Научное мнение. 2025. № 9. С. 115–124.
Nauchnoe mnenie. 2025. № 9. P. 115–124.
Научная статья
УДК 51-7
DOI: https://doi.org/10.25807/22224378_2025_9_115

БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ: ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР И ПРИЛОЖЕНИЯ

Ксения Сергеевна Малинникова[1], Марина Александровна Степанова[2]
[1, 2] Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия
[1] ksunik1ksunik@gmail.com, https://orcid.org/0009-0009-4280-2339
[2] ratkebug@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0000-0856-9507

Аннотация. В статье представлена история формирования понятия барицентрических координат и развития барицентрического метода решения задач, сформулирован алгоритм по использованию барицентрического метода при решении задач и в исследованиях в различных областях.

Ключевые слова: барицентр, барицентрические координаты, барицентрический метод

Original article

BARYCENTRIC COORDINATES: HISTORICAL OVERVIEW AND APPLICATIONS

Ksenia S. Malinnikova[1], Marina A. Stepanova[2]
[1, 2] Herzen State Pedagogical University of Russia, Saint Petersburg, Russia
[1] ksunik1ksunik@gmail.com, https://orcid.org/0009-0009-4280-2339
[2] ratkebug@yandex.ru, https://orcid.org/0009-0000-0856-9507

Abstract. The article is devoted to the history of the notion of barycentric coordinates and the evolution of the barycentric method. The authors formulate the algorithm of applying the barycentric method to solving problems and making investigation in different fields of science.

Keywords: barycenter, barycentric coordinates, barycentric method

Актуальность. Барицентрический метод дает возможность решать задачи различного уровня сложности (вычислительные задачи, задачи на доказательство, задачи практического характера и т. д.), что определяет его применение в самых разнообразных областях науки и техники. На сегодняшний день лишь немногие студенты и специалисты в той или иной области математики знают о сущности данного метода, так как его изучение как в школьном курсе математики, так и в курсе высшего образования не является обязательным. Для формирования у читателя представления о барицентрическом методе (его сути, актуальности в решении геометрических задач и востребованности в различных областях науки и техники) обратимся к его историческим истокам и приложению.

Исторический обзор. Барицентрические координаты — это способ представления точки в плоскости или пространстве через массы (коэффициенты), ассоциированные с вершинами треугольника или тетраэдра. Развитие данного понятия тесно связано с историей механики и геометрии. Далее в работе понятия «центр масс», «центр тяжести», «центр веса» будут использоваться как синонимы.

В основе барицентрических координат лежит идея центра тяжести, которая появилась еще в античности. Центр (вес) тяжести подвергся принудительному смещению в исследованиях Архимеда (287—212 гг. до н. э.), который пытался обосновать его расположение относительно вершин треугольника. Результаты данных исследований он изложил в своем труде «О равновесии плоских фигур» («О равновесии плоскостей» Т.1, предложения 13-14 [1]). Стоит заметить, что понятие центра тяжести предполагается известным, и в начале книги приводятся постулаты о центрах тяжести [1]:

- центр веса треугольника лежит на прямой, проведенной из угла к середине стороны (Предложение 13, версия 1);
- центр веса треугольника лежит на медиане треугольника (Предложение 13, версия 2);
- центр веса треугольника является пересечением медиан треугольника (Предложение 14);
- центр веса треугольника пересекает медиану в отношении 2:1 (Предложение 14, следствие; нет в «*Равновесиях плоскостей*»).

В самом трактате также даются определения центров тяжести треугольника, параллелограмма, трапеции, параболического сегмента, трапеции, боковые стороны которой являются дугами парабол; доказывается, что центр тяжести плоского треугольника находится в точке пересечения его медиан.

Выдвинутая Архимедом концепция “барицентра” («барос» — в переводе с греческого — вес, тяжесть, а значит «барицентр» — центр тяжести) использовалась также и для нахождения равновесия тел. Его теория рычага долгое время являлась основой механики.

«Соизмеримые величины уравновешиваются на длинах, которые будут обратно пропорциональны тяжестям. Если величины будут несоизмеримы, то они точно так же уравновесятся на длинах, которые обратно пропорциональны этим величинам» [2, с. 22]. Однако данная концепция «барицентра» применительно к координатам сформулирована не была.

