

ISSN 2079-6641 (Print)

ISSN 2079-665X (Online)



ВЕСТНИК КРАУНЦ

<http://krasec.ru>

ФИЗИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ



КамГУ



DOI: 10.26117/2079-6641

Vestnik KRAUNTS
Fiziko-matematicheskie nauki

Bulletin KRASEC
Physical and Mathematical Sciences

2024. T. 48. № 3

2024. vol. 48. no. 3

12 +

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФГБУН Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН
ФГБОУ ВО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга»
ВЕСТНИК КРАУНЦ

(Камчатской региональной ассоциации «Учебно-научный центр»)

Физико-математические науки. 2024. Т. 48. № 3

г. Петропавловск-Камчатский

Журнал основан в августе 2010 г. Выходит 4 раза в год

Научное издание

Цена свободная

Информационная продукция для детей старше 12 лет

ISSN 20279-6641 (печатная версия), ISSN 2079-665X (электронная версия)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77-58548 от 14 июля 2014 г. выдано
Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Официальные сайты журнала: <http://krasesc.ru>, <https://journals.rcsi.science/2079-6641/index#>

Редакционная коллегия

Главный редактор

Ю.В. Марапулец, д-р физ.-мат. наук, Россия

Заместитель главного редактора

Р.И. Паровик, д-р физ.-мат. наук, Россия

Ответственный секретарь

Л.К. Фещенко, канд. физ.-мат. наук, Россия

©Институт космофизических исследований
и распространения радиоволн ДВО РАН, 2024

©Камчатский государственный университет

имени Витуса Беринга, 2024

©Редакция журнала Вестник КРАУНЦ.

Физико-математические науки, 2024

Редакционный совет

Председатель редакционного совета

Б.М. Шевцов, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

Секретарь редакционного совета

Р.Т. Зуннунов, канд. физ.-мат. наук, Узбекистан

Члены редакционного совета

Агарвал Правин, проф., Индия

М.М. Арипов, д-р физ.-мат. наук, Узбекистан

А.Г. Горюнов, д-р тех. наук, Россия

Нав Кумар Махато, д-р фил. по прикл. мат., Индия

К.С. Султанов, д-р физ.-мат. наук, проф. Узбекистан

А.П. Суржиков, д-р физ.-мат. наук, проф. Россия

Хегимеги Ласло, управл. директор MingeoLtd, Венгрия

С.Р. Хиджази, д-р фил. по мат., Иран

Чалушник Станисла, проф., Польша

Х.М. Шадиметов, д-р физ.-мат. наук, проф. Узбекистан

Сюэ Вей, д-р фил. по инж. наукам, проф., Китай

Члены редакционной коллегии

Р.А. Абилов, д-р физ.-мат. наук, Узбекистан

Р.Р. Ашуров, д-р физ.-мат. наук, Узбекистан

В.Б. Васильев, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

П.А. Вельмисов, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

Г.М. Водинчар, канд. физ.-мат. наук, Россия

С.З. Джамалов, д-р физ.-мат. наук, Узбекистан

В.А. Дитлов, д-р физ.-мат. наук, Россия

О.С. Зикиров, д-р физ.-мат. наук, проф., Узбекистан

Г.А. Колотков, канд. тех. наук, Россия

Лихтенбергер Янош, д-р по наукам о Земле, проф., Венгрия

Мартинелли Джовани, д-р по геохимии, проф., Италия

В.Н. Маричев, д-р физ.-мат. наук, Россия

Мацка Юрген, д-р естест. наук, Германия

Д.Л. Мерсон, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

Эммануэль Нахайо, д-р фил. по геофизике, ЮАР

Р.Р. Нигматуллин, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

П.М. Нагорский, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

Н.Н. Портнягин, д-р тех. наук, Россия

А.В. Псху, д-р физ.-мат. наук, Россия

С.С. Раджабов, д-р тех. наук, Узбекистан

М.И. Рамазанов, д-р физ.-мат. наук, проф., Казахстан

З.Р. Рахмонов, д-р физ.-мат. наук, Узбекистан

С.Ш. Рехвиашвили, д-р физ.-мат. наук, Россия

А.Л. Ронжин, д-р тех. наук, проф., проф. РАН, Россия

Сасмаз Ахмет, д-р геолог.-минералог. наук, проф., Турция

Л.И. Сербина, д-р физ.-мат. наук., проф., Россия

С.М. Ситник, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

С.Э. Смирнов, д-р физ.-мат. наук, проф., Россия

Фенг Тяньхуа, д-р фил. по физ.-мат. наукам, Китай

А.Р. Хаётов, д-р физ.-мат. наук, проф., Узбекистан

З.М. Шибзуков, д-р физ.-мат. наук, Россия

Чен Тао, д-р фил. по естест. наукам, проф., Китай

Чжоу Тянь, д-р фил. по инж. наукам, проф., Китай

В.С. Яковлева, д-р тех. наук, Россия

Ministry of Education and Science of Russian Federation

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS

Vitus Bering Kamchatka State University

Bulletin KRASEC

(Kamchatka Regional Association «Scientific-Education Centre»)

Physical and Mathematical Sciences. 2024. vol. 48. no. 3

Petropavlovsk-Kamchatskiy City

Semi-annual edition founded in August, 2010

Scientific publication

Free price

Information products for children 12+

ISSN 2079-6641 (Print), ISSN 2079-665X (Online)

Mass Media Registrations Certificate PI No FS 77-58548 issued July 14, 2014

Official websites of the journal: <http://krasesc.ru>, <https://journals.rcsi.science/2079-6641/index#>

Editorial board of the journal

Chief Editor

Yu. V. Marapulets, D. Sci. (Phys. & Math.), Russia

Deputy Chief Editor

R.I. Parovik, D. Sci. (Phys. & Math.), Russia

Executive Secretary

L.K. Feshchenko, Ph.D. (Phys. & Math.), Russia

©Institute of Cosmophysical Research

and Radio Wave Propagation FEB RAS, 2024

©Vitus Bering Kamchatka State University, 2024

©Kamchatka Regional Association

«Scientific-Educational Centre», 2024

Editorial Council

Chairman of the Editorial Council

B.M. Shevtsov, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Russia

Secretary of the Editorial Council

R.T. Zunnunov, Ph. D. (Phys. & Math.), Uzbekistan

Editorial Council Members

Agarwal Praveen, Prof., India

M.M. Aripov, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Uzbekistan

A.G. Goryunov, D. Sci. (Tech.), Russia

Nav Kumar Mahato, Ph. D. (Appl. Math.), India

K.S. Sultanov, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Uzbekistan

A.P. Surzhikov, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Russia

Hegimegi Laszlo, Manager Director of MinGeo Ltd., Hungary

S.R. Hejazi, Ph. D. (Phys. & Math.), Iran

Chalupnik Stanislaw, Prof., Poland

Kh. M. Shadimetov, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Uzbekistan

