DOI 10.15507/2079-6900.27.202503.315-324 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.518

Об обобщенных операторах Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций

А. И. Иноземцев

ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА имени К. А. Тимирязева» (г. Москва, Российская Федерация)

Аннотация. Работа содержит достаточные условия действия обобщенного и линейного обобщенного частно-интегрального оператора Романовского в пространстве непрерывных функций, определенных на n-мерном параллелепипеде. Установлена непрерывность обобщенного и линейного обобщенного частно-интегрального оператора Романовского в случае его действия в пространстве непрерывных функций и в более общем случае непрерывных ядер операторов со значениями в пространстве измеримых и интегрируемых по Лебегу функций. Получены оценки норм обобщенного и линейного обобщенного частно-интегрального оператора Романовского в пространстве непрерывных функций. Показана зависимость оценки нормы линейного оператора типа Романовского с обобщенными частными интегралами от размерности пространства и от нормы непрерывных ядер обобщенных частно-интегральных операторов Романовского со значениями в пространстве измеримых и интегрируемых по Лебегу функций. Установленные свойства операторов применяются к исследованию линейных обобщенных частно-интегральных уравнений типа Романовского, в частности, к изучению обобщенного частно-интегрального уравнения n-связных цепей Маркова.

Ключевые слова: частно-интегральный оператор Романовского, марковские цепи, действие и непрерывность оператора, пространство непрерывных функций, норма оператора, пространство измеримых и интегрируемых по Лебегу функций

Для цитирования: Иноземцев А. .И. Об обобщенных операторах Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2025. Т. 27, № 3. С. 315–324. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.315-324

Об авторах:

Иноземцев Алексей Иванович, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «РГАУ-МСХА им. К. А. Тимирязева» (127434, Россия, г. Москва, ул. Тимирязевская, 49), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7662-8991, a.inozemcev@rgau-msha.ru

Original article

MSC2020 57N10

On generalized Romanovsky operators with partial integrals in the space of continuous functions

A. I. Inozemtsev

Russian State Agrarian University — Moscow Timiryazev Agricultural Academy (Moscow, Russian Federation)

Abstract. The paper contains sufficient conditions for the action of generalized and linear generalized partial integral Romanovsky operator in the space of continuous functions defined on an n-dimensional parallelepiped. Continuity of these operators is established in case of their action in the space of continuous functions and, in a more general case of continuous kernels of operators with values in the space of measurable and Lebesgue integrable functions. Estimates are obtained for the norms of the operators mentioned. The dependence of the estimate for the norm of a linear Romanovsky type operator with generalized partial integrals on the space dimension and on the norm of continuous kernels of generalized partial integral Romanovsky operators with values in the space of measurable and Lebesgue integrable functions is shown. The properties established are applied to the study of linear generalized partial integral equations of Romanovsky type, in particular, to the study of generalized partial integral equation of n-connected Markov chains.

Keywords: partial integral Romanovsky operator, Markov chains, operator action and continuity, space of continuous functions, operator norm, space of measurable and Lebesgue integrable functions

For citation: *A. I. Inozemtsev.* On generalized Romanovsky operators with partial integrals in the space of continuous functions. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:3(2025), 315–324. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.315-324

About the authors:

Aleksey I. Inozemtsev, Ph.D. (Phys. and Math.), associate professor, Department of Higher Mathematics, Russian State Agrarian University — Moscow Timiryazev Agricultural Academy (49, Timiryazevskay St., Moscow, 127434, Russian Federation), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-7662-8991, a.inozemcev@rgau-msha.ru

