

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТАХ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

О. В. Кондырев¹, А. О. Лапич², М. Ю. Медведик³

^{1, 2, 3} Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹ kow20002204@mail.ru, ² lapich.a@yandex.ru, ³ _medv@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Основная задача исследования заключается в эффективном решении сложной в вычислительном отношении обратной задачи дифракции, применимой к объектам произвольной геометрии. Для достижения этой цели используются параллельные алгоритмы. Особое внимание уделяется минимизации времени вычислений. *Материалы и методы.* Для решения данной задачи необходимо численно решить интегральное уравнение. Для эффективного решения обратной задачи используется двухшаговый метод. *Результаты.* Представлены графические изображения, иллюстрирующие исходные и восстановленные значения для неоднородных объектов, а также даны оценки ускорения и эффективности программы. *Выводы.* Разработан и реализован численный метод, позволяющий решать задачу определения неоднородностей в объектах. Для ускорения вычислительного процесса применен программный интерфейс MPI. Сравнение полученных результатов восстановления объекта демонстрирует возможность выявления различных типов неоднородностей.

Ключевые слова: обратная задача, интегральное уравнение, краевая задача, численный метод, двухшаговый метод, расчетные сетки, параллельные вычисления, MPI

Для цитирования: Кондырев О. В., Лапич А. О., Медведик М. Ю. Применение параллельных вычислений в обратной задаче дифракции на диэлектрических объектах с неоднородностями // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2025. № 2. С. 95–106. doi: 10.21685/2227-8486-2025-2-8

APPLICATION OF PARALLEL CALCULATIONS IN THE INVERSE DIFFRACTION PROBLEM ON DIELECTRIC OBJECTS WITH INHOMOGENEITIES

O.V. Kondyrev¹, A.O. Lapich², M.Yu. Medvedik³

^{1, 2, 3} Penza State University, Penza, Russia

¹ kow20002204@mail.ru, ² lapich.a@yandex.ru, ³ _medv@mail.ru

Abstract. *Background.* The main objective of the study is to effectively solve the computationally complex inverse diffraction problem applicable to objects of arbitrary geometry. Parallel algorithms are used to achieve this goal. Special attention is paid to minimizing the calculation time. *Materials and methods.* To solve this problem, it is necessary to numerically

solve the integral equation. A two-step method is used to effectively solve the inverse problem. *Results.* Graphical images illustrating the original and reconstructed values for inhomogeneous objects are presented. Estimates of the acceleration and effectiveness of the program are presented. *Conclusions.* A numerical method has been developed and implemented to solve the problem of determining inhomogeneities in objects. The MPI programming interface is used to speed up the computing process. A comparison of the results demonstrates the possibility of identifying different types of inhomogeneities.

Keywords: inverse problem, integral equation, boundary value problem, numerical method, two-step method, computational grids, parallel calculations, MPI

For citation: Kondyrev O.V., Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Application of parallel calculations in the inverse diffraction problem on dielectric objects with inhomogeneities. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve* = *Models, systems, networks in economics, technology, nature and society*. 2025;(2):95–106. (In Russ.). doi: 10.21685/2227-8486-2025-2-8

Введение

В настоящее время задача эффективной и качественной медицинской помощи остается актуальной. Обратная задача дифракции – важная область исследований в оптике, физике и технике с широким спектром применения: от медицинской диагностики до радиолокационных изображений и др. [1–6]. Это задача определения формы и свойств объекта, который создает наблюдаемое дифракционное поле. В отличие от прямой задачи дифракции, где мы знаем форму и свойства объекта и хотим вычислить дифракционное поле, в обратной задаче мы знаем только дифракционное поле, которое порождает исследуемый объект, и хотим определить свойства объекта. Качество восстановленного изображения напрямую зависит от источника внешнего поля и размера расчетной сетки, за счет которой решается задача. Для получения качественного изображения неоднородностей требуется увеличение размера расчетной сетки. Однако при уменьшении размера ячейки сетки необходимо увеличивать частоту источника (что требует применения для подобных проверок специализированного дорогостоящего оборудования), иначе восстановленное изображение будет искаженным.