Xue Wei, Ph. D. (Eng.), Prof., China

Members of the Editorial Board

R.A. Abirov, D. Sci. (Phys. & Math.), Uzbekistan

R.R. Ashurov, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Uzbekistan

V.B. Vasilyev, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Russia

P.A. Velmisov, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Russia

G.M. Vodinchar, Ph. D. (Phys. & Math.), Russia

S.Z. Dzhamalov, D. Sci. (Phys. & Math.), Uzbekistan

V.A. Ditlov, D. Sci. (Phys. & Math.), Russia

O.S. Zikirov, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Uzbekistan

G.A. Kolokov, Ph. D. (Phys. & Math.), Russia

Lichtenberger Janos, D. Sci. (Earth), Prof., Hungary

Martinelli Giovanni, D. Sci. (Geochem), Prof., Italy

V.N. Marichev, D. Sci. (Phys. & Math.), Russia

Matska Jurgen, D. Sci. (Natur.), Germany

D.I. Merson, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Russia

Emmanuel Nahayo, Ph. D. (Geophy.), South Africa

R.R. Nigmatullin, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Russia

P.M. Nagorskiy, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Russia

N.N. Portnyagin, D. Sci. (Phys. & Math.), Russia

A.V. Psxhu, D. Sci. (Phys. & Math.), Russia

S.S. Radjabov, Dr. Sci. (Tech.), Uzbekistan

M.I. Ramazanov, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Kazakhstan

Z.R. Rakhmonov, D. Sci. (Phys. & Math.), Uzbekistan

S.Sh. Rekhviashvili, D. Sci. (Phys. & Math.), Russia

A.L. Ronzhin, D. Sci. (Tech.), Prof., Prof. RAS, Russia

Sasmaz Ahmet, D. Sci. (Geol. & Miner.), Prof., Turkey

L.I. Serbina, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Russia

S.M. Sitnik, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Russia

S.E. Smirnov, D. Sci. (Phys. & Math.), Russia

Feng Tianhua, Ph.D. (Phys. & Math.), China

A.R. Khayotov, D. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Uzbekistan

Z.M. Shibzukov, D. Sci. (Phys. & Math.), Russia

Chen Tao, Ph. D. (Natur.), Prof., China

Zhou Tian, Ph. D. (Eng.), Prof., China

V.S. Yakovleva, D. Sci. (Tech.), Russia

Содержание

Сообщение редакционной коллегии	5
---	---

МАТЕМАТИКА

Arzikulov Z. O. <i>Boundary value problems for the three-dimensional Helmholtz equation in the unbounded octant, square and half space</i>	7
---	---

Балкизов Ж. А. <i>Первая краевая задача для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка</i>	20
---	----

Ruziev M. Kh., Zunnunov R. T., Yuldasheva N. T., Rakhimova G. B. <i>Bitsadze-Samarskii type problem for the diffusion equation and degenerate hyperbolic equation</i>	33
---	----

Энеева Л. М. <i>Задача Коши для уравнения дробного порядка с инволюцией</i>	43
--	----

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Алимова Н. Б. <i>Математическое моделирование автоколебаний нейрона в клеточной мембране с использованием дробной модели ФитцХью-Нагумо с функцией интенсивности раздражителя</i>	56
--	----

Казаков Е. А., Водинчар Г. М. <i>Стохастическая двумодовая эредитарная модель космического динамо</i>	70
--	----

Исрайилжанова Г. С., Каримов Ш. Т., Паровик Р. И. <i>Математическая дробная модель Зимана для описания сердечных сокращений</i>	83
--	----

Твёрдый Д. А., Макаров Е. О., Паровик Р. И. <i>Идентификация параметров математической α-модели переноса радона в накопительной камере по данным пункта Карымышина на Камчатке</i>	95
---	----

85 лет Профессору М.М. Арипову	120
--	-----

55 лет Директору ИПМА КБНЦ РАН А.В. Псху	123
--	-----

Contents

Message from the Editorial Board	5
--	---

MATHEMATICS

Арзикулов З. О. <i>Краевые задачи для трехмерного уравнения Гельмгольца в неограниченном октанте, квадрате и полупространстве</i>	7
--	---

Balkizov Zh. A. <i>The first boundary value problem for a model equation of parabolic-hyperbolic type of the third order</i>	20
---	----

Рузиев М. Х., Зуннунов Р. Т., Юлдашева Н. Т., Рахимова Г. Б. <i>Задача типа Бицадзе-Самарского для уравнения диффузии и вырождающегося гиперболического уравнения .</i>	33
---	----

Eneeva L. M. <i>Cauchy problem for fractional order equation with involution</i>	43
---	----

MATHEMATICAL MODELING

Alimova N. B. <i>Mathematical modeling of the neuron autocoling in the cell membrane using the fractional model of FitzHugh-Nagumo with the function of irritant intensity</i>	56
---	----

Kazakov E. A., Vodinchar G. M.. <i>Stochastic two-mode hereditary model of a cosmic dynamo . . .</i>	70
---	----

Israyiljanova G. S., Karimov Sh. T., Parovik R. I. <i>Mathematical fractional Zeeman model for describing cardiac contractions</i>	83
---	----

Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. <i>Identification of parameters of the mathematical α-model of radon transport in the accumulation chamber based on data from the Karymshina site in Kamchatka</i>	95
---	----

85 years of Professor M.M. Aripov	120
---	-----

55 years to the Director of IAMA KBSC RAS A.V. Pskhu	123
--	-----

УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ И ЧИТАТЕЛИ!

Журнал Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки вошел в перечень рецензируемых научных изданий ВАК (№ 411 список от 31.12.2023), в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук, как журнал, входящий в международные реферативные базы данных и системы цитирования (MathSciNet и zbMath) и согласно таблицы ВАК обладает категорией K1.

За последнее время произошло расширение редакционной коллегии журнала, была создан редакционный совет, в который вошли ведущие ученые, в том числе из таких стран как Китай, Индия, Иран, ЮАР, Турция, Италия, Венгрия, Германия, Польша, Узбекистан, Казахстан. Это позволило расширить спектр направлений журнала.

Основные рубрики журнала соответствуют следующим обновленным шифрам научных специальностей:

- Математика
 - 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ
 - 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика
- Математическое моделирование
 - 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ
- Информационные и вычислительные технологии
 - 1.1.6. Вычислительная математика
 - 2.3.5. Математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей
- Физика
 - 1.3.3. Теоретическая физика
 - 1.3.6. Оптика
 - 1.3.7. Акустика
 - 1.3.8. Физика конденсированного состояния
 - 1.6.9. Геофизика
 - 1.6.18. Науки об атмосфере и климате
- Приборы и методы измерений
 - 1.3.2. Приборы и методы экспериментальной физики
 - 2.2.4. Приборы и методы измерений (по видам измерений)
 - 2.2.8. Методы и приборы контроля и диагностики материалов, изделий, веществ и природной среды

Журнал также публикует специальные выпуски, посвященные конференциям разного уровня по тематике журнала.

Журнал «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки» находится в свободном доступе. Тип лицензии CC поддерживаемый журналом: (CC

ВУ 4.0). Полнотекстовые выпуски журнала размещаются на Общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

За 14 лет своего существования, благодаря авторам и читателям, журнал получил хорошее устойчивое развитие, расширилась география участников и редакционной коллегии, сформировалась база рецензирования, повысились индексы цитируемости, журнал вошел в более 30-ти баз цитирования, всем статьям присваивается цифровой идентификатор DOI.

В №3 журнала «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки» за 2024 г. было опубликовано 10 статей авторов из России и Узбекистана. Среди 12 авторов: 3 — доктора наук, 7 — кандидаты наук, 2 — молодые ученые, аспиранты и преподаватели, научные сотрудники без степени.

Редакционная коллегия заинтересована в дальнейшем сотрудничестве, в формировании широкого высокопрофессионального научного коллектива авторов, публикующихся на его страницах, в создании своей устойчивой читательской аудитории.

