

DOI 10.15507/2079-6900.27.202503.325-340

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.5+519.65

## Метод оптимального расположения узлов аппроксимации

**Е. В. Конопацкий<sup>1</sup>, О. В. Котова<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> ФГБОУ ВО "Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет" (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

<sup>2</sup> ФГБОУ ВО "Донбасская национальная академия строительства и архитектуры" (г. Макеевка, Донецкая Народная Республика, Российская Федерация)

**Аннотация.** В настоящей статье предложен метод оптимизации расположения узлов аппроксимации, реализованный на примере функции Рунге. В основу предложенного метода заложена идея о нелинейности пространства по осям декартовой системы координат. Для управления нелинейностью использована полиномиальная функция с параметром, равномерно распределенным на отрезке  $[0, 1]$ . Проведен сравнительный анализ следующих стандартных методов выбора узлов аппроксимации функции Рунге: равномерно по оси абсцисс, равномерно по оси ординат, равномерно по длине кривой, по узлам Чебышева. Для сравнения интерполяционных полиномов Лагранжа проведена оценка погрешностей аппроксимации функции Рунге. Представлены графики построенных полиномов Лагранжа для пяти и семи узлов, выбранных разными способами. Для выбора оптимального расположения узлов аппроксимации предложенного метода составлена целевая функция, минимизация которой и обеспечивает оптимальное расположение узлов  $x_i$  по оси абсцисс. Расположение узлов аппроксимации по оси ординат определено вычислением значений  $y_i$  на основе исходной функции Рунге. В результате найдены узлы, которые обеспечивают минимальные отклонения от исходной аппроксимируемой функции Рунге. В качестве примера рассмотрены случаи пяти и семи узлов аппроксимации. Для визуализации полученных результатов приведены графики исходной функции Рунге и её аппроксимации с указанием найденных оптимальных узлов. Данный метод является устойчивым к увеличению количества узлов, расположение которых каждый раз оптимизируется и адаптируется к исходной функции.

**Ключевые слова:** аппроксимация, интерполяция, функция Рунге, узлы аппроксимации, равномерное разбиение, погрешность аппроксимации, оптимальное расположение узлов

**Для цитирования:** Конопацкий Е. В., Котова О. В. Метод оптимального расположения узлов аппроксимации // Журнал Средневолжского математического общества. 2025. Т. 27, № 3. С. 325–340. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.325-340

Об авторах:

**Конопацкий Евгений Викторович**, д.т.н., доцент, директор института информационных технологий ННГАСУ (603000, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ильинская, д. 65), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4798-7458>, [e.v.konopatskiy@mail.ru](mailto:e.v.konopatskiy@mail.ru)

**Котова Ольга Викторовна**, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики ФГБОУ ВО "ДОННАСА" (286123, Россия, г.о. Макеевка, г. Макеевка, ул. Державина, д. 2), <https://orcid.org/0009-0004-6292-1080>, [o.v.kotova@donnasa.ru](mailto:o.v.kotova@donnasa.ru)

© Конопацкий Е. В., Котова О. В.



Контент доступен по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.  
This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License.

MSC2020 41A10

## Method of optimal placement of approximation nodes

**E. V. Konopatskiy<sup>1</sup>, O. V. Kotova<sup>2</sup>**<sup>1</sup> *Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation*<sup>2</sup> *Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, Donetsk People's Republic, Russian Federation*

**Abstract.** In this article we propose a method for optimizing the arrangement of approximation nodes and use Runge function as an example to implement this approach. The method is based on the idea of nonlinearity of space along the axes of Cartesian coordinate system. To control the nonlinearity, we use a polynomial function with a parameter uniformly distributed over the segment  $[0, 1]$ . A comparative analysis of the following standard methods of selecting nodes for the approximation of Runge function was carried out: uniformly along the abscissa axis, uniformly along the ordinate axis, uniformly along the curve length, and by Chebyshev's nodes. To compare the Lagrange interpolation polynomials, we estimate the approximation errors of Runge's function. Graphs of the constructed Lagrange's polynomials for five and seven interpolation nodes selected in different ways are presented. To select the optimal arrangement of approximation nodes of the proposed method, we compile an objective function, whose minimization ensures optimal arrangement of nodes  $x_i$  along the abscissa axis. The arrangement of approximation nodes along the ordinate axis is determined by calculating the  $y_i$  values basing on the original Runge's function. As a result, we found nodes that provide minimal deviations from the original approximated Runge's function. The paper considers cases of five and seven approximation nodes. To visualize the results obtained, we provide graphs of original Runge's function and of its approximation, indicating the optimal nodes found. This method is stable to increasing the number of nodes, whose arrangement is optimized each time and adapted to the original function.

**Keywords:** approximation, interpolation, Runge's function, approximation nodes, uniform partitioning, approximation error, optimal node placement

**For citation:** E. V. Konopatskiy, O. V. Kotova. Method of optimal placement of approximation nodes. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 27:3(2025), 325–340. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.325-340

*About the authors:*

**Evgeniy V. Konopatskiy**, Doctor of Engineering, Docent, Director of the Institute of Information Technology, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod, Russian Federation (65 Ilyinskaya st., Nizhny Novgorod 603000, Russian Federation), <https://orcid.org/0000-0003-4798-7458>, [e.v.konopatskiy@mail.ru](mailto:e.v.konopatskiy@mail.ru)

**Olga V. Kotova**, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics of the Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture (2 Derzhavina st., Makeyevka, Donetsk People's Republic 286123, Russian Federation), <https://orcid.org/0009-0004-6292-1080>, [o.v.kotova@donnasa.ru](mailto:o.v.kotova@donnasa.ru)

## 1. Введение

Аппроксимация функций является важным инструментом математического моделирования. Она используется: в математике и статистике для упрощения сложных математических выражений ([1], [2], [3]), в физике и инженерной практике для моделирования физических процессов ([4], [5], [6]), в компьютерных науках для разработки алгоритмов и методов оптимизации ([7], [8], [9]), в экономике для создания экономических моделей и прогнозов ([10], [11], [12]). Частным случаем аппроксимации является интерполяция, которая также нашла широкое применение в различных отраслях науки и техники ([13], [14], [15]).