Все доказательства у Архимеда основаны на уравновешивании тела путем принудительного смещения центра тяжести.

Однако понятие центра тяжести и знания о нем позволило древним математикам приступать к решению задач, не поддававшихся решению иными способами. Менелай Александрийский, древнегреческий математик и астроном (около 70-100 н. э.), использовал свойства центров масс в доказательстве классической теоремы аффинной геометрии о полном четырехстороннике, которая впоследствии получила название теоремы Менелая [3, с. 56]. Также нахождение площадей некоторых геометрических фигур, до изобретения исчисления бесконечно малых величин, было сведено к механическому вопросу о центре тяжести (Паппус, александрийский математик, III–IV вв). Позднее Гульдин (1577–1643 гг.) в своих сочинениях описывает способ нахождения объема тел вращения с использованием барицентра.

Стоит также отметить, что свойства барицентра использовались и Джованни Чевой (1647–1734) для доказательства одноименной теоремы, основанного на рассмотрении центра тяжести системы из трехточечных грузов [4, с. 40].

Дальнейшее развитие теория барицентра получила в исследованиях Жозефа-Луи Лагранжа (1736–1813). Им была предпринята попытка *формализации центра масс*. Лагранж использовал идеи центра масс в механике. Он разработал основы анализа движения тел, где веса точек (массы) играли роль барицентрических координат.

С XVIII в. барицентрические координаты начали рассматриваться как инструмент для решения задач и доказательства теорем, связанных с треугольниками. Стоит заметить, что самого понятия барицентрических координат еще введено не было.

Так, Морис Карно (1796–1832) в своей «Геометрии положения» использовал барицентрические координаты для доказательства теоремы о пересечении перпендикуляров, восставленных из точек на сторонах и продолжениях сторон треугольника. Симон Люилье (1750–1840) во время исследования многогранников применял понятия барицентра и барицентрических координат, так появилось понятие точки Люилье, барицентрические координаты которой пропорциональны квадратам площадей граней тетраэдра (точка Люилье совпадает с центроидом только в равногранном тетраэдре).

Геометрическая интерпретация барицентрических координат была осуществлена Августом Фердинандом Мебиусом, немецким математиком, механиком и астрономом, жившем в XIX в.

Он впервые ввел понятие «барицентрических координат» в своем труде — мемуаре «Барицентрическое исчисление» (Der barycentrische Calcul (1828)) и положил начало барицентрическому исчислению — разделу аналитической геометрии, в котором геометрические фигуры и их свойства изучаются средствами алгебры [5].

Август Мебиус продемонстрировал, как любая точка треугольника может быть выражена через веса (коэффициенты) относительно его вершин.

В своем исследовании он рассматривал особый род треугольных координат именно с механической точки зрения. В качестве координат некоторой точки он рассматривал три массы m_1, m_2, m_3, которые надо поместить в вершинах данного треугольника, для того чтобы эта точка сделалась центром тяжести взятых масс. Решая задачу о принудительном смещении барицентра симплекса, Мебиус предполагал, что плотность симплекса смещения постоянна. Так и были открыты барицентрические координаты (1827 г.).

Таким образом, важный вклад Мебиуса заключался также и в том, что он связал геометрические представления с алгебраическими методами, что открыло новые возможности для изучения аффинной и проективной геометрии.

Рассмотрение развития барицентрического метода позволило выделить характерные его признаки, которые используются при решении различных задач в целом и геометрических, в частности.

Рассмотрим следующую задачу [6], решаемую барицентрическим методом.

Задача 1. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно, причем $AM:MB = 3:5$, $BN:NC = 1:4$. Прямые CM и AN пересекаются в точке O. Найдите отношения $AO:ON$, $CO:OM$.