1. Введение

Систематическое изучение выражений содержащих частные интегралы начато в середине XX-го века. Подробная теория линейных частно-интегральных операторов, заданных в двумерном евклидовом пространстве, получила развитие в работах профессора А. С. Калитвина, его учеников и последователей в работах [1], [2], [3], где изучались свойства операторов и уравнений с частными интегралами в некоторых функциональных пространствах. Свойства многомерных операторов и уравнений с частными интегралами, а также условия их обратимости в пространстве непрерывных функций содержатся в работе [4]. В работах [5], [6], [7] приведены условия существования и единственности многомерных частно-интегральных уравнений Фредгольма, содержащих операторы (1.1) в анизотропных пространствах Лебега. Необходимые и достаточные условия действия частного случая операторов типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций были получены в [8] лишь в случае $\mathbb{R}_2$ и при единственной перестановке переменных функции u в каждом частно-интегральном операторе. В работе [9] содержатся теоремы о разрешимости частно-интегральных уравнений Романовского, результаты о различных приближенных и численных методах их решения, так как явное решение таких уравнений удается найти лишь в редких случаях.

В работе рассматривается обобщенный частно-интегральный оператор Романовского

$$(R_{\alpha\beta}u)(x) = (K_\alpha \Pi_\beta u)(x)$$

и линейный обобщенный частно-интегральный оператор Романовского

$$(\mathcal{R}_{\alpha\beta}u)(x) = \sum_{\alpha}\sum_{\beta}(R_{\alpha\beta}u)(x),$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ — мультииндекс, принимающий значения m-элементного подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$,

$$(K_\alpha u)(x) = \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha)\, u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)\, dt_\alpha \tag{1.1}$$

— многомерный частно-интегральный оператор, некоторые свойства которого исследованы в более широком классе функций в [10]. В двумерном случае данный оператор был рассмотрен в работе [11]. Интегралы в (1.1) понимаются в смысле Лебега, $D_\alpha = [a_{\alpha_1}, b_{\alpha_1}] \times \ldots \times [a_{\alpha_m}, b_{\alpha_m}]$, $k_\alpha(x; t_\alpha)$ — измеримые функции, $t_\alpha = (t_{\alpha_1}, t_{\alpha_2}, \ldots, t_{\alpha_m})$, Π_β — оператор перестановки переменных функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, т.е. $(\Pi_\beta u)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \ldots, x_{\beta_n})$, а β — одна из перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, которую кратко будем обозначать в виде мультииндекса $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Характерной особенностью таких операторов является содержание многомерного частно-интегрального оператора K_α и оператора перестановки Π_β переменных функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ под знаком интеграла и последующим интегрированием по части переменных. В связи с этим теория таких операторов существенно отличается от теории интегральных операторов, так как не являются ни интегральными и ни компактными.

Изложим краткое содержание работы. В параграфе 2 приведена задача теории n-связных марковских цепей, приводящая к уравнению, содержащему обобщенный оператор типа Романовского. Параграфы 3 и 4 содержат достаточные условия непрерывности операторов $R_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ соответственно в пространстве непрерывных функций при условии их действия в нем ($R_{\alpha\beta}\colon C(D) \to C(D)$, $\mathcal{R}_{\alpha\beta}\colon C(D) \to C(D)$), приведены аналогичные условия в более общем случае принадлежности ядер частно-интегральных операторов пространству $C(L_1(D))$. Содержатся оценки норм обобщенного и линейного обобщенного частно-интегрального оператора типа Романовского в пространстве непрерывных функций.

2. Задача, приводящая к обобщенному уравнению типа Романовского

Пусть дан бесконечный ряд опытов случайной величины X, принимающей значения на отрезке $[a, b]$, пронумерованных числами $1, 2, 3, \ldots$. Опыты разобьем на звенья:

нулевое звено образуют опыты $1,2,\ldots,n$, первое звено — опыты $2,3,\ldots,n+1$, и т.д. Пусть $P_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ — дифференциальный закон вероятности того, что значения $x_1,x_2,\ldots,x_n$ случайной величины X попадают в k-е звено, $P_k(x_i)$ — дифференциальный закон того, что $X=x_i$ в k-ом опыте, при условии, что результаты других опытов неизвестны, тогда $P_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n$ — вероятность того, что X в $k+j$-м опыте попадет в интервал (x_j,x_j+dx_j), $j=\overline{1,n}$. Если функции $P_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $P_k(x_i)$ — непрерывны, то построенные звенья образуют непрерывную n-связную цепь Маркова. Полученные функции нормированы:

$$\int\limits_{[a,b]^n} P_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n=1,\qquad \int\limits_a^b P_k(x_i)\,dx_i=1.$$

В силу теоремы сложения вероятностей

$$P_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\int\limits_{[a,b]^m} P_{k-m}(t_1,t_2,\ldots,t_m,x_1,x_2,\ldots,x_{n-m})$$
$$\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m,x_1,x_2,\ldots,x_{n-m},\mathbf{x_{n-m+1}},\ldots,\mathbf{x_n})\,dt_1dt_2\ldots dt_m,\quad (2.1)$$

где непрерывная на $[a,b]^n$ функция $\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m,x_1,x_2,\ldots,x_{n-m},\mathbf{x_{n-m+1}},\ldots,\mathbf{x_n})$ — дифференциальный закон вероятностей того, что $X=\mathbf{x_{n-m+1}},\ldots,\mathbf{x_n}$ в опытах с номерами $n-m+1,\ldots,n$ и что в предшествующих опытах $1,2,\ldots n-m$ случайная величина X принимала значения $t_1,t_2,\ldots,t_m,x_1,x_2,\ldots,x_{n-m}$. Пусть λ — произвольная постоянная, в (2.1) полагая $P_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\lambda^k u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, получим многомерное частно интегральное уравнение

$$\lambda u(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\int\limits_{[a,b]^m}\varphi(t_1,t_2,\ldots,t_m,x_1,x_2,\ldots,x_{n-m},\mathbf{x_{n-m+1}},\ldots,\mathbf{x_n})$$
$$u(t_1,t_2,\ldots,t_m,x_1,x_2,\ldots,x_{n-m})\,dt_1dt_2\ldots dt_m,\quad (2.2)$$

к решению которого сводится задача n-мерных марковскох цепей.

В случае $n=2$ данная задача была поставлена В.И. Романовским в работе [12], где приведено исследование уравнения

$$\lambda u(x,y)=\int\limits_{[a,b]^m}\varphi(t,x,y)u(t,x)\,dt+f(x,y)\qquad (2.3)$$

с непрерывным ядром, аналогично методу определителей Фредгольма. Уравнение (2.3) называется частно интегральным уравнением Романовского, а оператор $(Ru)(x,y)=\int\limits_{[a,b]^m}\varphi(t,x,y)u(t,x)\,dt$ — частно интегральным оператором типа Романовского.

В случае $n>2$ в уравнении (2.3) $x=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-m}),y=(x_{n-m+1},\ldots,x_n),t=(t_1,t_2,\ldots,t_m)$, $m\le n$. Уравнение (2.3) в таком случае называется обобщенным частно-интегральным уравнением Романовского, а оператор R — обобщенным оператором типа Романовского. Теория таких уравнений существенно отличается от теории интегральных уравнений Фредгольма, а оператор R — не интегральный и не компактный, так как неизвестная функция $u(t_1,t_2,\ldots,t_m,x_1,x_2,\ldots,x_{n-m})$ интегрируется лишь по части переменных.

3. Обобщенные частно-интегральные операторы типа Романовского в пространстве непрерывных функций

Определим оператор

$$\Pi_\beta u(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_n}), \tag{3.1}$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ — мультииндекс перестановки переменных функции u.

