



Проекционный принцип построения функционально-воксельных моделей

© 2025, А.В. Толок ✉, Н.Б. Толок

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (ИПУ РАН), Москва, Россия

Аннотация

Рассматривается проблема автоматизированного получения пространственной цифровой модели по плоским чертежам. Об актуальности свидетельствует множество существующих подходов к её решению. Новым является использование аналитического R-функционального геометрического моделирования к решению задач на основе структурного подхода к конструированию описания аналитическими функциями сложного геометрического объекта. Обсуждаются принципы компьютерного аналитического конструирования сложных геометрических объектов с применением функционально-воксельного моделирования (ФВ-моделирование). Такое моделирование обеспечивает переход от непрерывного представления области аналитических функций к дискретно-непрерывному компьютерному аналогу, базирующемуся на графических многомерных образах-моделях, позволяющих хранить информацию о локальной функции в каждой точке дискретной области. Принципы ФВ-моделирования применены к функциям R-функционального моделирования, составляющего основу аналитических конструкций сложного геометрического объекта. Показана возможность изменения размерности пространства аргумента путём добавления дополнительной или изъятия лишней локальной геометрической характеристики, позволяющей описать влияние такого аргумента на поведение формулируемой функции. Рассматривается принцип увеличения размерности ФВ-модели области плоской функции для последующего применения средств R-функционального моделирования на трёхмерной области. Применение принципа ФВ-моделирования функций В.Л. Рвачёва позволяет обеспечить переход к расчёту локальных геометрических характеристик линейной функции, что снижает сложность компьютерного представления R-функциональной модели. На основе закона вращения в плоскости вокруг ортогональной оси разработан принцип вращения ФВ-модели, позволяющий на основе плоской ФВ-модели для функции-проекции построить пространственную ФВ-модель фигуры вращения. Разработанные инструменты ФВ-моделирования можно рассматривать как дополнительный инструмент к решению основной задачи 3D-моделирования по плоским проекциям (чертежам).

Ключевые слова: R-функция, проекция, функционально-воксельная модель, M-образ, локальная функция, пересечение, закон вращения.

Цитирование: Толок А.В., Толок Н.Б. Проекционный принцип построения функционально-воксельных моделей. *Онтология проектирования*. 2025. Т.15. №4(58). С.523-534. DOI: 10.18287/2223-9537-2025-15-4-523-534.

Вклад авторов: Толок А.В. – разработаны теоретические принципы проекционного подхода в аналитическом моделировании геометрических объектов; Толок Н.Б. – проведена практическая апробация принципов с компьютерной реализацией на представленных примерах.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Введение

Задача автоматизации построения пространственной модели по её чертежам является актуальной, поскольку с приходом автоматизированных подходов к проектированию возникла задача заполнения баз данных конструкций [1-7]. Задача состоит в описании модели объекта в 3D-пространстве, что влечёт за собой описание проекционных связей между проекциями и обеспечение перехода к другому измерению каждого из пространственных элементов, составляющих геометрический объект. Подходы к такому переходу средствами параметриза-

ции, предложенные в [1], а также в других отечественных [2-5] и зарубежных работах [6-8], позволяют подойти к решению задачи, но пока не привели к полноценному алгоритму построения цифровой 3D-модели, обеспечивающей требуемую точность описания поверхностей объектов параметрическими функциями. Интересные результаты достигнуты в [9] посредством применения искусственного интеллекта при распознавании чертежа. В этой работе, несмотря на воксельное представление результата, «теряются» основные геометрические характеристики восстанавливаемого объекта. Задачу увеличения размерности геометрического объекта целесообразно привести к обобщённому виду для многомерного пространства.

1 Постановка задачи

Один из прогрессивных подходов к многомерному геометрическому моделированию на базе функций В.Л. Рвачёва [10] (*R*-функциональное моделирование, *RFM*) описан в [11, 12]. Суть подхода – в моделировании плоского контура чертежа аналитическими функциями, описывающими области значений, характеризующих нулевую границу плоского геометрического объекта, положительную зону значений внутри и отрицательную снаружи. В аналитическом представлении геометрический объект легко поддаётся увеличению размерности его пространства. В качестве примера предлагается рассмотреть принцип построения четырёхмерного пространства аргумента для заданной функции $y = f^{[1]}(x)$ одномерного пространства (в квадратных скобках указывается размерность пространства аргумента функции). На рисунке 1 изображен график функции для одномерного пространства аргумента.

Перенос значения переменной y в правую часть уравнения переводит её в аргумент, а уравнение при этом приобретает неявный вид:

$$f^{[2]}(x, y) = f^{[1]}(x) - y = 0.$$

Все точки на кривой приобретают нулевое значение, а закон рассматриваемой кривой определяется поверхностью для двухмерного пространства аргумента как показано на рисунке 2 и записывается как: $z = f^{[2]}(x, y)$.

Повторение этой процедуры к вновь полученному уравнению преобразует функцию к неявному виду:

$$f^{[3]}(x, y, z) = f^{[2]}(x, y) - z = 0 \text{ или } u = f^{[3]}(x, y, z).$$

Значения u теперь обнуляются на поверхности и образуют трёхмерные области положительных и отрицательных значений (рисунок 3).

Процесс можно продолжать далее, наращивая размерность пространства аргумента, однако зрительно сложно себе представить получаемые геометрические объекты.

Аналитический подход к описанию геометрических моделей сопровождается сложными вычислениями и долгое время считался непригодным для автоматизации. Попытки применения *RFM* к построению поверхностных моделей [13] привели к значительной потере полезных данных, содержащихся на области описываемого функционала и, главное, к потере основного свойства увеличения размерности. В [14, 15] предложен метод функционально-воксельного моделирования (ФВ-моделирование), позволивший построить компьютерную модель таким образом, что она в целом сохраняет свойства аналитической модели на выбранной области в многомерном пространстве. Исследования показали, что такой подход к моделированию может позволить решать различные задачи геометрического моделирования на компьютере [16-19], а также вполне применим к задаче построения пространственного геометрического объекта по его аналитическим проекциям (чертежам). В предлагаемом материале ставится задача сформулировать аналитические принципы основных процедур получения описания 3D геометрического объекта по его плоским проекциям, описанным аналитическими функциями, представленными на компьютере в виде ФВ-моделей.