Математические основы:

- Если точке *A* поставлено в соответствие число m (называемое массой точки), то говорят, что задана материальная точка mA (при этом число m не обязательно положительно).
- Центром масс материальных точек $m_n A_n$ называется такая точка M, для которой выполняется векторное равенство

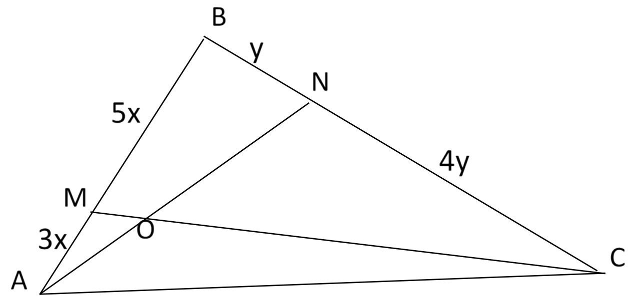
$$m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$$

Возможна иная запись: $M = c(m_1A_1,\ m_2A_2, \dots m_nA_n)$ (центр масс *M* — взвешенное среднее материальных точек m_iA_i).

Правило рычага: в случае двух точек A_1 и A_2 с массами m_1 и m_2 их центр масс делит отрезок $A_1\ A_2$ в отношении $m_1 : m_2$.

- Для любой системы материальных точек с ненулевой суммарной массой центр масс существует и определяется этими точками однозначно.
- *Теорема о группировке масс.* Если часть материальных точек заменить точкой, расположенной в их центре масс и имеющей ненулевую массу, равную сумме масс этих точек, то центр масс всех точек не изменяется.

Доказательства указанных утверждений можно найти, например, в [4].



Дано: $\Delta ABC, M \in AB, N \in BC,$

$AM{:}MB = 3{:}5, BN{:}NC = 1{:}4$

$CM \cap AN = O$

Найти: $AO{:}ON,\ CO{:}OM$

Решение

1. Поместим массу $m_2 \neq 0$ в вершину B треугольника ΔABC.

2. Определим массы m_1 и m_3 соответственно для вершин A и C из условий $M = c(m_1A, m_2B),\ N = c(m_2B, m_3C)$. Согласно правилу рычага имеем: $m_2 = 4m_3,\ 3m_1 = 5m_2$.

3. Пусть $m_2 = 12$. Тогда $m_3 = 4, m_1 = 20$. Массы точек M и N соответственно 32 и 15.

4. Найдем необходимые отношения, определив массу точки O:

- для отрезка AN: $O = c(20A, 15N)$, т.е. $AO{:}ON = 15{:}20 = 3{:}4$
- для отрезка CM: $O = c(3C, 32M)$, т.е. $CO{:}OM = 32{:}3$

Ответ: $3{:}4;\ 32{:}3$

Определение барицентрических координат. В работах различных авторов барицентрические координаты определяются с точки зрения:

1) геометрии масс [4];

2) аффинной геометрии [3; 7].

Напомним вкратце оба этих подхода:

1) В этом подходе барицентрические координаты суть масс, которыми наделяются базисные точки (см. задачу 1). Действительно, для произвольной внутренней точки M треугольника $A_1A_2A_3$ можно подобрать такие положительные числа m_1, m_2, m_3, для которых M будет центром масс получающихся материальных точек m_1A_1, m_2A_2, m_3A_3. Массы m_1, m_2, m_3 не определяются однозначно. Если эти массы умножить на произвольное положительное число α (т.е. наделить точки массами $\alpha m_1, \alpha m_2, \alpha m_3$), то центром масс новых материальных точек $\alpha m_1A_1, \alpha m_2A_2, \alpha m_3A_3$ будет та же точка M.

При $\alpha = \frac{1}{m_1+m_2+m_3}$ сумма масс $\alpha m_1, \alpha m_2, \alpha m_3$ будет равна 1. Получаем новые массы $\gamma_1 = \alpha m_1, \gamma_2 = \alpha m_2, \gamma_3 = \alpha m_3$, сумма которых равна 1, и при этом точка M по-прежнему будет центром масс материальных точек вида $\gamma_1A_1, \gamma_2A_2, \gamma_3A_3$.

Таким образом, для любой внутренней точки M треугольника $A_1A_2A_3$ существуют такие положительные числа $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$=1 (*) и при этом точка M является центром масс материальных точек $\gamma_1A_1, \gamma_2A_2, \gamma_3A_3$.