Решение обратной задачи дифракции часто требует огромных вычислительных ресурсов, что делает применение параллельных вычислений крайне актуальным. Преимуществами параллельных вычислений являются: ускорение, эффективность, возможность решения сложных задач.

На данный момент основными подходами являются:

- распределенные вычисления: использование множества компьютеров, объединенных в сеть, для обработки больших объемов данных;
- GPU-ускорение: использование графических процессоров для выполнения вычислительно-интенсивных задач, таких как обработка изображений и моделирование физических процессов.

В настоящей работе для организации параллельных вычислений будет применен программный интерфейс MPI (Message Passing Interface) [7–13]. Данный стандарт широко применяется при создании программ для кластеров и суперкомпьютеров, обеспечивая эффективное взаимодействие между множеством процессов.

Материалы и методы

Рассмотрим неоднородный плоский объект Q , расположенный в пространстве R^2 . Область вне тела (R^2 / Q) характеризуется волновым числом $k_0 > 0$, а внутри тела задается функцией неоднородности $k(x)$ при $x \in Q$. Таким образом, получаем следующую систему:

$$k_p(x) = \begin{cases} k(x), x \in Q, \\ k_0, x \notin Q. \end{cases} \quad (1)$$

Мы представляем общее поле как сумму падающего и отраженного от объекта, т.е.

$$u_p(x) = u_0(x) + u(x), \quad (2)$$

где $u_0(x)$ является полем падающей волны, а $u(x)$ – функция поля, отраженного от объекта Q . Поставленная задача характеризуется уравнением Гельмгольца, которое представляет собой частный случай дифференциального уравнения в частных производных второго порядка [14]:

$$\Delta u_p(x) + k_p^2(x)u_p(x) = 0. \quad (3)$$

В контексте данной задачи уравнение Гельмгольца используется для описания распространения и рассеяния волн на объектах различной геометрии. Решение этого уравнения позволяет получить информацию о геометрических и электромагнитных свойствах объекта.

На границе раздела двух сред должны выполняться условия сопряжения, которые отражают физические принципы сохранения заряда и непрерывности электрического поля. Эти условия включают

$$[u_p(x)]_{\partial Q} = 0, \left[\frac{\partial u_p(x)}{\partial n} \right]_{\partial Q} = 0, \quad (4)$$

где $[.]_{\partial Q}$ обозначает скачок поля на границе объекта Q .

На бесконечности выполняются условия излучения Зоммерфельда [15]:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial r} - ik_0 u(x) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), r = |x| \rightarrow \infty, \quad (5)$$

которые представляют собой граничные условия для электромагнитного поля в безграничной области. Эти условия гарантируют, что поле излучается в бесконечность без отражений и соответствует физически реализуемым волнам.

Предположим, что внешнее электромагнитное поле, падающее на объект, создается точечным источником, расположенным вне тела. В таком случае вектор напряженности электрического поля задается формулой

$$u_0(x) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 |x - x_0|), \quad (6)$$

где x_0 – координата исходного положения, которая не принадлежит телу Q .

Таким образом, задача состоит в том, чтобы найти неизвестную функцию неоднородности $k(x)$ по известным характеристикам источника и известного поля вне тела.

1. Сведение задачи к интегральному уравнению

Прямая задача дифракции может быть описана с помощью интегрального уравнения Липпмана – Швингера, которое связывает рассеянное поле с падающим полем и поляризуемостью тела [16–18]:

$$u(x) - \int_Q G(x, y) (k_0^2 - k^2(y)) u(y) dy = u_0(x), \quad (7)$$

где $G(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0 |x - x_0|)$ является фундаментальным решением уравнения Гельмгольца.

Уравнение Липпмана – Швингера является интегральным уравнением Фредгольма второго рода и может быть решено численно с использованием различных методов. Чтобы решить эту проблему, мы применяем метод коллокации. Возьмем исследуемый объект Q и введем на нем единую вычислительную сетку размера $N \times N$, т.е. $Q = \{x: a < x_1 < b, c < x_2 < d, x_3 = c\}$. Размер ячейки равен $h_{x_1} = (b - a) / N$, $h_{x_2} = (d - c) / N$. Пронумеруем все полученные прямоугольники расчетной сетки $\Pi_{kl} \in Q$, где $1 < k < N$, $1 < l < N$.