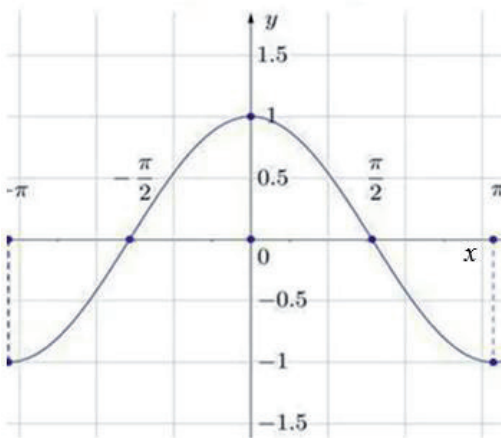


Рисунок 1 – График функции $y = \cos x$

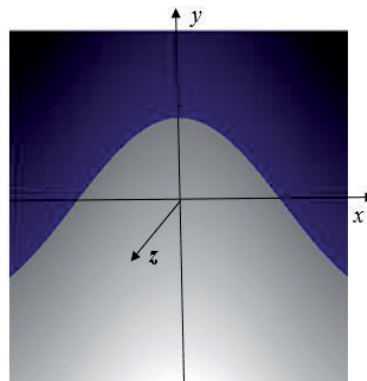
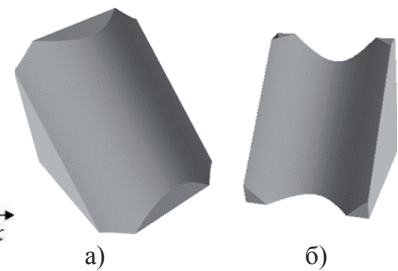


Рисунок 2 – График функции $z = \cos x - y$



а) область положительных значений
б) область отрицательных значений

Рисунок 3 – Значения области функции $u = \cos x - y - z$

2 Функционально-воксельное моделирование

Метод ФВ-моделирования хорошо зарекомендовал себя в ряде прикладных направлений, среди которых: компьютерное моделирование R -функциями объектов аналитической геометрии, решение задач многомерного моделирования, расчёт физических характеристик в инженерных задачах, прокладка градиентного спуска с учётом препятствий к намеченной цели в задачах оптимизации. При этом аналитическая функция $F(X_m) = 0$, описывающая геометрический объект, представляется набором графических M -образов $(M_1, \dots, M_{m+1})$, содержащих данные для формирования области локальных функций $L(X_m, N_{m+1}) = 0$. Здесь N_{m+1} – компоненты нормированного однородного вектора градиента в рассматриваемой точке. Каждая локальная функция моделирует линейную аналитическую зависимость $n_1 x_1 + \dots + n_m x_m + n_{m+1} = 0$, поведение которой в рассматриваемой точке полностью соответствует исходной аналитической функции $F(X_m) = 0$, что позволяет использовать её в дальнейших расчётах. Такой подход к представлению геометрической информации позволяет решать задачи компьютерного моделирования на уровне применения локальных функций в каждой точке рассматриваемой области. Подобное представление функции позволяет применять к ФВ-моделям функциональные операции, что значительно расширяет возможности моделирования многомерных геометрических объектов сложной формы, выполняя такие упрощённые вычисления.

Размерность пространства для функции определяет количество её аргументов, поэтому количество слагаемых локальной функции определяется количеством аргументов, увеличенным на два слагаемых. Например, функция $z = f(x, y)$ имеет два аргумента x, y , а значит четыре слагаемых определяют локальную функцию; $n_1 x + n_2 y + n_3 z + n_4 = 0$. На рисунке 4 показана схема получения компьютерного представления заданной области такой функции в виде M -образов.

Предложенным способом можно кодировать информацию об аналитической функции любой размерности, описывая геометрические объекты любой сложности на заданной области аргументов. На рисунке 5 показано описание сложной геометрии, представленной тремя аргументами пространства (x, y, z) в виде пяти многослойных M -образов, где каждый слой образов M_i в заданной точке области характеризует значение n_i . Кодировка цвета в точке каждого из M -образов представляется в RGB (*Red, Green, Blue* – цветовая модель) формате

единым целочисленным значением, представляющим соответственно 16777216^1 возможных положительных целых чисел ($M_i = 0 \dots 16777215$), а значит точность представления значений компоненты n_i доведена до пятого знака после запятой. Трёхмерный объект представлен пятью такими компонентами локальной функции (рисунок 5).

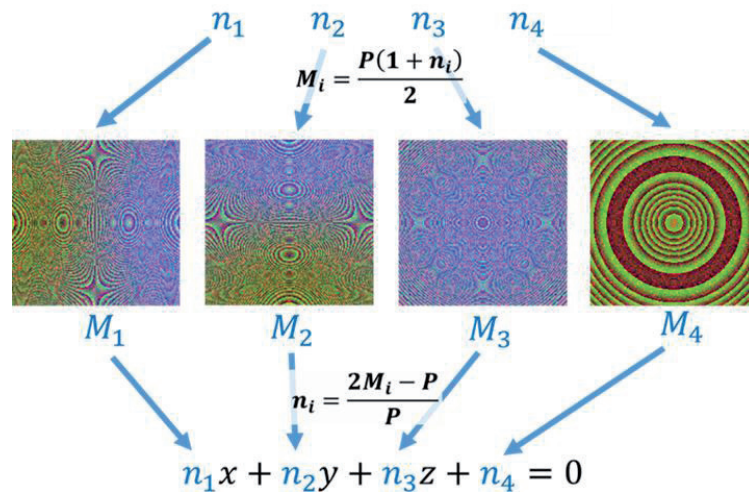


Рисунок 4 – Графическая кодировка области функции набором M -образов с последующим получением локальной функции $L(x, y, z, N_4) = 0$

