DOI 10.15507/2079-6900.27.202503.302-314 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.929.4

Оценка решений систем нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями

Д. С. Евтина, А. П. Жабко

Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация)

Аннотация. В работе представлен конструктивный алгоритм оценки решений дифференциально-разностных систем нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями в нейтральной части. Стоит отметить, что важным допущением является коммутативность матриц в левой части системы. Идея подхода заключается в представлении решений рассматриваемой системы через начальные функции и фундаментальную матрицу с последующим построением экспоненциальной оценки такого представления. На первом шаге алгоритма для системы заданы начальные условия. Далее получено представление системы в интегральной форме и введён оператор запаздывания. После рекурсивного применения оператора запаздывания к правой части системы её решения выражены через биномиальные коэффициенты, начальные функции и фундаментальную матрицу. Наконец на заключительном этапе после оценки по отдельности всех слагаемых, входящих в представление решений системы на предыдущем шаге, получена экспоненциальная оценка этих решений. При этом доказано, что оценка фундаментальной матрицы системы также имеет экспоненциальный вид. На практике разработанный метод позволит оптимизировать выбор управления для систем с запаздыванием нейтрального типа в смысле одной из ключевых характеристик управляемых систем - величины перерегулирования.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, системы с запаздыванием, запаздывание нейтрального типа, несоизмеримые запаздывания

Для цитирования: Евтина Д. С., Жабко А. П. Оценка решений систем нейтрального типа с двумя несоизмеримыми запаздываниями // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2025. Т. 27, № 3. С. 302–314. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.302-314

Об авторах:

Евтина Диана Сергеевна, аспирант кафедры теории управления, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., д. 35), ORCID: http://orcid.org/0009-0007-5417-606X, diana.evtina@mail.ru

Жабко Алексей Петрович, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой теории управления, Санкт-Петербургский государственный университет (198504, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетский пр., д. 35), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6379-0682, a.zhabko@spbu.ru

Original article

MSC2020 34K40

Estimation of solutions of neutral type systems with two incommensurate delays

D. S. Evtina, A. P. Zhabko

Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russian Federation)

Abstract. This paper presents the algorithm for estimating solutions of differential-difference systems of neutral type with two incommensurate delays in the neutral part. It is worth mentioning an important assumption about the commutativity of matrices in the left-hand side of the system. The idea of the approach is to represent the system's solutions in terms of initial functions and the fundamental matrix and then to construct an exponential estimate for this representation. At the first step, the system's initial conditions are set. Next, the system is rewritten in an integral form and the delay operator is introduced. After recursive application of this operator to the right-hand side of obtained system, the system's solutions are expressed via binomial coefficients, initial functions and the fundamental matrix. At the final step these expressions are used to make an exponential estimate of the solution. It is proved that the estimate of the fundamental matrix of the system also has an exponential form. In practice, the proposed method allows optimizing the control choice for neutral-type delay systems in sense of one of the crucial characteristics of the controlled systems, i.e. the overshoot value.

Keywords: differential equations, time-delay systems, neutral type delay, incommensurate delays

For citation: *D. S. Evtina, A. P. Zhabko.* Estimation of solutions of neutral type systems with two incommensurate delays. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 27:3(2025), 302–314. DOI: 10.15507/2079-6900.27.202503.302-314

About the authors:

Diana S. Evtina, Postgraduate Student, Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Universitetsky av., 35, Saint Petersburg 198504, Russia), ORCID: http://orcid.org/0009-0007-5417-606X, diana.evtina@mail.ru

Alexey P. Zhabko, D.Sc. (Phys. and Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Universitetsky av., 35, Saint Petersburg 198504, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6379-0682, a.zhabko@spbu.ru

1. Введение

Системы дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и их приложения являются предметом исследования множества научных работ [1–4]. Среди таких систем отдельно можно выделить дифференциально-разностные системы нейтрального типа [5–7]. При этом особый интерес представляют системы с несколькими несоизмеримыми запаздываниями в левой части, так как случай соизмеримых запаздываний ранее уже был исследован в работе [8]. Также известно [8], что в случае рационального соотношения между отклонениями аргумента в нейтральной части система сводится к уже хорошо изученному случаю единственного запаздывания. Известно, что динамические управляемые системы обладают двумя такими важными параметрами, как запас устойчивости и перерегулирование. Целью работы является разработка собственного метода оценки решений дифференциально-разностных систем уравнений с двумя несоизмеримыми запаздываниями в нейтральной части, позволяющего найти величину перерегулирования.