$M = \gamma_1A_1 + \gamma_2A_2 + \gamma_3A_3$ (**)

Числа $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, удовлетворяющие условиям (*) и (**), называются барицентрическими координатами точки M относительно базисного треугольника $A_1A_2A_3$.

Если не ограничиваться только положительными массами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, а допускать для них произвольные вещественные значения, то для точек, лежащих вне треугольника $A_1A_2A_3$, тоже можно задать барицентрические координаты. Таким образом, справедлива следующая теорема 1 [4]:

Теорема 1. Пусть $A_1A_2A_3$ — заданный треугольник и M – произвольная точка в его плоскости. Тогда существуют однозначно определенные вещественные числа $\gamma_1 . \gamma_2 , \gamma_3$, удовлетворяющие условиям (*) и (**).

Верным является и утверждение, обратное данной теореме: для действительных чисел $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ таких, что $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$, в плоскости треугольника $A_1A_2A_3$ существует однозначно определенная точка M, такая что $M = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3$.

2) Барицентрические координаты — это способ представления точки в аффинном пространстве относительно заданного набора базисных точек (вершин симплекса, например, треугольника в двумерном пространстве или тетраэдра в трехмерном).

Пусть дан треугольник $A_1A_2A_3$ общего вида и точка M (не обязательно внутренняя) в его плоскости, O — произвольная точка пространства (*рис. 1*).

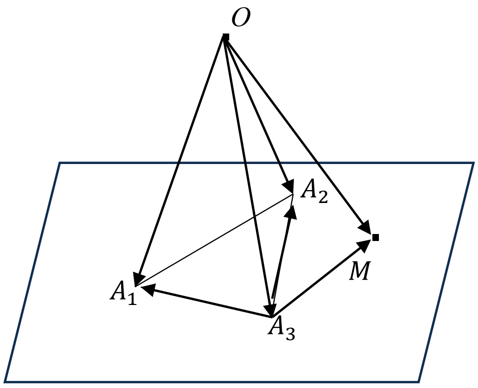


Рис. 1

$$\overrightarrow{A_3M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA_3} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{A_3M} = x\overrightarrow{A_3A_1} + y\overrightarrow{A_3A_2} =$$

$$x(\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OA_3}) + y(\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_3}) = x\overrightarrow{OA_1} + y\overrightarrow{OA_2} - (x+y)\overrightarrow{OA_3} \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует: $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA_1} + y\overrightarrow{OA_2} + (1 - x - y)\overrightarrow{OA_3}$

Пусть $\gamma_1 = x,\ \gamma_2 = y,\ \gamma_3 = 1 - x - y$.

Имеем, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$

Таким образом, для любой точки O пространства и любой точки M плоскости треугольника $A_1A_2A_3$ имеют место равенства:

$$\begin{cases} \overrightarrow{OM} = \gamma_1\overrightarrow{OA_1} + \gamma_2\overrightarrow{OA_2} + \gamma_3\overrightarrow{OA_3} \\ \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1 \end{cases} \quad (***)$$

Иными словами, любая произвольная точка M в этой плоскости может быть выражена как барицентрическая комбинация точек A_1, A_2, A_3, т. е. $M = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3$, где коэффициенты γ_i называются барицентрическими координатами точки M относительно точек A_1, A_2, A_3. Эти коэффициенты удовлетворяют условию: $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$.

Существенно, что коэффициенты γ_i не зависят от выбора точки O при заданной точке M. Предлагаем читателю самому обосновать данное утверждение, рассмотрев произвольную точку O_1 пространства, отличную от точки O.

Принято также говорить, что точка M — это барицентрическая комбинация точек A_1, A_2, A_3 с коэффициентами $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \epsilon R$ и $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$, если для некоторой точки O выполняется следующее равенство $\overrightarrow{OM} = \gamma_1\overrightarrow{OA_1} + \gamma_2\overrightarrow{OA_2} + \gamma_3\overrightarrow{OA_3}$.

Справедлива следующая теорема 2 (см., например [6]):

Теорема 2. Пусть точки A_1, A_2, A_3 — точки общего положения в двумерном аффинном пространстве. Тогда для любой точки M существует и при том только одно представление ее в виде барицентрической комбинации точек A_1, A_2, A_3.