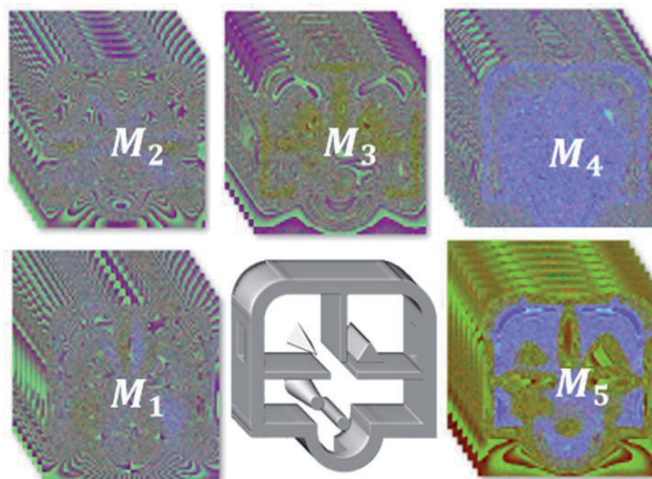


Рисунок 5 – Графическая кодировка области функции набором M -образов с последующим получением локальной функции $L(x, y, z, u, N_5) = 0$

3 Принцип проекционного ФВ-моделирования

Можно отметить сходство между традиционным конструированием на проекциях и аналитическим конструированием на функциях, а также единство в проекционном применении аналитического описания геометрических объектов. Например, аналитическое описание цилиндра радиусом основания r и высотой h можно представить двумя функциями с пространством аргумента более низкой размерности, т.е. функциями двухмерного пространства аргумента и одномерного: $f(x, y) = r^2 - x^2 - y^2$ и $g(z) = h^2 - z^2$. На рисунке 6 представлены ФВ-модели соответствующих функций, где M -образы распределены в соответствии пяти положениям в трёхмерном пространстве аргумента. Чтобы обеспечить этим ФВ-моделям про-

¹ Каждый цвет в RGB имеет 256 оттенков от 0 до 255, то есть всего $256 * 256 * 256 = 16\,777\,216$ возможных оттенков.

ективное свойство в трёхмерном пространстве аргумента функции «цилиндр», достаточно дополнить недостающие M -образы «нулевыми», т.е. отображающими нулевое значение в каждой точке, образами. Результат представлен на рисунке 7.

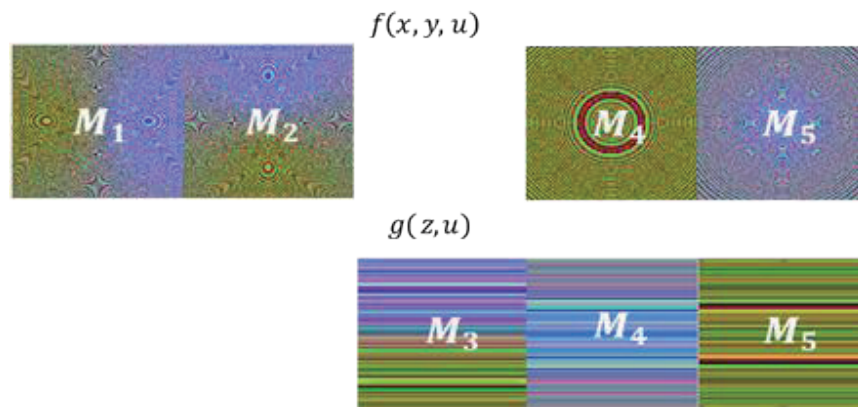


Рисунок 6 – Последовательное расположение M -образов согласно пяти компонентам локальной функции четырёх аргументов (x, y, z, u)

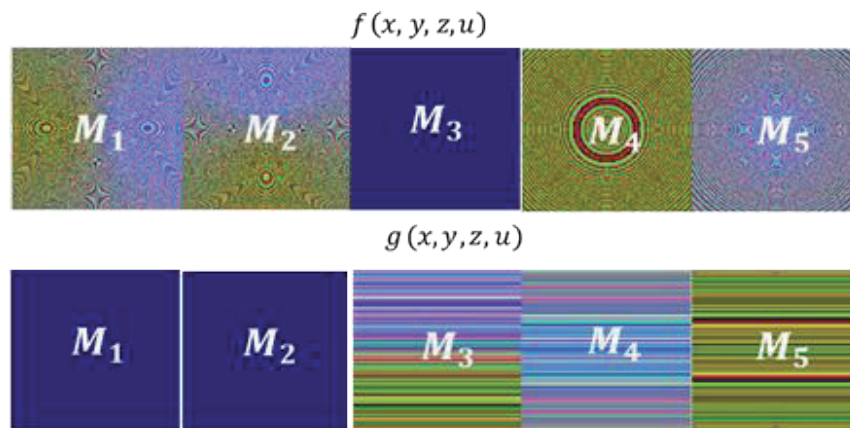


Рисунок 7 – Заполненная последовательность расположения M -образов согласно пяти компонентам локальной функции четырёх аргументов (x, y, z, u)

В аналитическом способе пересечение и объединение положительных и отрицательных значений на заданной области двух функций осуществляется посредством R -функционального моделирования. Например, функция пересечения двух функций выглядит следующим образом: $R(x, y, z) = f(x, y) + g(z) - \sqrt{f(x, y)^2 + g(z)^2}$ или $u = u_1 + u_2 - \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$, где $u_1 = r^2 - x^2 - y^2$, $u_2 = h^2 - z^2$. Можно также использовать локальные функции в точках ФВ-модели:

$$u_1 = -\frac{n_1^{[1]}}{n_4^{[1]}}x - \frac{n_2^{[1]}}{n_4^{[1]}}y - \frac{n_5^{[1]}}{n_4^{[1]}}, u_2 = -\frac{n_3^{[2]}}{n_4^{[2]}}z - \frac{n_5^{[2]}}{n_4^{[2]}}.$$

Полученные точки положительного значения области u показаны на рисунке 8.