Редакционная коллегия

MATHEMATICS

 <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-7-19>

Research Article

Full text in English

MSC 35A08, 35J05, 35J15, 35J25



Boundary Value Problems for the Three-Dimensional Helmholtz Equation in the Unbounded Octant, Square and Half Space

*Z. O. Arzikulov**

Fergana Polytechnic Institute, 150107, Fergana, Ferganskaya str., 86, Uzbekistan

Abstract. At present, the results of the study of boundary value problems for the two-dimensional Helmholtz equation with one and two singular coefficients are known. In the presence of two positive singular coefficients in the two-dimensional Helmholtz equation, explicit solutions of the Dirichlet, Neumann and Dirichlet-Neumann problems in a quarter plane are expressed through a confluent hypergeometric function of two variables. The established properties of the confluent hypergeometric function of two variables allow us to prove the theorem of uniqueness and existence of a solution to the problems posed. In this paper, we study the Dirichlet, Neumann, and Dirichlet-Neumann problems for the three-dimensional Helmholtz equation at zero values of singular coefficients in an octant, a quarter of space, and a half-space. Uniqueness and existence theorems are proved under certain restrictions on the data. The uniqueness of solutions of which is proved using the extremum principle for elliptic equations. Using the known fundamental (singular) solution of the Helmholtz equation, solutions to the problems under study are written out in explicit forms.

Key words: confluent hypergeometric function of three variables; system of partial differential equations; asymptotic formula; three-dimensional Helmholtz equation with three singular coefficients; Dirichlet problem in the first infinite octant.

Received: 27.09.2024; Revised: 26.10.2024; Accepted: 05.11.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Arzikulov Z. O. Boundary value problems for the three-dimensional Helmholtz equation in the unbounded octant, square and half space. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 48: 3, 7-19. EDN: MRZFAU. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-7-19>

Funding. The work was carried out without the support of funds.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. Author is solely responsible for providing the final version of the article in print.

***Correspondence:**  E-mail: zafarbekarzikulov1984@gmail.com

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Arzikulov Z. O., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



МАТЕМАТИКА

 <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-7-19>

Научная статья

Полный текст на английском языке

УДК 517.958



Краевые задачи для трехмерного уравнения Гельмгольца в неограниченном октанте, квадрате и полупространстве

З. О. Арзикулов*

Ферганский политехнический институт, 150107, ул. Ферганская, 86, г. Фергана, Узбекистан

Аннотация. В настоящее время известны результаты исследования краевых задач для двумерного уравнения Гельмгольца с одним и двумя сингулярными коэффициентами. При наличии двух положительных сингулярных коэффициентов в двумерном уравнении Гельмгольца явные решения задач Дирихле, Неймана и Дирихле-Неймана в четверти плоскости выражаются через вырожденную гипергеометрическую функцию двух переменных. Установленные свойства вырожденной гипергеометрической функции двух переменных позволяют доказать теорему единственности и существования решения поставленных задач. В данной работе изучаются задачи Дирихле, Неймана и Дирихле-Неймана для трехмерного уравнения Гельмгольца при нулевых значениях сингулярных коэффициентов в октанте, четверти пространства и полупространстве. Доказываются теоремы единственности и существования при определенных ограничениях на данные. Единственность решений которых доказывается с помощью принципа экстремума для эллиптических уравнений. Используя известное фундаментальное (сингулярное) решение уравнения Гельмгольца, решения исследуемых задач выписываются в явном виде.

Ключевые слова: вырожденная гипергеометрическая функция трех переменных; система уравнений в частных производных; асимптотическая формула; трехмерное уравнение Гельмгольца с тремя сингулярными коэффициентами; задача Дирихле в первом бесконечном октанте

Получение: 27.09.2024; Исправление: 26.10.2024; Принятие: 05.11.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Arzikulov Z. O. Boundary value problems for the three-dimensional Helmholtz equation in the unbounded octant, square and half space // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 7-19. EDN: MRZFAU. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-7-19>.

Финансирование. Работа была выполнена без поддержки фондов

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция:  E-mail: zafarbekarzikulov1984@gmail.com

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Arzikulov Z. O., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)



Introduction

It's known, that the Helmholtz equation has a variety of applications in physics and other sciences, including the wave equation, the diffusion equation, and the Schrödinger equation for a free particle.

The Helmholtz equation often arises in the study of physical problems involving partial differential equations (PDEs) in both space and time. The Helmholtz equation, which represents a time-independent form of the wave equation, results from applying the technique of separation of variables to reduce the complexity of the analysis [15].

The two-dimensional analogue of the vibrating string is the vibrating membrane, with the edges clamped to be motionless. The Helmholtz equation was solved for many basic shapes in the 19th century: the rectangular membrane by Siméon Denis Poisson in 1829, the equilateral triangle by Gabriel Lamé in 1852, and the circular membrane by Alfred Clebsch in 1862. The elliptical drumhead was studied by Émile Mathieu, leading to Mathieu's differential equation.

Two- and more-dimensional Helmholtz equations

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \mu u = 0$$

and their related boundary-value problems have been investigated in a large number of papers [1–3, 12–14].

On the other hand, the equation has important applications. In 1952 Kapilevich [18] has solved Dirichlet and Neumann problems for multidimensional Helmholtz equation with singular coefficient

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} + \frac{2\alpha}{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \mu u = 0, \quad 0 < 2\alpha < 1$$

in the half-space. In 1978 Marichev [19] has investigated two-dimensional Helmholtz equation with two singular coefficients

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2\alpha}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\beta}{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \mu u = 0, \quad 0 < 2\alpha, 2\beta < 1. \quad (1)$$

There are many works [6–9, 11] devoted to the Helmholtz equation (1). For instance, in the work [10] the Dirichlet problem for the singular Helmholtz equation (1) for $\mu = -\lambda^2$ is solved explicitly.

Generally speaking, our further goal is to pose and investigate boundary value problems for Helmholtz equation with three singular coefficients

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2\alpha}{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\beta}{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{2\gamma}{z} \frac{\partial u}{\partial z} + \mu u = 0, \quad 0 \leq 2\alpha, 2\beta, 2\gamma < 1 \quad (2)$$

in some infinite domains.

For beginning, in the present paper, we study the Dirichlet, Neumann and Dirichlet-Neumann boundary value problems for equation (2) at $\alpha = \beta = \gamma = 0$ and $\mu = -\lambda^2$ in the unbounded domains – in an octant, square of the space and half-space.

The Dirichlet problem D_3^3 for the Helmholtz equation in the first octant

Let us consider the following Helmholtz equation

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \lambda^2 u = 0, \quad (3)$$

in the infinite domain $\Omega_3 \equiv \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$

The Dirichlet problem D_3^3 . Find a regular solution $u(x, y, z)$ to the Helmholtz equation (3) in the class of functions $C(\overline{\Omega_3}) \cup C^2(\Omega_3)$, satisfying the conditions

$$u(x, y, 0) = \tau_1(x, y), \quad 0 \leq x, y < \infty, \quad (4)$$

$$u(x, 0, z) = \tau_2(x, z), \quad 0 \leq x, z < \infty, \quad (5)$$

$$u(0, y, z) = \tau_3(y, z), \quad 0 \leq y, z < \infty, \quad (6)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (7)$$

where $\tau_k(t, s)$ are given functions such that

$$\tau_1(x, y) = \frac{\tilde{\tau}_1(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)^{(1+\varepsilon_1)/2}}, \quad \tilde{\tau}_1(x, y) \in C(0 \leq x, y < \infty), \quad \varepsilon_1 > 0, \quad (8)$$

$$\tau_2(x, z) = \frac{\tilde{\tau}_2(x, z)}{(1 + x^2 + z^2)^{(1+\varepsilon_2)/2}}, \quad \tilde{\tau}_2(x, z) \in C(0 \leq x, z < \infty), \quad \varepsilon_2 > 0, \quad (9)$$

$$\tau_3(y, z) = \frac{\tilde{\tau}_3(y, z)}{(1 + y^2 + z^2)^{(1+\varepsilon_3)/2}}, \quad \tilde{\tau}_3(y, z) \in C(0 \leq y, z < \infty), \quad \varepsilon_3 > 0. \quad (10)$$