Композицию многомерного частно-интегрального оператора (1.1) и (3.1) будем называть обобщенным частно-интегральным оператором типа Романовского: $R_{\alpha\beta} = K_\alpha \circ \Pi_\beta$, т.е.

$$(R_{\alpha\beta}u)(x) = (K_\alpha \Pi_\beta u)(x) = \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha)\, \Pi_\beta u(x_{\bar\alpha}, t_\alpha)\, dt_\alpha = \int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x; t_\alpha)\, u(x_{\bar\alpha\beta}, t_{\alpha\beta})\, dt_\alpha. \tag{3.2}$$

Заметим, что оператор (3.2) является линейным, а оператор (3.1) — линейный и непрерывный.

Ниже приведены некоторые свойства оператора $R_{\alpha\beta}$ в пространстве $C(D)$, непрерывных на параллелепипеде $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ функций. Данные свойства содержат достаточные условия действия оператора $R_{\alpha\beta}$ в пространстве $C(D)$ и в случае $n = 2$ содержатся в работе [8].

Теорема 3.1. *Если $R_{\alpha\beta} \colon C(D) \to C(D)$, то оператор $R_{\alpha\beta}$ непрерывен.*

Доказательство. Пусть $u(x) \in C(D)$, что означает $\Pi_\beta u(x) \in C(D)$, тогда $w(x) = (R_{\alpha\beta}u)(x) \in C(D)$, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Следовательно, функция $k_\alpha(x; t_\alpha)\, u(x_{\bar\alpha\beta}, t_{\alpha\beta})$ интегрируема почти при всех $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по t_α на D_α. Из свойств интеграла Лебега следует, что и функция $|k_\alpha(x; t_\alpha)\, u(x_{\bar\alpha\beta}, t_{\alpha\beta})|$ интегрируема почти при всех $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда на $C(D)$ определен оператор $(\bar R_{\alpha\beta}u)(x) = \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(x; t_\alpha)\, u(x_{\bar\alpha\beta}, t_{\alpha\beta})|\, dt_\alpha$, образы которого, в силу теоремы Фубини, принадлежат пространству измеримых и почти всюду конечных функций. Покажем замкнутость оператора $R_{\alpha\beta}$. Пусть последовательности непрерывных функций $(u_n) \to u^* \in C(D)$ и $(R_{\alpha\beta}u_n) \to u^* \in C(D)$ по норме пространства $C(D)$. Покажем, что $R_{\alpha\beta}u^* = y^*$. Пусть (u_{n_k}) — подпоследовательность последовательности (u_n) такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|u_{n_k} - u^*\| < \infty$. Тогда ряд из непрерывных функций $|u^*(x)| + \sum\limits_{k=1}^{\infty} |u_{n_k}(x) - u^*(x)|$ равномерно сходится на D к непрерывной функции $z(x)$, из чего следует непрерывность функции $\Pi_\beta z(x)$. Таким образом, почти при всех $x \in D$ последовательность функций $k_\alpha(x; t_\alpha)\, u_{n_k}(x_{\bar\alpha\beta}, t_{\alpha\beta})$ сходится к функции $k_\alpha(x; t_\alpha)\, u^*(x_{\bar\alpha\beta}, t_{\alpha\beta})$ и ограничена интегрируемой на D_α функцией $|k_\alpha(x; t_\alpha)| u(x_{\bar\alpha\beta}, t_{\alpha\beta})$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получим сходимость $(K_\alpha \Pi_\beta u_{n_k})(x) \to (K_\alpha \Pi_\beta u^*)(x)$ почти при всех x или $(R_{\alpha\beta}u_{n_k})(x) \to (R_{\alpha\beta}u^*)(x)$, т.е. $Rx^* = y^*$. Таким образом установлена замкнутость оператора R, а в силу теоремы Банаха о замкнутом графике, он непрерывен. Доказательство завершено.

Рассмотрим банахово пространство $C(L_1(D_\alpha))$, содержащее множество непрерывных на D функций со значениями в $L_1(D_\alpha)$ с нормой

$$\|f\|_{C(L_1(D_\alpha))} = \max_{x \in D} \int\limits_{D_\alpha} |f(x, t_\alpha)|\, dt_\alpha.$$

Множество непрерывных на $D \times D_\alpha$ функций всюду плотно в $C(L_1(D_\alpha))$.