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием нейтрального типа:

$$\frac{d}{dt}\Big[x(t) - D_1x(t-\tau) - D_2x(t-h)\Big] = A_0x(t) + A_1x(t-h) + \int\limits_{-\tau}^{0} Q(\theta)x(t+\theta)d\theta, \qquad (2.1)$$

где A_0, A_1 и $D_1 \neq 0_{n\times n},\ D_2 \neq 0_{n\times n}$ – заданные матрицы размерности $n \times n$, а компоненты матрицы $Q_{n\times n}(\theta)$ – ограниченные кусочно-постоянные функции. Далее будем считать, что матрицы в нейтральной части системы перестановочны и система экспоненциально устойчива [1]. Также зададим отношение порядка между запаздываниями $\tau \geqslant h > 0$ и будем полагать отношение τ и h иррациональным, т.е. рассмотрим несоизмеримые запаздывания.

В качестве начального момента времени для нашей стационарной системы выберем $t_0 = 0$. Тогда каждое из решений системы (2.1) определяется начальной функцией φ из семейства $\mathbb{C}^1([-\tau,0],\mathbb{R}^n):\ x(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [-\tau, 0]$.

Нашей задачей является разработка метода оценки решений системы (2.1).

3. Предварительные сведения

Определение 3.1. *Квадратная матрица $K(t)$ называется фундаментальной матрицей системы (2.1), если удовлетворяет следующим условиям* [1]*:*

1.

$$K(t) = \begin{cases} 0_{n\times n},\ t < 0 \\ \mathbb{E},\ t = 0. \end{cases}$$

2.

$$\frac{d}{dt}[K(t) - D_1K(t-\tau) - D_2K(t-h)] = A_0K(t) + A_1K(t-h) + \\ + \int\limits_{-\tau}^{0} Q(\theta)K(t+\theta)d\theta,\ t > 0,\ t \neq m\tau + lh,\ m,l \in \mathbb{Z},\ m,l > 0. \qquad (3.1)$$

3. Матрица $K(t) - D_1K(t-\tau) - D_2K(t-h)$ непрерывна при $t \geqslant 0$, т.е.

$$K(t+0) - D_1K(t-\tau+0) - D_2K(t-h+0) = \\ = K(t-0) - D_1K(t-\tau-0) - D_2K(t-h-0). \qquad (3.2)$$

Решения системы (2.1) могут быть представлены в форме Коши [1]:

$$x(t,\varphi) = \Big[K(t) - K(t-\tau)D_1 - K(t-h)D_2\Big]\varphi(0) +$$
$$+ \int\limits_{-\tau}^{0} K(t-\tau-\theta)D_1\varphi'(\theta)d\theta + \int\limits_{-h}^{0} K(t-h-\theta)\Big[A_1\varphi(\theta) + D_2\varphi'(\theta)\Big]d\theta +$$
$$+ \int\limits_{-\tau}^{0}\Big(\int\limits_{-\tau}^{\theta} K(t-\theta+\xi)Q(\xi)d\xi\Big)\varphi(\theta)d\theta. \quad (3.3)$$

4. Основной результат

Вернёмся к системе (2.1) и обратимся к условиям её экспоненциальной устойчивости. Рассмотрим квазиполиномы

$$\varphi(\lambda) = det\Big(E - D_1e^{-\lambda\tau} - D_2e^{-\lambda h}\Big),$$

$$\psi(\lambda) = det\Big(\lambda\big(E - D_1e^{-\lambda\tau} - D_2e^{-\lambda h}\big) - A_0 - e^{-\lambda h}A_1 - \int\limits_{-\tau}^{0} e^{\lambda\theta}Q(\theta)d\theta\Big).$$

Обозначим

$$\alpha_0 = \sup\Big\{Re\lambda \;\Big|\; \varphi(\lambda) = 0\Big\}, \quad \alpha_1 = \sup\Big\{Re\lambda \;\Big|\; \psi(\lambda) = 0\Big\}.$$

Теорема 4.1 ([8]). *Система (2.1) экспоненциально устойчива по Ляпунову* $\Leftrightarrow \alpha_1 < 0$.