Теперь нам нужно изменить существующую вычислительную сетку. Для этого каждую ячейку Π_{kl} необходимо продублировать четыре раза и переместить на небольшое расстояние в разных направлениях: влево-вверх (рис. 1, а), вправо-вверх (рис. 1, б), справа внизу (рис. 1, в), слева внизу (рис. 1, г), где прямоугольник с пунктирной границей является исходной ячейкой Π_{kl} , и сплошная граница – это новая сетка.

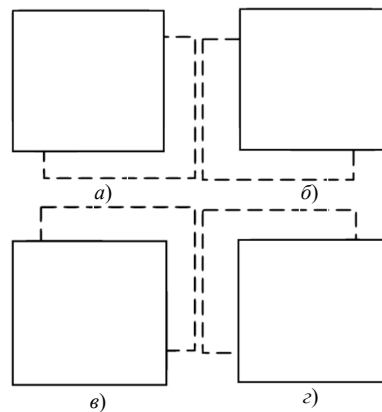


Рис. 1. Элемент вычислительной сетки

Аналогично работаем с остальными элементами. Таким образом, мы получаем новое разбиение тела Q , элементы которого обозначаются как Π_{kl} . Поскольку каждая ячейка была увеличена в 4 раза, размер задачи увеличивается как $2N \times 2N$. Обозначим это через $\tilde{N} = 2N$. Такие сдвиги приводят

к появлению чрезмерно детерминированной вычислительной сетки. Эти изменения позволяют хранить больше информации, что, в свою очередь, делает задачу более стабильной.

Предлагаемый подход основан на использовании обобщенных расчетных сеток [16–18]. Это приводит к более эффективному использованию вычислительных ресурсов и повышению устойчивости решения обратной задачи. Важно отметить, что размеры ячеек расчетной сетки остаются неизменными. Меняются положение и количество ячеек. Благодаря этому мы получаем новую математическую модель задачи, которая более устойчива к восстановлению неоднородностей.

Введем кусочно-постоянную базисную функцию $\chi_{kl}(x)$. Представим $u(x)$ в виде линейной комбинации базисных функций $u(x) = \sum_{kl} \alpha_{kl} \chi_{kl}(x)$. Заменяя неизвестную функцию в уравнении (7) линейной комбинацией, мы получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для нахождения неизвестных коэффициентов α_{kl} .

Поскольку для решения обратной задачи требуется значение суммарного поля при точечных наблюдениях, мы дополнительно опишем процедуру их построения. Требуемое количество точек равно порядку расчетной сетки, т.е. $4N^2$ или $\tilde{N}^2$.

Центр каждой ячейки будет смещен в соответствии со значением ширины или длины тела по одной координате в сторону, противоположную направлению от источника поля. В связи с тем, что ячейки были смещены за пределы тела, мы отодвигаем все точки наблюдения на небольшое расстояние. Таким образом, все значения полного поля будут взяты с противоположной стороны от источника гармонических колебаний.

2. Решение обратной задачи двухшаговым методом

Решением обратной задачи является восстановление функции, которая описывает неоднородность среды, используя данные о полном поле, измеренном в некоторых точках. Ключевым моментом является использование уравнения, которое связывает полное поле с неоднородностью. Мы восстановим неоднородности на объекте, используя двухшаговый метод. На этапе решения прямой задачи определяем значения поля $U_v(y^v)$ в точках наблюдения. После этого мы можем найти $J(y)$ как решение интегрального уравнения первого рода:

$$U_v(y^v) = \int_Q G(x, y^v) J(x) dx + f(y^v).$$

Последним шагом является вычисление требуемой функции неоднородности $k(y)$:

$$\frac{J(y)}{k^2(y) - k_0^2} - \int_Q G(x, y) J(x) dx = f(y).$$

Более подробную информацию о применении двухшагового метода можно найти в работах [14–20].

3. Использование Message Passing Interface

Представленная задача отличается большой вычислительной сложностью. Размер матрицы напрямую влияет на время решения как прямой, так и обратной задачи. В связи с этим необходимо реализовать параллельный алгоритм.