Теорема 3.2. *Если $k_\alpha \in C(L_1(D))$, то оператор $R_{\alpha\beta}$ непрерывен, причем*

$$\|R_{\alpha\beta}\| \leq \max_{x\in D} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(x,t_\alpha)|\,dt_\alpha.$$

Доказательство. Пусть $u(x) \in C(D)$, тогда функция $k_\alpha(x,t_\alpha)\Pi_\beta u(x_{\bar\alpha},t_\alpha)$ является суммируемой по t_α на D_α, т.е. интеграл $\int\limits_{D_\alpha} k_\alpha(x,t_\alpha)\Pi_\beta u(x_{\bar\alpha},t_\alpha)\,dt_\alpha$ конечен и оператор $R_{\alpha\beta}$ определен на $C(D)$. Так как $k_\alpha \in C(L_1(D))$, то

$$\|k_\alpha\|_{C(L_1(D_\alpha))} = \max_{x\in D} \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(x,t_\alpha)|\,dt_\alpha = M < \infty$$

и для любого $\varepsilon_1 > 0$ существует $\delta_1 > 0$ такое, что при $|\bar x - \tilde x| < \delta_1$

$$\int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\bar x,t_\alpha) - k_\alpha(\tilde x,t_\alpha)|\,dt_\alpha < \varepsilon_1.$$

Так как D — компакт, то по теореме Кантора непрерывная на нем функция $u(x)$ является и равномерно непрерывной, т.е. для любого $\varepsilon_2 > 0$ существует $\delta_2 > 0$ такое, что при $|\bar x - \tilde x| < \delta_2$ следует, что $|u(\bar x) - u(\tilde x)| < \varepsilon_2$.

Пусть $\varepsilon = \min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$, $\delta = \min(\delta_1,\delta_2)$, тогда

$$|(R_{\alpha\beta}u)(\bar x) - (R_{\alpha\beta}u)(\tilde x)| = |(K_\alpha\Pi_\beta u)(\bar x) - (K_\alpha\Pi_\beta u)(\tilde x)| =$$

$$= \left|\int\limits_{D_\alpha} \left(k_\alpha(\bar x,t_\alpha)\Pi_\beta u(\bar x_{\bar\alpha},t_\alpha) - k_\alpha(\tilde x,t_\alpha)\Pi_\beta u(\tilde x_{\bar\alpha},t_\alpha)\right)\,dt_\alpha\right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\bar x,t_\alpha)||\Pi_\beta u(\bar x_{\bar\alpha},t_\alpha) - \Pi_\beta u(\tilde x_{\bar\alpha},t_\alpha)|\,dt_\alpha + \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\bar x,t_\alpha) - k_\alpha(\tilde x,t_\alpha)||\Pi_\beta u(\tilde x_{\bar\alpha},t_\alpha)|\,dt_\alpha$$

$$\leq \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\bar x,t_\alpha)|\,dt_\alpha \int\limits_{D_\alpha} \Pi_\beta|u(\bar x_{\bar\alpha},t_\alpha) - u(\tilde x_{\bar\alpha},t_\alpha)|\,dt_\alpha +$$

$$+ \int\limits_{D_\alpha} |k_\alpha(\bar x,t_\alpha) - k_\alpha(\tilde x,t_\alpha)|\,dt_\alpha \int\limits_{D_\alpha} \Pi_\beta|u(\tilde x_{\bar\alpha},t_\alpha)|\,dt_\alpha <$$

$$< M\varepsilon + \|u\|\varepsilon = \varepsilon(M + \|u\|),$$

так как $\|\Pi_\beta u\| = \|u\|$. Таким образом, функция $R_{\alpha\beta}u$ равномерно непрерывна, а следовательно и непрерывна. Имеем $R_{\alpha\beta}\colon C(D) \to C(D)$, что по Теореме 3.1 означает непрерывность оператора $R_{\alpha\beta}$.