In addition, the functions $\tau_1(x, y)$, $\tau_2(x, z)$ and $\tau_3(y, z)$ satisfy the concordance conditions in origin $\tau_1(0, 0) = \tau_2(0, 0) = \tau_3(0, 0)$, and in the lateral ribs of the domain Ω_3 :

$$\tau_1(x, 0) = \tau_2(x, 0), \quad \tau_1(0, y) = \tau_3(y, 0), \quad \tau_2(0, z) = \tau_3(0, z) \quad 0 \leq x, y, z < \infty. \quad (11)$$

Theorem. [4] *The Dirichlet problem for equation (3) in an unbounded domain Ω_3 can have at most one solution.*

Existence of the solution to the Dirichlet problem D_3^3

We will seek a solution to the Dirichlet problem (3) – (11) in the form

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 u_i(x, y, z),$$

where $u_1(x, y, z)$, $u_2(x, y, z)$, $u_3(x, y, z)$ are a solutions to the equation (3), satisfying the boundary conditions

$$u_1(x, y, 0) = \tau_1(x, y), \quad u_1(x, 0, z) = 0, \quad u_1(0, y, z) = 0, \quad (12)$$

$$u_2(x, y, 0) = 0, \quad u_2(x, 0, z) = \tau_2(x, z), \quad u_2(0, y, z) = 0, \quad (13)$$

$$u_3(x, y, 0) = 0, \quad u_3(x, 0, z) = 0, \quad u_3(0, y, z) = \tau_3(y, z), \quad (14)$$

respectively.

Lemma 1. *If a function $\tau_1(x, y)$ can be represented by the formula (8), then the function*

$$u_1(x, y, z) = \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} u_{1j}(x, y, z) \quad (15)$$

is a regular solution of the equation (3) in the domain Ω_3 , satisfying the boundary conditions (7) and (12), where

$$u_{1j}(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau_1(t, s)}{\rho_{1j}^3} (1 + \lambda \rho_{1j}) e^{-\lambda \rho_{1j}} dt ds, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad (16)$$

$$\rho_{11} = \sqrt{(t-x)^2 + (s-y)^2 + z^2}, \quad \rho_{14} = \sqrt{(t-x)^2 + (s+y)^2 + z^2}, \quad (17)$$

$$\rho_{12} = \sqrt{(t+x)^2 + (s-y)^2 + z^2}, \quad \rho_{13} = \sqrt{(t+x)^2 + (s+y)^2 + z^2}. \quad (18)$$

Proof. Now we will show that function $u_{11}(x, y, z)$ satisfies condition (4) of the Dirichlet problem.

By setting $t = x + z\mu$, $s = y + z\nu$, we transform formula (16) for $j = 1$ to the form

$$u_{11}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau_1(x + z\mu, y + z\nu)}{(1 + \mu^2 + \nu^2)^{3/2}} [1 + \lambda z^2 (1 + \mu^2 + \nu^2)] e^{-\lambda z^2 (1 + \mu^2 + \nu^2)} d\mu d\nu \quad (19)$$

On the right-hand side of (19) we pass to the limit as $z \rightarrow 0$ and get

$$\lim_{z \rightarrow 0} u_{11}(x, y, z) = \tau_1(x, y) \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\mu d\nu}{(1 + \mu^2 + \nu^2)^{3/2}}.$$

Using consistently the well-known identity [5, Eq. 4.623]¹

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(a^2 x^2 + b^2 y^2) dx dy = \frac{\pi}{4ab} \int_0^\infty \varphi(x) dx, \quad (20)$$

we obtain

$$\lim_{z \rightarrow 0} u_{11}(x, y, z) = \tau_1(x, y).$$

Likewise, everyone can easily get

$$\lim_{z \rightarrow 0} u_{1j}(x, y, z) = 0, \quad j = 2, 3, 4.$$

¹There is a typo in this formula, the correct formula is (20).

So, the following equality is true for the function $u_1(x, y, z)$ defined in (15):

$$\lim_{z \rightarrow 0} u_1(x, y, z) = \tau_1(x, y).$$

Taking into account the obvious equalities

$$\rho_{11}|_{x=0} = \rho_{12}|_{x=0}, \quad \rho_{11}|_{y=0} = \rho_{14}|_{y=0}, \quad \rho_{12}|_{y=0} = \rho_{13}|_{y=0}, \quad \rho_{13}|_{x=0} = \rho_{14}|_{x=0},$$

we establish that for there exist a following limits

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_1(x, y, z) = 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0} u_1(x, y, z) = 0.$$

It is easy to see that as the point (x, y, z) tends to infinity, i.e. $R \rightarrow \infty$, function (16) tends to zero. Then, by virtue of (8), we get

$$|u_{11}(x, y, z)| \leq C_{11} z \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dt ds}{(1 + t^2 + s^2)^{(1+\varepsilon_1)/2} \rho_{11}^2} \quad (21)$$

At the right-hand side of inequality (21), change the variables as follows: $t = R\mu$, $s = R\nu$. We obtain the inequalities

$$|u_{11}| \leq \frac{C_{11}}{R^{\varepsilon_1}} \cdot \frac{z}{R} K(x, y, z; R)$$

where

$$K(x, y, z; R) = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{d\mu d\nu}{\left(\frac{1}{R^2} + \mu^2 + \nu^2\right)^{(1+\varepsilon_1)/2} \left[1 + \mu^2 + \nu^2 - \frac{2}{R}(\mu x + \nu y)\right]}.$$

Let us show that this proper double integral is bounded. Indeed, using the formula (20) and passing to the limit as $R \rightarrow \infty$, we calculate

$$\lim_{R \rightarrow \infty} K(x, y, z; R) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1+\varepsilon_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2+\varepsilon_1}{2}\right), \quad (22)$$

where $\Gamma(z)$ is a famous gamma function.

Using (22), we obtain

$$|u_{11}(x, y, z)| \leq \frac{C}{R^{\varepsilon_1}}, \quad \varepsilon_1 > 0, \quad (23)$$

where C is a positive constant.