Замечание 4.1. $\alpha_0 \leqslant \alpha_1$.

Сформулируем вспомогательную теорему об оценке нормы произведения двух коммутирующих матриц.

Теорема 4.2. *Если квадратные матрицы* A *и* B *удовлетворяют условию* $AB = BA$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* M *такое, что*

$$\|A^pB^q\| \leqslant M\max\Big\{\Big|\mu_{i_k}\Big|^{p+\varepsilon}\Big|\lambda_{i_k}\Big|^{q+\varepsilon},\ k=\overline{1,r}\Big\} \leqslant M\max\Big\{\hat{\mu}^{p+q+\varepsilon}, \hat{\lambda}^{p+q+\varepsilon}\Big\},$$

где $\hat{\mu} = \max\Big\{\mu_i,\ i=\overline{1,l}\Big\},\ \hat{\lambda} = \max\Big\{\lambda_j,\ j=\overline{1,m}\Big\}$.

Доказательство. Пусть квадратные матрицы A и B удовлетворяют условию $AB = BA$, причём $\det B \neq 0$. Предположим, что $\lambda_1, ..., \lambda_m$ – собственные числа матрицы B кратностей $k_1, ..., k_m (k_1 + ... + k_m = n)$ соответственно.

Рассмотрим $\Big\{x_1, x_2, ..., x_{k_1}\Big\}$ – базис корневого пространства S_1^B для собственного числа λ_1 матрицы B. Если x_j – корневой вектор высоты k, то есть $(B - \lambda_1\mathbb{E})^k x_j = 0$, то справедливо равенство $(B - \lambda_1\mathbb{E})^k(Ax_j) = A\Big[(B - \lambda_1\mathbb{E})^k x_j\Big] = 0$. Следовательно, $Ax_j \in S_1^B$. Таким образом, имеем включение $AS_1^B \subset S_1^B$.

Обозначим как S_j^B – корневое пространство для собственного числа λ_j матрицы B. Тогда справедливы включения $AS_j^B \subset S_j^B,\ j=\overline{1,m}$. Аналогично можно доказать справедливость включений $BS_i^A \subset S_i^A,\ i=\overline{1,l}$, для корневых пространств матрицы A. Заметим, что множество $S_j^B \cap S_i^A$ инвариантно отнсительно матриц A и B, причём собственные числа матриц A и B в этом множестве одинаковы и равны μ_i и λ_j соответственно. Рассмотрим все множества $S_j^B \cap S_i^A \neq \{0\}$ и перенумеруем их в виде $D_k = S_{j_k}^B \cap S_{i_k}^A \neq \{0\},\ k=\overline{1,r}$. Очевидно, что прямая сумма $\sum\limits_{k=1}^{r} \bigoplus D_k = \mathbb{R}^n$ и $B\sum\limits_{k=1}^{r} \bigoplus D_k = \mathbb{R}^n$, поскольку матрица B не вырождена.

Пусть X_k – базис пространства D_k и $T=\Big(X_1,...,X_r\Big)$. Тогда справедливо равенство

$$T^{-1}ABT = diag\Big[A_1B_1, A_2B_2, ..., A_rB_r\Big],$$

в котором матрицы A_k и B_k имеют собственные числа, равные μ_{i_k} и λ_{j_k} соответственно. Следовательно для любого $\varepsilon > 0$ существует число M_k такое, что имеет место оценка

$$\|A_k\|^p \|B_k\|^q \leqslant M_k \Big|\mu_{i_k}\Big|^{p+\varepsilon} \Big|\lambda_{i_k}\Big|^{q+\varepsilon}.$$

Доказательство завершено.

Теперь перейдём к необходимым условиям экспоненциальной устойчивости системы (2.1).

Теорема 4.3 ([8]). *Если в системе (2.1) h/τ – рациональное число, то*

$$\alpha_0 = \max\Big\{Re\lambda \ \Big|\ \varphi(\lambda)=0\Big\}.$$

Если же h/τ – иррациональное число, то $\alpha_0 < 0 \Leftrightarrow$ все собственные числа матрицы $D_1\Theta_1 + D_2\Theta_2$ по модулю меньше единицы для $\forall\ |\Theta_1| = |\Theta_2| = 1$.

