

DOI 10.15507/2079-6900.27.202503.341-363

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6:681.5.015

Квадратно-корневой метод идентификации параметров дискретных линейных стохастических систем с неизвестными входными сигналами

Ю. В. Цыганова¹, Д. В. Галушкина², А. Н. Кувшинова³

¹ Университет Иннополис (АНО ВО «Университет Иннополис») (г. Иннополис, Российская Федерация)

² Ульяновский государственный университет (ФГБОУ ВО «УлГУ») (г. Ульяновск, Российская Федерация)

³ Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова (ФГБОУ ВО «УлГПУ им. И. Н. Ульянова») (г. Ульяновск, Российская Федерация)

Аннотация. В работе предложен новый квадратно-корневой метод параметрической идентификации градиентного типа для дискретных линейных стохастических систем в пространстве состояний с неизвестными входными сигналами. Разработан новый алгоритм вычисления значений критерия идентификации и его градиента на основе квадратно-корневой модификации метода Гиллейнса – Де-Мора, использующий численно устойчивые матричные ортогональные преобразования. В отличие от известных решений, в данной работе применены оригинальные методы дифференцирования матричных ортогональных преобразований. Построена и теоретически обоснована новая модель чувствительности, позволяющая вычислить значения градиента критерия идентификации через частные производные оценок вектора состояния по идентифицируемым параметрам. Основные результаты включают новые уравнения квадратно-корневой модели чувствительности и квадратно-корневой алгоритм вычисления значений критерия идентификации и его градиента. Вычислительные эксперименты выполнены в системе MATLAB на примере решения задачи численной идентификации стохастической модели диффузии с неизвестными граничными условиями. Эффективность предложенного алгоритма подтверждается сравнением методов градиентного и безградиентного типов. Результаты вычислительных экспериментов демонстрируют работоспособность предложенного подхода, который может быть использован для решения практических задач идентификации параметров математических моделей, представленных дискретными линейными стохастическими системами в пространстве состояний при отсутствии априорной информации о входных сигналах.

Ключевые слова: параметрическая идентификация, дискретные линейные стохастические системы с неизвестными входными сигналами, одновременное оценивание входного сигнала и вектора состояния, квадратно-корневой алгоритм фильтрации, уравнения чувствительности фильтра

Для цитирования: Цыганова Ю. В., Галушкина Д. В., Кувшинова А. Н. Квадратно-корневой метод идентификации параметров дискретных линейных стохастических систем с неизвестными входными сигналами // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2025. Т. 27, № 3. С. 341–363. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.341-363

© Цыганова Ю. В., Галушкина Д. В., Кувшинова А. Н.



Об авторах:

Цыганова Юлия Владимировна, д.ф.-м.н., профессор Института анализа данных и искусственного интеллекта, АНО ВО «Университет Иннополис» (420500, Россия, г. Иннополис, ул. Университетская, д. 1), ORCID:<http://orcid.org/0000-0001-8812-6035>, tsyganovajv@gmail.com

Галушкина Дарья Валерьевна, ассистент кафедры информационных технологий, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, д. 42), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4041-0533>, dgalushkina73@gmail.com

Кувшинова Анастасия Николаевна, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И.Н. Ульянова» (432071, Россия, г. Ульяновск, площадь Ленина, д. 4/5), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-3496-5981>, kuvanulspu@yandex.ru

Original article

MSC2020 93B30

A square-root method for identifying the parameters of discrete-time linear stochastic systems with unknown input signals

J. V. Tsyganova¹, D. V. Galushkina², A. N. Kuvshinova³

¹ *Innopolis University (Innopolis, Russian Federation)*

² *Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russian Federation)*

³ *Ulyanovsk State University of Education (Ulyanovsk, Russian Federation)*

Abstract. The paper proposes a new square-root gradient-based parameter identification method for discrete-time linear stochastic state-space systems with unknown input signals. A new algorithm is developed for calculating the values of the identification criterion and its gradient. The approach is based on a square-root modification of the Gillijns–De Moor method and uses numerically stable matrix orthogonal transformations. Unlike the existing solutions, this paper uses original methods for differentiating matrix orthogonal transformations. A new sensitivity model is constructed and theoretically justified, that allows calculating the values of the identification criterion gradient by using partial derivatives of state vector estimates based on identified parameters. The main results include new equations for the square-root sensitivity model and a square-root algorithm for calculating the values of the identification criterion and its gradient. Numerical experiments were performed in MATLAB for example of solving the numerical identification problem of a stochastic diffusion model with unknown boundary conditions. The effectiveness of the proposed algorithm is confirmed by comparison of gradient-based and gradient-free methods. The results of numerical experiments demonstrate efficiency of approach proposed which can be used to solve practical problems of identifying the parameters of mathematical models represented by discrete-time state-space linear stochastic systems, in the absence of any prior information about the input signals.

Keywords: parameter identification, discrete-time linear stochastic systems with unknown input signals, simultaneous input signal and state estimation, square-root filtering algorithm, filter sensitivity equations

J. V. Tsyganova, D. V. Galushkina, A. N. Kuvshinova. A square-root method for identifying the...

For citation: *J. V. Tsyganova, D. V. Galushkina, A. N. Kuvshinova.* A square-root method for identifying the parameters of discrete-time linear stochastic systems with unknown input signals. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:3(2025), 341–363. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.341-363

About the authors:

Julia V. Tsyganova, D. Sc. (Phys. and Math.), Professor, Institute of Data Science and Artificial Intelligence, Innopolis University, (1, Universitetskaya Str., Innopolis, 420500, Russia), ORCID:<http://orcid.org/0000-0001-8812-6035>, tsyganovajv@gmail.com

Darya V. Galushkina, Assistant Professor, Department of Information Technologies, Ulyanovsk State University, (42 Leo Tolstoy str., Ulyanovsk, 432017, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4041-0533>, dgalushkina73@gmail.com

Anastasia N. Kuvshinova, Ph.D. (Phys. and Math.) Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University, (4/5 Lenin Square, Ulyanovsk, 432071, Russia), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-3496-5981>, kuvanulspu@yandex.ru

1. Введение

Проблема оценивания состояния и параметров стохастических систем при наличии неизвестных входных сигналов представляет значительный интерес в современных приложениях, когда априорная информация о динамике внешних воздействий полностью отсутствует. Традиционные методы, основанные на расширении вектора состояния и использовании фильтра Калмана, требуют знания модели входных сигналов, что ограничивает их применимость в таких областях, как геофизика, навигация и управление сложными динамическими системами.

В настоящее время разработаны различные подходы к решению этой задачи. При этом в классе дискретных стохастических систем самые ранние подходы были основаны на включении неизвестного вектора входных сигналов в вектор состояния системы. Предполагалось, что модель изменения вектора входных сигналов известна. В этом случае для решения задачи применялся хорошо известный расширенный фильтр Калмана [1]. Для того, чтобы снизить затраты на вычисления расширенного фильтра, Фридланд [2] предложил двухэтапный фильтр Калмана, в котором оценка состояния и неизвестный вход разделены. Хотя оба метода успешно используются во многих приложениях, они требуют знания динамической модели, описывающей неизвестные входные сигналы.

Другой подход к решению задачи был предложен Китанидисом [3], который разработал оптимальный рекуррентный фильтр для оценки вектора состояния, основанный на предположении, что априорная информация о неизвестных входных данных недоступна. Затем его результат был расширен в [4], где разработан метод фильтрации вектора состояния системы, а также определены условия устойчивости и сходимости фильтра. Далее в [5] была установлена связь между двухэтапным фильтром Фридланда и фильтром Китанидиса. Показано, что результат Китанидиса можно получить, сделав двухэтапный фильтр независимым от базовой модели входного сигнала. Кроме того, его метод позволяет вычислить оценки неизвестного входного сигнала в явном виде.

В случае полного отсутствия информации о характере входных сигналов алгоритмы совместного оценивания вектора состояния и неизвестных входных сигналов были

разработаны Гиллейнсом и Де-Мором [6], [7]. Используя линейную несмещенную оценку с минимальной дисперсией ошибки, они разработали трехэтапный рекуррентный фильтр, в котором оценка вектора состояния системы и неизвестных входных сигналов взаимосвязаны. Оценка вектора входных сигналов основана на методе наименьших квадратов, в то время как задача оценки вектора состояния решается с использованием метода, разработанного ранее Китанидисом. В недавней работе [8] предложено решение задачи одновременной оценки неизвестных входных сигналов и вектора состояния для линейной системы с матрицей распределения неполного ранга.

Все перечисленные результаты относятся к решению задач дискретной фильтрации, или совместного оценивания вектора состояния и неизвестных входных сигналов. Во всех постановках задач предполагалось, что матрицы, определяющие модель стохастической системы, точно известны.

Задача параметрической идентификации в классе дискретных линейных систем с неизвестными входными сигналами подразумевает более сложную постановку задачи, в которой вводится дополнительный источник априорной неопределенности, а именно, неизвестный векторный параметр, от элементов которого могут зависеть матрицы, определяющие уравнения модели. Такая постановка задачи при условии неизвестных входных сигналов и наличии случайных помех в уравнениях состояния и измерения описывает более высокую степень неопределенности дискретной линейной стохастической системы.

Задача параметрической идентификации дискретных линейных стохастических систем с неизвестными входными сигналами при наличии случайных помех была исследована в работах авторов [9], [10], [11]. Критерий идентификации для указанного класса систем был впервые предложен в [9], и затем применен для идентификации параметров модели движения объекта на плоскости [10] и модели реакции-диффузии [11]. Оба решения получены на основе стандартной формы алгоритма Гиллейнса – Де-Мора [6].