Now, it intermediately follows from estimate (23) that the function (16) vanishes at infinity. $\square$

Similar statements are also true for functions $u_2(x, y, z)$ and $u_3(x, y, z)$ that satisfy the conditions (13) and (14), respectively, and vanish at infinity, where

$$u_i(x, y, z) = \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} u_{ij}(x, y, z), \quad i = 2, 3,$$

$$u_{2j}(x, y, z) = \frac{y}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau_2(t, s)}{\rho_{2j}^3} (1 + \lambda \rho_{2j}) e^{-\lambda \rho_{2j}} dt ds, \quad (24)$$

$$\rho_{21} = \sqrt{(t-x)^2 + y^2 + (s-z)^2}, \quad \rho_{24} = \sqrt{(t-x)^2 + y^2 + (s+z)^2}, \quad (25)$$

$$\rho_{22} = \sqrt{(t+x)^2 + y^2 + (s-z)^2}, \quad \rho_{23} = \sqrt{(t+x)^2 + y^2 + (s+z)^2}, \quad (26)$$

$$u_{3j}(x, y, z) = \frac{x}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau_3(t, s)}{\rho_{3j}^3} (1 + \lambda \rho_{3j}) e^{-\lambda \rho_{3j}} dt ds, \quad (27)$$

$$\rho_{31} = \sqrt{x^2 + (t-y)^2 + (s-z)^2}, \quad \rho_{34} = \sqrt{x^2 + (t-y)^2 + (s+z)^2}, \quad (28)$$

$$\rho_{32} = \sqrt{x^2 + (t+y)^2 + (s-z)^2}, \quad \rho_{33} = \sqrt{x^2 + (t+y)^2 + (s+z)^2}. \quad (29)$$

Thus, we have proved the following

Theorem 2. *If a given functions τ_1 , τ_2 and τ_3 satisfy the conditions (8) – (11), then a function $u(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} u_{ij}(x, y, z)$, where the functions u_{ij} are defined in (16), (24) and (27), is a regular solution of equation (3) in the domain Ω_3 , satisfying the conditions (4) to (7).*

Other problems for the Helmholtz equation in the first infinite octant

Let us consider the Helmholtz equation (3) in the infinite domain Ω_3 .

The Neumann problem N_3^3 . Find a regular solution $u(x, y, z)$ to the Helmholtz equation (3) in the domain Ω_3 , satisfying the conditions

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = \nu_1(x, y), \quad 0 < x, y < \infty, \quad (30)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = \nu_2(x, z), \quad 0 < x, z < \infty, \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = \nu_3(y, z), \quad 0 < y, z < \infty, \quad (32)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (33)$$

where $\nu_k(t, s)$ are given functions such that

$$\nu_1(x, y) = \frac{\tilde{\nu}_1(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)^{\varepsilon_1/2}}, \quad \tilde{\nu}_1(x, y) \in C(0 < x, y < \infty), \quad \varepsilon_1 > 0, \quad (34)$$

$$\nu_2(x, z) = \frac{\tilde{\nu}_2(x, z)}{(1 + x^2 + z^2)^{\varepsilon_2/2}}, \quad \tilde{\nu}_2(x, z) \in C(0 < x, z < \infty), \quad \varepsilon_2 > 0, \quad (35)$$

$$\nu_3(y, z) = \frac{\tilde{\nu}_3(y, z)}{(1 + y^2 + z^2)^{\varepsilon_3/2}}, \quad \tilde{\nu}_3(y, z) \in C(0 < y, z < \infty), \quad \varepsilon_3 > 0. \quad (36)$$

Theorem 3. *If a given functions v_1, v_2 and v_3 satisfy the conditions (34) – (36), then a function*

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{v_i(t, s) e^{-\lambda \rho_{ij}}}{\rho_{ij}} dt ds, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

is a regular solution of equation (3) in the domain Ω_3 , satisfying the boundary conditions (30) to (33), where ρ_{ij} are defined in (17), (18), (25), (26), (28), (29).

The Dirichlet-Neuman problem $D_3^2 N_3^1$. Find a regular solution $u(x, y, z)$ to the Helmholtz equation (3) in the class of functions $C(\overline{\Omega_3}) \cup C^2(\Omega_3)$, satisfying the conditions

$$u(x, y, 0) = \tau_1(x, y), \quad 0 \leq x, y < \infty, \quad (37)$$

$$u(x, 0, z) = \tau_2(x, z), \quad 0 \leq x, z < \infty, \quad (38)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = v_3(y, z), \quad 0 < y, z < \infty, \quad (39)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (40)$$

where $\tau_1(t, s), \tau_2(t, s), v_3(t, s)$ are given functions such that

$$\tau_1(x, y) = \frac{\tilde{\tau}_1(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)^{(1+\varepsilon_1)/2}}, \quad \tilde{\tau}_1(x, y) \in C(0 \leq x, y < \infty), \quad \varepsilon_1 > 0, \quad (41)$$

$$\tau_2(x, z) = \frac{\tilde{\tau}_2(x, z)}{(1 + x^2 + z^2)^{(1+\varepsilon_2)/2}}, \quad \tilde{\tau}_2(x, z) \in C(0 \leq x, z < \infty), \quad \varepsilon_2 > 0, \quad (42)$$

$$v_3(y, z) = \frac{\tilde{v}_3(y, z)}{(1 + y^2 + z^2)^{\varepsilon_3/2}}, \quad \tilde{v}_3(y, z) \in C(0 < y, z < \infty), \quad \varepsilon_3 > 0. \quad (43)$$

In addition, the functions $\tau_1(x, y), \tau_2(x, z)$ satisfy the concordance conditions in origin and in the lateral ribs of the domain Ω_3 :

$$\tau_1(x, 0) = \tau_2(x, 0), \quad 0 \leq x < \infty. \quad (44)$$

Theorem 4. *If a given functions τ_1, τ_2 and v_3 satisfy the conditions (41) – (44), then a function*

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & \frac{z}{2\pi} \sum_{j=1}^4 (-1)^{[\frac{j-1}{2}]} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau_1(t, s)}{\rho_{1j}^3} (1 + \lambda \rho_{1j}) e^{-\lambda \rho_{1j}} dt ds \\ & + \frac{y}{2\pi} \sum_{j=1}^4 (-1)^{[\frac{j-1}{2}]} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau_2(t, s)}{\rho_{2j}^3} (1 + \lambda \rho_{2j}) e^{-\lambda \rho_{2j}} dt ds \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^4 (-1)^{j+1} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{v_3(t, s)}{\rho_{3j}} e^{-\lambda \rho_{3j}} dt ds, \end{aligned}$$

is a regular solution of equation (3) in the domain Ω_3 , satisfying the boundary conditions (37) to (40), where ρ_{ij} are defined in (17), (18), (25), (26), (28), (29).

Hereinafter, $[\alpha]$ denotes an integer part of the number α .

The Dirichlet-Neumann problem $D_3^1 N_3^2$. Find a regular solution $u(x, y, z)$ to the Helmholtz equation (3) in the domain Ω_3 , satisfying the conditions

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = v_1(x, y), \quad 0 < x, y < \infty, \quad (45)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = v_2(x, z), \quad 0 < x, z < \infty, \quad (46)$$

$$u(0, y, z) = \tau_3(y, z), \quad 0 \leq y, z < \infty, \quad (47)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (48)$$

where $v_1(t, s), v_2(t, s), \tau_3(t, s)$ are given functions such that

$$v_1(x, y) = \frac{\tilde{v}_1(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)^{\varepsilon_1/2}}, \quad \tilde{v}_1(x, y) \in C(0 < x, y < \infty), \quad \varepsilon_1 > 0, \quad (49)$$

$$v_2(x, z) = \frac{\tilde{v}_2(x, z)}{(1 + x^2 + z^2)^{\varepsilon_2/2}}, \quad \tilde{v}_2(x, z) \in C(0 < x, z < \infty), \quad \varepsilon_2 > 0, \quad (50)$$

$$\tau_3(y, z) = \frac{\tilde{\tau}_3(y, z)}{(1 + y^2 + z^2)^{(1+\varepsilon_3)/2}}, \quad \tilde{\tau}_3(y, z) \in C(0 \leq y, z < \infty), \quad \varepsilon_3 > 0. \quad (51)$$

Theorem 5. If a given functions v_1, v_2 and τ_3 satisfy the conditions (49) – (51), then a function

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^4 (-1)^{[\frac{j}{2}]} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{v_1(t, s)}{\rho_{1j}} e^{-\lambda \rho_{1j}} dt ds \\ & -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^4 (-1)^{[\frac{j}{2}]} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{v_2(t, s)}{\rho_{2j}} e^{-\lambda \rho_{2j}} dt ds + \frac{x}{2\pi} \sum_{j=1}^4 \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\tau_3(t, s)}{\rho_{3j}^3} (1 + \lambda \rho_{3j}) e^{-\lambda \rho_{3j}} dt ds \end{aligned}$$

is a regular solution of equation (3) in the domain Ω_3 , satisfying the conditions (45) to (48), where ρ_{ij} are defined in (17), (18), (25), (26), (28), (29).