Некоторая сложная или эмпирически заданная функция является интерполированной с определённой точностью в некоторой ограниченной области, если она смоделирована с помощью простого аналитического выражения, например, полинома. Полученное выражение, в то же время, и аппроксимирует данную функцию в этой области.

Для проведения исследований выберем функцию Рунге, которая определена на отрезке  $[-1, 1]$ :

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}.$$

В работе [16] автор исследует полиномиальную аппроксимацию некоторых классических функций на отрезке  $[-1, 1]$  с равноотстоящими друг от друга узлами и отмечает, что для функции Рунге интерполяционный процесс обладает следующим свойством: при увеличении числа узлов он расходится. В численном анализе данный феномен выражается в эффекте нежелательных колебаний. В [17] это объясняют близостью особых точек к узлам аппроксимации. Если узлы выбирать специальным образом, то можно повысить качество аппроксимации. Исходя из этого, возникает задача выбора узлов интерполяции, обеспечивающая максимальное качество аппроксимации.

## 2. Стандартные методы выбора узлов аппроксимации

Рассмотрим различные наборы узлов, полученные при равномерном разбиении и классическим методом, и сравним аппроксимацию функции Рунге в каждом из случаев. Определим оптимальное расположение узлов и построим по выбранным точкам интерполанты, аппроксимирующие данную функцию.

Для проведения исследований используются следующие способы расположения узлов интерполяции на отрезке  $[-1, 1]$ :

- 1) равномерно по оси абсцисс [16];
- 2) равномерно по оси ординат [17];
- 3) равномерно по длине кривой, построенной на основе функции Рунге [18];
- 4) узлы Чебышева [19].

Рассмотрим подробнее каждое разбиение.

- 1) Узлы, делящие отрезок  $[-1, 1]$  на равные части, имеют вид:

$$x_i = -1 + \frac{2i}{n}, \quad i = \overline{0, n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Количество узлов в этом случае равно  $2n + 1$ . Рассмотрим и другие способы выбора такого же количества узлов, полученных при равномерном разбиении оси ординат и кривой  $f(x)$ .

2) Равномерное разбиение отрезка  $[0, 1]$  на оси ординат осуществляется набором точек:

$$y_i = \frac{i}{n}, \quad i = \overline{0, n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

При этом  $x_i$  определяется по формуле:

$$x_i = \pm \sqrt{\frac{1 - y_i}{25y_i}}.$$

3) Для равномерного разбиения по длине кривой необходимо вычислить её длину  $L$ :

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \frac{2500x^2}{(1 + 25x^2)^4}} dx$$

и разделить на  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) частей. Разбиение кривой  $f(x)$  на участки длиной  $\frac{L}{n}$  является равномерным.

4) Эффективным способом избежать феномена Рунге является использование узлов Чебышева.

При  $n \in \mathbb{N}$  узлы Чебышева на отрезке  $[-1, 1]$  задаются формулой:

$$x_i = \cos \frac{(2i - 1)\pi}{2n}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Их особенность в том, что они распределены не равномерно, а сконцентрированы ближе к краям интервала  $[-1, 1]$ . Интерполяция на узлах Чебышева значительно уменьшает колебания в крайних точках, тем самым улучшая аппроксимацию функции  $f(x)$ .

В качестве интерполяционного полинома будем использовать полином Лагранжа  $L_n(f, x)$ , который в узлах  $x_i$  совпадает со значениями функции  $f(x)$ :

$$L_n(f, x_i) = f(x_i).$$

Для  $f(x) \in C[-1, 1]$  интерполяционный полином Лагранжа задается формулой:

$$L_n(f, x) = \sum_{i=0}^n f(x_i^{(n)}) l_i^{(n)}(x),$$

где  $l_i^{(n)}(x)$  — лагранжевы многочлены влияния, удовлетворяющие условию:

$$l_i^{(n)}(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

задаются в виде:

$$l_i^{(n)}(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}.$$

### 3. Сравнительный анализ стандартных методов выбора узлов аппроксимации

В случае равномерного разбиения получаем набор из  $(2n + 1)$  узлов  $(x_i, y_i)$ .  
Приведем численные результаты выбора узлов при разных способах разбиения:  
1) при  $n = 2$  получаем пять узлов (табл. 3.1)

**Таблица 3.1.** Численные результаты выбора пяти узлов  
**Table 3.1.** Numerical results of choosing five nodes

| Разбиение оси $x$ |       | Разбиение оси $y$ |       | Разбиение кривой |       | Разбиение Чебышева |       |
|-------------------|-------|-------------------|-------|------------------|-------|--------------------|-------|
| $x_i$             | $y_i$ | $x_i$             | $y_i$ | $x_i$            | $y_i$ | $x_i$              | $y_i$ |
| -1                | 0.038 | -1                | 0.038 | -1               | 0.038 | -0.95              | 0.042 |
| -0.5              | 0.138 | -0.19             | 0.518 | -0.3             | 0.302 | -0.59              | 0.104 |
| 0                 | 1     | 0                 | 1     | 0                | 1     | 0                  | 1     |
| 0.5               | 0.138 | 0.19              | 0.518 | 0.3              | 0.302 | 0.59               | 0.104 |
| 1                 | 0.038 | 1                 | 0.038 | 1                | 0.038 | 0.95               | 0.042 |

2) при  $n = 3$  получаем семь узлов (табл. 3.2)