Рисунок 8 – Фигура, построенная R -функцией пересечения согласно положительным значениям

$$u = u_1 + u_2 - \sqrt{u_1^2 + u_2^2}.$$

4 Функционально-воксельное пересечение

В задаче, представленной в разделе 3, осуществлялось выделение точек трёхмерного пространства для положительной области пересечения двух функций $f(x, y)$ и $g(z)$. Для перехода к задаче получения ФВ-модели той же трёхмерной фигуры «цилиндр» необходимо выразить функцию, которая по примеру функции В.Л. Рвачёва выполняет послойное формирование M -образов, представляющих область функции «цилиндр» на основе полученных ФВ-моделей для $f(x, y, z, u)$ и $g(x, y, z, u)$. Значение цветовой градации M_i в точке M -образа пересчитывается в компоненту вектора $n_i = (2M_i - P)/P$, где $i = 1 \dots 5$, $P = 16777216$ градаций цвета. В результате записываются локальные функции для обеих ФВ-моделей: $n_1^{[1]}x + n_2^{[1]}y + n_3^{[1]}z + n_4^{[1]}u + n_5^{[1]} = 0$ и $n_1^{[2]}x + n_2^{[2]}y + n_3^{[2]}z + n_4^{[2]}u + n_5^{[2]} = 0$. Деление всех компонент на компоненту при аргументе u (это компоненты $n_4^{[1]}$ и $n_4^{[2]}$) приводит к записи:

$$l_{1,2,3,5}^{[1]} = \frac{n_{1,2,3,5}^{[1]}}{n_4^{[1]}}, l_{1,2,3,5}^{[2]} = \frac{n_{1,2,3,5}^{[2]}}{n_4^{[2]}}, l_4^{[1]} = l_4^{[2]} = 1.$$

Рассчитываются значения u для обеих функций на основе полученных коэффициентов (компонент) l_i : $u^{[1]} = -l_1^{[1]}x - l_2^{[1]}y - l_3^{[1]}z - l_5^{[1]}$, $u^{[2]} = -l_1^{[2]}x - l_2^{[2]}y - l_3^{[2]}z - l_5^{[2]}$.

Окончательное выражение закона для определения компонент локальной функции согласно R -функции пересечения записывается как:

$$l_i^{[R]} = l_i^{[1]} + l_i^{[2]} - \left(\frac{l_i^{[1]}u^{[1]} + l_i^{[2]}u^{[2]}}{\sqrt{(u^{[1]})^2 + (u^{[2]})^2}} \right), l_4^{[R]} = 1, i = 1, 2, 3, 5.$$

Результат получения ФВ-модели цилиндра показан на рисунке 9.

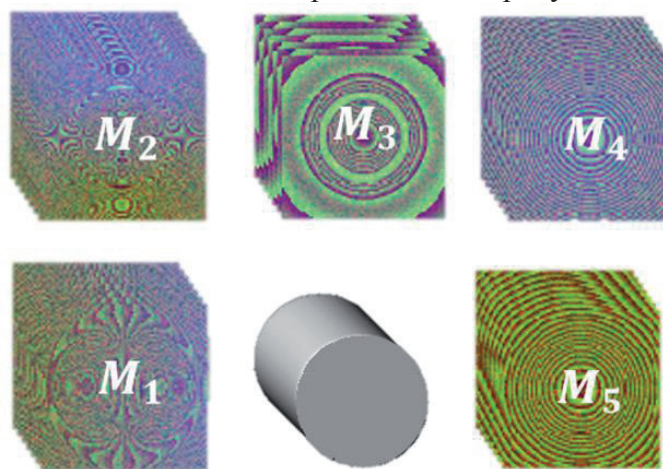


Рисунок 9 – Скомпонованная композиция из пяти трёхмерных M -образов и фигуры цилиндра, полученной на их основе

Количество и сложность проекций можно увеличивать, а также применять процедуру объединения:

$$l_i^{[R]} = l_i^{[1]} + l_i^{[2]} + \left(\frac{l_i^{[1]}u^{[1]} + l_i^{[2]}u^{[2]}}{\sqrt{(u^{[1]})^2 + (u^{[2]})^2}} \right), l_4^{[R]} = 1, i = 1, 2, 3, 5.$$

На рисунке 10 показано пересечение трёх проекций, обеспечивающих полному цилиндру два дополнительных сквозных отверстия с круглым и квадратным сечениями. Для наглядности проекции представлены ортогонально друг другу с выделением положительной области значений. В центре рисунка 10 помещена объёмная фигура, полученная в результате трёх последовательных пересечений.

5 Закон функционально-воксельного вращения

Закон ФВ вращения можно показать на примере построения сферы по одной проекции – окружности. Если применить шесть проекций (сверху, снизу, справа, слева, спереди и сзади) в виде окружностей, то при их пересечении сфера не получится. Отсюда следует, что для описания сферы по проекциям необходимо дополнительно указывать, что трёхмерная фигура является сферой, как фигура вращения её проекции (окружности).

Локальную функцию единичной сферы можно записать, применив её проекционную локальную функцию окружности с единичным радиусом, заданную на области от -1 до 1 по двум осям в плоскости xOz : $u = 1 - x^2 - z^2$.

Для получения единичной сферы достаточно вместо координаты x вписать закон вращения в плоскости xOy :

$$x' = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргументы под корнем определяют плоскость вращения (xOy). Подстановкой вместо аргумента x закона вращения (x') получается уравнение единичной сферы:

$$u = 1 - \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 - z^2 = 1 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Локальная функция, описывающая точки на заданной области сечения сферы в плоскости xOz , содержит следующее выражение: $n_1x + n_3z + n_4u + n_5 = 0$.