Решение задачи можно разделить на четыре последовательных этапа:

1. На первом этапе вычисляются элементы матрицы для прямой задачи. Каждый элемент матрицы вычисляется независимо от других, что упрощает процесс распараллеливания. Это занимает примерно 10 % от общего времени, затрачиваемого на процесс решения и необходимого для имитации ближнего поля в точках наблюдения.

2. Окончательное решение прямой задачи получается путем решения системы линейных алгебраических уравнений. Мы решаем систему, основанную на матрице, полученной на предыдущем шаге, чтобы найти значения для неизвестных переменных.

3. Следующим шагом является вычисление матрицы для обратной задачи. Матрица должна быть рассчитана с максимально возможной точностью, поскольку она составлена как решение интегрального уравнения первого рода. Количество условностей этой матрицы обычно значительно превышает количество условностей матрицы, полученной на первом этапе.

4. Наконец, мы решаем другую систему линейных алгебраических уравнений, которая была вычислена на предыдущем этапе. Это помогает нам найти значения входных параметров, которые необходимы для получения выходных данных или результатов решения обратной задачи.

Основываясь на результатах первого и третьего этапов, мы хотим получить матрицу, пригодную для решения на этапах 2 и 4. Таким образом, параллельный алгоритм применим только на этапах, упомянутых выше.

Для создания параллельной программы был выбран пакет MPI. Так как MPI работает с отдельной памятью, это позволяет эффективно сохранять матрицу на различных процессах. Для взаимодействия процессов мы используем функции обмена сообщениями, такие как MPI_SEND и MPI_SSEND, а также функции коллективного обмена сообщениями MPI_BCAST и MPI_REDUCE.

Поскольку на всех этапах мы имеем достаточно большую матрицу, было бы логично распределить ее между запущенными процессами для оптимального выделения памяти. Это будет удобно как для заполнения, так и для решения СЛАУ. Мы будем хранить матрицу в виде лент для каждого запущенного процесса отдельно. Ширина ленты будет равна ширине самой матрицы $\tilde{N}$, а высота ленты $\tilde{N}_i$ для каждого процесса i рассчитывается по следующей формуле:

$$N_i = \left\lceil \frac{\tilde{N}}{s} \right\rceil + \begin{cases} 1, & i < \text{mod}(\tilde{N} / s), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где s – количество процессов, $i = 1 \dots s$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^s \tilde{N}_i = \tilde{N}$. Последний член отвечает за коррекцию высоты в том случае, если целочисленное деление высоты матрицы на количество процессов приводит к получению остатка.

После деления мы распределяем оставшиеся строки одну за другой по процессам, начиная с первой, т.е. если $\text{mod}(\tilde{N}/s) = 0$, то все процессы получают равные участки матрицы. Поскольку матрица уже распределена между процессами, заполнение матрицы в прямой и обратной задачах происходит без обмена пакетами информации между запущенными процессами, и каждый из них заполняет свою часть. Для решения СЛАУ был выбран метод Гаусса. Благодаря специальному матричному хранилищу становится возможным выполнять параллельные операции в методе Гаусса на этапе обнуления столбца под ведущим элементом. Для этого основная строка отправляется всем процессам, и каждый из них независимо выполняет разностную операцию со своими строками.

Результаты и обсуждение

В качестве объекта исследования мы возьмем квадратную плоскость, внутри которой расположены некоторые неоднородности. Поместим тело в центр координат и примем длину одной стороны квадрата равной 0,15 м.

При решении прямой задачи мы сразу же установим значения функции $\tilde{k}(y) \equiv (k_0^2 - k^2(y))$. Для получения численных результатов мы принимаем следующие значения неоднородности: 0,15 – фоновое значение, от 0,55 до 0,8 – значения неоднородностей. Сетку на теле возьмем порядка $N = 40$, тогда обобщенная сетка будет порядка $\tilde{N} = 80$.

Предположим, что источник излучения расположен в точке $x_0 = (0, -3)$. Это означает, что источник падающего поля находится вне тела.