**Таблица 3.2.** Численные результаты выбора семи узлов  
**Table 3.2.** Numerical results of choosing seven nodes

| Разбиение оси $x$ |       | Разбиение оси $y$ |       | Разбиение кривой |       | Разбиение Чебышева |       |
|-------------------|-------|-------------------|-------|------------------|-------|--------------------|-------|
| $x_i$             | $y_i$ | $x_i$             | $y_i$ | $x_i$            | $y_i$ | $x_i$              | $y_i$ |
| -1                | 0.038 | -1                | 0.038 | -1               | 0.038 | -0.98              | 0.04  |
| -0.67             | 0.083 | -0.27             | 0.359 | -0.5             | 0.138 | -0.78              | 0.061 |
| -0.33             | 0.265 | -0.14             | 0.679 | -0.19            | 0.532 | -0.43              | 0.175 |
| 0                 | 1     | 0                 | 1     | 0                | 1     | 0                  | 1     |
| 0.33              | 0.265 | 0.14              | 0.679 | 0.19             | 0.532 | 0.43               | 0.175 |
| 0.67              | 0.083 | 0.27              | 0.359 | 0.5              | 0.138 | 0.78               | 0.061 |
| 1                 | 0.038 | 1                 | 0.038 | 1                | 0.038 | 0.98               | 0.04  |

Для визуализации аппроксимации функции Рунге в случае пяти (рис. 3.1) и семи (рис. 3.2) узлов при разных способах разбиения обозначим: разбиение оси  $x$  — красным, разбиение оси  $y$  — черным, разбиение кривой — синим, разбиение Чебышева — зеленым цветами.

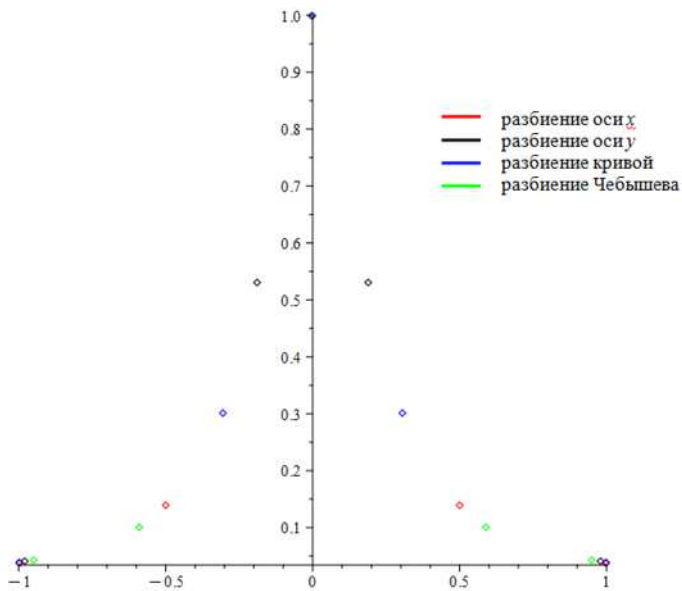


Рис. 3.1. Аппроксимация функции Рунге в случае пяти узлов

Fig. 3.1. Approximation of the Runge function in the case of five nodes

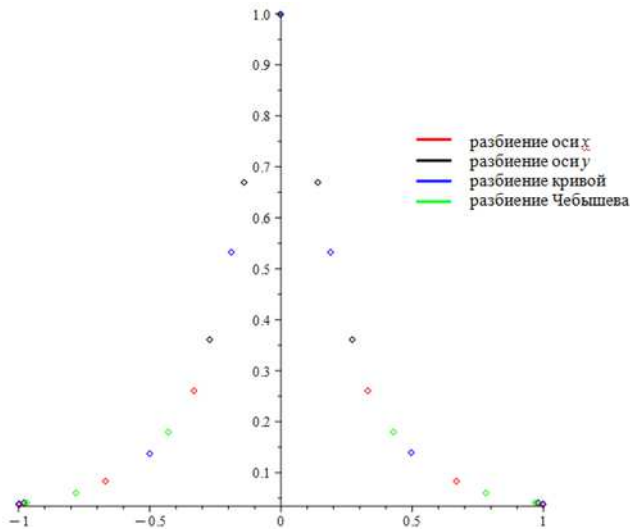


Рис. 3.2. Аппроксимация функции Рунге в случае семи узлов

Fig. 3.2. Approximation of the Runge function in the case of seven nodes

Сравнение интерполяционных полиномов Лагранжа позволяет оценить погрешность  $R_{2n}(x)$  аппроксимации функции Рунге:

$$|R_{2n}(x)| \leq \frac{M_{2n+1}}{(2n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{2n} (x - x_i) \right|, \quad (3.1)$$

где  $M_{2n+1} = \max |f^{(2n+1)}(\xi)|$ ,  $\xi \in [x_0, x_{2n}]$ . В силу (3.1) в рассмотренных случаях погрешность  $R_{2n}(x)$ :

1) для пяти узлов при  $n = 2$

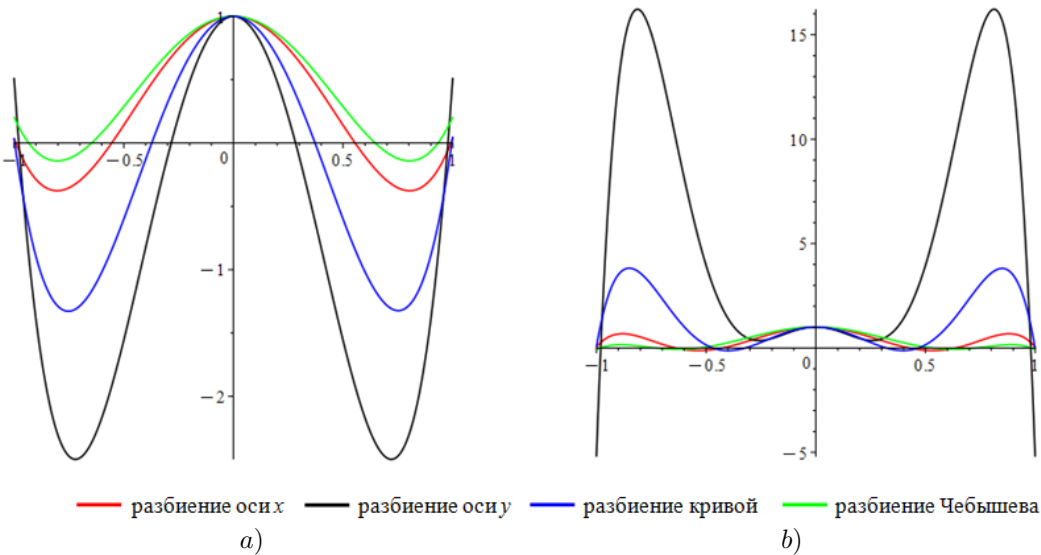
| Разбиение оси $x$       | Разбиение оси $y$       | Разбиение кривой        | Разбиение Чебышева      |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $ R_{2n}(x)  \leq 0.55$ | $ R_{2n}(x)  \leq 0.77$ | $ R_{2n}(x)  \leq 0.77$ | $ R_{2n}(x)  \leq 0.31$ |