Замена аргумента x выражением закона вращения (x') в локальной функции даёт:

$$n_1\sqrt{x^2 + y^2} + n_3z + n_4u + n_5 = 0.$$

Умножением на выражение закона вращения всех компонент функции получается:

$$n_1 \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + n_3z\sqrt{x^2 + y^2} + n_4u\sqrt{x^2 + y^2} + n_5\sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

В результате преобразований формируется локальная функция, учитывающая закон вращения проекции в плоскости xOz : $\left(|n_1|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)x + \left(|n_1|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)y + n_3z + n_4u + n_5 = 0$, а значит $n'_1 = |n_1|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $n'_2 = |n_1|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

На рисунке 11 показана ФВ-модель сферы, полученная пересчётом компонент.

Пример вращения более сложной геометрической фигуры, составленной объединением окружности и треугольника, показан на рисунке 12.

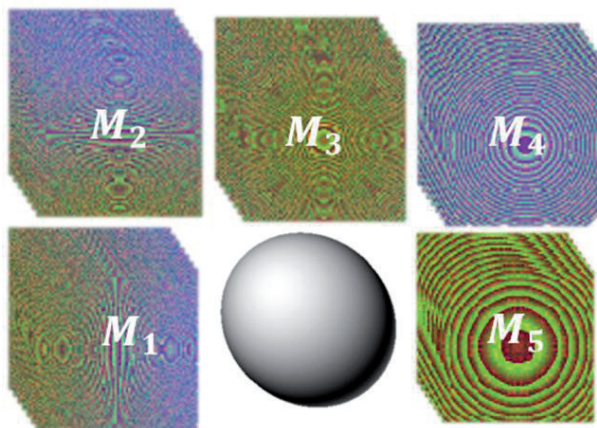


Рисунок 11 – Композиция из пяти трёхмерных M -образов и фигуры сферы, полученной на их основе

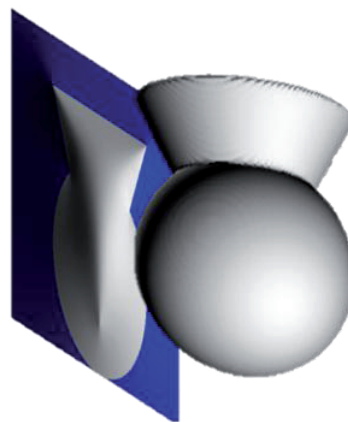


Рисунок 12 – Композиция из проекции M -образа и фигуры, полученной на его основе

Пример получения фигуры вращения для чертежа, рассматриваемого в работе [3], как способ получения функционально-воксельной 3D-модели по плоской проекции, описанной сложным контуром, представлен на рисунке 13.

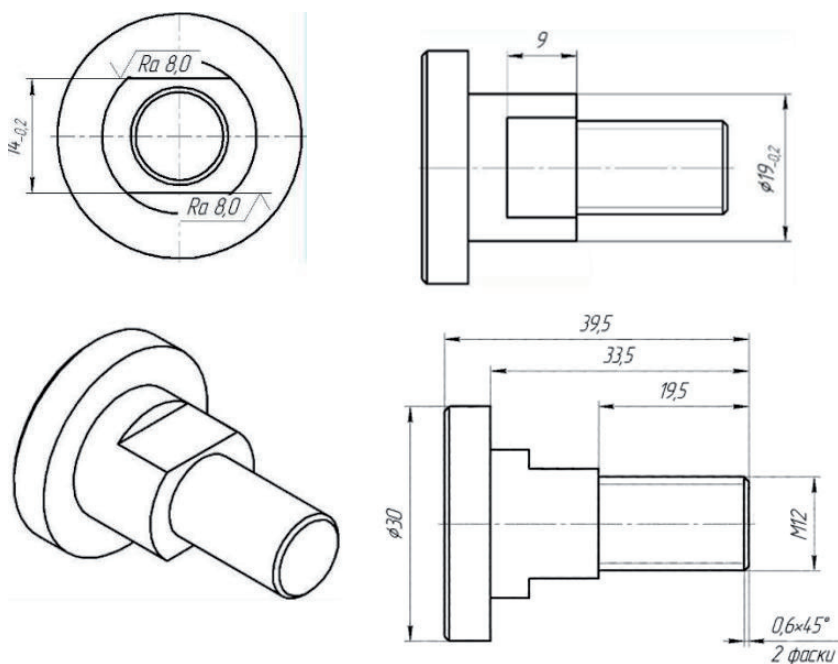


Рисунок 13 – Чертёж детали, рассмотренный в работе [3]

В [10] предложен аналитический способ описания сложного контура посредством пересечения/объединения полуплоскостей, задаваемых уравнением:

$$(y_i - y_{i+1})x - (x_i - x_{i+1})y + (x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1}) \geq 0,$$

где i – номер текущей точки контура.