Как и в случае методов калмановской фильтрации для дискретных линейных стохастических систем с известными входами, особое значение в практических приложениях имеют численно устойчивые модификации алгоритмов, основанные на матричных ортогональных преобразованиях различных видов [1], [12], [13], которые обладают повышенной устойчивостью к ошибкам машинного округления по сравнению со стандартными алгоритмами. Для систем с неизвестными входными сигналами определенные шаги в этом направлении сделаны в работах [7], [14], [15], в которых предложены следующие модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора: квадратно-корневая модификация информационная форма алгоритма [7], квадратно-корневая [14] и SVD-модификации [15] ковариационной формы алгоритма.

В данной работе на основе предложенной ранее квадратно-корневой модификации [14] ковариационной формы алгоритма Гиллейнса – Де-Мора мы предлагаем новый квадратно-корневой метод градиентного типа для решения задачи параметрической идентификации дискретных линейных стохастических систем с неизвестными входными сигналами. Разработанный подход направлен на повышение точности и вычислительной эффективности совместного оценивания параметров стохастической системы, вектора состояния и неизвестных входных сигналов.

Структура статьи включает следующие разделы: введение, пять основных разделов, заключение и список литературы. Во введении представлен краткий обзор о современном состоянии темы исследования. Во втором разделе описана постановка задачи. В третьем разделе подробно описана квадратно-корневая модификация алгоритма Гиллейнса – Де-Мора. Четвертый раздел содержит описание разработанной модели чув-

ствительности на основе квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса–Де-Мора и ее строгое математическое обоснование. В пятом разделе представлен новый квадратно-корневой алгоритм вычисления значений критерия идентификации и его градиента. Шестой раздел включает описание вычислительных экспериментов и обсуждение полученных результатов. Седьмой раздел содержит выводы о полученных результатах и завершает статью.

2. Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель дискретной линейной стохастической системы, представленную разностными уравнениями в пространстве состояний:

$$\begin{cases} x_k = Fx_{k-1} + Bu_{k-1} + Gw_k, \\ z_k = Hx_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $x_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $u_k \in \mathbb{R}^r$ — вектор неизвестных входных сигналов, $w_k \in \mathbb{R}^q$ — случайная помеха (вектор шума) в объекте; $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений, $v_k \in \mathbb{R}^m$ — случайная помеха (вектор шума) в измерителе; K — количество доступных измерений. Начальное состояние x_0 — гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием \bar{x}_0 и ковариацией Π_0 . Шумы w_k и v_k образуют независимые гауссовские последовательности с нулевым математическим ожиданием и матрицами ковариаций $Q \geq 0$ и $R > 0$, соответственно.

Поскольку доступной информацией является только вектор измерений z_k , оценить вектор состояния x_k и входной сигнал u_k представляется возможным с помощью метода дискретной фильтрации Гиллейнса–Де-Мора [6].

В данной работе рассмотрим более высокую степень априорной неопределенности и предположим, что стохастическая система (2.1) параметризована по θ , то есть зависит от неизвестного параметра, подлежащего оцениванию по данным зашумленных измерений z_k ($k = 1, 2, \dots, K$). Следовательно, элементы системных матриц F , B , G , H , матрицы ковариаций шумов Q и R , а также начальные условия \bar{x}_0 и Π_0 могут зависеть от параметра θ . Это значит, что $F \equiv F(\theta)$, $B \equiv B(\theta)$, $G \equiv G(\theta)$ и т. д. Тогда уравнения адаптивного фильтра в форме алгоритма Гиллейнса–Де-Мора также будут зависеть от этого параметра.

АЛГОРИТМ 1. (Алгоритм одновременного оценивания вектора состояния и входных сигналов (S. Gillijns, B. De Moor [6]))

// Инициализация

Вход: $P_0 = \Pi_0(\theta)$, $\hat{x}_0 = \bar{x}_0(\theta)$.

Для $k = 1, 2, \dots, K$ **выполнять**

// Обновление по времени

1. $\hat{x}_{k|k-1}(\theta) = F(\theta)\hat{x}_{k-1}(\theta)$,

2. $P_{k|k-1}(\theta) = F(\theta)P_{k-1}F^T(\theta) + Q(\theta)$.

// Оценка неизвестного входного сигнала

3. $\tilde{R}_k(\theta) = H(\theta)P_{k|k-1}(\theta)H^T(\theta) + R(\theta)$,

4. $D_{k-1}(\theta) = (B^T(\theta)H^T(\theta)\tilde{R}_k^{-1}(\theta)H(\theta)B(\theta))^{-1}$,

5. $M_k(\theta) = D_{k-1}(\theta)B(\theta)^T H(\theta)^T \tilde{R}_k^{-1}(\theta) = (H(\theta)B(\theta))^+$,

6. $\hat{u}_{k-1}(\theta) = M_k(\theta)(z_k - H(\theta)\hat{x}_{k|k-1}(\theta))$.

// Обновление оценки вектора состояния по текущему измерению

7. $\hat{x}_k^*(\theta) = \hat{x}_{k|k-1}(\theta) + B(\theta)\hat{u}_{k-1}(\theta)$,

8. $K_k(\theta) = P_{k|k-1}(\theta)H(\theta)^T \tilde{R}_k^{-1}(\theta)$,
9. $P_k^*(\theta) = (I - K_k(\theta)H(\theta))P_{k|k-1}(\theta)$,
10. $\hat{x}_k(\theta) = \hat{x}_k^*(\theta) + K_k(\theta)(z_k - H(\theta)\hat{x}_k^*(\theta))$,
11. $P_k(\theta) = P_k^*(\theta) + (I - K_k(\theta)H(\theta))B(\theta)D_{k-1}(\theta)B(\theta)^T(I - K_k(\theta)H(\theta))^T$.

Конец

Задача параметрической идентификации для систем вида (2.1) решена в [9], где авторами предложен новый инструментальный критерий идентификации на основе приведенной выше стандартной реализации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора (см. Алгоритм 1). В [11] указанное решение было применено для одновременной идентификации параметров модели реакции-диффузии и неизвестных граничных условий, а в [10] — для идентификации параметров модели движения объекта на плоскости.

Развивая и дополняя полученные ранее результаты, в данной работе мы предлагаем новый квадратно-корневой метод параметрической идентификации градиентного типа в классе дискретных стохастических систем с неизвестными входными сигналами.

Основная идея заключается в построении нового алгоритма вычисления значений производных по параметру θ для всех векторов оценок и ковариационных матриц, входящих в уравнения квадратно-корневого фильтра.

3. Квадратно-корневой алгоритм дискретной фильтрации для одновременного оценивания вектора состояния и неизвестных входных сигналов

Как и в случае методов калмановской фильтрации для дискретных стохастических систем с известными входными сигналами, для систем с неизвестными входными сигналами сравнительно недавно построены численно устойчивые модификации алгоритмов дискретной фильтрации, основанные на матричных ортогональных преобразованиях. Такие модификации обладают рядом преимуществ перед стандартными методами, среди которых можно отметить сокращение объема памяти, требуемой для хранения ковариационной матрицы (можно хранить и обновлять только матричный квадратный корень в форме треугольной матрицы), сохранение свойства симметричности ковариационных матриц и одно из главных преимуществ — применение на каждом шаге алгоритма численно устойчивой процедуры ортогонализации. Работа с матричными квадратными корнями позволяет повысить точность вычислений [1].

Так, квадратно-корневая модификация информационной формы алгоритма Гиллейнса – Де-Мора предложена в [7], а квадратно-корневая модификация ковариационной формы алгоритма Гиллейнса – Де-Мора предложена в [14]. В данной работе рассмотрим вторую из указанных модификаций и запишем алгоритм с учетом зависимости от неизвестного параметра θ . Обозначим через S_A матричный квадратный корень Холецкого в разложении $A = S_A S_A^T$, где A — квадратная положительно определенная матрица, S_A — нижняя треугольная матрица.

АЛГОРИТМ 2. (Квадратно-корневой ковариационный алгоритм дискретной фильтрации для систем с неизвестными входными сигналами)

Вход $\bar{x}_0(\theta)$, $\Pi_0(\theta)$

1. $\hat{x}_0 = \bar{x}_0(\theta)$, $S_{P_0}(\theta) = \text{chol}(\Pi_0(\theta))$, $S_Q(\theta) = \text{chol}(Q(\theta))$, $S_R(\theta) = \text{chol}(R(\theta))$.