2) для семи узлов при  $n = 3$

| Разбиение оси $x$       | Разбиение оси $y$       | Разбиение кривой        | Разбиение Чебышева      |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| $ R_{2n}(x)  \leq 0.13$ | $ R_{2n}(x)  \leq 0.28$ | $ R_{2n}(x)  \leq 0.23$ | $ R_{2n}(x)  \leq 0.06$ |

Графики полиномов Лагранжа для данных наборов узлов  $(x_i, y_i)$  представлены на рисунке 3.3 а ( $n = 2$ ) и на рисунке 3.3 б ( $n = 3$ ). Для визуализации интерполяционных кривых, полученных для каждого способа разбиения, обозначим: разбиение оси  $x$  — красным, разбиение оси  $y$  — черным, разбиение кривой — синим, разбиение Чебышева — зеленым цветами.

Наибольшие колебания ближе к краям отрезка  $[-1, 1]$  имеет полином, построенный на узлах равномерного разбиения оси  $y$ , наименьшие — на узлах Чебышева.



**Рис. 3.3.** Интерполяционные полиномы Лагранжа для разных способов разбиения: а) в случае 5 узлов ( $n = 2$ ); б) в случае 7 узлов ( $n = 3$ )

**Fig. 3.3.** Lagrange's interpolation polynomials for different partitioning methods: а) in the case of 5 nodes ( $n = 2$ ); б) in the case of 7 nodes ( $n = 3$ )

Сравнительный анализ аппроксимации функции Рунге в случае пяти и семи узлов подтвердил, что из рассмотренных стандартных методов выбора узлов аппроксимации лучше всего приближает функцию Рунге метод, основанный на использовании узлов Чебышева. Особенно это ощутимо при значительном увеличении количества узлов аппроксимации. Вместе с тем, ни один из исследованных методов не ставит и, соответственно, не решает задачу поиска оптимального расположения узлов аппроксимации с помощью целевой функции. Описанию именно такого метода на примере аппроксимации функции Рунге посвящён следующий раздел статьи.

#### 4. Метод оптимального расположения узлов аппроксимации

Суть метода заключается том, что для выбора оптимального расположения узлов аппроксимации составляется целевая функция  $F$ , минимизация которой и обеспечивает оптимальное расположение узлов  $x_i$  по оси абсцисс. Расположение узлов аппроксимации по оси ординат определяется вычислением значений  $y_i$  на основе исходной функции Рунге:

$$y_i = f(x_i) \equiv \frac{1}{1 + 25x_i^2}, \quad (4.1)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Подобная постановка задачи описана в работе [18], но в отличие от предложенного метода, использовалась кусочная функция в виде локальных параметрических кубических сплайнов Эрмита.

Традиционно, для интерполяции некоторой функции используются уже известные координаты узлов для вычисления полиномиальных коэффициентов. Такой подход даёт ограниченные возможности в управлении расположением узлов интерполяции, поскольку фактически расположение приходится определять наугад. Найти логические закономерности между расположением узлов и точностью аппроксимации исходной функции авторам не удалось. Тогда авторами был предложен метод, в основу которого заложена идея о нелинейности пространства по осям декартовой системы координат. Для управления этой нелинейностью используется полиномиальная функция с параметром  $t \in [0, 1]$ .

Такая полиномиальная интерполяция проведена отдельно по осям абсцисс и ординат. При этом в качестве значений параметра  $t$  выбираются точки, равномерно распределённые на отрезке  $[0, 1]$ :

– в случае пяти узлов

$$t \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\},$$

– в случае семи узлов

$$t \in \left\{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\right\}.$$

При построении целевой функции  $F$  используются две функции  $n$  переменных, зависящие от координат  $x_i$  узлов интерполяции и параметра  $t$ :  $Y_1(x, t)$  и  $Y_2(x, t)$ , где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Первая функция  $Y_1(x, t)$  получена на основе исходной функции Рунге:

$$Y_1(x, t) = P_{n-1}(y, t), \quad (4.2)$$

где  $P_{n-1}(y, t)$  — интерполяционный полином степени не выше  $n - 1$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , переменные  $y_i = y(x_i)$  определяются по формуле (4.1).

Вторая функция  $Y_2(x, t)$  описывается параметрическими уравнениями, содержащими в качестве переменных координаты  $x_i$  узлов интерполяции и параметр  $t$ :

$$\begin{cases} X(x, t) = \tilde{P}_{n-1}(x, t), \\ Y_2(x, t) = \frac{1}{1+25X^2(x, t)}, \end{cases} \quad (4.3)$$

где  $\tilde{P}_{n-1}(x, t)$  — интерполяционный полином степени не выше  $n - 1$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x_i$  — искомые узлы.