При рассмотрении обобщённой функции в контексте R -функционального моделирования получается, что:

$$(y_i - y_{i+1})x - (x_i - x_{i+1})y + (x_{i+1}y_i - x_iy_{i+1}) = z_{i,i+1},$$

$$u = z_{1,2} \cap z_{2,3} \cap z_{3,4} \cap (z_{4,5} \cup (z_{5,6} \cap z_{6,7}) \cup z_{7,8}) \cap z_{8,9} \cap z_{9,10} \cap z_{10,11} \cap$$

$$\cap (z_{11,12} \cup (z_{12,13} \cap z_{13,14}) \cup z_{14,15}) \cap z_{15,16} \cap z_{16,1}.$$

Из этого выражения видно, что контур содержит последовательно расположенные 16 узловых точек, как показано на рисунке 14, где синим цветом выделена область отрицательных значений z . На рисунке 15 представлены четыре M -образа, кодирующие значение локальных геометрических характеристик для получения локальной функции в выбранной точке:

$$n_1x + n_3y + n_4z + n_5 = 0.$$

На рисунке 16 показан результат моделирования тела вращения по полученным четырём M -образам при малом разрешении 256x256 пикселей с применением закона вращения $x' = \sqrt{x^2 + z^2}$. В результате функционально-воксельного моделирования получается набор из пяти M -образов, описывающих трёхмерную область аргументов для локальной функции:

$$u = -\frac{n'_1}{n_4}x - \frac{n'_2}{n_4}y - \frac{n_3}{n_4}z - \frac{n_5}{n_4},$$

где $n'_1 = |n_1| \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $n'_2 = |n_1| \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $n_i = (2M_i - P)/P$, $i = 1 \dots 5$.

Для получения окончательного результата моделирования, сопоставимого с аксонометрией детали рисунка 13, на рисунке 17 показано применение области отсечения.

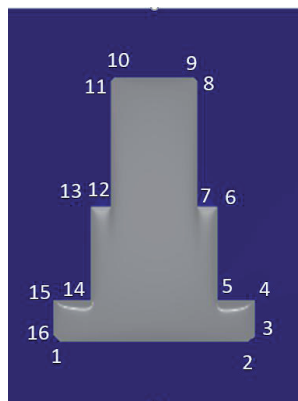


Рисунок 14 – Поверхность положительных значений z с нумерацией узлов нулевой границы

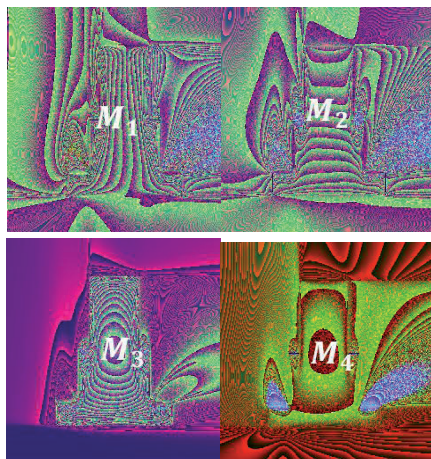


Рисунок 15 – Композиция из проекции M -образа и фигуры, полученной на его основе



Рисунок 16 – Композиция из проекции M -образа и фигуры, полученной на его основе

Заключение

Аналитическое конструирование можно рассматривать как структуру проекционных процедур. Она позволяет из проекций, как функций двух аргументов, собирать аналитическое описание сложного трёхмерного объекта. Разработанные инструменты в виде аналитических процедур пересечения, объединения и вращения, а также принципы увеличения размерности ФВ-модели позволяют моделировать 3D-область для функции описания пространственного геометрического объекта, формируя проекционные связи в виде функциональных закономерностей. Полученные результаты могут способствовать решению задачи построения функции описания трёхмерных геометрических объектов по функциям, описывающим элементы плоского чертежа.



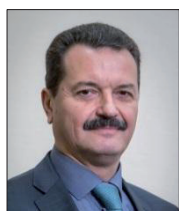
Рисунок 17 – Композиция из проекции M -образа отсечения и окончательной фигуры, полученной на его основе

Список источников

- [1] **Полозов В.С., Будеков О.А.** Автоматизированное проектирование. Геометрические и графические задачи. М.: Машиностроение, 1983. 277 с.
- [2] **Роменский С.А., Ротков С.И., Бурцев Ю.П. и др.** Восстановление каркасной модели 3D-объекта по бумажному архивному чертежу. *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура*. 2022. Т.22, №4. С.66-75. DOI 10.14529/build220407.
- [3] **Мошкова Т.В., Ротков С.И., Смычёк М.М., Тюрина В.А.** Задача преобразования каркасной модели 3D объекта, восстановленной по его техническому чертежу. *Научная визуализация* 2018. 10.5: 13-31. DOI: 10.26583/sv.10.5.02.
- [4] **Захаров А.А.** Исследование алгоритмов формирования трёхмерной модели по ортогональным видам. *Сборник научных статей: Алгоритмы, методы и системы обработки данных*. М.: ООО «Центр информационных технологий в природопользовании», 2010. С.4–9.
- [5] **Никаноров А.А.** Разработка программы восстановления каркасных 3D-объектов по 2D-проекциям. *Альманах современной науки и образования*. Тамбов: Грамота, 2014. №8. С.117-128.
- [6] **Lee H., Han S.** Reconstruction of 3D interacting solids of revolution from 2D orthographic views. *Computer-Aided Design*. 2005. 37: 1388-1398. DOI: 10.1016/j.cad.2005.01.007.
- [7] **Wang Z., Latif M.** Reconstruction of 3D Solid Models Using Fuzzy Logic Recognition. *Proceedings of the World Congress on Engineering*. 2007. V.1. P.37-42.