Применим описанный выше алгоритм по восстановлению неоднородности в объекте. На рис. 2 изображена исходная и восстановленная схемы неоднородности. Вычислительный комплекс полностью восстановил форму и значения неоднородностей в исследуемом теле.

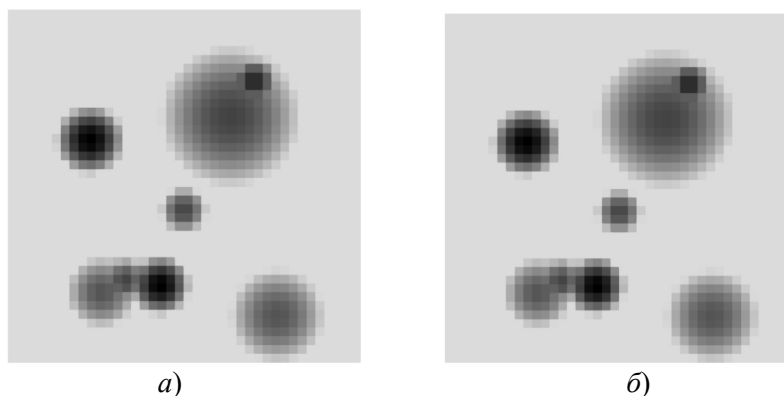


Рис. 2. Значения функции неоднородности $k(x)$:
а – исходные; б – восстановленные

Для симуляции реальных данных внесем случайный шум до 5 % в задачу и повторим вычисления. Результат отображен на рис. 3. Максимальная ошибка в значениях составила 0,035.

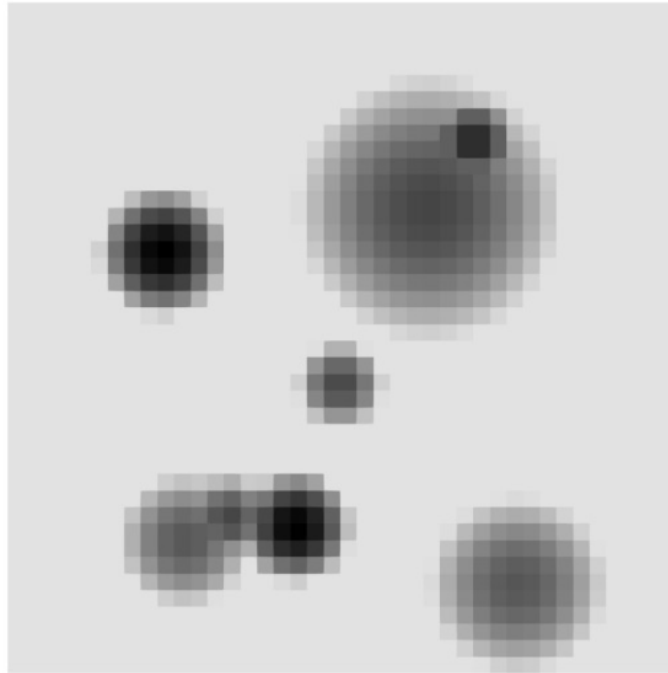


Рис. 3. Восстановленные значения функции неоднородности $k(x)$ с введением погрешности 5 %

Для оценки ускорения и эффективности программы выполним серию запусков с количеством вычислительных процессов от 1 до 10. Результаты эксперимента отображены далее на рис. 4–6 в виде графика.