Следствие 4.1 ([9]). $\alpha_0 < 0$, *если* $\|D_1\| + \|D_2\| < 1$.

Следствие 4.2. *Если $D_1D_2 = D_2D_1$ и $\alpha_0 < 0$, то $\|\prod\limits_{i=1}^{k+l} D_{ji}\|$, где $(j_1, j_2, ..., j_{k+1})$ является перестановкой элементов строки $(1,1,...,1,2,2,...2)$, удовлетворяет условию*

$$\|\prod_{i=1}^{k+l} D_{ji}\| \leqslant Mr^{k+l},$$

в котором число r больше модулей всех собственных чисел матрицы $D_1\Theta_1 + D_2\Theta_2$ при $|\Theta_1| = |\Theta_2| = 1$.

Перепишем нашу систему (2.1) в интегральной форме:

$$x(t) = D_1x(t-\tau) + D_2x(t-h) + f(t), \tag{4.1}$$

где

$$f(t)=x(0)-D_1x(-\tau)-D_2x(-h)+\int\limits_0^t A_0x(\xi)d\xi+\int\limits_0^t A_1x(\xi-h)d\xi+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_{-\tau}^0 Q(\theta)x(\xi+\theta)d\theta d\xi.$$

Введём оператор запаздывания $e^{-pr}\circ f(t)=f(t-r)$. Тогда множество

$$K=\Big\{Ae^{-ph}+Be^{-p\tau}:A,B\in\mathbb{R}^{n\times n},$$
$$(Ae^{-ph}+Be^{-p\tau})\circ f(t)=Af(t-h)+Bf(t-\tau)\Big\}$$

образует коммутативное кольцо операторов.

Если применить оператор запаздывания к правой части системы (4.1) $k-1$ раз, то придём к равенству

$$x(t)=(D_1e^{-p\tau}+D_2e^{-ph})^k\circ x(t)+\sum_{j=1}^k f_j(t),$$

где $f_1(t)=f(t)$, а $f_j(t),\ j=\overline{2,k}$, имеют рекурсивный вид:

$$f_j(t)=D_1f_{j-1}(t-\tau)+D_2f_{j-1}(t-h).$$

Чтобы записать решения системы через начальные функции, рассмотрим значение k, удовлетворяющее условию

$$t-\tau\leqslant m\tau+(k-m)h\leqslant t,\quad m=\overline{0,k}. \tag{4.2}$$

Из неравенства (4.2) вытекают следующие оценки:

$$\frac{t}{\tau}-1\leqslant k_1\leqslant k\leqslant\left[\frac{t}{h}\right]=k_2,$$
$$k\leqslant m\leqslant k+\left[\frac{t-kh}{\tau-h}\right]\leqslant k+\left[\frac{\tau}{h}\right],\ \overline{m}=\min\left\{\left[\frac{\tau}{h}\right],k\right\}.$$

Тогда справедлива

Лемма 4.1. *Решения системы (2.1) представимы в виде*

$$x(t)=\sum_{k=k_1}^{k_2}\Bigg(\sum_{m=0}^{\overline{m}}C_k^mD_1^mD_2^{k-m}\varphi\big(t-m\tau-(k-m)h\big)+$$
$$+\sum_{m=0}^{\overline{m}}C_{k-1}^mD_1^mD_2^{k-1-m}f\big(t-m\tau-(k-1-m)h\big)\Bigg). \tag{4.3}$$

В соответствии с доказательством теоремы 4.2 верхняя граница модулей собственных чисел матрицы $D_1\Theta_1 + D_2\Theta_2$ при $|\Theta_1| = |\Theta_2| = 1$ определяется равенством

$$\sigma = \max\left\{|\mu_{i_k}| + |\lambda_{i_k}|,\ k = \overline{1, r}\right\},$$

в котором пара $(\mu_{i_k}, \lambda_{i_k})$ есть пара собственных чисел соответствующих квазидиагоналей матриц D_1 и D_2 в их каноническом представлении, и

$$D_1 = diag\left\{D_{11}, D_{12}, ..., D_{1r}\right\},$$
$$D_2 = diag\left\{D_{21}, D_{22}, ..., D_{2r}\right\}.$$