Для пяти узлов в (4.3) получаем интерполяционные полиномы 4-го порядка:

$$\begin{aligned} X(x_i, t) = & x_1 \left( \bar{t}^4 - \frac{13}{3} \bar{t}^3 t + \frac{13}{3} \bar{t}^2 t^2 - \bar{t} t^3 \right) + x_2 \left( 16 \bar{t}^3 t - \frac{64}{3} \bar{t}^2 t^2 + \frac{16}{3} \bar{t} t^3 \right) + \\ & + x_3 \left( -12 \bar{t}^3 t + 40 \bar{t}^2 t^2 - 12 \bar{t} t^3 \right) + x_4 \left( \frac{16}{3} \bar{t}^3 t - \frac{64}{3} \bar{t}^2 t^2 + 16 \bar{t} t^3 \right) + \\ & + x_5 \left( -\bar{t}^3 t + \frac{13}{3} \bar{t}^2 t^2 - \frac{13}{3} \bar{t} t^3 + t^4 \right), \\ Y_2(x_i, t) = & \frac{1}{1+25x_1^2} \left( \bar{t}^4 - \frac{13}{3} \bar{t}^3 t + \frac{13}{3} \bar{t}^2 t^2 - \bar{t} t^3 \right) + \frac{1}{1+25x_2^2} \left( 16 \bar{t}^3 t - \frac{64}{3} \bar{t}^2 t^2 + \frac{16}{3} \bar{t} t^3 \right) + \\ & + \frac{1}{1+25x_3^2} \left( -12 \bar{t}^3 t + 40 \bar{t}^2 t^2 - 12 \bar{t} t^3 \right) + \frac{1}{1+25x_4^2} \left( \frac{16}{3} \bar{t}^3 t - \frac{64}{3} \bar{t}^2 t^2 + 16 \bar{t} t^3 \right) + \\ & + \frac{1}{1+25x_5^2} \left( -\bar{t}^3 t + \frac{13}{3} \bar{t}^2 t^2 - \frac{13}{3} \bar{t} t^3 + t^4 \right), \end{aligned}$$

где  $\bar{t} = 1 - t$ .

Для семи узлов — интерполяционные полиномы 6-го порядка:

$$\begin{aligned} X(x_i, t) = & x_1 (\bar{t}^6 - 8, 7\bar{t}^5 t + 22, 7\bar{t}^4 t^2 - 22, 7\bar{t}^3 t^3 + 8, 7\bar{t}^2 t^4 - \bar{t} t^5) + \\ & + x_2 (36\bar{t}^5 t - 133, 2\bar{t}^4 t^2 + 151, 2\bar{t}^3 t^3 - 61, 2\bar{t}^2 t^4 + 7, 2\bar{t} t^5) + \\ & + x_3 (-45\bar{t}^5 t + 301, 5\bar{t}^4 t^2 - 418, 5\bar{t}^3 t^3 + 184, 5\bar{t}^2 t^4 - 22, 5\bar{t} t^5) + \\ & + x_4 (40\bar{t}^5 t - 308\bar{t}^4 t^2 + 600\bar{t}^3 t^3 - 308\bar{t}^2 t^4 + 40\bar{t} t^5) + \\ & + x_5 (-22, 5\bar{t}^5 t + 184, 5\bar{t}^4 t^2 - 418, 5\bar{t}^3 t^3 + 301, 5\bar{t}^2 t^4 - 45\bar{t} t^5) + \\ & + x_6 (7, 2\bar{t}^5 t - 61, 2\bar{t}^4 t^2 + 151, 2\bar{t}^3 t^3 - 133, 2\bar{t}^2 t^4 + 36\bar{t} t^5) + \\ & + x_7 (-\bar{t}^5 t + 8, 7\bar{t}^4 t^2 - 22, 7\bar{t}^3 t^3 + 22, 7\bar{t}^2 t^4 - 8, 7\bar{t} t^5 + t^6), \\ Y_2(x_i, t) = & \frac{1}{1+25x_1^2} (\bar{t}^6 - 8, 7\bar{t}^5 t + 22, 7\bar{t}^4 t^2 - 22, 7\bar{t}^3 t^3 + 8, 7\bar{t}^2 t^4 - \bar{t} t^5) + \\ & + \frac{1}{1+25x_2^2} (36\bar{t}^5 t - 133, 2\bar{t}^4 t^2 + 151, 2\bar{t}^3 t^3 - 61, 2\bar{t}^2 t^4 + 7, 2\bar{t} t^5) + \\ & + \frac{1}{1+25x_3^2} (-45\bar{t}^5 t + 301, 5\bar{t}^4 t^2 - 418, 5\bar{t}^3 t^3 + 184, 5\bar{t}^2 t^4 - 22, 5\bar{t} t^5) + \\ & + \frac{1}{1+25x_4^2} (40\bar{t}^5 t - 308\bar{t}^4 t^2 + 600\bar{t}^3 t^3 - 308\bar{t}^2 t^4 + 40\bar{t} t^5) + \\ & + \frac{1}{1+25x_5^2} (-22, 5\bar{t}^5 t + 184, 5\bar{t}^4 t^2 - 418, 5\bar{t}^3 t^3 + 301, 5\bar{t}^2 t^4 - 45\bar{t} t^5) + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{1+25x_6^2}(7, 2\bar{t}^5t - 61, 2\bar{t}^4t^2 + 151, 2\bar{t}^3t^3 - 133, 2\bar{t}^2t^4 + 36\bar{t}t^5) + \\ + \frac{1}{1+25x_7^2}(-\bar{t}^5t + 8, 7\bar{t}^4t^2 - 22, 7\bar{t}^3t^3 + 22, 7\bar{t}^2t^4 - 8, 7\bar{t}t^5 + t^6),$$

где  $\bar{t} = 1 - t$ .

Рассмотрим параметр  $t$  на отрезке  $[0, 1]$ . Разобьём этот отрезок равномерно на  $m$  частей. Тогда

$$t_j = \frac{j-1}{m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2, \quad j = 1, 2, \dots, m+1. \quad (4.4)$$

Значение  $m$  задается заранее и рекомендуется принимать  $m > n$ .

Целевая функция  $F$  представляет собой сумму квадратов разности между  $Y_1(x, t)$  и  $Y_2(x, t)$  (аналог суммы квадратов регрессионных остатков в регрессионном анализе):

$$F(x) = \sum_{j=0}^m (Y_1(x, t_j) - Y_2(x, t_j))^2, \quad (4.5)$$

где  $Y_1$  и  $Y_2$  находятся из (4.2) и (4.3) соответственно.

Поставим задачу о поиске глобального минимума целевой функции

$$F(x) = F(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min.$$

Поскольку  $t_j$  определено в (4.4), целевая функция  $F$  зависит исключительно от искоемых значений координат узлов аппроксимации  $x_i$ . Минимизация полученной целевой функции  $F$  из (4.5) происходит по  $x_i$  и реализована с помощью численного метода дифференциальной эволюции для  $x_i \in [-1, 1]$  (см., напр., [20]).

