему интервалу времени; минимальное расстояние соответствует моменту времени  $t_0$  минимального сближения траекторий и перенаправления движения средства поражения в сторону цели.

3. Расчет начальных положений  $A_0$  и  $B_0$ : вычисляются положения на траекториях в момент  $t_0$ .

4. Определение условия трансверсальности и поиск  $t_f$ : задается анонимная функция  $F\_func$ , которая для каждого входного  $t\_val$  вычисляет

$$F(t\_val) = (\mathbf{r}_a(t\_val) - \mathbf{B}_0) \cdot \mathbf{t}_a(t\_val),$$

где  $t\_val$  — входной аргумент, его роль заключается в представлении значения параметра времени, для которого вычисляются координаты (или производная) траектории;

$\mathbf{r}_a(t\_val)$  — вектор, который определяет положение точки  $A_0$  в момент времени  $t\_val$ ;

$\mathbf{B}_0$  — вектор, который определяет положение точки в момент переключения;

$\mathbf{t}_a(t\_val)$  — вектор касательный к траектории «a».

Для решения уравнения  $F(t_f) = 0$  применяется оператор «fsolve» с выбранным начальным приближением (например,  $t_0 + 2$ ).

5. Вычисление конечного положения  $A_f$ : после нахождения  $t_f$  вычисляется  $A_f = r_a(t_f)$ .

6. Построение оптимальной траектории для точки «b»: как оптимальный путь выбирается прямая линия, соединяющая  $B_0$  и  $A_f$ ; для визуализации эта прямая аппроксимируется параметризованной функцией от 0 до 1.

7. Построение графиков.

Применение указанного подхода позволяет реализовать стратегию «погони за целью», когда объект поражения строит свою оптимальную траекторию движения без прогнозирования траектории цели, исходя из ее текущего положения в пространстве на данный момент времени (рис. 2).

Разработанная компьютерная программа, в основу которой положен представленный выше математический аппарат, была несколько видоизменена для решения пространственной задачи поражения подвижным ударным БПЛА подвижной воздушной цели. Переход от двумерной реализации к трехмерной — включает расширение вектора координат от 2 до 3, что отражается как на определении траекторий, так и на вычислениях (расстояния, производных, норм, углов). Дополнительно визуализация становится трехмерной, что требует использования специальных графических функций, при этом основная логика

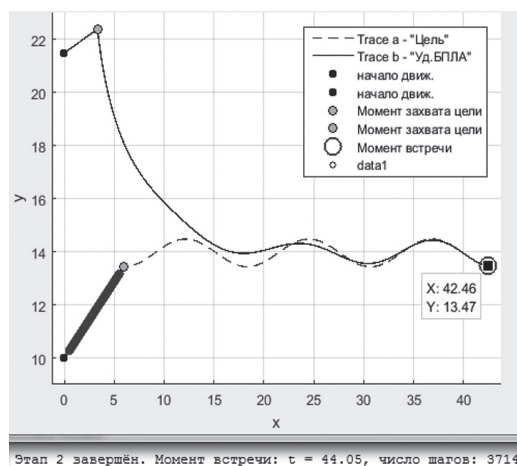


Рис. 2. Результаты моделирования траекторий преследования цели

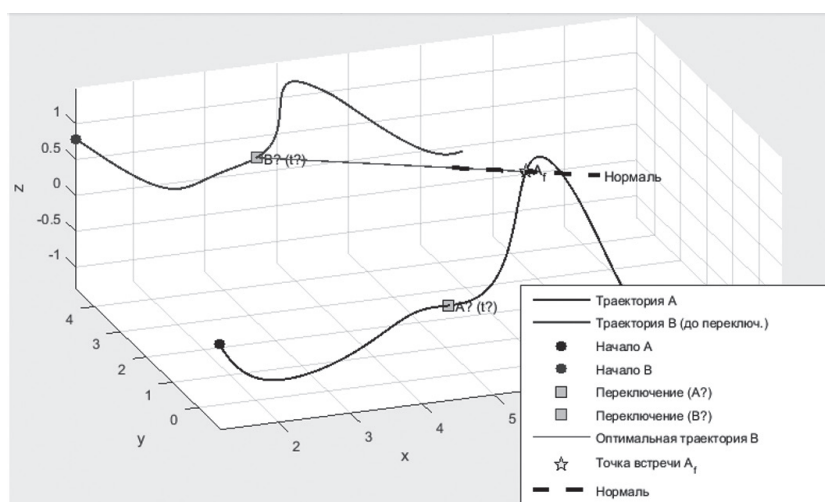


Рис. 3. Результаты оптимизации траектории с использованием уравнения Эйлера — Лагранжа и условий трансверсальности (пространственная модель)

(нахождение момента переключения, условие трансверсальности и оптимизация траектории) сохраняется — лишь расширяется количество измерений, за счет чего вычисления выполняются в более общем случае (трехмерном пространстве).

Результаты 3D-моделирования решения задачи представлены на рис. 3.

### Заключение

Таким образом, в результате решения одной из типовых задач, связанных с определением оптимального пути для поражения движущегося объекта перпендикулярно его боковой или верхней поверхности, наглядно продемонстрирован принцип нахождения оптимальной точки и траектории встречи объекта поражения с целью. Подобный подход широко применяется в задачах оптимального управления, где конечное время или конечное состояние задачи является свободной переменной, и для их определения используются условия трансверсальности. Реализация данной постановки задачи и последующее численное решение посредством применения принципов вариационного исчисления позволяет повысить эффективность поражения различных объектов военного назначения противника.

Рассмотренные подходы рационально использовать в математическом обеспечении функционирования различных автономных средств поражения (в том числе ударных БПЛА).

### Список источников

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Гос.изд. физ-мат лит, 1961. 227 с.
2. Беляева С.Д., Калинин В.Ю. Модели теплового состояния элементов артиллерийской системы и прогнозирование оптимального режима ее функционирования по критерию безопасности // Вопросы оборонной техники. Серия 16. Технические средства противодействия терроризму. 2023. № 7–8 (181–182). С. 107–113.
3. Огородникова О.М. Вычислительные методы в компьютерном инжиниринге: учеб. пособие. Екатеринбург: УрФУ, 2013. 130 с.

### References

1. Gelfand I.M., Fomin S.V. Calculus of variations. Moscow: State Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 1961. 227 p.
2. Belyaeva S.D., Kalinin V.Yu. Models of the thermal state of the elements of the artillery system and forecasting the optimal mode of its operation according to the safety criterion // Issues of defense technology. Series 16. Technical means of countering terrorism. 2023. No 7–8 (181–182). Pp. 107–113.
3. Ogorodnikova O.M. Computational methods in computer engineering: a textbook. Yekaterinburg: UrFU, 2013. 130 p.