Доказательство завершено.

Условие Теоремы 3.2 выполняется даже в случае, когда ядро $k_\alpha(x,t_\alpha)$ имеет разрывы вдоль конечного числа поверхностей $t_\alpha = (t_{\alpha_1},\dots,t_{\alpha_m}) = (h_{\alpha_1}(x),\dots,h_{\alpha_m}(x))$ с непрерывными функциями $h_{\alpha_i}(x)$. Например, когда $k_\alpha(x,t_\alpha)$ является ядром типа потенциала, т.е. $k_\alpha(x,t_\alpha) = \dfrac{\bar k_\alpha(x,t_\alpha)}{\left(\sum\limits_\alpha (x_\alpha - t_\alpha)^2\right)^{\gamma/2}} \in C(L_1(D_\alpha))$, $\quad 0 < \gamma < 2$.

4. Линейные операторы типа Романовского с обобщенными частными интегралами в пространстве непрерывных функций

Линейным оператором типа Романовского с обобщенными частными интегралами называется оператор

$$(\mathcal{R}_{\alpha\beta}u)(x) = \sum_{\alpha}\sum_{\beta}(R_{\alpha\beta}u)(x), \tag{4.1}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, $R_{\alpha\beta}$ — обобщенный частно-интегральный оператор типа Романовского (3.2). Первое суммирование в (4.1) ведется по мультииндексу α, принимающему значения всех подмножеств множества натуральных чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$ и означающему номера переменных t_i по которым происходит интегрирование в частном интеграле. Количество всех значений, которые может принимать мультииндекс α равно 2^n. Второе суммирование в (4.1) ведется по мультииндексу β, который принимает значения всех перестановок переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функции u. Количество всех значений, которые может принимать мультииндекс β равно $n!$. В работе [8] рассмотрен двумерный случай линейного оператора типа Романовского с частными интегралами, в котором одному мультииндексу α соответствует лишь один мультииндекс β, т.е. одна перестановка переменных функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. В общем случае в (4.1) мультииндексы α и β меняются независимо друг от друга, одному мультииндексу α соответствует $n!$ значений мультииндекса β, в связи с этим количество слагаемых в (4.1) равно $2^n \cdot n!$.

Пусть $k_{\alpha\beta}(x, t_\alpha)$ — измеримые функции. Достаточные условия действия оператора (4.1) в пространстве непрерывных функций содержат Теоремы 4.1 и 4.2.

Теорема 4.1. *Если $\mathcal{R}_{\alpha\beta}\colon C(D) \to C(D)$, то $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ непрерывен.*

Доказательство. Рассмотрим непрерывную на D функцию $u(x)$, тогда для любого мультииндекса β функции $\Pi_\beta u(x)$ непрерывны и по условию теоремы $w(x) = (\mathcal{R}_{\alpha\beta}u)(x) \in C(D)$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Следуя доказательству Теоремы 3.1 получим, что для любых мультииндексаов α и β функции $k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha)\, u(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta})$ и $|k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha)\, u(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta})|$ интегрируемы почти при всех $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$, т.е. оператор $(\bar{\mathcal{R}}_{\alpha\beta}u)(x) = \sum\limits_{\alpha}\sum\limits_{\beta}\int\limits_{D_\alpha} |k_{\alpha\beta}(x; t_\alpha)\, u(x_{\bar{\alpha}\beta}, t_{\alpha\beta})|\, dt_\alpha$ с образами в пространстве измеримых и почти всюду конечных функций определен на $C(D)$. Замкнутость оператора (3.2) следует из сходимости для любых α и β последовательностей функций $(K_{\alpha\beta}\Pi_\beta u_{n_k})(x)$ к функции $(K_\alpha\Pi_\beta u^*)(x)$ почти при всех x, где $u_{n_k}(x)$ — подпоследовательность последовательности $u_n(x)$, сходящейся по норме $C(D)$ к $u^*(x) \in C(D)$ такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|u_{n_k} - u^*\| < \infty$. Таким образом, получим $(\mathcal{R}_{\alpha\beta}u_{n_k})(x) \to (\mathcal{R}_{\alpha\beta}u^*)(x)$ или $\mathcal{R}_{\alpha\beta}x^* = y^*$, т.е. оператор (3.2) замкнут, а следовательно и непрерывен.