В приведенных примерах  $m = 10$ . Это означает, что отрезок, на котором изменяется параметр  $t$ , разбивается на 10 частей.

Для 5 узлов целевая функция  $F$  зависит от  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), где  $x_1$  и  $x_5$  известны – это начало и конец отрезка, на котором определена исходная функция Рунге:  $x_1 = -1$ ,  $x_5 = 1$ . Для такой функции необходимо найти только координаты  $x_2$ ,  $x_3$  и  $x_4$ , чтобы целевая функция (сумма квадратов отклонений аппроксимирующего полинома от исходной функции Рунге) была минимальной.

Аналогично для 7 узлов целевая функция  $F$  зависит от  $x_i$  ( $i = 1, \dots, 7$ ), где  $x_1 = -1$ ,  $x_7 = 1$ .

В результате минимизации функции  $F$  найдены значения координат узлов аппроксимации, обеспечивающие минимальные отклонения от исходной функции Рунге:

1) в случае пяти узлов аппроксимации

|       |       |        |   |       |       |
|-------|-------|--------|---|-------|-------|
| $x_i$ | -1    | -0.197 | 0 | 0.197 | 1     |
| $y_i$ | 0.038 | 0.508  | 1 | 0.508 | 0.038 |

2) в случае семи узлов аппроксимации

|       |       |        |       |   |       |       |       |
|-------|-------|--------|-------|---|-------|-------|-------|
| $x_i$ | -1    | -0.345 | -0.12 | 0 | 0.12  | 0.345 | 1     |
| $y_i$ | 0.038 | 0.252  | 0.735 | 1 | 0.735 | 0.252 | 0.038 |

Точность аппроксимации определялась с помощью среднеквадратичной ошибки:

$$s^2 = \frac{F}{m+1},$$

где  $F$  — целевая функция из (4.5).

При увеличении  $m$  точность аппроксимации незначительно увеличивается, но при этом усложняется целевая функция и увеличивается время поиска глобального минимума.

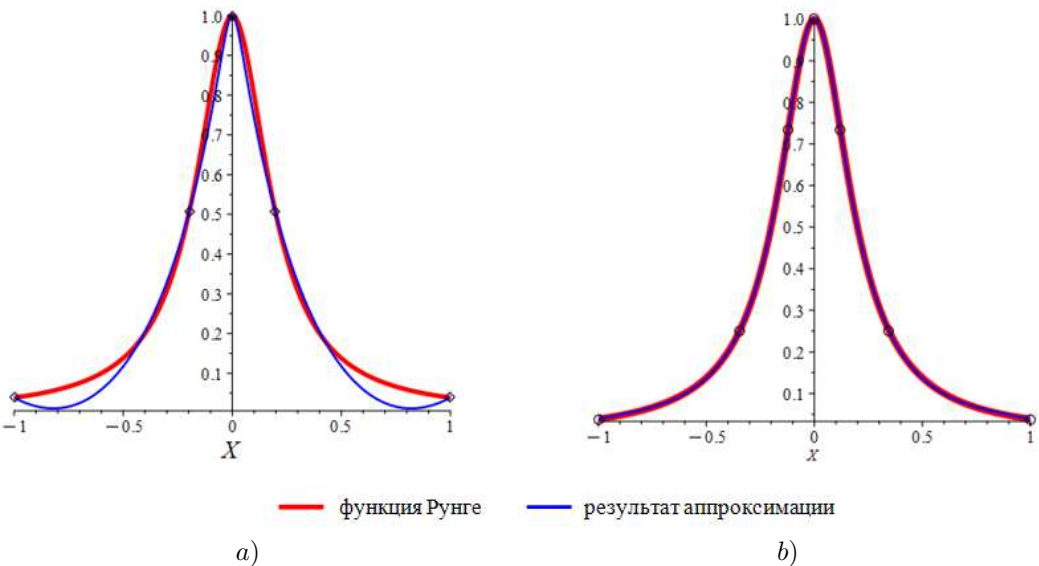
Для сравнения приведем значения погрешности в случае 5 узлов аппроксимации.

При  $m = 10$  погрешность аппроксимации  $s^2 = 0.000963053145677740$ .

При  $m = 100$  —  $s^2 = 0.00115569913604165$ .

При  $m = 1000$  —  $s^2 = 0.00116610251646715$ .

При использовании пяти узлов аппроксимации среднеквадратичная ошибка достигает 0.00096 (рис. 4.1 а), что значительно лучше всех приведенных выше экспериментов, включая узлы Чебышева. При использовании семи узлов аппроксимации — среднеквадратичная ошибка составляет всего  $5.139 \cdot 10^{-7}$  (рис. 4.1 б). На рисунках 4.1 а и 4.1 б красной линией показан график исходной функции, а синей — график результата аппроксимации. Также точками показаны оптимальные узлы аппроксимации.



**Рис. 4.1.** Визуализация результатов поиска оптимальных узлов аппроксимации: а) в случае 5 точек; б) в случае 7 точек

**Fig. 4.1.** Visualization of the results of search for optimal approximation nodes: а) in the case of 5 points; б) in the case of 7 points

Таким образом, для качественной аппроксимации функции Рунге можно использовать полиномы значительно более низкого порядка по сравнению с другими методами. Так при использовании узлов Чебышева для достижения качественного результата аппроксимации необходимо не менее 20 узлов, что приводит к необходимости использования полиномов 19-й степени. В то время как для аппроксимации функции Рунге на основе оптимизированного расположения 7 узлов достаточно лишь двух полиномов 6-го порядка по каждой из координатных осей. Для сравнения, в работе [21] исследовалась возможность использования нейросетей для аппроксимации функции Рунге, но даже в случае 500 точек на отрезке  $[-2.5, 2.5]$  погрешность аппроксимации получается

выше, чем в данной работе в случае 5 узлов (рис. 4.1 а). В [22] реализован особый алгоритм на основе вейвлет-преобразования, обеспечивший квази-интерполяцию функции Рунге методом сингулярных вейвлетов с равномерным расположением узлов интерполяции на промежутке  $[-1, 1]$ . Для достижения качественного результата понадобилось 13 точек.