// Инициализация

Для $k = 1, 2, \dots, K$ **выполнять**

// Прогноз оценки вектора состояния

$$2. \hat{x}_{k|k-1}(\theta) = F(\theta)\hat{x}_{k-1}(\theta),$$

$$3. \begin{bmatrix} S_{P_{k|k-1}}^T(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = T_1 \begin{bmatrix} S_{P_{k-1}}^T(\theta)F^T(\theta) \\ S_Q^T(\theta) \end{bmatrix}.$$

// Оценка вектора входных сигналов

$$4. \begin{bmatrix} S_{\tilde{R}_k}^T(\theta) & \tilde{K}_k^T(\theta) \\ 0 & S_{P_k^*}^T(\theta) \end{bmatrix} = T_2 \begin{bmatrix} S_{\tilde{R}}^T(\theta) & 0 \\ S_{P_{k|k-1}}^T(\theta)H^T(\theta) & S_{P_{k|k-1}}^T(\theta) \end{bmatrix},$$

$$5. \begin{bmatrix} S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \end{bmatrix} = T_3 \begin{bmatrix} S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta)H(\theta)B(\theta) \end{bmatrix},$$

$$6. \tilde{R}_k^{-1}(\theta) = S_{\tilde{R}_k}^{-T}(\theta)S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta),$$

$$7. M_k(\theta) = S_{D_{k-1}}(\theta)S_{D_{k-1}}^T(\theta)B^T(\theta)H^T(\theta)\tilde{R}_k^{-1}(\theta),$$

$$8. \hat{u}_{k-1}(\theta) = M_k(\theta)(z_k - H(\theta)\hat{x}_{k|k-1}(\theta)).$$

// Коррекция оценки вектора состояния

$$9. K_k(\theta) = \tilde{K}_k(\theta)S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta),$$

$$10. \hat{x}_k^*(\theta) = \hat{x}_{k|k-1}(\theta) + B(\theta)\hat{u}_{k-1}(\theta),$$

$$11. \hat{x}_k(\theta) = \hat{x}_k^*(\theta) + K_k(\theta)(z_k - H(\theta)\hat{x}_k^*(\theta)),$$

$$12. \begin{bmatrix} S_{P_k}^T(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} = T_4 \begin{bmatrix} S_{P_k^*}^T(\theta) \\ S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta)B^T(\theta)(I - K_k(\theta)H(\theta))^T \end{bmatrix}.$$

Конец

Выход: $\hat{x}_k(\theta), S_{P_k}(\theta), \hat{u}_{k-1}(\theta), S_{D_{k-1}}(\theta), k = 1, 2, \dots, K$.

Замечание 3.1. На этапе инициализации алгоритма 2 разложение матриц P_0, Q и R осуществляется с помощью алгоритма Холецкого [1], обозначенного выше как $\text{chol}(\cdot)$. Матрицы T_1, T_2, T_3 и T_4 являются матрицами ортогональных преобразований, приводящих соответствующие блочные матрицы к верхнему треугольному виду.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1. [14] Алгоритмы 1 и 2 алгебраически эквивалентны.

Доказательство основано на проверке матричного равенства вида

$$A^T T^T T A = A^T I A = A^T A = R^T R,$$

где A — прямоугольная (в общем случае) блочная матрица, T — ортогональная матрица, I — единичная матрица, R — верхняя треугольная блочная матрица.

Главная сложность в построении квадратно-корневого метода параметрической идентификации градиентного типа заключается в построении соответствующей модели чувствительности, которая бы позволяла находить значения производных по параметру θ для всех векторов оценок и матричных квадратных корней ковариационных матриц, входящих в уравнения квадратно-корневого алгоритма 2. Перейдем к изложению основного результата.

4. Построение модели чувствительности на основе квадратно-корневого алгоритма одновременного оценивания вектора состояния и неизвестных входных сигналов дискретной линейной стохастической системы

Модели чувствительности в классе дискретных стохастических систем применяют для анализа чувствительности математической модели к изменению ее параметров, а также при решении задач параметрической идентификации с помощью алгоритмов градиентного типа, для реализации которых адаптивный фильтр дополняют моделью чувствительности для вычисления значений градиента критерия идентификации [16].

Как правило, модель чувствительности получается в результате дифференцирования уравнений адаптивного фильтра, что приводит к системе матрично-векторных уравнений, известных как уравнения чувствительности фильтра (filter sensitivity equations [17]).

Стандартным подходом к построению модели чувствительности в классе алгоритмов дискретной фильтрации является дифференцирование матрично-векторных уравнений этих алгоритмов [18]. Однако в этом случае модель чувствительности, как и исходный алгоритм дискретной фильтрации, будет содержать операции обращения полной матрицы, что может негативно повлиять на вычислительные свойства алгоритма при наличии ошибок машинного округления. Одним из подходов к повышению численной устойчивости модели чувствительности является построение ее квадратно-корневой модификации.

Дополняя и развивая результаты, полученные в [14] и [19], построим новую модель чувствительности для квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса–Де-Мора. Для решения поставленной задачи применим оригинальные методы дифференцирования матричных ортогональных преобразований, предложенные изначально в [20] для квадратной невырожденной матрицы и затем в [21] для прямоугольных и блочных матриц.

Рассмотрим прямоугольную матрицу $A(\theta)$, параметризованную по $\theta \in \mathbb{R}$. Предположим, что область определения $\mathcal{D}(\theta)$ параметра θ такая, что для любого $\theta \in \mathcal{D}(\theta)$ существует ортогональное разложение $T(\theta)A(\theta) = R(\theta)$, где $T(\theta)$ — матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду прямоугольной матрицы $A(\theta)$, $R(\theta)$ — верхняя треугольная матрица. Предположим также, что элементы матрицы A являются дифференцируемыми функциями по скалярному параметру θ и матрица производных $A'_\theta = \left\{ \frac{\partial a_{ij}}{\partial \theta} \right\}$ известна. Требуется вычислить значения элементов матрицы R'_θ при заданном значении θ .

Далее приведем два результата, которые понадобятся нам для построения модели чувствительности.

Лемма 4.1. ([20], с. 1296) Пусть T — матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду квадратной невырожденной матрицы A , т. е. $TA = R$, где R — верхняя треугольная матрица. Пусть элементы матрицы A являются дифференцируемыми функциями по скалярному параметру θ . Тогда справедливы следующие соотношения:

$$(i) \quad T'_\theta T^\top = \bar{L}^\top - \bar{L}.$$

$$(ii) \quad TA'_\theta R^{-1} = \bar{L} + D + \bar{U}.$$

Следствие 4.1. Верхняя треугольная матрица R'_θ может быть найдена как

$$R'_\theta = (\bar{L}^T + D + \bar{U})R, \tag{4.1}$$

где матрицы \bar{L} , D и \bar{U} получены из (i) и (ii) леммы 4.1.

Лемма 4.2. ([21], с. 1463) Пусть A — прямоугольная матрица размера $(n + m) \times n$ полного столбцового ранга и элементы матрицы A являются дифференцируемыми функциями по скалярному параметру θ . Представим ортогональное преобразование $TA = R$ в виде:

$$T \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_n \Bigg\} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_n \Bigg\} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix}, \tag{4.2}$$

где T — $(n + m) \times (n + m)$ -матрица ортогонального преобразования к верхнему треугольному виду прямоугольной матрицы A и R_1 — верхняя треугольная матрица размера $n \times n$. Обозначим

$$T \underbrace{\begin{bmatrix} (A_1)'_\theta \\ (A_2)'_\theta \end{bmatrix}}_n \Bigg\} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}}_n \Bigg\} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix}, \tag{4.3}$$

где X, Y — соответствующие матричные блоки размеров $n \times n$ и $m \times n$. Тогда справедливы следующие соотношения:

- (i) Главный матричный блок размера $n \times n$ произведения $T'_\theta T^T$ может быть представлен в виде

$$(T_\theta T^T)_{1:n}^{1:n} = \bar{L}^T - \bar{L}. \tag{4.4}$$

- (ii) Строго нижняя треугольная матрица \bar{L} из (4.4) является нижней треугольной частью произведения XR_1^{-1} , т. е.

$$XR_1^{-1} = \bar{L} + D + \bar{U}. \tag{4.5}$$

- (iii) Верхняя треугольная матрица $(R_1)_\theta$ размера $n \times n$ может быть вычислена как

$$(R_1)_\theta' = (\bar{L}^T + D + \bar{U})R_1, \tag{4.6}$$

где матрицы \bar{L} , D и \bar{U} получены из (4.5).

- (iv) Матричный блок размера $m \times n$ произведения $T_\theta T^T$ может быть вычислен как

$$(T'_\theta T^T)_{1:n}^{(n+1):(n+m)} = -YR_1^{-1}. \tag{4.7}$$

Сформулируем основной теоретический результат данной работы. Для простоты считаем, что $\theta \in \mathbb{R}$.

Предложение 4.1. Модель чувствительности квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора определяется следующим алгоритмом 3:

АЛГОРИТМ 3.

Вход: θ , $\bar{x}_0(\theta)$, $\Pi_0(\theta)$.

// Инициализация

$$1. \hat{x}_0(\theta) = \bar{x}_0(\theta), S_{\Pi_0}(\theta) = \text{chol}(\Pi_0(\theta)), S_{P_0}(\theta) = S_{\Pi_0}(\theta);$$

$$\hat{x}'_0(\theta) = \frac{\partial \bar{x}_0(\theta)}{\partial \theta}, S'_{P_0}(\theta) = \frac{\partial S_{P_0}(\theta)}{\partial \theta};$$

$$S_Q(\theta) = \text{chol}(Q(\theta)), S'_Q(\theta) = \frac{\partial S_Q(\theta)}{\partial \theta};$$

$$S_R(\theta) = \text{chol}(R(\theta)), S'_R(\theta) = \frac{\partial S_R(\theta)}{\partial \theta}.$$

2. **Для** $k = 1, 2, \dots, K$ **выполнить**

// Прогноз оценки вектора состояния и ее производной

$$3. \hat{x}_{k|k-1}(\theta) = F(\theta) \hat{x}_{k-1}(\theta), \hat{x}'_{k|k-1}(\theta) = \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} \hat{x}_{k-1}(\theta) + F(\theta) \hat{x}'_{k-1}(\theta).$$

$$4. \mathcal{A}_1(\theta) = \begin{bmatrix} (F(\theta) S_{P_{k-1}}(\theta))^T \\ S_Q^T(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_1(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_1(\theta)}{\partial \theta};$$

$$\langle \mathcal{A}_1(\theta), \mathcal{A}'_1(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_1(\theta), \mathcal{R}'_1(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix} S_{P_{k|k-1}}^T(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R}'_1(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{P_{k|k-1}}^T(\theta))' \\ 0 \end{bmatrix}.$$