Boundary value problems for the Helmholtz equation in the first infinite square

Let us consider the Helmholtz equation (3) in the infinite domain

$$\Omega_2 \equiv \{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, y > 0, z > 0\}.$$

The Dirichlet problem D_3^2 . Find a regular solution $u(x, y, z)$ to the Helmholtz equation (3) in the domain Ω_2 , satisfying the conditions

$$u(x, y, 0) = \tau_1(x, y), \quad -\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty, \quad (52)$$

$$u(x, 0, z) = \tau_2(x, z), \quad -\infty < x < \infty, 0 \leq z < \infty \quad (53)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (54)$$

where $\tau_1(t, s)$ and $\tau_2(t, s)$ are a given functions such that

$$\tau_1(x, y) = \frac{\tilde{\tau}_1(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)^{\varepsilon_1/2}}, \quad \tilde{\tau}_1(x, y) \in C(-\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty), \varepsilon_1 > 0, \quad (55)$$

$$\tau_2(x, z) = \frac{\tilde{\tau}_2(x, z)}{(1 + x^2 + z^2)^{\varepsilon_2/2}}, \quad \tilde{\tau}_2(x, z) \in C(-\infty < x < \infty, 0 \leq z < \infty), \varepsilon_2 > 0, \quad (56)$$

Theorem 6. If a given functions τ_1 and τ_2 satisfy the conditions (55) and (56), then a function

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & \frac{z}{16\pi} \left[\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty \frac{\tau_1(t, s) (1 + \lambda \rho_{11}) e^{-\lambda \rho_{11}}}{\rho_{11}^3} dt - \int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty \frac{\tau_1(t, s) (1 + \lambda \rho_{14}) e^{-\lambda \rho_{14}}}{\rho_{14}^3} dt \right] \\ & + \frac{y}{16\pi} \left[\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty \frac{\tau_2(t, s) (1 + \lambda \rho_{21}) e^{-\lambda \rho_{21}}}{\rho_{21}^3} dt - \int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty \frac{\tau_2(t, s) (1 + \lambda \rho_{24}) e^{-\lambda \rho_{24}}}{\rho_{24}^3} dt \right] \end{aligned}$$

is a regular solution of equation (3) in the domain Ω_2 , satisfying the conditions (52) to (54), where ρ_{ij} are defined in (17) and (25).

The Dirichlet-Neuman problem $D_3^1 N_3^1$. Find a regular solution $u(x, y, z)$ to the Helmholtz equation (3) in the domain Ω_2 , satisfying the conditions

$$u(x, y, 0) = \tau_1(x, y), \quad -\infty < x < \infty, 0 \leq y < \infty, \quad (57)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = \nu_2(x, z), \quad -\infty < x < \infty, 0 \leq z < \infty, \quad (58)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (59)$$

where $\tau_1(t, s)$, $\nu_2(t, s)$ are given functions such that

$$\tau_1(x, y) = \frac{\tilde{\tau}_1(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)^{\varepsilon_1/2}}, \quad \tilde{\tau}_1(x, y) \in C(-\infty < x < +\infty, y < \infty), \varepsilon_1 > 0, \quad (60)$$

$$\nu_2(x, z) = \frac{\tilde{\nu}_2(x, z)}{(1 + x^2 + z^2)^{\varepsilon_2/2}}, \quad \tilde{\nu}_2(x, z) \in C(-\infty < x < +\infty, 0 < z < \infty), \varepsilon_2 > 0, \quad (61)$$

Theorem 7. If a given functions τ_1 and ν_2 satisfy the conditions (60) and (61), then a function

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & \frac{z}{16\pi} \left[\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty \frac{\tau_1(t, s) (1 + \lambda \rho_{11}) e^{-\lambda \rho_{11}}}{\rho_{11}^3} dt + \int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty \frac{\tau_1(t, s) (1 + \lambda \rho_{14}) e^{-\lambda \rho_{14}}}{\rho_{14}^3} dt \right] \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{16\pi} \left[\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty \frac{\nu_2(t, s) e^{-\lambda \rho_{21}}}{\rho_{21}} dt - \int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty \frac{\nu_2(t, s) e^{-\lambda \rho_{24}}}{\rho_{24}} dt \right]$$

is a regular solution of equation (3) in the domain Ω_2 , satisfying the conditions (57) – (59), where ρ_{ij} are defined in (17) and (25).

Let us consider the following Helmholtz equation (3) in the infinite domain $\Omega_2 \equiv \{(x, y, z) : -\infty < x < \infty, y > 0, z > 0\}$.

The Neumann problem N_3^2 . Find a regular solution $u(x, y, z)$ to the Helmholtz equation (3) in the domain Ω_2 , satisfying the conditions

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = \nu_1(x, y), \quad -\infty < x < +\infty, 0 < y < \infty, \quad (62)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = \nu_2(x, z), \quad -\infty < x < +\infty, 0 < z < \infty, \quad (63)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (64)$$

where $\nu_k(t, s)$ are given functions such that

$$\nu_1(x, y) = \frac{\tilde{\nu}_1(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)^{\varepsilon_1/2}}, \quad \tilde{\nu}_1(x, y) \in C(-\infty < x < +\infty, 0 < y < \infty), \varepsilon_1 > 0, \quad (65)$$

$$\nu_2(x, z) = \frac{\tilde{\nu}_2(x, z)}{(1 + x^2 + z^2)^{\varepsilon_2/2}}, \quad \tilde{\nu}_2(x, z) \in C(-\infty < x < +\infty, 0 < z < \infty), \varepsilon_2 > 0, \quad (66)$$

Theorem 8. If a given functions ν_1 and ν_2 satisfy the conditions (65) and (66), then a function

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{16\pi} \left[\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty \frac{\nu_1(t, s) e^{-\lambda \rho_{11}}}{\rho_{11}} dt + \int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty \frac{\nu_1(t, s) e^{-\lambda \rho_{14}}}{\rho_{14}} dt \right] \\ - \frac{1}{16\pi} \left[\int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty \frac{\nu_2(t, s) e^{-\lambda \rho_{21}}}{\rho_{21}} dt + \int_0^\infty ds \int_{-\infty}^\infty \frac{\nu_2(t, s) e^{-\lambda \rho_{24}}}{\rho_{24}} dt \right]$$

is a regular solution of equation (3) in the domain Ω_2 , satisfying the conditions (62) – (64), where ρ_{ij} are defined in (17) and (25).

Boundary value problems for the Helmholtz equation in the half-space

Let us consider the following Helmholtz equation (3) in the infinite domain $\Omega_1 \equiv \{(x, y, z) : -\infty < x, y < \infty, z > 0\}$

The Dirichlet problem D_3^1 . Find a regular solution $u(x, y, z)$ to the Helmholtz equation (3) in the domain Ω_1 , satisfying the conditions

$$u(x, y, 0) = \tau_1(x, y), \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (67)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (68)$$

where $\tau_1(t, s)$ are given functions such that

$$\tau_1(x, y) = \frac{\tilde{\tau}_1(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)^{\varepsilon_1/2}}, \quad \tilde{\tau}_1(x, y) \in C(-\infty < x, y < +\infty), \quad \varepsilon_1 > 0, \quad (69)$$

Note, that the Dirichlet problem for Helmholtz equation (3) in case of half-space is found in the books for students [16, 17].