Причём если $\sigma = |\mu_{\hat{i}}| + |\lambda_{\hat{i}}|$, то

$$|\mu_{\hat{i}}|e^{-\alpha_0\tau} + |\lambda_{\hat{i}}|e^{-\alpha_0 h} = 1.$$

Следствие 4.3. *Решения системы (2.1) допускают оценку*

$$\|x(t)\| \leqslant \sum_{k=k_1}^{k_2}\left(\sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m \|D_1\|^m \|D_2\|^{k-m} \|\varphi\big(t - m\tau - (k-m)h\big)\| + \|f_k(t)\|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=k_1}^{k_2}\left[\Big(\|D_1\| + \|D_2\|\Big)^k \|\varphi\|_\tau + \|f_k(t)\|\right], \quad (4.4)$$

где $\|\varphi\|_\tau = \sup\limits_{\theta\in[-\tau,0]} \|\varphi(\theta)\|$.

Лемма 4.2. *Для любого* $\beta \in \left(\frac{1}{\tau}\ln\sigma, 0\right)$ *существует константа* $\gamma \geqslant 1$ *такая, что*

$$\left\|\sum_{k=k_1}^{k_2}\sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m}\right\| \leqslant \gamma e^{\beta t}, \quad t \geqslant 0.$$

Доказательство. Пусть $d = |\mu_{\hat{i}}|e^{-\beta\tau} + |\lambda_{\hat{i}}|e^{-\beta h}$. Не умаляя общности, будем считать, что величина r из следствия 4.2 удовлетворяет неравенству $\sigma < r < d < 1$ и

$$r = |\hat{\mu}_i|e^{-\alpha\tau} + |\hat{\lambda}_i|e^{-\alpha h}, \quad \frac{1}{\tau}\ln\sigma < \alpha < \beta.$$

Поскольку $r < 1$ и $k \geqslant k_1 \geqslant \frac{t}{\tau} - 1$, то

$$\|D_1^m D_2^{k-m}\| \leqslant M r^{\frac{t}{\tau}-1}.$$

Поэтому

$$\left\|\sum_{k=k_1}^{k_2}\sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m}\right\| \leqslant (k_2 - k_1 + 1)k^{[\frac{\tau}{h}]+1} M r^{\frac{t}{\tau}-1}.$$

Так как $k \leqslant k_2$ и $k_2 h \leqslant t$, то справедлива оценка

$$\left\| \sum_{k=k_1}^{k_2} \sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \right\| \leqslant \frac{M}{r} \left(\frac{t}{h} \right)^{[\frac{\tau}{h}]+2} e^{\frac{t}{\tau} \ln r}.$$

Исходя из $r < d$, получаем $\alpha = \frac{1}{\tau} \ln r < \beta = \frac{1}{\tau} \ln d$. Поэтому если последнее неравенство представить в виде

$$\left\| \sum_{k=k_1}^{k_2} \sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \right\| \leqslant \frac{M}{r} \left(\frac{t}{h} \right)^{[\frac{\tau}{h}]+2} e^{(\alpha-\beta)t} e^{\beta t},$$

то очевидно существует конечное число

$$\gamma = \max_{t \geqslant 0} \frac{M}{r} \left(\frac{t}{h} \right)^{[\frac{\tau}{h}]+2} e^{(\alpha-\beta)t},$$

что и требовалось доказать.
Доказательство завершено.

Следствие 4.4. *Оценка первого слагаемого, в представлении решения системы (2.1) в форме (4.3), имеет вид*

$$\left\| \sum_{k=k_1}^{k_2} \left(\sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \varphi\big(t - m\tau - (k-m)h\big) \right\| \leqslant \gamma e^{\beta t} \|\varphi\|_\tau, \quad t \geqslant 0,$$

где $\beta \in \left(\frac{1}{\tau} \ln \sigma, 0 \right)$.

Чтобы оценить второе слагаемое из формулы (4.3), нам потребуется оценка фундаментальной матрицы $K(t)$ при $t \geqslant 0$. Так как матрица $K(t)$ имеет разрыв в точке $t = 0:\ K(0) = K(+0) = K(-0) + \mathbb{E}$, то в точках $t_{k_l} = k\tau + lh$ справедливо равенство

$$K(t_{k_l} + 0) - K(t_{k_l} - 0) = C_{k+l}^k D_1^k D_2^l.$$

В данной работе мы предполагаем, что $D_1 D_2 = D_2 D_1$ и собственные числа матрицы $D_1 \Theta_1 = D_2 \Theta_2$ при $|\Theta_1| = |\Theta_2| = 1$ меньше единицы.