// Оценка вектора входных сигналов и его производной

$$5. \mathcal{A}_2(\theta) = \begin{bmatrix} S_R^T(\theta) & 0 \\ (H(\theta) S_{P_{k|k-1}}(\theta))^T & S_{P_{k|k-1}}^T(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_2(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_2(\theta)}{\partial \theta};$$

$$\langle \mathcal{A}_2(\theta), \mathcal{A}'_2(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_2(\theta), \mathcal{R}'_2(\theta) \rangle,$$

$$\text{где } \mathcal{R}_2(\theta) = \begin{bmatrix} S_{R_k}^T(\theta) & \bar{K}_k^T(\theta) \\ 0 & S_{P_k^*}^T(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{R}'_2(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{R_k}^T(\theta))' & (\bar{K}_k^T(\theta))' \\ 0 & (S_{P_k^*}^T(\theta))' \end{bmatrix}.$$

$$6. \mathcal{A}_3(\theta) = \begin{bmatrix} S_{R_k}^{-1}(\theta) H(\theta) B(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_3(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_3(\theta)}{\partial \theta};$$

$$\text{если } m = r, \langle \mathcal{A}_3(\theta), \mathcal{A}'_3(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_3(\theta), \mathcal{R}'_3(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_3(\theta) = \begin{bmatrix} S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{R}'_3(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta))' \end{bmatrix};$$

$$\text{если } m > r, \langle \mathcal{A}_3(\theta), \mathcal{A}'_3(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_3(\theta), \mathcal{R}'_3(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_3(\theta) = \begin{bmatrix} S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{R}'_3(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta))' \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$7. M_k(\theta) = S_{D_{k-1}}(\theta) S_{D_{k-1}}^T(\theta) B^T(\theta) H^T(\theta) S_{R_k}^{-T}(\theta) S_{R_k}^{-1}(\theta), M'_k(\theta) = \frac{\partial M_k(\theta)}{\partial \theta}.$$

$$8. \hat{u}_{k-1}(\theta) = M_k(\theta) (z_k - H(\theta) \hat{x}_{k|k-1}(\theta)),$$

$$\hat{u}'_{k-1}(\theta) = M'_k(\theta) (z_k - H(\theta) \hat{x}_{k|k-1}(\theta)) - M_k(\theta) \left(\frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta} \hat{x}_{k|k-1}(\theta) + H(\theta) \hat{x}'_{k|k-1}(\theta) \right).$$

// Коррекция оценки вектора состояния

$$9. K_k(\theta) = \bar{K}_k(\theta) S_{R_k}^{-1}(\theta), K'_k(\theta) = \bar{K}'_k(\theta) S_{R_k}^{-1}(\theta) - S_{R_k}^{-1}(\theta) S'_{R_k}(\theta) S_{R_k}^{-1}(\theta).$$

$$10. \hat{x}_k^*(\theta) = \hat{x}_{k|k-1}(\theta) + B(\theta) \hat{u}_{k-1}(\theta),$$

$$(\hat{x}_k^*(\theta))' = \hat{x}'_{k|k-1}(\theta) + \frac{\partial B(\theta)}{\partial \theta} \hat{u}_{k-1}(\theta) + B(\theta) \hat{u}'_{k-1}(\theta).$$

$$11. \hat{x}_k(\theta) = \hat{x}_k^*(\theta) + K_k(\theta) (z_k - H(\theta) \hat{x}_k^*(\theta)),$$

$$\hat{x}'_k(\theta) = (\hat{x}_k^*(\theta))' + K'_k(\theta) (z_k - H(\theta) \hat{x}_k^*(\theta)) - K_k(\theta) \left(\frac{\partial H(\theta)}{\partial \theta} \hat{x}_k^*(\theta) + H(\theta) (\hat{x}_k^*(\theta))' \right).$$

$$12. \mathcal{A}_4(\theta) = \begin{bmatrix} S_{P_k^*}^T(\theta) \\ S_{D_{k-1}}^T(\theta) B^T(\theta) (I - K_k(\theta) H(\theta))^T \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_4(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_4(\theta)}{\partial \theta};$$

$$\langle \mathcal{A}_4(\theta), \mathcal{A}'_4(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_4(\theta), \mathcal{R}'_4(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_4(\theta) = \begin{bmatrix} S_{P_k}^T(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R}'_4(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{P_k}^T(\theta))' \\ 0 \end{bmatrix}.$$

13. Конец цикла

Выход: $\hat{x}_k(\theta)$, $\frac{\partial \hat{x}_k(\theta)}{\partial \theta}$, $\hat{u}_{k-1}(\theta)$, $\frac{\partial \hat{u}_{k-1}(\theta)}{\partial \theta}$, $S_{P_k}(\theta)$, $\frac{\partial S_{P_k}(\theta)}{\partial \theta}$, $S_{D_{k-1}}(\theta)$, $\frac{\partial S_{D_{k-1}}(\theta)}{\partial \theta}$, $k = 1, 2, \dots, K$.

До к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим строки с номерами 1, 3, 7, 8–11 алгоритма 3. Уравнения для вычисления частных производных по параметру θ получаются прямым дифференцированием соответствующих уравнений алгоритма 2.

Доказательство уравнений в строках с номерами 4, 5, 6 и 12 заключается в применении методов дифференцирования матричных ортогональных преобразований вида $T\mathcal{A} = \mathcal{R}$.

Рассмотрим строку 4. Применим к блочным матрицам $\mathcal{A}_1(\theta)$ и $\mathcal{A}'_1(\theta)$ Лемму 4.2, где $A = \mathcal{A}_1(\theta)$, $A_1 = (F(\theta)S_{P_{k-1}}(\theta))^T$, $A_2 = S_Q^T(\theta)$ и $A'_\theta = \mathcal{A}'_1(\theta)$. Тогда $R_1(\theta)$, $(R_1)'_\theta$ есть $S_{P_{k|k-1}}^T(\theta)$, $(S_{P_{k|k-1}}^T(\theta))'$.

Рассмотрим строку 5. Применим к квадратным блочным матрицам $\mathcal{A}_2(\theta)$ и $\mathcal{A}'_2(\theta)$ Лемму 4.1, где $A = \mathcal{A}_2(\theta)$ и $A'_\theta = \mathcal{A}'_2(\theta)$. Тогда R , $(R)'_\theta$ есть $\mathcal{R}_2(\theta)$, $\mathcal{R}'_2(\theta)$.

Рассмотрим строку 6. Матрица $\mathcal{A}_3(\theta)$ имеет размер $m \times r$. Из условия применимости алгоритма Гиллейнса–Де-Мора следует, что $\text{rank } B = r$. Отсюда $m \geq r$. Поэтому мы должны рассмотреть два случая: (а) $m = r$ и (б) $m > r$.

В случае (а) применим к квадратным блочным матрицам $\mathcal{A}_3(\theta)$ и $\mathcal{A}'_3(\theta)$ Лемму 4.1, где $A = \mathcal{A}_3(\theta)$ и $A'_\theta = \mathcal{A}'_3(\theta)$. Тогда R , $(R)'_\theta$ есть $\mathcal{R}_3(\theta)$, $\mathcal{R}'_3(\theta)$.

В случае (б) применим к блочным матрицам $\mathcal{A}_3(\theta)$ и $\mathcal{A}'_3(\theta)$ Лемму 4.2, где $A = \mathcal{A}_3(\theta)$ и $A'_\theta = \mathcal{A}'_3(\theta)$. Тогда R_1 , $(R_1)'_\theta$ есть $S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta)$, $(S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta))'$.

Рассмотрим строку 12. Применим к блочным матрицам $\mathcal{A}_4(\theta)$ и $\mathcal{A}'_4(\theta)$ Лемму 4.2, где $A = \mathcal{A}_4(\theta)$, $A_1 = S_{P_k}^T(\theta)$, $A_2 = S_{D_{k-1}}^T(\theta)B^T(\theta)(I - K_k(\theta)H(\theta))^T$ и $A'_\theta = \mathcal{A}'_4(\theta)$. Тогда $R_1 = S_{P_k}^T(\theta)$ и $(R_1)'_\theta = (S_{P_k}^T(\theta))'$.

До к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Таким образом, предложенная новая модель чувствительности, основанная на квадратно-корневой модификации ковариационной формы алгоритма Гиллейнса–Де-Мора для одновременного оценивания неизвестного входного сигнала и вектора состояния дискретной линейной стохастической системы может быть использована для вычисления градиента критерия идентификации в алгоритме параметрической идентификации градиентного типа.

На основании полученного результата разработаем новый квадратно-корневой метод параметрической идентификации градиентного типа.

5. Квадратно-корневой метод параметрической идентификации дискретной линейной стохастической системы с неизвестными входными сигналами

Для решения задачи численной идентификации параметра θ модели (2.1) и неизвестных входных сигналов в работе [9] предложен новый инструментальный критерий идентификации. Воспользуемся данным результатом для построения нового квадратно-корневого метода параметрической идентификации градиентного типа.

Рассмотрим алгоритм 1. Если для заданного значения $\theta \in \mathcal{D}(\theta)$ выполнено условие [3]

$$\text{rank } H(\theta)B(\theta) = \text{rank } B(\theta) = r, \quad (5.1)$$

то алгоритм Гиллейнса–Де Мора [6] позволяет одновременно оценивать вектор состояния x_k и неизвестные входные сигналы u_k дискретной стохастической системы (2.1) по данным зашумленных измерений z_k , $k = 1, \dots, K$.