Отображение β, ставящее в соответствие каждой точке M аффинного пространства упорядоченный набор чисел $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in R$, таких что $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$, называют барицентрической системой координат [6]. Точки A_1, A_2, A_3 задают базисный симплекс системы координат β.

Точка аффинного пространства, заданная барицентрическими координатами, определяется однозначно, т. е. барицентрическая система координат — это биекция.

Условие $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$ называется нормировкой барицентрических координат точки M (обеспечивает аффинную инвариантность) [3].

При решении аффинных задач нормировка координат необязательна. Можно рассматривать числа μ_i соответственно пропорциональные барицентрическим координатам γ_i: $\frac{\mu_1}{\gamma_1} = \frac{\mu_2}{\gamma_2} = \frac{\mu_3}{\gamma_3} = k$. Тогда имеем:

$$\gamma_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}, \quad \gamma_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}, \quad \gamma_3 = \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}$$

Согласно условиям (***) вершины базисного треугольника A_1, A_2, A_3 имеют нормированные барицентрические координаты: $A_1(1,0,0), A_2(0,1,0), A_3(0,0,1)$.

Нормированные барицентрические координаты можно задать вершинам равностороннего треугольника A_1, A_2, A_3 со стороной, равной 1 (*рис. 2*).

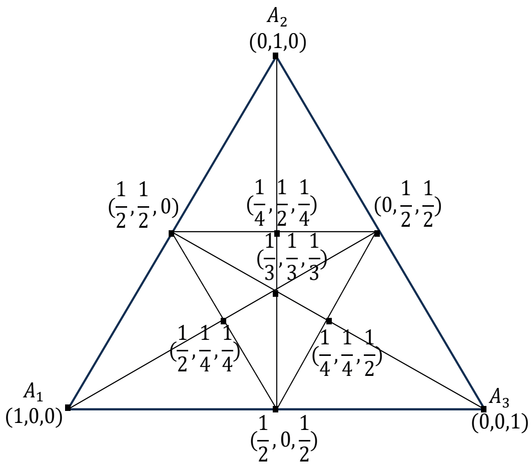


Рис. 2

С середины XX века теория барицентрических координат расширяется на многомерные пространства (*Степанова М. А., Лавров С. С. и др.*). Данная теория развивается также и благодаря своим приложениям.

Приложения барицентрических координат к различным областям науки.

1. Компьютерная графика и 3D-моделирование (интерполяция и параметризация поверхностей; игровая индустрия; моделирование и визуализация сложных геометрических объектов) (*Богданов А. В., Соколов Д. Д., Шаманов А. Н., Смирнов М. Е. и др.*);

2. Математическое моделирование и численные методы (метод конечных элементов (инженерия и физика), моделирование физических процессов и природных явлений) (*Иванов С. В., Бойков И. В., Черных А. Н. и др.*);

3. География и картография (анализ топографических данных, картография, 3D — моделирование рельефа) *(Уоррен Д., Леви Б. и др.).*

Барицентрические координаты также активно используются и в таких областях, как: робототехника и автоматизация, космические технологии и астрономия, биология и медицина, образовательные технологии и др.

С целью выявления шагов алгоритма по применению барицентрических координат в решении задач или проведении исследований в той или иной области остановимся подробнее на их приложениях в различных областях.

Пример 1. Популяционная генетика [4].

Барицентрические координаты позволяют решать сложные задачи генетики, связанные с наследственностью, определением генотипа, подсчетом вероятности генетических заболеваний и т. д.

В каждой популяции — совокупности особей одного вида — от старших поколений к младшим передаются наследственные признаки, определяемые генами. На каждый ген приходится один элементарный признак, например цвет кожи или резус-фактор крови. Ген может иметь доминантную форму — *A*, или рецессивную форму — *a*. Каждая клетка состоит из одинакового набора генов, управляющих элементарным признаком: если этот набор генов принимает вид *AA* или *Aa*, то особь обладает данным признаком в сильной форме, и только если набор генов становится вида *aa*, то признак проявляется в слабой форме. Например, *AA* — это положительный резус-фактор, а *aa* — отрицательный.