Лемма 4.3. *Существует $\gamma \geqslant 1$ и σ такие, что норма фундаментальной матрицы допускает экспоненциальную оценку*

$$\|K(t)\| \leqslant \gamma e^{\sigma t}, \quad t \geqslant 0.$$

Доказательство. Применим подход Харитонова В. Л. [8] к нашему случаю системы с двумя несоизмеримыми запаздываниями в нейтральной части. В лемме 4.2 было показано, что

$$\left\| \sum_{k=k_1}^{k_2} \left(\sum_{m=0}^{\overline{m}} C_k^m D_1^m D_2^{k-m} \varphi\big(t - m\tau - (k-m)h\big) \right\| \leqslant M r^k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

причём в нашем случае $0 < r < 1$. Тогда

$$\|K(t)\| \leqslant \frac{M}{1-r} + \frac{M}{1-r}\left(\|A_0\| + \|A_1\| + \int\limits_{-\tau}^{0} \|Q(\theta)\|d\theta\right)\int\limits_{0}^{t} \|K(\xi)\|d\xi.$$

Применим лемму Гронуолла — Беллмана [10] и получим искомую оценку, где

$$\gamma = \frac{M}{1-r}, \quad \sigma = \frac{M}{1-r}\left(\|A_0\| + \|A_1\| + \int\limits_{-\tau}^{0} \|Q(\theta)\|d\theta\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Поскольку матрица $K(t)$ является кусочно-непрерывной при $t \geqslant 0$ и согласно лемме 4.3 подчиняется экспоненциальной оценке, то образ Лапласа фундаментальной матрицы равен

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-st}K(t)dt = G^{-1}(s), \ s \in \mathbb{C}_{\sigma}^{+},$$

$$G(s) = s\left(\mathbb{E} - D_1 e^{-s\tau} - D_2 e^{-sh}\right) - A_0 - A_1 e^{-sh} - \int\limits_{-\tau}^{0} e^{s\theta}Q(\theta)d\theta.$$

Рассмотрим матрицу

$$G_1(s) = \mathbb{E} - D_1 e^{-s\tau} - D_2 e^{-sh}.$$

Тогда функция $e^{st}G^{-1}(s)$ может быть представима в виде

$$e^{st}G^{-1}(s) = \frac{e^{st}}{s}G_1^{-1}(s)\left[\mathbb{E} - \frac{1}{s}A(s)G_1^{-1}(s)\right]^{-1},$$

где

$$A(s) = A_0 + e^{-sh}A_1 + \int\limits_{-\tau}^{0} e^{s\theta}Q(\theta)d\theta.$$

Повторяя выкладки, проведённые в работе [8], приходим к следующему результату.

Т е о р е м а 4.4. *Если $\alpha_1 < 0$, то для любого $\beta \in (\alpha_1, 0)$ существует $\gamma \geqslant 1$ такая, что фундаментальная матрица $K(t)$ допускает оценку*

$$\|K(t)\| \leqslant \gamma e^{\beta t}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\sigma \geqslant 0$ и $\alpha_0 < \alpha < 0$, то матричные функции $G_1^{-1}(s)$ и $G^{-1}(s)$ суть аналитические функции в области $\mathbb{C}_{\sigma}^{+}$. Поэтому при $\beta > \sigma$

$$K(t) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\beta} e^{st}G^{-1}(s)ds, \quad t > 0, \ t \neq k\tau + lh.$$

Для всех $s \in \mathbb{C}^*_\beta$ справедливо равенство

$$G^{-1}(s) = \frac{1}{s}\Big(\mathbb{E} - e^{-s\tau}D_1 - e^{-sh}D_2\Big)^{-1} + \frac{1}{s^2}\hat{Q}(s). \qquad (4.5)$$

Поэтому получаем представление

$$K(t) = J_1(t) + J_2(t),$$

где

$$J_1(t) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\beta} \frac{e^{st}}{s}\Big[\mathbb{E} - e^{-s\tau}D_1 - e^{-sh}D_2\Big]^{-1} ds,$$

$$J_2(t) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi i}\int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\beta} \frac{e^{st}}{s^2}\hat{Q}(s)ds.$$