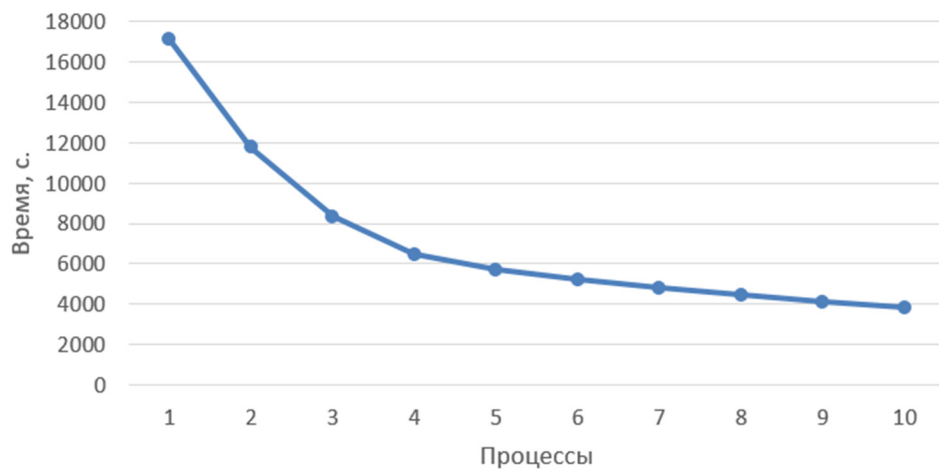


Рис. 4. Сравнение скорости при использовании параллельных вычислений

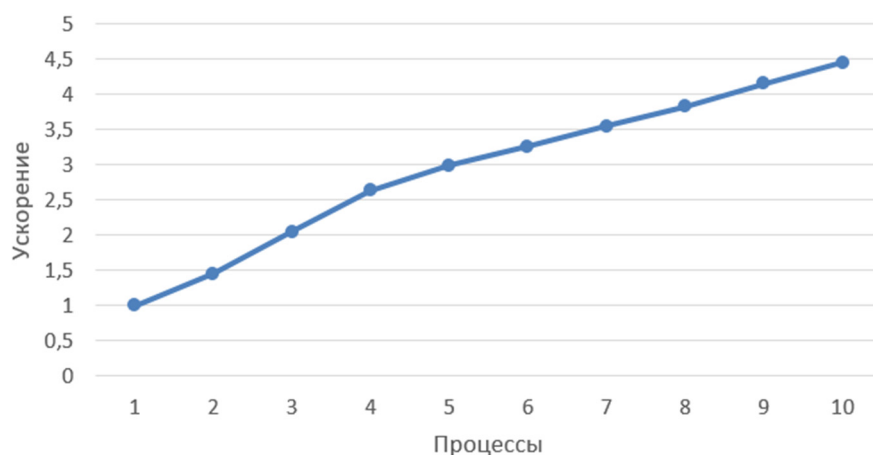


Рис. 5. Показатель ускорения в зависимости от количества процессов

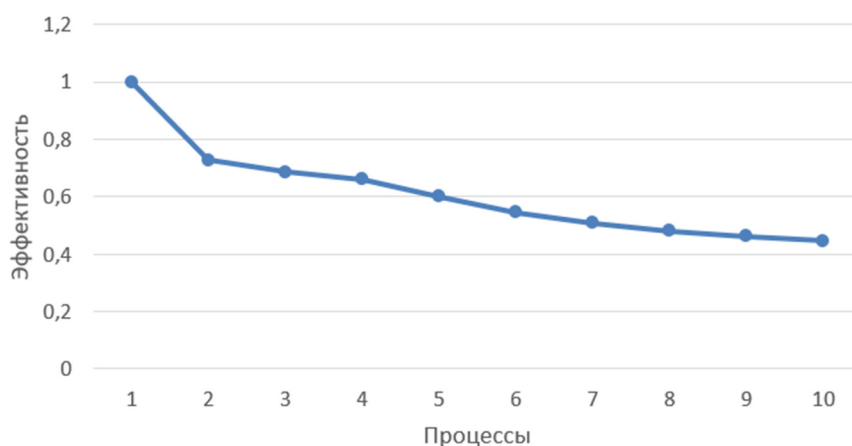


Рис. 6. Показатель эффективности в зависимости от количества процессов

Заключение

В работе рассматривалась актуальная модель решения прямой и обратной задач. Для проверки метода в некоторых расчетах были внесены различные ошибки. После этого исходные данные были сопоставлены с результатами решения обратной задачи. Результаты эксперимента показали, что шум на уровне 5 % существенно не влияет на результат решения задачи. Предложенный алгоритм восстановления неоднородности не требует начальных значений, поскольку процесс не является итеративным. Этот факт значительно упрощает процесс расчета. Использование модели с применением новой вычислительной сетки стабилизирует решение и не требует увеличения частот падающего поля. Этот факт имеет решающее значение во многих приложениях. Поскольку построенная модель требует большого количества вычислений, в работе на этапе формирования матрицы используется параллельный подход.