## 5. Заключение

Преимуществом предложенного метода оптимизации расположения узлов аппроксимации, помимо низких значений среднеквадратичной ошибки, является то, что метод является устойчивым к увеличению количества узлов, т.к. их расположение каждый раз оптимизируется и адаптируется к исходной функции. Другим преимуществом является значительное снижение степени аппроксимирующих полиномов по сравнению с другими методами аппроксимации без необходимости использования кусочных функций.

К недостаткам предложенного метода относится использование численных методов минимизации целевой функции, которые при реализации существующих методов поиска минимальных значений функции многих переменных в значительной степени зависят от качества выбора начального приближения. Перспективой дальнейших исследований является реализация предложенного метода для аппроксимации других непрерывных и дифференцируемых функций, а также массивов экспериментальных данных.

**Финансирование.** Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда № 25-21-00003: <https://rscf.ru/project/25-21-00003/>.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kvasnikov V.P., Yehorov S.V., Shkvarnytska T.Yu. Technology for restoring functional dependencies to determine reliability parameters. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*. 2021. Vol. 101, no. 1. P. 78–86. DOI: 10.31489/2021M1/78-86
2. Заляжных В.В. Аппроксимация процентных точек критерия Гири // *Математический вестник Вятского государственного университета*. 2022. Т. 27, № 4. С. 4–9. DOI: 10.25730/VSU.0536.22.031
3. Горский В.В., Реш В.В. Конечно-разностная аппроксимация смешанных производных в уравнениях математической физики // *Математическое моделирование и численные методы*. 2021. Т. 32, № 4. С. 58–79. DOI: 10.18698/2309-3684-2021-4-5879
4. Грицевич М.И., Лукашенко В.Т., Турчак Л.И. Аппроксимация решения уравнений метеорной физики элементарными функциями // *Математическое моделирование*. 2015. Т. 27, № 2. С. 25–33.
5. Konopatskiy E. V., Mashtaler S. N., Bezditnyi A. A. Study of high-strength steel fiber concrete strength characteristics under elevated temperatures using mathematical modelling methods. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*:

- International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety - 2. Building Materials and Products* (Chelyabinsk, September 25–27, 2019). Chelyabinsk: Institute of Physics Publishing, 2019. Vol. 687. P. 022040. DOI: 10.1088/1757-899X/687/2/022040
6. Конопацкий Е. В. Моделирование аппроксимирующего 16-точечного отсека поверхности отклика применительно к решению неоднородного уравнения теплопроводности // *Геометрия и графика*. 2019. Т. 7, № 2. С. 39–46. DOI: 10.12737/article\_5d2c1a551a22c5.12136357
  7. Буянова И. В., Замулин И. С. Применение приближения с помощью кривых для определения вычислительной сложности решений задач по программированию // *Современные наукоемкие технологии*. 2022. Т. 2, № 5. С. 232–236. DOI: 10.17513/snt.39176
  8. Sobol V.R., Torishnyy R.O. Smooth Approximation of the Quantile Function Derivatives. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*. 2022. Vol. 15, no. 4. P. 115–122. DOI: 10.14529/mmp220411
  9. Patseika P.G., Rouba Ya.A., Smatrytski K.A. On the approximation of conjugate functions and their derivatives on the segment by partial sums of Fourier - Chebyshev series. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2024. no. 2. P. 6–18.
  10. Вдовина Е. С., Дорофеев Б. В. Задача аппроксимации законов пенсионного страхования // *Процессы управления и устойчивость*. 2015. Т. 2, № 1. С. 579–583.
  11. Садыкова З. Ф., Абаев В. А. Построение математических моделей с использованием полиномиальных функций и матричных исчислений с применением систем нечетких линейных уравнений при решении экономических задач // *Мягкие измерения и вычисления*. 2023. Т. 66, № 5. С. 94–107. DOI: 10.36871/2618-9976.2023.05.008
  12. Кутышкин А. В. Моделирование динамики валового регионального продукта // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника*. 2021. Т. 21, № 2. С. 104–113. DOI: 10.14529/ctcr210210
  13. Konopatskiy, E.V., Bezditnyi A.A. Geometric modeling of multifactor processes and phenomena by the multidimensional parabolic interpolation method. *Journal of Physics: Conference Series: XIII International Scientific and Technical Conference "Applied Mechanics and Systems Dynamics"* (Omsk, November 5-7, 2019). Omsk: Institute of Physics Publishing, 2020. Vol. 1441. P. 012063. DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012063
  14. Badalyan N.P., Shmelev V.E. A method of piece-quadratic interpolation of a tabled function with a continuous first derivative based on linear combination of Central-symmetric parabolas. *Proceedings of National Polytechnic University of Armenia. Electrical Engineering, Energetics*. 2023. no. 1. P. 50–58. DOI: 10.53297/18293328-2023.1-50

15. Botchkarev A. M. Using interpolation for generating input data for the Gross Domestic Product Monte Carlo simulation. *Beneficium*. 2023. Vol. 49, no. 4. P. 33–37. DOI: 10.34680/BENEFICIUM.2023.4(49).33-37
16. Чередниченко В. Г. О двух исторических примерах полиномиальной аппроксимации // *Сибирские электронные математические известия*. 2013. Т. 10. С. 55–58.
17. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: МГУ, 1976. – 304 с.
18. Хачумов В. М. Оптимизация расположения узлов интерполирующего сплайна в задачах отработки типовых траекторий движения // Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем: Материалы Всероссийской конференции с международным участием (Москва, 15–19 апреля 2019 г.). Москва: Российский университет дружбы народов, 2019. С. 329–334.
19. Rouba Ya. A., Smatrytski K. A., Dirvuk Ya. V. On a Lebesgue constant of interpolation rational process at the Chebyshev - Markov nodes. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*. 2018. no. 3. P. 12–20.
20. Price K. V., Storn R. M., Lampinen J. A. *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. DOI: 10.1007/3-540-31306-0
21. Галкин В. А., Гавриленко Т. В., Смородинов А. Д. Некоторые аспекты аппроксимации и интерполяции функций искусственными нейронными сетями // *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*. 2022. Т. 38, № 1. С. 54–73. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-54-73
22. Романчук В. М. Аппроксимация сингулярными вейвлетами // *Системный анализ и прикладная информатика*. 2018. № 2. С. 23–28.