Следуя [9], в качестве исходного критерия идентификации рассмотрим

$$\mathcal{J}_e(\theta) = \text{tr} [\mathbb{E} \{e_k(\theta)e_k^T(\theta)\}], \quad (5.2)$$

где $e_k(\theta) = x_k - \hat{x}_k^*(\theta)$ — ошибка оценки вектора состояния x_k , вычисляемой по алгоритму 1 для заданного значения θ .

Предположим, что матрицы H , B и R в модели (2.1) не зависят от параметра θ и $\text{rank } H = n$. Рассмотрим наблюдаемый процесс

$$\varepsilon_k(\theta) = W^+ z_k - \hat{x}_k^*(\theta), \quad (5.3)$$

где $W^+ = (H^T H)^{-1} H^T$.

Тогда инструментальный критерий идентификации имеет следующий вид:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\theta) = \text{tr} [\mathbb{E} \{\varepsilon_k(\theta)\varepsilon_k^T(\theta)\}]. \quad (5.4)$$

Теорема 5.1. [9] Пусть для модели (2.1) $\text{rank } HB = \text{rank } B = r$. Тогда $\mathcal{J}_e(\theta)$ и $\mathcal{J}_\varepsilon(\theta)$ имеют один и тот же минимизатор и выполняется следующее соотношение:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\theta) = \mathcal{J}_e(\theta) + \text{Const}, \quad (5.5)$$

где величина $\text{Const} = \text{tr} [W^+ R(W^+)^T] - 2 \text{tr} [W^+ R M^T B^T]$ не зависит от θ .

Доказательство приведено в [9].

Заменив в (5.4) оператор математического ожидания $\mathbb{E}\{\cdot\}$ на равномерное усреднение по времени, запишем реализуемый на практике критерий идентификации:

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \varepsilon_k^T(\theta) \varepsilon_k(\theta), \quad (5.6)$$

который будем использовать для построения квадратно-корневого метода.

Для решения задачи параметрической идентификации дискретной стохастической системы (2.1) в качестве целевой функции будем использовать $\mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K)$, минимизацию которого будем проводить численными методами оптимизации градиентного типа.

Таким образом, оценка параметра модели θ рассчитывается в алгоритме численной идентификации как

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \mathcal{D}(\theta)} \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K).$$

Для вычисления значений критерия (5.6) будем использовать квадратно-корневой алгоритм 2, который позволяет на каждом шаге k вычислить значение оценки $\hat{x}_k^*(\theta)$, участвующей в формировании наблюдаемого процесса $\varepsilon_k(\theta)$.

Для построения метода параметрической идентификации градиентного типа рассмотрим случай векторного параметра $\theta \in \mathbb{R}^p$ и общее итерационное выражение для вычисления его оценки в градиентном методе первого порядка

$$\hat{\theta}^{j+1} = \hat{\theta}^j - \beta_j \nabla_{\theta} \mathcal{J}_\varepsilon(\hat{\theta}^j, K), \quad (5.7)$$

где $\hat{\theta}^j$ — оценка векторного параметра на j -й итерации алгоритма идентификации. В (5.7) ∇_{θ} означает оператор градиента $[\partial/\partial\theta_1 \mid \dots \mid \partial/\partial\theta_p]^T$ ($\theta \in \mathbb{R}^p$), который применяется к критерию (5.6) в точке $\theta = \hat{\theta}^j$; скалярный коэффициент β_j выбирают таким образом, чтобы выполнялось условие $\mathcal{J}_{\varepsilon}(\hat{\theta}^{j+1}, K) \leq \mathcal{J}_{\varepsilon}(\hat{\theta}^j, K) + e$, где e — некоторая положительная константа [22].

Далее, поскольку векторный параметр θ можно представить как $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T$, из (5.6) запишем

$$\nabla_{\theta} \mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, K) = \frac{2}{K} \sum_{k=1}^K S_k(\theta) \varepsilon_k(\theta), \tag{5.8}$$

где $S_k(\theta)$ — матрица чувствительности размера $p \times n$, у которой (ij) -й элемент

$$s_k^{(ij)}(\theta) = \frac{\partial \varepsilon_k^{(j)}(\theta)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, n.$$

В свою очередь, каждый элемент вектора градиента (5.8) имеет вид:

$$\frac{\partial \mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, K)}{\partial \theta_i} = \frac{2}{K} \sum_{k=1}^K \varepsilon_k^T(\theta) \frac{\partial \varepsilon_k(\theta)}{\partial \theta_i} = -\frac{2}{K} \sum_{k=1}^K \varepsilon_k^T(\theta) \frac{\partial \hat{x}_k^*(\theta)}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, \dots, p. \tag{5.9}$$

Для вычисления оценок $\partial \hat{x}_k^*(\theta)/\partial \theta_i$ будем использовать построенную квадратно-корневую модель чувствительности (см. Предложение 4.1).

Сформулируем квадратно-корневой алгоритм вычисления значений критерия идентификации и его градиента с учетом предположений Теоремы 5.1.

АЛГОРИТМ 4. (Вычисление значений критерия $\mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, K)$ и его градиента)

Вход: $\theta, \bar{x}_0(\theta), \Pi_0(\theta)$.

// Инициализация

1. $\hat{x}_0(\theta) = \bar{x}_0(\theta), S_{\Pi_0}(\theta) = \text{chol}(\Pi_0(\theta)), S_{P_0}(\theta) = S_{\Pi_0}(\theta);$

$$\hat{x}'_0(\theta) = \frac{\partial \bar{x}_0(\theta)}{\partial \theta}, S'_{P_0}(\theta) = \frac{\partial S_{P_0}(\theta)}{\partial \theta};$$

$$S_Q(\theta) = \text{chol}(Q(\theta)), S'_Q(\theta) = \frac{\partial S_Q(\theta)}{\partial \theta}, S_R = \text{chol}(R);$$

$$\mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, 0) = 0; \frac{\partial \mathcal{J}_{\varepsilon}(\theta, 0)}{\partial \theta} = 0.$$

2. **Для** $k = 1, 2, \dots, K$ **выполнить**

// Прогноз оценки вектора состояния и ее производной

3. $\hat{x}_{k|k-1}(\theta) = F(\theta) \hat{x}_{k-1}(\theta), \hat{x}'_{k|k-1}(\theta) = \frac{\partial F(\theta)}{\partial \theta} \hat{x}_{k-1}(\theta) + F(\theta) \hat{x}'_{k-1}(\theta).$

4. $\mathcal{A}_1(\theta) = \begin{bmatrix} (F(\theta) S_{P_{k-1}}(\theta))^T \\ S_Q^T(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_1(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_1(\theta)}{\partial \theta};$

$$\langle \mathcal{A}_1(\theta), \mathcal{A}'_1(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_1(\theta), \mathcal{R}'_1(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_1(\theta) = \begin{bmatrix} S_{P_{k|k-1}}^T(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R}'_1(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{P_{k|k-1}}^T(\theta))' \\ 0 \end{bmatrix}.$$

// Оценка вектора входных сигналов и его производной

5. $\mathcal{A}_2(\theta) = \begin{bmatrix} S_R^T & 0 \\ (HS_{P_{k|k-1}}(\theta))^T & S_{P_{k|k-1}}^T(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_2(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_2(\theta)}{\partial \theta};$

$$\langle \mathcal{A}_2(\theta), \mathcal{A}'_2(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_2(\theta), \mathcal{R}'_2(\theta) \rangle,$$

$$\text{где } \mathcal{R}_2(\theta) = \begin{bmatrix} S_{\tilde{R}_k}^T(\theta) & \bar{K}_k^T(\theta) \\ 0 & S_{P_k^*}^T(\theta) \end{bmatrix}, \mathcal{R}'_2(\theta) = \begin{bmatrix} \left(S_{\tilde{R}_k}^T(\theta) \right)' & \left(\bar{K}_k^T(\theta) \right)' \\ 0 & \left(S_{P_k^*}^T(\theta) \right)' \end{bmatrix}.$$

$$6. \mathcal{A}_3(\theta) = \left[S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta) H B \right], \mathcal{A}'_3(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_3(\theta)}{\partial \theta};$$

если $m = r$, $\langle \mathcal{A}_3(\theta), \mathcal{A}'_3(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_3(\theta), \mathcal{R}'_3(\theta) \rangle$, где $\mathcal{R}_3(\theta) = \left[S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \right]$,

$$\mathcal{R}'_3(\theta) = \left(S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \right)';$$

если $m > r$, $\langle \mathcal{A}_3(\theta), \mathcal{A}'_3(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_3(\theta), \mathcal{R}'_3(\theta) \rangle$, где $\mathcal{R}_3(\theta) = \left[S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \right]$,

$$\mathcal{R}'_3(\theta) = \left[\left(S_{D_{k-1}}^{-1}(\theta) \right)' \right].$$

$$7. M_k = (HB)^+.$$

$$8. \hat{u}_{k-1}(\theta) = M_k(z_k - H\hat{x}_{k|k-1}(\theta)), \hat{u}'_{k-1}(\theta) = -M_k H \hat{x}'_{k|k-1}(\theta).$$