Пусть требуется подсчитать вероятность получения некоторого признака X в рамках наследственности.

Определим X как материальную точку и рассмотрим ее в барицентрической системе координат, где базисными точками являются A_1 (особи с генотипом AA), A_2 (особи с генотипом Aa) и A_3 (особи с генотипом aa). Данные базисные точки позволяют представить популяцию в виде треугольника, т. е. двумерного симплекса. Следовательно, положение материальной точки X в данном базисе будет определяться тремя барицентрическими координатами.

Вес каждой базисной точки определяется количеством особей с данным генотипом в данной популяции: пусть генотип AA имеет K особей, генотип Aa — M особей, генотип aa — P особей. Тогда $X = \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3$, где

$$\gamma_1 = \frac{K}{K+M+P},\ \gamma_2 = \frac{M}{K+M+P},$$

$$\gamma_3 = \frac{P}{K+M+P} \text{ и } \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$$

Таким образом, в рамках данной задачи, вероятности γ_1, γ_2, γ_3 — это барицентрические координаты некоторой точки X внутри треугольника, в то время как эта точка X и характеризует состояние популяции в отношении распределения генов, управляющих рассматриваемыми элементарными признаками.

Пример 2. Химия [4; 8]

Барицентрические координаты в химии применимы для решения задач на смеси, сплавы и растворы, в которых не происходит бурных химических реакций. Каждое вещество принимается за базисную точку, а раствор (смесь, сплав) рассчитывается через концентрацию этих веществ.

Имеется 600 г. раствора йода в спирте, причем концентрация йода составляет 18%. Требуется получить 10%-ный раствор йода в спирте. Определим, сколько следует долить чистого спирта.

В качестве материальных точек будем рассматривать точки вида $600P_1$ (данный в условии задачи раствор) и $(600+x)P_2$ (искомый в условии раствор).

Рассмотрим отрезок A_1A_2 длиной 1 и сопоставим чистому спирту точку A_1, а чистому йоду — точку A_2. Определим данные точки как базисные. Тогда $P_1 = 0{,}82A_1 + 0{,}18A_2$, P_1 — центр масс отрезка A_1A_2 (так как вес точки A_1 больше веса точки A_2, то P_1 согласно правилу рычага располагается ближе к точке A_1 и, следовательно, $A_1P_1 = 0{,}18, P_1A_2 = 0{,}82$).

Итак, требуемый раствор изобразится в виде материальной точки $(600+x)P_2$, где *x* — искомое количество спирта в граммах, а P_2 — центр масс двух материальных точек xA_1 и $600P_1$. По условию точка $P_2 = 0{,}9xA_1 + 0{,}1 \cdot 600P_1$, т. е. $A_1P_2 = 0{,}1,\ P_2A_2 = 0{,}9$.

По правилу рычага имеем:

$$x \cdot A_1P_2 = 600 \cdot (P_2A_2 - P_1A_2)$$

$$x \cdot 0{,}1 = 600 \cdot 0{,}08, \quad x = 480$$

Ответ: 480 г.

Пример 3. Колориметрия [4; 9; 10]

Основой колориметрии являются методы измерения цвета и цветовых различий. Данные методы используются в оптике при ручном смешивании красок для получения желаемого цвета в компьютерной графике для его отображения на экране и т. д.

Существуют три основные системы кодирования цвета: RGB (красный, зеленый, синий) — система основных цветов, HSB (оттенок, насыщенность, яркость) — система работы с цветом и CMYK (голубой, пурпурный, желтый, черный) — система цветов, дополняющих основные цвета до белого. RGB преобладает в компьютерной графике, CMYK — в полиграфии, а HSB используется преимущественно при создании изображений. Хотя все три системы описывают цвет, RGB является основой, к которой можно свести остальные. В приложении барицентрических координат к колориметрии обратимся к системе RGB.

Рассмотрим решение задачи *о смешении цветов*.