Список литературы

1. Дмитриев В. И. Обратные задачи геофизики. М. : МАКС Пресс, 2012. 340 с.
2. Brown B. M., Marlett M., Reyes J. M. Uniqueness for an inverse problem in electro-magnetism with partial data // *J. Differential Equations*. 2016. Vol. 260. P. 525–654.
3. Bakushinsky A. B., Kokurin M. Yu. Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems. New York : Springer, 2004. 291 p.
4. Beilina L., Klibanov M. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems. New York : Springer, 2012. 407 p.
5. Kabanikhin S. I., Satybaev A. D., Shishlenin M. A. Direct Methods of Solving Multidimensional Inverse Hyperbolic Problems Utrecht. VSP, 2004. 179 p.
6. Romanov V. G. Inverse Problems of Mathematical Physics. Utrecht, The Netherlands : VNU, 1986. 236 p.
7. Оленев Н. Н. Основы параллельного программирования в системе MPI. М. : ВЦ РАН, 2005. 77 с.
8. Антонов А. С. Параллельное программирование с использованием технологии MPI. М. : Изд-во МГУ, 2004. 71 с.
9. Корнеев В. Д. Параллельное программирование в MPI. Новосибирск : Изд-во СО РАН, 2000. 215 с.
10. Немнюгин С. А., Стесик О. Л. Параллельное программирование для много-процессорных вычислительных систем. СПб. : БХВ-Петербург, 2002. 397 с.
11. Хуторова О. Г. Основы работы с библиотекой MPI : учеб.-метод. пособие. Казань : Казан. ун-т, 2022. 32 с.
12. Малявко А. А. Параллельное программирование на основе технологий OpenMP, MPI, CUDA : учеб. пособие. Новосибирск : НГТУ, 2015. 116 с.
13. Земляная Е. В., Башахин М. В. Введение в параллельное программирование на основе технологий MPI и OpenMP : учеб. пособие. Дубна : Государственный университет «Дубна», 2023. 101 с.
14. Смирнов Ю. Г., Цупак А. А. Математическая теория дифракции акустических и электромагнитных волн на системе экранов и неоднородных тел. М. : Русайне, 2016. 223 с.
15. Sommerfeld A. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung // *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 1912. Bd. 21. P. 309–353.
16. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Решение скалярной двумерной нелинейной задачи дифракции на объектах произвольной формы // *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. 2023. Т. 165, кн. 2. С. 166–176.
17. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Метод обобщенных и объединенных расчетных сеток для восстановления параметров неоднородностей тела по результатам измерений электромагнитного поля // *Математическое моделирование*. 2024. Т. 36, № 4. С. 24–36.
18. Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Direct and inverse scalar scattering problems for the Helmholtz equation in $\mathbb{R}^m$ // *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2022. Vol. 30, № 1. P. 101–116.
19. Лапич А. О., Медведик М. Ю. Алгоритм поиска неоднородностей в обратных нелинейных задачах дифракции // *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. 2024. Т. 166, кн. 3. С. 395–406.
20. Lapich A. O., Medvedik M. Yu. Method for reconstruction the parameters of body inhomogeneities from the results of electromagnetic field measurements // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024. Vol. 45, № 10. P. 4628–4635.