// Коррекция оценки вектора состояния

$$9. K_k(\theta) = \bar{K}_k(\theta) S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta), K'_k(\theta) = \bar{K}'_k(\theta) S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta) - S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta) S'_{\tilde{R}_k}(\theta) S_{\tilde{R}_k}^{-1}(\theta).$$

$$10. \hat{x}_k^*(\theta) = \hat{x}_{k|k-1}(\theta) + B\hat{u}_{k-1}(\theta), (\hat{x}_k^*(\theta))' = \hat{x}'_{k|k-1}(\theta) + B\hat{u}'_{k-1}(\theta).$$

$$11. \hat{x}_k(\theta) = \hat{x}_k^*(\theta) + K_k(\theta)(z_k - H\hat{x}_k^*(\theta)),$$

$$\hat{x}'_k(\theta) = (\hat{x}_k^*(\theta))' + K'_k(\theta)(z_k - H\hat{x}_k^*(\theta)) - K_k(\theta)H(\hat{x}_k^*(\theta))'.$$

$$12. \mathcal{A}_4(\theta) = \begin{bmatrix} S_{P_k^*}^T(\theta) \\ S_{D_{k-1}}^T(\theta) B^T (I - K_k(\theta)H)^T \end{bmatrix}, \mathcal{A}'_4(\theta) = \frac{\partial \mathcal{A}_4(\theta)}{\partial \theta};$$

$$\langle \mathcal{A}_4(\theta), \mathcal{A}'_4(\theta) \rangle \implies \langle \mathcal{R}_4(\theta), \mathcal{R}'_4(\theta) \rangle, \text{ где } \mathcal{R}_4(\theta) = \begin{bmatrix} S_{P_k^*}^T(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathcal{R}'_4(\theta) = \begin{bmatrix} (S_{P_k^*}^T(\theta))' \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$13. \varepsilon_k(\theta) = W^+ z_k - \hat{x}_k^*(\theta), W^+ = (H^T H)^{-1} H^T.$$

$$14. \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, k) = \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, k-1) + \varepsilon_k^T(\theta) \varepsilon_k(\theta).$$

$$15. \frac{\partial \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, k)}{\partial \theta} = \frac{\partial \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, k-1)}{\partial \theta} + \varepsilon_k^T(\theta) \frac{\partial \hat{x}_k^*(\theta)}{\partial \theta}.$$

16. **Конец цикла**

$$\mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K) = \frac{1}{K} \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K), \quad \frac{\partial \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K)}{\partial \theta} = -\frac{2}{K} \frac{\partial \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K)}{\partial \theta}.$$

$$\text{Выход: } \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K), \quad \frac{\partial \mathcal{J}_\varepsilon(\theta, K)}{\partial \theta}.$$

Замечание 5.1. В алгоритме 4 приняты предположения, что матрицы B , H , R не зависят от параметра θ , $\text{rank } H = n$, $\text{rank } HB = r$, $M_k = (HB)^+$. Указанные ограничения не являются принципиальными, поскольку матрицы H и R определяют уравнение измерений в модели (2.1), а характеристики измерителя, как правило, известны. Что касается матрицы B , то в случае, если она содержит элементы, зависящие от θ , то можно построить эквивалентную модель, включив эти элементы в описание неизвестных входных сигналов.

6. Результаты вычислительных экспериментов и их обсуждение

С целью демонстрации работоспособности предложенного метода рассмотрим пример численной идентификации неизвестного коэффициента диффузии α для одномер-

ной модели диффузии, описанной уравнением

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} \quad (6.1)$$

с заданным начальным условием

$$c(x, 0) = \varphi(x) \quad (6.2)$$

и неизвестными граничными условиями первого рода

$$c(a, t) = f(t), \quad c(b, t) = g(t), \quad (6.3)$$

где $x \in [a; b]$ — пространственная координата; $t \in [0; T]$ — время; $c(x, t)$ — искомая функция, α — коэффициент диффузии, $\varphi(x)$, $f(t)$, $g(t)$ — скалярные функции. В уравнении (6.1) $c(x, t)$ имеет смысл температуры, концентрации вещества и т. д. Поставим задачу идентификации параметров данной модели, состоящую в определении коэффициента α при наличии случайных помех в измерениях значений искомой функции $c(x, t)$ в отдельных точках рассматриваемого отрезка в различные моменты времени. При этом функции $f(t)$ и $g(t)$, входящие в граничные условия (6.3), считаются неизвестными. Функция $\varphi(x)$ в начальном условии (6.2) предполагается известной.

Для решения задачи численной идентификации сначала перейдем от исходной модели (6.1)–(6.3) в непрерывном времени к дискретной модели, представленной линейной динамической системой в пространстве состояний. Как и в случае уравнения конвекции-диффузии, следуя [23], зададим в рассматриваемой пространственно-временной области конечно-разностную сетку $\{(x_i, t_k) | i = 0, 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots, K\}$, где

$$x_i = a + i\Delta x, t_k = k\Delta t, \quad \Delta x = (b - a)/N, \quad \Delta t = T/K. \quad (6.4)$$

Обозначим через $c_i^k = c(x_i, t_k)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $f^k = f(t_k)$, $g^k = g(t_k)$. Заменяем частные производные в уравнении (6.1) их конечно-разностными аппроксимациями, используя двухслойную по времени и симметричную по пространственной переменной схему. Предполагая, что соответствующие условия устойчивости для разностной схемы выполнены [24], получим следующее уравнение:

$$\frac{c_i^k - c_i^{k-1}}{\Delta t} = \alpha \frac{c_{i+1}^{k-1} - 2c_i^{k-1} + c_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (6.5)$$

где $i = 1, 2, \dots, N - 1$.

Обозначим через $s = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2}$ и выразим из (6.5) c_i^k :

$$c_i^k = s c_{i-1}^{k-1} + (1 - 2s) c_i^{k-1} + s c_{i+1}^{k-1} = s c_{i-1}^{k-1} + (1 - 2s) c_i^{k-1} + a_1 c_{i+1}^{k-1}. \quad (6.6)$$

Для удобства обозначим $a_1 = s$, $a_2 = 1 - 2s$.

С учетом (6.5) для начального условия (6.2) получаем

$$c_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (6.7)$$

В результате дискретизации граничные условия (6.3) будут иметь вид

$$c_0^k = f^k, \quad c_N^k = g^k, \quad k = 1, \dots, K. \quad (6.8)$$

Теперь запишем построенную дискретную модель в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{N-3}^k \\ c_{N-2}^k \\ c_{N-1}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{N-3}^{k-1} \\ c_{N-2}^{k-1} \\ c_{N-1}^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^{k-1} \end{bmatrix},$$

$$k = 1, 2, \dots, K. \quad (6.9)$$

Из представления (6.9) можно видеть, что неизвестные граничные условия включены в вектор входных сигналов u_k , а матрицы F и B зависят от неизвестного параметра $\theta = \alpha$. Поэтому с учетом замечания 5.1 запишем эквивалентное представление

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad u_{k-1} = s \begin{bmatrix} f^{k-1} \\ g^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Для учета «неидеальности» реального физического процесса добавим в (6.9) слагаемое Gw_k , где $G = I_{(N-1) \times (N-1)}$, $w_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma I_{(N-1) \times (N-1)})$, σ — дисперсия шума процесса. Окончательно, уравнение состояния дискретной модели примет вид:

$$c_k = Fc_{k-1} + Bu_{k-1} + Gw_k. \quad (6.10)$$

Модель измерений зададим в следующем виде:

$$z_k = Hc_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (6.11)$$

где $H \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$ — матрица измерений; $v_k \in \mathbb{R}^{N-1}$ — погрешность измерителя, моделируемая как гауссовская случайная последовательность.

Компьютерное моделирование выполним в системе MATLAB R2017a. Для проведения вычислительных экспериментов зададим для модели (6.1) пространственно-временную область $x \in [0; 1]$, $t \in [0; 2]$, «точное значение» $\theta^* = \alpha = 0.3$, $\sigma = 10^{-3}$, начальное значение $\varphi(x) = 10x(1-x)$, «неизвестные» граничные условия $f(t) = t^2/2$, $g(t) = 0$.

Проведем компьютерное моделирование процесса идентификации на сетке размера 13×401 (т.е., $N = 12$ и $K = 400$). Сначала смоделируем решение (6.10). Результат представлен на рис. 6.1.

Модель измерений зададим в виде (6.11) с $H = I_{11}$, $R = \delta I_{11}$, где δ определяет дисперсию шума измерений v_k . На рис. 6.2 представлены результаты моделирования измерений при $\delta = 10^{-2}$.

На основе смоделированных данных измерений проведем сравнение трех различных методов численной идентификации неизвестного параметра θ .

Первый метод основан на применении алгоритма 1 (стандартного алгоритма Гиллейнса–Де-Мора) и безградиентного метода численной минимизации критерия (5.6).