- [8] **Governi L., Furferi R., Palai M., Volpe Y.** 3D Geometry Reconstruction from Orthographic Views: a Method Based on 3D Image Processing and Data Fitting. *Computers in Industry*. 2013. No.64. P.1290-1300. DOI: 10.1016/j.compind.2013.02.003.
- [9] **Басов О.О., Носков Д.А.** Построение геометрической модели изделия на основе мультимодальной обработки бумажной конструкторской документации. *Экономика. Информатика*. 2025. 52(1): 137–144. DOI 10.52575/2687-0932-2025-52-1-137-144.
- [10] **Рвачев В.Л.** Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов. *Доклады Академии наук Украины*. 1963. Т.153. №4. С.765–767.
- [11] **Максименко-Шейко К.В.** R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей. Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. 306 с.
- [12] **Литвинова Ю.С., Максименко-Шейко К.В., Шейко Т.И.** Аналитическая идентификация трёхмерных геометрических объектов по информации о форме их сечений. *Проблемы машиностроения*. 2017. №1(20). С.45-51. EDN: YHXITN.
- [13] **Чопоров С.В., Лисняк А.А., Гоменюк С.И.** Использование функций В.Л. Рвачёва для геометрического моделирования областей сложной формы. *Прикладная информатика*. 2010. №2(26). С.109-122.
- [14] **Толок А.В.** Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании. М.: Физматлит. 2016. 112 с.
- [15] **Толок А.В., Толок Н.Б.** Локальная компьютерная геометрия. М.: Ай Пи Ар Медиа, 2025. 228 с.
- [16] **Tolok A.V., Tolok N.B.** Mathematical programming problems solving by functional voxel method. *Automation and Remote Control*. 2018. Vol.79(9). P.1703-1712. DOI: 10.1134/S0005117918090138.
- [17] **Локтев М.А.** Особенности применения функционально-воксельного моделирования в задачах поиска пути с препятствиями. *Информационные технологии в проектировании и производстве*. 2016. №1. С.45-49.
- [18] **Лоторевич Е.А.** Принципы пространственной визуальной компоновки аналитических моделей, отображённых в воксельном графическом пространстве. *Технология машиностроения*. 2013. №11. С.59-63.
- [19] **Плаксин А.М., Пушкарев С.А.** Геометрическое моделирование тепловых характеристик объектов функционально-воксельным методом. *Геометрия и графика*. 2020. Т.8, №1. С.25–32. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-25-32.

Сведения об авторах



Толок Алексей Вячеславович (1961 г.р.), д.т.н. (2004); профессор, заведующий лабораторией компьютерной графики ИПУ РАН. Научные интересы: функционально-воксельное моделирование в компьютерных технологиях, R-функциональное моделирование, САПР-технологии, графическое ядро, системы управления, теория графов. Researcher ID (WoS): V-7594-2019, Author ID (Scopus): 28268055700, Author ID (РИНЦ): 452677. ORCID: 0000-0002-7257-9029, tolok_61@mail.ru. ✉

Толок Наталия Борисовна (1974 г.р.), к.т.н. (2000); старший научный сотрудник ИПУ РАН. Научные интересы: функционально-воксельное моделирование в компьютерных технологиях, R-функциональное моделирование, математическое моделирование в экономике. Researcher ID (WoS): AAI-3684-2021, Author ID (Scopus): 57193099901, Author ID (РИНЦ) 452678. ORCID: 0000-0002-5511-4852. SPIN-код: 8581-0422, nat_tolok@mail.ru.



Поступила в редакцию 11.07.2025, после рецензирования 26.08.2025. Принята к публикации 29.08.2025.



Scientific article

DOI: 10.18287/2223-9537-2025-15-4-523-534

Projection principle for constructing functional voxel models

© 2025, A.V. Tolok ✉, N.B. Tolok

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia.

Abstract

This paper addresses the problem of automated generation of spatial digital models from flat drawings. The relevance of this problem is underscored by the wide range of existing approaches aimed at its solution. A novel aspect of this work

is the application of analytical R-functional geometric modeling to these tasks, employing a structural approach for describing complex geometric objects through analytical functions. The principles of computer-aided analytical construction of complex geometric objects using functional voxel modeling (FV-modeling) are discussed. Such modeling ensures the transition from a continuous representation of the domain of analytical functions to a discrete-continuous computer analogue, based on multidimensional graphical image-models that store information about the local function at each point within the discrete domain. The principles of FV-modeling are applied to R-functional modeling functions, which serve as the foundation for analytical constructions of complex geometric object. The study demonstrates how the dimensionality of the argument space can be modified by introducing additional or removing redundant local geometric characteristics, thereby enabling the analysis of their influence on the function's behavior. The paper explores the principle of increasing the dimensionality of a FV-model of a plane function domain for subsequent application of R-functional modeling methods to a three-dimensional space. By applying V.L. Rvachev's principle of FV-modeling, the approach allows the computation of local geometric characteristics of a linear function, simplifying the computer representation of the R-functional model. Based on the law of planar rotation around an orthogonal axis, a principle for rotating a FV-model is introduced. This principle enables the construction of a spatial FV-model of a surface of revolution derived from a planar FV-model of a projection function. The developed FV-modeling tools can thus serve as an auxiliary means for addressing the core problem of generating three-dimensional models from two-dimensional projections (drawings).

Keywords: *R-function, projection, functional voxel model, M-image, local function, intersection, law for rotation.*

For citation: Tolok AV, Tolok NB. Projection principle for constructing functional voxel models [In Russian]. *Ontology of designing*. 2025; 15(4): 523-534. DOI: 10.18287/2223-9537-2025-15-4-523-534.

Authors' contributions: Tolok A.V. – developed the theoretical principles of the projection approach in analytical modeling of geometric objects; Tolok N.B. – carried out practical validation of the principles with computer implementation in the presented examples.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

List of figures

- Figure 1 – Graph of function $y = \cos x$
- Figure 2 – Graph of function $z = \cos x - y$
- Figure 3 – Values of function domain $u = \cos x - y - z$
- Figure 4 – Principles of graphic encoding of the function domain using a set of M-images, followed by obtaining the local function $L(x, y, z, N_4) = 0$
- Figure 5 – Principles of graphic encoding of the function domain using a set of M-images, followed by obtaining the local function $L(x, y, z, u, N_5) = 0$
- Figure 6 – Sequential arrangement of M-images according to the five components of local function with four arguments (x, y, z, u)
- Figure 7 – Filled sequential arrangement of M-images according to the five components of local function with four arguments (x, y, z, u)
- Figure 8 – Figure constructed by R-function of intersection according to the positive values of $u = u_1 + u_2 - \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$
- Figure 9 – A composite arrangement of five three-dimensional M-images and the resulting cylinder generated from them
- Figure 10 – A composition of three projections of M-images and the figure derived from them
- Figure 11 – A composition of five three-dimensional M-images and the resulting sphere generated from them
- Figure 12 – A composition of an M-image projection and the figure derived from it
- Figure 13 – Drawing of the part considered in the work [3]
- Figure 14 – Surface of positive z values with node numbering along the zero boundary
- Figure 15 – A composition of an M-image projection and the figure derived from it
- Figure 16 – A composition of an M-image projection and the figure derived from it
- Figure 17 – A composition of a projection of the cutting M-image and the final figure derived from it

References

- [1] Polozov VS, Budekov OA. Computer-aided design. Geometric and graphic problems [In Russian]. Moscow: Mashinostroenie, 1983. 277 p.