Theorem 9. *If a given function τ_1 satisfies the condition (69), then a function*

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_1(t, s) (1 + \lambda \rho_{11}) e^{-\lambda \rho_{11}}}{\rho_{11}^3} dt \quad (70)$$

is a regular solution of equation (3) in the domain Ω_1 , satisfying the conditions (67) and (68), where ρ_{11} is defined in (17).

The Neumann problem N_3^1 . Find a regular solution $u(x, y, z)$ to the Helmholtz equation (3) in the domain Ω_1 , satisfying the conditions

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = v_1(x, y), \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, \quad (71)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (72)$$

where $v_1(t, s)$ is a given function such that

$$v_1(x, y) = \frac{\tilde{v}_1(x, y)}{(1 + x^2 + y^2)^{\varepsilon_1/2}}, \quad \tilde{v}_1(x, y) \in C(-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty), \quad \varepsilon_1 > 0, \quad (73)$$

Note, that the Neumann problem for Helmholtz equation (3) in case of half-space is found in [16, 17].

Theorem 10. *If a given function v_1 satisfies the condition (73), then a function*

$$u(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_1(t, s) e^{-\lambda \rho_{11}}}{\rho_{11}} dt \quad (74)$$

is a regular solution of equation (3) in the domain Ω_1 , satisfying the boundary conditions (71) and (72), where ρ_{11} is defined in (17).

Remark 1. The solutions (70) and (74) of the Dirichlet and Neumann problems are found in [17].

Remark 2. Uniqueness of solutions of the problems posed is proved using the extremum principle for elliptic equations.

Conclusion

In this paper we presented solutions of 9 boundary value problems for the three-dimensional Helmholtz equation in infinite domains in explicit and convenient forms for

further research. The results of this paper can be useful in the study of boundary value problems for a three-dimensional equation of mixed type, because from the explicit solutions of the posed problems it is easy to derive functional relationships between the traces of the desired solution and its derivative along the normal, brought to the plane of change of the equation type.

References

1. Hu G., Rathsfeld A. Radiation conditions for the Helmholtz equation in a half plane filled by inhomogeneous periodic material, *Journal of Differential Equations*, 2024. vol. 388, pp. 215–252.
2. Chandler-Wilde S.N. Boundary value problems for the Helmholtz equation in a half-plane, *Conference: Third International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation Phenomena*, 1994. vol. 94, pp. 1–12.
3. Frank-Olme S., Ernst S. Boundary Value Problems for the Helmholtz Equation in an Octant, *Integral Equations and Operator Theory*, 2008. vol. 62, pp. 269–300.
4. Sveshnikov A. G., Bogolyubov A. N., Kravtsov V. V. *Lectures on Mathematical Physics*. Moscow: Moscow State University, 1993. 352 pp. (in Russian)
5. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Table of integrals, series and products*. Amsterdam: Academic Press, 2007. 1172 pp.
6. Ergashev T. G., Safarbaeva N. M. Holmgren's problem for a multidimensional Helmholtz equation with one singular coefficient, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2020. vol. 1, pp. 127 – 135.
7. Ergashev T. G., Hasanov A. Holmgren problem for elliptic equation with singular coefficients, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.*, 2020. vol. 32, no. 3, pp. 159 – 175.
8. Ergashev T. G., Hasanov A. Fundamental solutions of the bi-axially symmetric Helmholtz equation, *Uzbek Mathematical Journal*, 2018. vol. 1, pp. 55 – 64.
9. Ergashev T. G. Third double-layer potential for a generalized bi-axially symmetric Helmholtz equation, *Ufa Mathematical Journal*, 2018. vol. 10, pp. 111 – 121.
10. Repin O. A., Lerner M. E. On the Dirichlet problem for the generalized bioxially symmetric Helmholtz equation in the first quadrant, *Vestnik Samarsk. Gos. Tekh. Universiteta, Ser. fiz.-matem. nauki*, 1998. vol. 6, pp. 5 – 8 (in Russian).
11. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*. Amsterdam: Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 976 pp.
12. Juraev D. A., Agarwal P., Elsayed E. E., Targyn N. Applications of the Helmholtz equation, *Advanced Engineering Days*, 2023. vol. 8, pp. 28 – 30.
13. Juraev D. A. On the Cauchy problem for matrix factorizations of the Helmholtz equation in a bounded domain, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2018. vol. 15, pp. 11 – 20.
14. Juraev D. A. The construction of the fundamental solution of the Helmholtz equation, *Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan*, 2012. vol. 2, pp. 14 – 17.
15. Zwillinger D. *Handbook of Differential Equations*. Boston, MA: Academic Press, 1997. 129 pp.
16. Tikhonov, A. N. and Samarskii, A. A. *Equations of Mathematical Physics*, Dover Publ. New York: Dover Publ, 1990. 829 pp.
17. Budak, B. M., Samarskii, A. A., and Tikhonov, A. N. *Collection of Problems on Mathematical Physics*. Moscow: Nauka, 1980. 829 pp. (in Russian)
18. Kapilevich M.B. On one equation of mixed elliptic-hyperbolic type., *Matematicheskii sbornik*, 1952. vol. 30(72), pp. 11 – 38 (in Russian).
19. Marichev O.I. Integral representation of solutions of the generalized biaxially symmetric Helmholtz equation and its inversion formula., *Differentsialniye uravneniya*, 1978. vol. 14, pp. 1824 – 1831 (in Russian).

Information about the author



Arzikulov Zafarjon Odilovich ✉ – Doktorant, Fac. of Phys. & Department of Higher Mathematics, Fergana Politechnical Institute Fergana, Uzbekistan,  ORCID 0009-0004-2965-4566.



Первая краевая задача для модельного уравнения параболо-гиперболического типа третьего порядка

*Ж. А. Балкизов**

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского
научного центра РАН, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, д. 89 А, Россия

Аннотация. В 1978 году в журнале «Дифференциальные уравнения» была опубликована статья А.М. Нахушева, где дана методика правильной постановки краевой задачи для класса уравнений парабола-гиперболического типа второго порядка в произвольной ограниченной области Ω с гладкой или кусочно-гладкой границей Σ . Исследованная в отмеченной работе краевая задача в настоящее время называется первой краевой задачей для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа второго порядка. В рамках данной работы в смешанной области сформулирована и исследована первая краевая задача для модельного уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка в том смысле, в котором она сформулирована и исследована А.М. Нахушевым для уравнений второго порядка. В одной части смешанной области рассматриваемое уравнение совпадает с вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода второго порядка, а в другой части является неоднородным уравнением третьего порядка с кратными характеристиками параболического типа. Для различных значений параметра λ , входящих в рассматриваемое уравнение, доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения исследуемой задачи. Для доказательства теоремы единственности применяется метод интегралов энергии в совокупности с методом А.М. Нахушева. Для доказательства теоремы существования применяется метод интегральных уравнений. В терминах функции Миттаг-Леффлера решение задачи найдено и выписано в явном виде.

Ключевые слова: уравнение смешанного парабола-гиперболического типа, вырождающееся гиперболическое уравнение первого рода, первая краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа, интегральные уравнения второго рода, задача и метод Трикоми, метод интегральных уравнений.