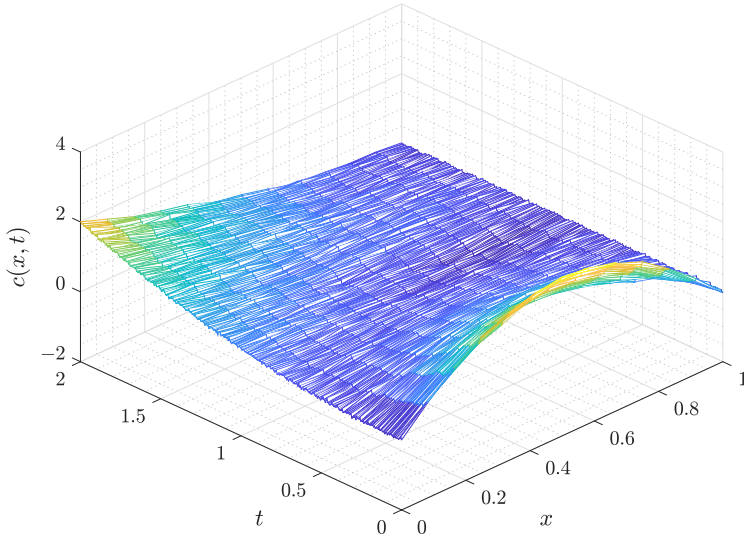


Рис. 6.1. Результаты моделирования (6.10) при $\sigma = 10^{-3}$
Fig 6.1. Simulation results of (6.10) for $\sigma = 10^{-3}$

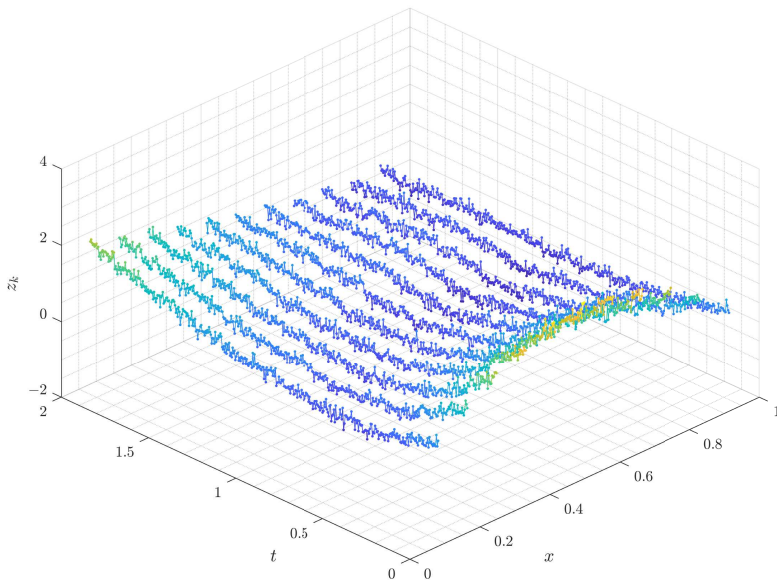


Рис. 6.2. Результаты моделирования измерений при $\delta = 10^{-2}$
Fig 6.2. Measurement simulation results for $\delta = 10^{-2}$

Обозначим соответствующий критерий как $\mathcal{J}_\varepsilon^{GDM}(\theta, K)$. Второй метод основан на применении алгоритма 2 (квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса–Де-Мора) и безградиентного метода численной минимизации критерия (5.6). Обозначим соответствующий критерий как $\mathcal{J}_\varepsilon^{SR}(\theta, K)$. Третий метод основан на применении нового квадратно-корневого алгоритма 4 (с возможностью вычисления градиента критерия идентификации) и градиентного метода численной минимизации критерия (5.6). Обозначим соответствующий критерий как $\mathcal{J}_\varepsilon^{GSR}(\theta, K)$.

Минимизация всех трех критериев $\mathcal{J}_\varepsilon^{GDM}(\theta, K)$, $\mathcal{J}_\varepsilon^{SR}(\theta, K)$ и $\mathcal{J}_\varepsilon^{GSR}(\theta, K)$ выполнялась с помощью MATLAB-функции безусловной минимизации `fminunc` с заданными параметрами: ‘SpecifyObjectiveGradient’ = false для критериев $\mathcal{J}_\varepsilon^{GDM}(\theta, K)$ и $\mathcal{J}_\varepsilon^{SR}(\theta, K)$, ‘SpecifyObjectiveGradient’ = true для критерия $\mathcal{J}_\varepsilon^{GSR}(\theta, K)$, ‘Algorithm’ = ‘quasi-newton’, ‘MaxFunctionEvaluations’ = Inf, ‘OptimalityTolerance’ = 10^{-6} , ‘Display’ = ‘off’. В качестве начального приближения для функции `fminunc` выбиралась точка $\theta_0 = 0.5$. При заданном значении δ полученные результаты идентификации усреднялись по 50 запускам. Вычисленные оценки параметра θ , а также их ошибки RMSE и MAPE, представлены в табл. 6.1 и 6.2, соответственно.

Таблица 6.1. Результаты идентификации при $\delta = 0.1$

Table 6.1. Identification results for $\delta = 0.1$

Критерий (Criterion)	Среднее значение (Mean)	RMSE	MAPE
$\mathcal{J}_\varepsilon^{GDM}(\theta, K)$	0.258889	0.042800	13.703729
$\mathcal{J}_\varepsilon^{SR}(\theta, K)$	0.258889	0.042800	13.703728
$\mathcal{J}_\varepsilon^{GSR}(\theta, K)$	0.259431	0.042342	13.522865

Таблица 6.2. Результаты идентификации при $\delta = 0.01$

Table 6.2. Identification results for $\delta = 0.01$

Критерий (Criterion)	Среднее значение (Mean)	RMSE	MAPE
$\mathcal{J}_\varepsilon^{GDM}(\theta, K)$	0.283907	0.017765	5.364222
$\mathcal{J}_\varepsilon^{SR}(\theta, K)$	0.283907	0.017765	5.364220
$\mathcal{J}_\varepsilon^{GSR}(\theta, K)$	0.286958	0.015918	4.560609

По данным таблиц 6.1 и 6.2 можно сделать следующие выводы:

1) Для безградиентных методов идентификации с применением критериев $\mathcal{J}_\varepsilon^{GDM}(\theta, K)$ и $\mathcal{J}_\varepsilon^{SR}(\theta, K)$ получились одинаковые результаты, что дополнительно подтверждает алгебраическую эквивалентность стандартной и квадратно-корневой модификаций алгоритма Гиллейнса–Де-Мора, а также работоспособность квадратно-корневой модификации.

2) Метод градиентного типа со встроенной функцией вычисления критерия идентификации $\mathcal{J}_\varepsilon^{GSR}(\theta, K)$ на основе предложенного нового алгоритма 4 позволил повысить точность идентификации параметра модели при двух различных значениях дисперсии шума измерений δ . Следует также отметить, что при уменьшении дисперсии шума измерений точность идентификации увеличивается.

Таким образом, полученные результаты подтверждают работоспособность и эффективность предложенного подхода.

7. Заключение

В работе предложен новый квадратно-корневой метод параметрической идентификации градиентного типа для дискретных линейных стохастических систем, представленных уравнениями в пространстве состояний, с неизвестными входными сигналами. Для вычисления критерия идентификации была использована квадратно-корневая модификация алгоритма Гиллейнса – Де-Мора, основанная на численно устойчивом матричном ортогональном преобразовании. Для вычисления градиента критерия идентификации построена и теоретически обоснована новая модель чувствительности для вычисления частных производных оценок вектора состояния по неизвестному параметру, подлежащему идентификации. Для построения уравнений чувствительности применялись вычислительные методы дифференцирования матричных ортогональных преобразований. На основе полученных теоретических результатов разработан новый квадратно-корневой метод параметрической идентификации градиентного типа.

Вычислительные эксперименты проведены на языке MATLAB. Получено решение задачи параметрической идентификации дискретной стохастической модели диффузии, представленной в пространстве состояний, по данным зашумленных измерений в узлах рассматриваемой сетки. В качестве неизвестного модельного параметра рассмотрен коэффициент диффузии α , а в качестве неизвестных входных сигналов — неизвестные граничные условия первого рода. Результаты работы квадратно-корневого алгоритма градиентного и безградиентного типов сравнивались с алгоритмом параметрической идентификации, разработанным ранее на основе стандартной формы алгоритма Гиллейнса – Де-Мора [9], [11]. Результаты вычислительных экспериментов подтверждают работоспособность предложенного подхода.

Таким образом, основными теоретическими результатами данной работы являются новые уравнения, определяющие квадратно-корневую модель чувствительности (Предложение 4.1) и квадратно-корневой алгоритм 4, позволяющий вычислить значения критерия идентификации и его градиента. Практическим результатом является применение разработанного подхода к решению задачи численной идентификации коэффициента диффузии при неизвестных граничных условиях по данным зашумленных измерений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grewal M. S., Andrews A. P. Kalman filtering : Theory and practice using MATLAB. New Jersey : Prentice Hall, 2001. 401 p.
2. Friedland B. Treatment of bias in recursive filtering // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1969. Vol. 14, no. 4. P. 359–367. DOI: 10.1109/TAC.1969.1099223
3. Kitanidis P. K. Unbiased minimum-variance linear state estimation // *Automatica*. 1987. Vol. 23, no. 6. P. 775–778. DOI: 10.1016/0005-1098(87)90037-9