Определим X как материальную точку, цвет которой надо получить, и рассмотрим ее в барицентрической системе координат, где базисными точками являются A_1 (красный цвет), A_2 (синий цвет) и A_3 (зеленый цвет). Для удобства треугольный градиент выберем в форме равностороннего треугольника $A_1A_2A_3$ со стороной 1 (цвета расположены в вершинах). Данный треугольник задает двумерный симплекс, следовательно материальная точка X будет задаваться в нем тремя координатами.

Вес каждой базисной точки определяется площадью некоторой части $\Delta A_1A_2A_3$.

Обозначим площадь исходного треугольника $A_1A_2A_3$ за *S*. Площадь красного треугольника — S_1 , синего — S_2 , зеленого — S_3 (*рис. 3*).

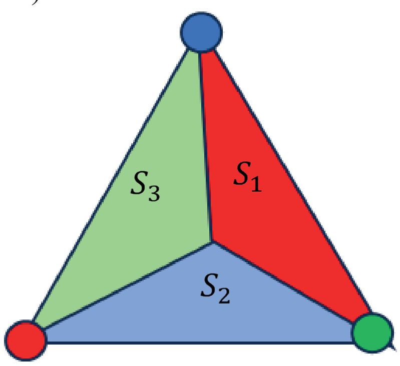


Рис. 3

Для нахождения барицентрических координат γ_i точки X внутри данного треугольника необходимо использовать теорему о связи барицентрических координат с площадями, согласно которой имеем:

$\gamma_1 = \frac{S_1}{S}$ — количество красного цвета;

$\gamma_2 = \frac{S_2}{S}$ — количество зеленого цвета;

$\gamma_3 = \frac{S_3}{S}$ — количество синего цвета, входящее в искомый.

Таким образом, получаем отношение масс красок красного, зеленого и синего цветов, используемое, для получения выбранного цвета палитры. Это дает возможность смешать красную, зеленую и синюю краски, массы которых взяты в данном отношении для получения нужного нам цвета (*рис. 4*).

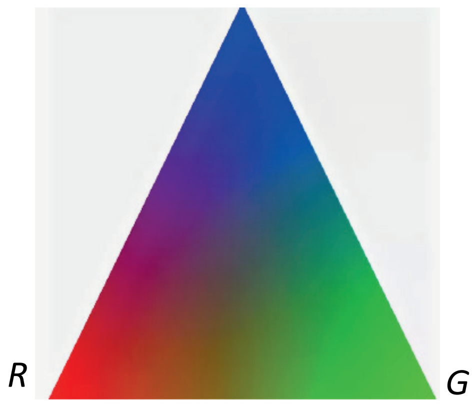


Рис. 4

Пример 4. Цветовая интерполяция [11]

Обратную задачу колориметрии решает цветовая интерполяция в компьютерной графике. Задав три точки общего положения и обозначив их определенными цветами, создают градиент, таким образом определяя цвет для каждого пикселя картинки.

Для того чтобы программа могла указать определенный цвет, она применяет RGB — кодировку в пределах значений от 0 до 255 (0 соответствует самой низкой интенсивности цвета, а 255 — самой высокой). Например, если поставить 0 в окошках RED, GREEN, BLUE, то результатом «смешения» будет черный цвет. Если, например, поставить в окошко RED максимальное число, то получим чистый красный цвет.

Некоторые цвета имеют стандартные координаты цветности. Например, координаты чистого белого цвета (1, 1, 1), а черного (0, 0, 0). Это позволяет выбирать любые исходные цвета для вершин закрашиваемой фигуры.

Для написания программы, позволяющей задать градиент треугольника, необходимо:

1. Выбрать три точки A_1, A_2, A_3 общего положения, каждой из них присвоить определенный цвет — атрибут. Эти точки будут являться базисными;

2. Определить вес каждой базисной точки: практически все программы имеют встроенную декартову систему координат, поэтому базисные точки задаются в декартовых координатах. $A_1(x_1;y_1), A_2(x_2;y), A_3(x_3;y_3)$;