Заметим, что первое слагаемое в представлении функции $G^{-1}(s)$ (4.4) есть образ Лапласа функции

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\chi(t - k\tau - lh)D_1^k D_2^l,$$

где

$$\chi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0,\\ 1, & t \geqslant 0.\end{cases}$$

Согласно следствию 4.4, получаем равенство

$$J_1(t) = F(t) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{[\frac{t}{h}]} D_1^k D_2^l, \quad t \in [N\tau, (N+1)\tau].$$

В нашем случае $\|D_1^k D_2^l\| \leqslant M r^{k+l}$, поэтому

$$\|F(t)\| \leqslant M\sum_{j=0}^{k+l} r^j = M\frac{1 - r^{k+l}}{1 - r}.$$

Поскольку $r < 1$, то $\|F(t)\| \leqslant \frac{M}{1-r}$ при $t \geqslant 0$.

С другой стороны, функция $F(t)$ при $t \geqslant 0$ есть решение уравнения

$$F(t) = D_1F(t - \tau) + D_2F(t - h),$$

и поэтому для любого $\beta > \alpha_0$ найдётся $\hat{\gamma} \geqslant 1$ такая, что $\|F(t)\| \leqslant \hat{\gamma}e^{\beta t}$.

Следовательно, образ Лапласа матрицы $J_1(t)$ определяется написанным выше равенством для любого $\beta > \alpha_0$.

Матрицы $K(t)$ и $F(t)$ являются решениями системы (2.1) и при $t > 0,\ t \neq k\tau + lh$, для любого $\beta > \alpha_1$ определются равенствами

$$K(t) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\beta} e^{st} G^{-1}(s) ds,$$

$$F(t) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\beta} \frac{e^{st}}{s} \left[\mathbb{E} - e^{-s\tau} D_1 - e^{-sh} D_2\right]^{-1} ds.$$

Очевидно, что матрица $J_2(t) = K(t) - J_1(t)$ при $t \geqslant 0$ будет непрерывным решением системы (2.1), при $\beta > \alpha_1$ определяемое равенством

$$J_2(t) = \frac{\text{v.p.}}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}(s)=\beta} \frac{e^{st}}{s^2} \hat{Q}(s) ds.$$

Ранее было определено число σ как верхняя грань модулей собственных чисел матрицы $D_1\Theta_1 + D_2\Theta_2$ при $|\Theta_1| = |\Theta_2| = 1$. Тогда для любого $r \in (\sigma, 1)$ и такого $\beta > \alpha_0$, что $e^{-\beta h} r < 1$, существует $M \geqslant 1$ и выполняется неравенство

$$\|G_1^{-1}(s)\| \leqslant \frac{M}{1 - e^{-\beta h} r} = r_1(\beta),\ \ s \in \mathbb{C}_\beta^+.$$

Следуя работе Харитонова В. Л. [8], имеем оценку

$$\|A(s)\| \leqslant \|A_0\| + e^{-\beta h}\|A_1\| + \int\limits_{-\tau}^{0} e^{-\beta\theta}\|Q(s)\| d\theta = r_2(\beta), \quad s \in \mathbb{C}_\beta^+.$$

Выберем $\Omega > 0$ и $\Omega \geqslant 2r_1(\beta) r_2(\beta)$. Тогда получаем для любого $|\omega| \geqslant \Omega$ оценку

$$\|\hat{Q}(\beta + i\omega)\| < 2r_1^2(\beta) r_2(\beta).$$

Таким образом, имеем неравенство

$$\|J_2(t)\| \leqslant \frac{e^{\beta t}}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat{Q}(\beta + i\omega)\|}{|\beta + i\omega|^2} d\omega \leqslant \frac{e^{\beta t}}{2\pi} \left(\frac{4r_1^2(\beta) r_2(\beta)}{\Omega} + \int\limits_{-\Omega}^{\Omega} \frac{\|\hat{Q}(\beta + i\omega)\|}{|\beta + i\omega|^2} d\omega \right) = \frac{e^{\beta t}}{2\pi} \eta(\beta).$$

Следовательно, при $t \geqslant 0$ справедлива оценка фундаментальной матрицы

$$\|K(t)\| \leqslant \gamma e^{\beta t},$$

где

$$\gamma = \hat{\gamma} + \frac{1}{2\pi} \eta(\beta).$$

Доказательство завершено.