- [2] **Romensky S.A., Rotkov S.I., Burtsev Yu.P. [and others]** Restoration of a wireframe model of a 3D object from a paper archive drawing [In Russian]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser.: Construction Engineering and Architecture*. 2022; 22(4): 66-75. DOI 10.14529/build220407.
- [3] **Moshkova TV, Rotkov SI, Smychok MM, Tyurina VA.** The problem of transforming a wireframe model of a 3D object reconstructed from its technical drawing [In Russian]. *Scientific Visualization* 2018. 10.5: 13-31. DOI: 10.26583/sv.10.5.02.
- [4] **Zakharov AA.** Study of algorithms for forming a three-dimensional model based on orthogonal views [In Russian]. *Collection of scientific articles: Algorithms, methods and systems for data processing*. Moscow: OOO "Center for Information Technologies in Nature Management", 2010. P.4-9.
- [5] **Nikanorov AA.** Development of a program for restoring 3D wireframe objects from 2D projections [In Russian]. *Almanacs of modern science and education*. Tambov: Gramota, 2014; 8: 117-128.
- [6] **Lee H, Han S.** Reconstruction of 3D interacting solids of revolution from 2D orthographic views. *Computer-Aided Design*. 2005. 37: 1388-1398. DOI: 10.1016/j.cad.2005.01.007.
- [7] **Wang Z, Latif M.** Reconstruction of 3D Solid Models Using Fuzzy Logic Recognition. *Proceedings of the World Congress on Engineering*. 2007; 1: 37-42.
- [8] **Governi L, Furferi R, Palai M, Volpe Y.** 3D Geometry Reconstruction from Orthographic Views: a Method Based on 3D Image Processing and Data Fitting. *Computers in Industry*. 2013; 64: 1290-1300. DOI: 10.1016/j.compind.2013.02.003.
- [9] **Basov OO, Noskov DA.** Construction of a Geometric Model of a Product Based on Multimodal Processing of Paper Design Documentation [In Russian]. *Economics. Information technologies*, 2025, 52(1): 137-144. DOI 10.52575/2687-0932-2025-52-1-137-144.
- [10] **Rvachev VL.** On the analytical description of some geometric objects [In Russian]. *Reports of Ukrainian Academy of Sciences*. 1963; 153(4): 765-767.
- [11] **Maksimenko-Sheiko KV.** R-functions in mathematical modeling of geometric objects and physical fields [In Russian]. Kharkov: IPMesh NAS of Ukraine, 2009. 306 p.
- [12] **Litvinova YuS, Maksimenko-Sheiko KV, Sheiko TI.** Analytical identification of three-dimensional geometric objects based on information about the shape of their sections [In Russian]. *Problems of mechanical engineering*. 2017; 1(20): 45-51. EDN: YHXITN.
- [13] **Choporov SV, Lisnyak AA, Gomenyuk SI, Using VL.** Rvachev functions for geometric modeling of complex-shaped areas [In Russian]. *Applied informatics*. 2010; 2(26): 109-122.
- [14] **Tolok AV.** Functional-voxel method in computer modeling [In Russian]. Moscow: Fizmatlit. 2016. 112 p.
- [15] **Tolok AV, Tolok NB.** Local computer geometry [In Russian]. Moscow: IP R Media, 2025. 228 p.
- [16] **Tolok AV, Tolok NB.** Mathematical Programming Problems Solving by Functional Voxel Method. *Automation and Remote Control*. 2018; 79 (9): 1703-1712. DOI: 10.1134/S0005117918090138.
- [17] **Loktev MA.** Features of applying functional-voxel modeling to pathfinding problems with obstacles [In Russian]. *Information technologies in design and production*. 2016; 1: 45-49.
- [18] **Lotorevich EA.** Principles of spatial visual layout of analytical models displayed in voxel graphic space [In Russian]. *Mechanical engineering technology*. 2013; 11: 59-63.
- [19] **Plaksin AM, Pushkarev SA.** Geometric modeling of thermal characteristics of objects using the functional-voxel method [In Russian]. *Geometry and graphics*. 2020; 8(1): 25-32. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-25-32.

About the authors

Alexey Vyacheslavovich Tolok (b. 1961), Doctor of Engineering (2004); Professor, Head of the Computer Graphics Laboratory at the Institute of Control Systems of the Russian Academy of Sciences. Research interests include functional-voxel modeling in computer technology, R-functional modeling, CAD technologies, graphics kernel, control systems, and graph theory. Researcher ID (WoS): V-7594-2019, Author ID (Scopus): 28268055700, Author ID (РИИЦ): 452677. ORCID: 0000-0002-7257-9029. tolok_61@mail.ru ✉

Nataliya Borisovna Tolok (b. 1974), Candidate of Engineering (2000); Senior Researcher at the Institute of Control Systems of the Russian Academy of Sciences. Research interests include functional-voxel modeling in computer technology, R-functional modeling, and mathematical modeling in economics. Researcher ID (WoS): AAI-3684-2021, Author ID (Scopus): 57193099901, Author ID 452678. ORCID: 0000-0002-5511-4852. SPIN-код: 8581-0422, nat_tolok@mail.ru.

Received July 11, 2025. Revised August 26, 2025. Accepted August 29, 2025.