3. Для заполнения треугольника градиентом необходимо задать барицентрические координаты каждому пикселю (пиксель рассматривается как материальная точка). Найти барицентрические координаты пикселей относительно вершин треугольника можно по формулам:

$$\gamma_1 = \frac{(y_2-y_3)(x-x_3)+(x_3-x_2)(y-y_3)}{(y_2-y_3)(x_1-x_3)+(x_3-x_2)(y_1-y_3)}$$

$$\gamma_2 = \frac{(y_3-y_1)(x-x_3)+(x_1-x_3)(y-y_3)}{(y_2-y_3)(x_1-x_3)+(x_3-x_2)(y_1-y_3)}$$

$$\gamma_3 = 1-\gamma_1-\gamma_2$$

Проверить принадлежность текущего пикселя треугольнику $A_1A_2A_3$: текущий пиксель принадлежит треугольнику, если выполняется условие: $0 \le \gamma_i \le 1$, где $i = 1, 2, 3$.

Если условие верно, то точка принадлежит треугольнику, и значит ей присваивается цвет, полученный при интерполяции атрибутов вершин этого треугольника. Если условие не выполняется, то точка окрашивается в цвет фона.

4. Закрашиваем весь треугольник (*Рис. 5*).

Рис. 5

Интерполировать можно различные многоугольники, так как вне зависимости от формы и выпуклости, их можно триангулировать.

Таким образом, для использования барицентрического метода в решении задач необходимо:

1. Определить искомую величину как материальную точку;

2. Задать базисные точки барицентрической системы координат своими весами (массами), относительно которой будет рассматриваться материальная точка (вершины фигуры, объекты, участвующие в задаче и т. д.);

3. Сделать вывод о размерности заданного симплекса и количестве координат материальной точки;

4. Найти барицентрические координаты искомой материальной точки согласно условию задачи;

5. Решить задачу на языке барицентрических координат;

6. Записать ответ на языке задачи той или иной области.

Барицентрические координаты зародились как идея центра тяжести в античности, получили строгую математическую формализацию в XIX веке и продолжают активно развиваться и применяться в современных технологиях и науке.

Список источников

1. *Лурье С. Я.* Архимед / С. Я. Лурье. Москва; Ленинград: АН СССР, 1945. 271 с. (Научно-популярная серия. Биографии).

2. *Кудрявцев П. С.* Учебное пособие для студентов пед. ин-тов по физ. спец. 2 изд., испр. и доп. М.: Просвещение, 1982. 448 с.

3. *Понарин Я. П.* Элементарная геометрия: В 3 т. — Т. 3: Треугольники и тетраэдры. М.: МЦНМО, 2009. 192 с.

4. *Балк М. Б., Болтянский В. Г.* Геометрия масс. М.: Наука, 1987. 160 с.

5. *Боголюбов А. Н.* Математики. Механики. Биографический справочник. Киев: Наукова думка, 1983. 639 с.

6. *Степанова М. А.* Барицентрическая система координат. Барицентрическая группа // Современные проблемы математики и математического образования: Герценовские чтения, 77: сборник научных трудов Международной научной конференции, Санкт-Петербург, 16–18 апреля 2024 г. / Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена. Санкт-Петербург, 2024. С. 356–360.

7. *Берже М.* Геометрия: Пер. с франц. М.: Мир, 1984. Т. 1. 560 с., ил.

8. *Казакова Е. А.* Применение барицентрического метода к решению математических задач // Международный школьный научный вестник. 2021. № 1.

9. *Джадд Д., Вышецки Г.* Цвет в науке и технике. М., 1978. 592 с.

10. *Юстова Е. Н.* и др. Атлас из 1000 стандартных образцов цвета // Измерительная техника. 1972. № 7.

11. Растеризация треугольников на основе барицентрических координат C#. URL: https://vscode.ru/prog-lessons/rasterizatsiya-treugolnikov-c.html (дата обращения: 16.07.2025).

Статья поступила в редакцию 17.08.2025; одобрена после рецензирования 29.08.2025; принята к публикации 12.09.2025.
The article was submitted 17.08.2025; approved after reviewing 29.08.2025; accepted for publication 12.09.2025.

Информация об авторах:
К. С. Малинникова — студентка;
М. А. Степанова — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии.
Information about the Authors:
K. S. Malinnikova — student;
M. A. Stepanova — Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), associate professor at the Department of Geometry.