*Поступила 17.02.2025; доработана после рецензирования 03.08.2025;  
принята к публикации 27.08.2025*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. V. P. Kvasnikov, S. V. Yehorov, T. Yu. Shkvarnytska, “Technology for restoring functional dependencies to determine reliability parameters”, *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series*, 1:101 (2021), 78–86. DOI: 10.31489/2021M1/78-86
2. V. V. Zalyazhnykh, “Approximation of percentage points Giri’s criterion”, *Mathematical Bulletin of Vyatka State University*, 4:27 (2022), 4–9.
3. V. V. Gorsky, V., G. Resh, “Finite-difference approximation of mixed derivatives in equations of mathematical physics”, *Mathematical modeling and numerical methods*, 4:32 (2021), 58–79. DOI: 10.18698/2309-3684-2021-4-5879

4. M. I. Gritsevich, V. T. Lukashenko, L. I. Turchak, "Approximation of the solution meteoric physics's equations by elementary functions", *Mathematical modeling*, **27**:2 (2015), 25–33.
5. E. V. Konopatskiy, S. N. Mashtaler, A. A. Bezditnyi, "Study of high-strength steel fiber concrete strength characteristics under elevated temperatures using mathematical modelling methods", *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering: International Conference on Construction, Architecture and Technosphere Safety - 2. Building Materials and Products*. Vol. 687 (Chelyabinsk, September 25–27, 2019), Institute of Physics Publishing, Chelyabinsk, 2019, 022040 DOI: 10.1088/1757-899X/687/2/022040.
6. E. V. Konopatskiy, "Modeling of an approximating 16-point section of the response surface as applied to solving an inhomogeneous heat conduction equation", *Geometry and Graphics*, **7**:2 (2019), 39–46. DOI: 10.12737/article\_5d2c1a551a22c5.12136357
7. I. V. Buyanova, I. S. Zamulin, "Application of approximation using curves to determine the computational complexity of solving programming problems", *Modern science-intensive technologies*, **5**:2 (2022), 232–236. DOI: 10.17513/snt.39176
8. V. R. Sobol, R. O. Torishnyy, "Smooth Approximation of the Quantile Function Derivatives", *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, **15**:4 (2022), 115–122. DOI: 10.14529/mmp220411
9. P. G. Patseika, Ya. A. Rouba, K. A. Smatrytski, "On the approximation of conjugate functions and their derivatives on the segment by partial sums of Fourier - Chebyshev series", *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, **2** (2024), 6–18.
10. E. S. Vdovina, B. V. Dorofeev, "The problem of approximating pension insurance laws", *Control processes and stability*, **2**:1 (2015), 579–583.
11. Z. F. Sadykova, V. A. Abaev, "Construction of mathematical models using polynomial functions and matrix calculus using systems of fuzzy linear equations in solving economic problems", *Soft measurements and calculations*, **66**:5 (2023), 94–107. DOI: 10.36871/2618-9976.2023.05.008
12. A. V. Kutyshkin, "Modeling the dynamics of the gross regional product", *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer technologies, control, radio electronics*, **21**:2 (2021), 104–113. DOI: 10.14529/ctcr210210
13. E. V. Konopatskiy, A. A. Bezditnyi, "Geometric modeling of multifactor processes and phenomena by the multidimensional parabolic interpolation method", *Journal of Physics: Conference Series: XIII International Scientific and Technical Conference "Applied Mechanics and Systems Dynamics"*. Vol. 1441 (Omsk, November 5-7, 2019), Institute of Physics Publishing, Omsk, 2020, 012063 DOI: 10.1088/1742-6596/1441/1/012063.
14. N. P. Badalyan, V. E. Shmelev, "A method of piece-quadratic interpolation of a tabled function with a continuous first derivative based on linear combination of Central-symmetric parabolas", *Proceedings of National Polytechnic University of Armenia. Electrical Engineering, Energetics*, **1** (2023), 50–58. DOI: 0.53297/18293328-2023.1-50

15. A.M. Botchkarev, “Using interpolation for generating input data for the Gross Domestic Product Monte Carlo simulation”, *Beneficium*, **4**:49 (2023), 33–37. DOI: 10.34680/BENEFICIUM.2023.4(49).33-37
16. V.G. Cherednichenko, “On two historical examples of polynomial approximation”, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, **10** (2013), 55–58.
17. V.M. Tikhomirov, *Some issues in approximation theory*, Moscow. Moscow State University., 1976, 304 p.
18. V.M. Khachumov, “Optimization of the nodes’s arrangement of the interpolating spline in the problems of processing typical motion trajectories”, *Information and telecommunication technologies and mathematical modeling of high-tech systems: Proceedings of the All-Russian conference with international participation* (Moscow. 15-19 april 2019), Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN), M., 2019, 329–334.
19. Ya.A. Rouba, K.A. Smatrytski, Ya.V. Dirvuk, “On a Lebesgue constant of interpolation rational process at the Chebyshev - Markov nodes”, *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, **3** (2018), 12–20.
20. K.V. Price, R.M. Storn, J.A. Lampinen, *Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization*, Berlin. Heidelberg: Springer., 2005, 544 c.
21. V.A. Galkin, T.V. Gavrilenko, A.D. Smorodinov, “Some aspects of approximation and interpolation of functions by artificial neural networks”, *Bulletin of KRAUNC. Physical and mathematical sciences*, **38**:1 (2022), 54–73. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-38-1-54-73
22. V.M. Romanchak, “Approximation by singular wavelets”, *System analysis and applied informatics*, **2** (2018), 23–28.

*Submitted 17.02.2025; Revised 03.08.2025; Accepted 27.08.2025*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.