Доказательство завершено.

Теорема 4.2. *Если $k_{\alpha\beta} \in C(L_1(D))$, то оператор $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$ непрерывен, причем*

$$\|\mathcal{R}_{\alpha\beta}\| \le n! \max_{x\in D} \sum_{\alpha} \int\limits_{D_\alpha} |k_{\alpha\beta}(x, t_\alpha)|\, dt_\alpha. \tag{4.2}$$

Доказательство. Так как $k_{\alpha\beta} \in C(L_1(D))$, то по Теореме 3.2 оператор $R_{\alpha\beta}$ непрерывен. Оператор $\mathcal{R}_{\alpha\beta}$, определяемый равенством (4.1), представляет собой сумму непрерывных операторов, а следовательно, сам непрерывен.

Для доказательства неравенства (4.2) зафиксируем мультииндексы $\alpha = \alpha^*$ и $\beta = \beta^*$. По Теореме 3.2 справедливо неравенство

$$\|R_{\alpha^*\beta^*}\| \leq \max_{x \in D} \int\limits_{D_{\alpha^*}} |k_{\alpha^*\beta^*}(x, t_{\alpha^*})| \, dt_{\alpha^*}.$$

Количество мультииндексов β отвечающих α^* не превосходит $n!$, т.к. β отвечает за перестановку n переменных функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Получим, что для любого β, отвечающему α^* справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{\beta} R_{\alpha^*\beta} \right\| \leq n! \max_{x \in D} \int\limits_{D_{\alpha^*}} |k_{\alpha^*\beta}(x, t_{\alpha^*})| \, dt_{\alpha^*}.$$

Суммируя по α, получим

$$\left\| \sum_{\alpha} \sum_{\beta} R_{\alpha\beta} \right\| \leq n! \max_{x \in D} \int\limits_{D_{\alpha}} |k_{\alpha\beta}(x, t_{\alpha})| \, dt_{\alpha}$$

или

$$\|\mathcal{R}_{\alpha\beta}\| \leq n! \max_{x \in D} \int\limits_{D_{\alpha}} |k_{\alpha\beta}(x, t_{\alpha})| \, dt_{\alpha}.$$

Доказательство завершено.

Список литературы

1. Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations. New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. 578 p.

2. Kalitvin A. S., Kalitvin V. A. Linear Operators and Equations with Partial Integrals. *Journal Of Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 265, no. 2. P. 196–235. DOI: 10.1007/s10958-022-06052-y

3. Калитвин А. С. Линейные операторы с частными интегралами. Воронеж: ЦЧКИ, 2000. 252 с.

4. Kalitvin A. S., Inozemtsev A. I., Kalitvin V. A. Integral equations with multidimensional partial integrals. *Journal Of Mathematical Sciences.* 2020. Vol. 249, no. 4. P. 954–966. DOI: 10.1007/s10958-020-04987-8

5. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I., Trusova N. I. Fredgholm integral equations with partial integrals in $\mathbb{R}_2$. *Jornal of Mathematical Sciences.* 2020. Vol. 251, no. 6. P. 839–849. DOI: 10.1007/s10958-020-05132-1

6. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Fredholm Equations with Multi-Dimensional Partial Integrals in Anisotropic Lebesgue Spaces. *Jornal Of Mathematical Sciences.* 2021. Vol. 255, no. 6. P. 715–725. DOI: 10.1007/s10958-021-05408-0

7. Inozemtsev A. I., Barysheva I. V. Linear Fredholm and Volterra Partial Integral Equations in Anisotropic Lebesgue Spaces. *Jornal Of Mathematical Sciences.* 2023. Vol. 270, no. 4. P. 556–561. DOI: 10.1007/s10958-023-06366-5

8. Калитвин А. С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2007. 191 с.