Применив теорему 4.4 для оценки решений (3.1) исходной системы (2.1), получаем следующий результат

Следствие 4.5. *Для любого* $\beta \in (\alpha_1, 0)$ *существует* $M \geqslant 1$ *такое, что при* $t \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$\|x(t,\varphi)\| \leqslant Me^{\beta t}\max\Big\{\|\varphi\|_\tau, \|\varphi'\|_\tau\Big\}.$$

Список литературы

1. Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhauser, 2013. 311 p.

2. Эльсгольц Л. Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 128 с.

3. Вельмисов П. А., Маценко П. К., Тамарова Ю. А. Применение уравнений с отклоняющимся аргументом в задачах математического моделирования систем измерения давления в газожидкостных средах // *Журнал Средневолжского математического общества.* 2024. Т. 26, № 4. С. 442–457. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.442-457

4. Лутошкин И. В., Чекмарев А. Г. Развитие метода параметризации для решения задач оптимального управления и разработка концепции программного комплекса //*Журнал Средневолжского математического общества.* 2024. Т. 26, № 3. С. 260–279. DOI: 10.15507/2079-6900.26.202403.260-279

5. Kharitonov V. L. Lyapunov functionals and Lyapunov matrices for neutral type time-delay systems: a single delay case *Int. J. Control.* 2005. Vol. 78, no 11. P. 783—800.

6. Kharitonov V. L., Mondie S., Collado J. Exponential estimates for neutral time-delay systems: An LMI approach *IEEE Transactions on Automatic Control.* 2005. Vol. 50, no 5. P. 666–670.

7. Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for a class of neutral type time delay systems *IFAC Proceedings Volumes.* 2006. Vol. 39, no 10. P. 24–29.

8. Kharitonov V. L. Exponential estimate for a simple neutral time delay system. Course of lectures given in St. Petersburg State University. 2012. 19 p.

9. Евтина Д. С., Жабко А. П. Исследование устойчивости систем дифференциальных уравнений с запаздыванием нейтрального типа // Материалы международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа». 2024. Т. 2. С. 67–69.

10. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: Издательство иностранной литературы, 1954. 216 с.

Поступила 05.04.2025; доработана после рецензирования 09.08.2025; принята к публикации 27.08.2025

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. V. L. Kharitonov, *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*, Basel: Birkhauser, 2013, 311 p.
2. L. E. Elsgolts, *Vvedenie v teoriyu differencial'nyh uravnenij s otklonyayushchimsya argumentom*, Nauka, M., 1964 (In Russ.), 128 p.
3. P. A. Vel'misov, P. K. Macenko, Yu. A. Tamarova, "Application of equations with deviating argument to mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **26**:4 (2024), 442–457 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.26.202404.442-457
4. I. V. Lutoshkin, A. G. Chekmarev, "Development of a parameterization method for solvingoptimal control problems and development of a softwarepackage concept", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **26**:3 (2024), 260–279 (In Russ.). DOI: 10.15507/2079-6900.26.202403.260-279
5. V. L. Kharitonov, "Lyapunov functionals and Lyapunov matrices for neutral type time-delay systems: a single delay case", *Int. J. Control*, **78**:11 (2005), 783—800.
6. V. L. Kharitonov, S. Mondie, J. Collado, "Exponential estimates for neutral time-delay systems: An LMI approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**:5 (2005), 666–670.
7. V. L. Kharitonov, "Lyapunov matrices for a class of neutral type time delay systems", *IFAC Proceedings Volumes*, **39**:10 (2006), 24–29.
8. V. L. Kharitonov, *Exponential estimate for a simple neutral time delay system*, Course of lectures given in St. Petersburg State University, 2012, 19 p.
9. D. S. Evtina, A. P. Zhabko, "Issledovanie ustojchivosti sistem differencial'nyh uravnenij s zapazdyvaniem nejtral'nogo tipa", *Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii "Ufimskaya osennyaya matematicheskaya shkola"*, **2**:1 (2024), 67–69 (In Russ.).
10. R. Bellman, *Teoriya ustojchivosti reshenij differencial'nyh uravnenij*, M.: Izdatel'stvo inostrannoj literatury, 1954 (In Russ.), 216 p.

Submitted 05.04.2025; Revised 09.08.2025; Accepted 27.08.2025

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.