4. Darouach M., Zasadzinski M. Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs // *Automatica*. 1997. Vol. 33, no. 4. P. 717–719. DOI: 10.1016/S0005-1098(96)00217-8
5. Hsieh C.-S. Robust two-stage Kalman filters for systems with unknown inputs // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2000. Vol. 45, no. 12. P. 2374–2378. DOI: 10.1109/9.895577
6. Gillijns S., De Moor B. Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems // *Automatica*. 2007. Vol. 43, no. 1. P. 111–116. DOI: 10.1016/j.automatica.2006.08.002
7. Gillijns S., Haverbeke N., De Moor B. Information, covariance and square-root filtering in the presence of unknown inputs // *Proceedings of the 2007 European Control Conference (ECC)* (Kos, Greece, 2–5 July 2007). 2007. P. 2213–2217. DOI: 10.23919/ECC.2007.7068514
8. Hua Y., Wang N., Zhao K. Simultaneous unknown input and state estimation for the linear system with a rank-deficient distribution matrix // *Mathematical Problems in Engineering*. 2021. DOI: 10.1155/2021/6693690
9. Tsyganova Yu., Tsyganov A. Parameter identification of the linear discrete-time stochastic systems with unknown exogenous inputs // *Cybernetics and Physics*. 2023. Vol. 12, no. 3. P. 219–229. DOI: 10.35470/2226-4116-2023-12-3-219-229
10. Цыганова Ю.В., Цыганов А.В. Об идентификации параметров дискретной линейной стохастической системы с неизвестными входными сигналами // XIV Всероссийское совещание по проблемам управления : сборник научных трудов. (Москва, 17–20 июня 2024 г.). М. : Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2024. С. 991–995. Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=79486619>
11. Galushkina D., Kuvshinova A., Tsyganova Yu. Numerical identification of reaction-diffusion model parameters under unknown boundary conditions // *2024 X International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT)* (Samara, 20–24 May 2024.) IEEE. P. 1–4. DOI: 10.1109/ITNT60778.2024.10582357
12. Kailath T., Sayed A. H., Hassibi B. Linear estimation. New Jersey: Prentice Hall, 2000. 856 p.
13. Цыганова Ю.В., Куликова М.В. О современных ортогонализированных алгоритмах оптимальной дискретной фильтрации // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия : Математическое моделирование и программирование*. 2018. Т. 11, № 4. С. 5–30. DOI: 10.14529/mmmp180401
14. Кувшинова А.Н., Галушкина Д.В. О квадратно-корневой модификации алгоритма Гиллейнса – Де-Мора // *Ученые записки УлГУ. Серия «Математика и информационные технологии»*. 2022. Т. 1, № 2. С. 17–22. Режим доступа: <https://www.mathnet.ru/rus/ulsu135>
15. Tsyganov A., Tsyganova Yu. SVD-based parameter identification of discrete-time stochastic systems with unknown exogenous inputs // *Mathematics*. 2024. Vol. 12, no. 7. DOI: 10.3390/math12071006

16. Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации. М.: Физматлит, 1995. 336 с.
17. Gupta N. K., Mehra R. K. Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculations // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1974. Vol. AC-19. P. 774–783. DOI: 10.1109/TAC.1974.1100714
18. Gibbs B. P., Andrews A. P. Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling : a practical handbook. New Jersey : John Wiley & Sons, Inc., 2011. 632 p.
19. Голубков А. В., Цыганова Ю. В., Цыганов А. В. Построение модели чувствительности на основе алгоритма одновременного оценивания входа и состояния для линейных дискретных стохастических систем с неизвестными входными воздействиями // *Системы управления, сложные системы: моделирование, устойчивость, стабилизация, интеллектуальные технологии : материалы IX Международной научно-практической конференции*. (Елец, 24–25 апреля 2023 г.) Елец.: Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, 2023. С. 41–45. Режим доступа: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=79563251>
20. Bierman G. J., Belzer M. R., Vandergraft J. S., Porter D. W. Maximum likelihood estimation using square root information filters // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1990. Vol. 35, no. 12. P. 1293–1299. DOI: 10.1109/9.61004
21. Куликова М. В., Цыганова Ю. В. О дифференцировании матричных ортогональных преобразований // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2015. Т. 55, № 9. С. 1460–1473. DOI: 10.7868/S0044466915090112
22. Nocedal J., Wright S. J. Numerical optimization. In Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer Nature, 2006. 664 p.
23. Кувшинова А. Н. Динамическая идентификация смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2019. Т. 21, № 1. С. 469–479. DOI: 10.15507/2079-6900.21.201904.469-479
24. Мазо А. Б. Вычислительная гидродинамика. Ч. 1. Математические модели, сетки и сеточные схемы : учеб. пособие. Казань: Казан. ун-т, 2018. 165 с.

*Поступила 05.07.2025; доработана после рецензирования 01.08.2025;
принята к публикации 27.08.2025*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. M. S. Grewal, A. P. Andrews, *Kalman filtering: Theory and practice using MATLAB*, Prentice Hall, New Jersey, 2001, 401 p.

2. B. Friedland, “Treatment of bias in recursive filtering”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **14**:4 (1969), 359–367. DOI: 10.1109/TAC.1969.1099223
3. P.K. Kitanidis, “Unbiased minimum-variance linear state estimation”, *Automatica*, **23**:6 (1987), 775–778. DOI: 10.1016/0005-1098(87)90037-9
4. M. Darouach, M. Zasadzinski, “Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs”, *Automatica*, **33**:4 (1997), 717–719. DOI: 10.1016/S0005-1098(96)00217-8
5. C.-S. Hsieh, “Robust two-stage Kalman filters for systems with unknown inputs”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**:12 (2000), 2374–2378. DOI: 10.1109/9.895577
6. S. Gillijns, B. De Moor, “Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems”, *Automatica*, **43**:1 (2007), 111–116. DOI: 10.1016/j.automatica.2006.08.002
7. S. Gillijns, N. Haverbeke, B. De Moor, “Information, covariance and square-root filtering in the presence of unknown inputs”, *The 2007 European Control Conference (ECC): Proceedings* (Kos, Greece, 2–5 July, 2007), IEEE, 2007, 2213–2217 DOI: 10.23919/ECC.2007.7068514.
8. Y. Hua, N. Wang, K. Zhao, “Simultaneous unknown input and state estimation for the linear system with a rank-deficient distribution matrix”, *Mathematical Problems in Engineering*, 2021, ID 6693690. DOI: 10.1155/2021/6693690
9. Yu. Tsyganova, A. Tsyganov, “Parameter identification of the linear discrete-time stochastic systems with unknown exogenous inputs”, *Cybernetics and Physics*, **12**:3 (2023), 219–229. DOI: 10.35470/2226-4116-2023-12-3-219-229
10. J.V. Tsyganova, A.V. Tsyganov, “Identification of parameters in a discrete linear stochastic system with unknown input signals”, *XIV All-Russian Meeting on Control Problems : Collection of scientific papers* (Moscow, June 17–20, 2024), V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, 2024, 991–995 (In Russ.), <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=79486619>.
11. D. Galushkina, A. Kuvshinova, Yu. Tsyganova, “Numerical identification of reaction-diffusion model parameters under unknown boundary conditions”, *2024 X International Conference on Information Technology and Nanotechnology (ITNT) : Proceedings* (Samara, Russian Federation, 20–24 May, 2024), IEEE, 2024, 1–4 DOI: 10.1109/ITNT60778.2024.10582357.
12. T. Kailath, A.H. Sayed, B. Hassibi, *Linear estimation*, Prentice Hall, New Jersey, 2000, 856 p.
13. Yu.V. Tsyganova, M.V. Kulikova, “[On Modern Array Algorithms for Optimal Discrete Filtering]”, *Vestnik YuUrGU. Ser. Mat. Model. Progr.*, **11**:4 (2018), 5–30 (In Russ.). DOI: 10.14529/mmp180401
14. A.N. Kuvshinova, D.V. Galushkina, “[On the square-root modification of the Gillijns – De-More algorithm]”, *Scientific Notes of ULSU. Series “Mathematics and Information Technologies”*, 2022, no. 1, 17–22 (In Russ.), <http://mi.mathnet.ru/ulsu135>.

15. A. Tsyganov, Yu. Tsyganova, “SVD-based parameter identification of discrete-time stochastic systems with unknown exogenous inputs”, *Mathematics*, **12:7** (2024), 1006. DOI: 10.3390/math12071006
16. Ya. Z. Tsyppkin, *Informacionnaya teoriya identifikacii [Information theory of identification]*, Fizmatlit, Moscow, 1995 (In Russ.), 336 p.
17. N. K. Gupta, R. K. Mehra, “Computational aspects of maximum likelihood estimation and reduction in sensitivity function calculations”, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-19** (1974), 774–783. DOI: 10.1109/TAC.1974.1100714
18. B. P. Gibbs, *Advanced Kalman filtering, least-squares and modeling : a practical handbook*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011, 632 p.
19. A. V. Golubkov, Yu. V. Tsyganova, A. V. Tsyganov, “Constructing a sensitivity model based on an algorithm for simultaneous estimation of input and state for linear discrete-time stochastic systems with unknown inputs”, *Control Systems, Complex Systems : Modeling, Stability, Stabilization, Intelligent Technologies (CSMSSIT-2025): Proceedings of the X International Scientific and Practical Conference* (Yelets, April 24–25, 2023), Yelets State University named after I. A. Bunin, Yelets, 2023, 41–45 (In Russ.), <https://elibrary.ru/item.asp?id=54172715>.
20. G. J. Bierman, M. R. Belzer, J. S. Vandergraft, D. W. Porter, “Maximum likelihood estimation using square root information filters”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **35:12** (1990), 1293–1299. DOI: 10.23919/ACC.1989.4790637
21. M. V. Kulikova, Yu. V. Tsyganova, “[On differentiation of matrix orthogonal transformations]”, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **55:9** (2015), 1460–1473 (In Russ.). DOI: 10.1134/S0965542515090109
22. J. Nocedal, S. J. Wright, *Numerical optimization. In Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*, Springer Nature, 2006, 664 p.
23. A. N. Kuvshinova, “[Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model in the case of noisy measurements]”, *Zhurnal SVMO*, **21:4** (2019), 469–479 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.21.201904.469-479
24. A. B. Mazo, *Vychislitel'naya gidrodinamika. CHast' 1. Matematicheskie modeli, setki i setochnye skhemy : ucheb. posobie [Computational fluid dynamics. Part 1. Mathematical models, grids and grid schemes : textbook]*, Kazan. Univ., Kazan, 2018 (In Russ.), 165 p.

Submitted 05.07.2025; Revised 01.08.2025; Accepted 27.08.2025

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.