9. Kalitvin A. S., Kalitvin V. A. The Approximate and Numerical Solution of Romanovskij Linear Partial Integral Equations. *Journal Of Applied Engineering Science.* 2018. Vol. 16, no. 3. P. 441–446. DOI: 10.5937/jaes16-18433

10. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. II: Multidimensional Case. *Journal Of Mathematical Sciences.* 2020. Vol. 247, no. 6. P. 893–899. DOI: 10.1007/s10958-020-04845-7

11. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. I: Two Dimentional Case. *Journal Of Mathematical Sciences.* 2020. Vol. 247, no. 6. P. 888–892. DOI: 10.1007/s10958-020-04844-8

12. Romanovskij V. Sur une classe d'équations intégrales linéares. *Acta Mathematica.* 1932. Vol. 59. P. 99–208.

Поступила 10.03.2025; доработана после рецензирования 28.06.2025; принята к публикации 27.08.2025

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. J. M. Appell, A. S. Kalitvin, P. P. Zabrejko, *Partial Integral Operators and Integro - Differential Equations*, 2020, 578 p.

2. A. S. Kalitvin, V. A. Kalitvin, "Linear Operators and Equations with Partial Integrals", *Journal Of Mathematical Sciences*, **265**:2 (2022), 196-235. DOI: 10.1007/s10958-022-06052-y

3. A. S. Kalitvin, *Linejnye operatory s chastnymi integralami [Linear Operators with Partial Integrals]*, 2000 (In Russ.), 252 p.

4. A. S. Kalitvin, A. I. Inozemtsev, V. A. Kalitvin, "Integral equations with multidimensional partial integrals", *Journal Of Mathematical Sciences*, **249**:4 (2020), 954–966. DOI: 10.1007/s10958-020-04987-8

5. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, N. I. Trusova, "About Fredgholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$", *Journal Of Mathematical Sciences*, **251**:6 (2020), 839–849. DOI: 10.1007/s10958-020-05132-1

6. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, “Fredholm Equations with Multi-Dimensional Partial Integrals in Anisotropic Lebesgue Spaces”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **255**:6 (2021), 715–725. DOI: 10.1007/s10958-021-05408-0

7. A. I. Inozemtsev, I. V. Barysheva, “Linear Fredholm and Volterra Partial Integral Equations in Anisotropic Lebesgue Spaces”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **270**:4 (2023), 556–561. DOI: 10.1007/s10958-023-06366-5

8. A. S. Kalitvin, *Integralnye uravnenija tipa Romanovskogo s chastnymi integralami [Romanovsky integral equations with partial integrals]*, 2007 (In Russ.), 191 p.

9. A. S. Kalitvin, V. A. Kalitvin, “The Approximate and Numerical Solution of Romanovskij Linear Partial Integral Equations”, *Journal Of Applied Engineering Science*, **16**:3 (2018), 441–446. DOI: 10.5937/jaes16-18433

10. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, “Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. II: Multidimensional Case”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **247**:6 (2020), 893–899. DOI: 10.1007/s10958-020-04845-7

11. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, “Partial integrals in anisotropic Lebesgue Spaces. I: Two dimensional Case”, *Journal Of Mathematical Sciences*, **247**:6 (2020), 888–892. DOI: 10.1007/s10958-020-04844-8

12. V. Romanovskij, “Sur une classe d’équations intégrales linéares”, *Acta Math*, **59** (1932), 99–208 (In Fr.).

Submitted 10.03.2025; Revised 28.06.2025; Accepted 27.08.2025

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.