References

1. Dmitriev V.I. *Obratnye zadachi geofiziki = Inverse problems of geophysics*. Moscow: MAKS Press, 2012:340. (In Russ.)

2. Brown B.M., Marlett M., Reyes J.M. Uniqueness for an inverse problem in electro-magnetism with partial data. *J. Differential Equations*. 2016;260:525–654.
3. Bakushinsky A.B., Kokurin M.Yu. *Iterative Methods for Approximate Solution of Inverse Problems*. New York: Springer, 2004:291.
4. Beilina L., Klibanov M. *Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problems*. New York: Springer, 2012:407.
5. Kabanikhin S.I., Satybaev A.D., Shishlenin M.A. *Direct Methods of Solving Multidimensional Inverse Hyperbolic Problems Utrecht*. VSP, 2004:179.
6. Romanov V.G. *Inverse Problems of Mathematical Physics*. Utrecht, The Netherlands: VNU, 1986:236.
7. Olenev N.N. *Osnovy parallel'nogo programmirovaniya v sisteme MPI = Fundamentals of parallel programming in the MPI system*. Moscow: VTs RAN, 2005:77. (In Russ.)
8. Antonov A.S. *Parallel'noe programmirovaniye s ispol'zovaniem tekhnologii MPI = Parallel programming using MPI technology*. Moscow: Izd-vo MGU, 2004:71. (In Russ.)
9. Korneev V.D. *Parallel'noe programmirovaniye v MPI = Parallel programming in MPI*. Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, 2000:215. (In Russ.)
10. Nemnyugin S.A., Stesik O.L. *Parallel'noe programmirovaniye dlya mnogoprotsessornykh vychislitel'nykh sistem = Parallel programming for multi-processor computing systems*. Saint Petersburg: BKhV-Peterburg, 2002:397. (In Russ.)
11. Khutorova O.G. *Osnovy raboty s bibliotekoy MPI.: ucheb.-metod. posobie = Basics of working with the MPI library.: studies.- the method. stipend*. Kazan: Kazan. un-t. 2022:32. (In Russ.)
12. Malyavko A.A. *Parallel'noe programmirovaniye na osnove tekhnologiy OpenMP, MPI, CUDA: ucheb. posobie = Parallel programming based on OpenMP, MPI, and CUDA technologies : a tutorial*. Novosibirsk: NGTU., 2015:116. (In Russ.)
13. Zemlyanaya E.V., Bashashin M.V. *Vvedeniye v parallel'noe programmirovaniye na osnove tekhnologiy MPI i OpenMP: ucheb. posobie = Introduction to parallel programming based on MPI and OpenMP technologies: a tutorial*. Dubna: Gosudarstvennyy universitet «Dubna», 2023:101. (In Russ.)
14. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. *Matematicheskaya teoriya difraktsii akusticheskikh i elektromagnitnykh voln na sisteme ekranov i neodnorodnykh tel = Mathematical theory of diffraction of acoustic and electromagnetic waves on a system of screens and inhomogeneous bodies*. Moscow: Rusayns, 2016:223. (In Russ.)
15. Sommerfeld A. Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* 1912;21:309–353.
16. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Solving a scalar two-dimensional nonlinear diffraction problem on objects of arbitrary shape. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. fiz.-matem. Nauki = Scientific notes of Kazan University. Ser. phys.-checkmate. sciences*. 2023;165(bk.2):166–176. (In Russ.)
17. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. The method of generalized and combined computational grids for restoring the parameters of body inhomogeneities based on the results of electromagnetic field measurements. *Matematicheskoe modelirovaniye = Mathematical modeling*. 2024;36(4):24–36. (In Russ.)
18. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Direct and inverse scalar scattering problems for the Helm-holtz equation in $\mathbb{R}^m$. *J. Inverse Ill-Posed Probl.* 2022;30(1):101–116.
19. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Algorithm for finding inhomogeneities in inverse nonlinear diffraction problems. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Ser. Fiz.-matem. nauki = Scientific notes of Kazan University. Ser. phys.- checkmate. sciences*. 2024;166(bk.3):395–406. (In Russ.)
20. Lapich A.O., Medvedik M.Yu. Method for reconstruction the parameters of body inhomogeneities from the results of electromagnetic field measurements. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2024;45(10):4628–4635.

Информация об авторах / Information about the authors

Олег Владимирович Кондырев

заведующий лабораторией разработки
программного обеспечения,
Пензенский государственный
университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: kow20002204@mail.ru

Oleg V. Kondyrev

Head of the laboratory of software
development,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Андрей Олегович Лапич

ассистент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: lapich.a@yandex.ru

Andrey O. Lapich

Assistant of the sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Михаил Юрьевич Медведик

кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: _medv@mail.ru

Mikhail Yu. Medvedik

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor of the
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /
The authors declare no conflicts of interests.**

Поступила в редакцию/Received 19.03.2025

Поступила после рецензирования/Revised 08.04.2025

Принята к публикации/Accepted 17.06.2025