Получение: 28.10.2024; Исправление: 11.11.2024; Принятие: 13.11.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Балкизов Ж. А. Первая краевая задача для модельного уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 20-32. EDN: RAQLMI. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-20-32>.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМА КВНЦ РАН (рег. № 122041800015-8).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция:  E-mail: Giraslan@yandex.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Балкизов Ж. А., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)





The First Boundary Value Problem for a Model Equation of Parabolic-Hyperbolic Type of the Third Order

*Zh. A. Balkizov**

Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center RAS,
360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia

Abstract. In 1978, the journal *Differential Equations* published an article by A. M. Nakhushev, which provided a technique for correctly formulating a boundary value problem for a class of second-order parabolic-hyperbolic equations in an arbitrary bounded domain Ω with a smooth or piecewise smooth boundary Σ . The boundary value problem investigated in the above-mentioned work is currently called the first boundary value problem for a second-order mixed parabolic-hyperbolic equation. Within the framework of this work, the first boundary value problem for a third-order model parabolic-hyperbolic equation in a mixed domain is formulated and investigated in the sense in which it was formulated and investigated by A. M. Nakhushev for second-order equations. In one part of the mixed domain, the equation under consideration coincides with a degenerate hyperbolic equation of the first kind of the second order, and in the other part it is an inhomogeneous third-order equation with multiple characteristics of parabolic type. For various values of the parameter λ included in the equation under consideration, theorems of existence and uniqueness of a regular solution of the problem under study are proved. To prove the uniqueness theorem, the method of energy integrals is used in conjunction with the method of A.M. Nakhushev. To prove the existence theorem, the method of integral equations is used. In terms of the Mittag-Leffler function, the solution to the problem is found and written out in explicit form.

Key words: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, degenerate hyperbolic equation of the first kind, first boundary value problem for an equation of parabolic-hyperbolic type, integral equations of the second kind, Tricomi problem and method, method of integral equations.

Received: 28.10.2024; Revised: 11.11.2024; Accepted: 13.11.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Balkizov Zh. A. The first boundary value problem for a model equation of parabolic-hyperbolic type of the third order. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 48: 3, 20-32. EDN: RAQLMI. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-20-32>

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the IPMA KBSC RAS (reg. No. 122041800015-8).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. Author is solely responsible for providing the final version of the article in print.

***Correspondence:**  E-mail: Giraslan@yandex.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Balkizov Zh. A., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



1. Введение

Краевые задачи для модельных уравнений парабола-гиперболического типа второго порядка впервые были изучены в работах [1], [2]. Классификация уравнений парабола-гиперболического типов на уравнения с характеристической и нехарактеристической линиями изменения типа была проведена в работе [3]. Причем в работе [1] была изучена задача для модельного уравнения парабола-гиперболического типа с характеристической линией изменения типа, а в работе [2] исследована задача для модельного уравнения с нехарактеристической линией изменения типа. В работе [4] была дана методика правильной постановки краевой задачи для общего уравнения парабола-гиперболического типа второго порядка в произвольной ограниченной области Ω с гладкой или кусочно-гладкой границей Σ . Исследованная в работе [4] краевая задача в монографии [5, с. 236] была названа первой краевой задачей для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа. Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения второго порядка ранее была исследована в работе [6]. Аналог задачи Трикоми для уравнений парабола-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области его гиперболичности исследованы в работах [7], [8]. Наиболее полный обзор работ по краевым задачам для уравнений парабола-гиперболического типа можно найти в монографиях [5], [9], [10].

В данной работе полученные ранее в работе [4] результаты перенесены на модельное уравнение парабола-гиперболического типа третьего порядка. Пользуясь методикой, предложенной в работах [4], [5, с. 236], в работе сформулирована и исследована первая краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка. Доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения задачи. Решение задачи выписано в явном виде.

2. Постановка задачи

На евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{(m-2)/2} u_x, & y < 0, \\ u_{xxx} + u_y - f, & y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где λ , m – заданные числа, причем $m > 0$, $|\lambda| \leq \frac{m}{2}$; $f = f(x, y)$ – заданная функция; $u = u(x, y)$ – искомая функция.

При $y < 0$ уравнение (1) совпадает с вырождающимся гиперболическим уравнением первого рода [11, с. 21]

$$(-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \lambda(-y)^{\frac{m-2}{2}} u_x = 0, \quad (2)$$

а при $y > 0$ уравнение (1) является неоднородным уравнением третьего порядка с кратными характеристиками [12, с. 9] параболического типа [13, с. 72]

$$u_{xxx} + u_y = f(x, y). \quad (3)$$

Уравнение (1) рассматривается в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I$, где Ω_1 - это область, ограниченная характеристиками $\sigma_1 = AC : x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = 0$ и $\sigma_2 = CB : x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2} = r$ уравнения (2) при $y < 0$, выходящими из точки $C = (r/2, y_c)$, $y_c = -\left[\frac{(m+2)r}{4}\right]^{\frac{2}{m+2}}$, проходящими через точки $A = (0, 0)$, $B = (r, 0)$ и отрезком $J = AB$ прямой $y = 0$; Ω_2 - это область, ограниченная прямоугольником с вершинами $A = (0, 0)$, $A_0 = (0, h)$, $B_0 = (r, h)$ и $B = (r, 0)$, $h = \text{const} > 0$; $J = \{(x, 0) : 0 < x < r\}$ - интервал AB прямой $y = 0$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega_1) \cap C_{x,y}^{3,1}(\Omega_2)$, $u_x(x, 0), u_y(x, 0) \in L_1(0, r)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(r, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(r, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y < h, \quad (4)$$

$$u[\theta_r(x)] = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (5)$$

где $\theta_r(x) = \left(\frac{r+x}{2}, -\left(\frac{m+2}{4}\right)^{2/(m+2)}(r-x)^{2/(m+2)}\right)$ - аффикс точки пересечения характеристики выходящей из точки $(x, 0)$ отрезка $J = AB$ и проходящей параллельно характеристике AC с характеристикой BC ; $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$ - заданные на отрезке $0 \leq y < h$ функции; $\psi(x)$ - заданная на отрезке $0 \leq x \leq r$ функция, причем выполнено условие согласования $\psi(r) = \varphi_2(0)$.

3. Теорема единственности

Пусть существует регулярное в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ и пусть

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (6)$$

$$u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < r. \quad (7)$$

Тогда переходя в уравнении (1) к пределу при $y \rightarrow +0$ с учетом обозначений (6), (7) и условий (4) сразу получим первое фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из параболической части Ω_2 области Ω на линию изменения типа J :

$$\tau'''(x) + \nu(x) = f(x, 0), \quad 0 < x < r, \quad (8)$$

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \quad \tau(r) = \varphi_2(0), \quad \tau'(r) = \varphi_3(0). \quad (9)$$

Далее найдем фундаментальные соотношения между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенные из области гиперболичности Ω_1 уравнения (1) на отрезок J прямой $y = 0$. Для этого сначала заметим, что в характеристических координатах $\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$, $\eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$ уравнение (2) переходит в уравнение Эйлера-Дарбу-Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\beta_1}{\eta - \xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\beta_2}{\eta - \xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0$$

где $\beta_1 = \frac{m-2\lambda}{2(m+2)}$, $\beta_2 = \frac{m+2\lambda}{2(m+2)}$. Обозначим дополнительно: $\beta = \beta_1 + \beta_2 = \frac{m}{m+2}$.

Пусть вначале $|\lambda| < \frac{m}{2}$ и пусть $\tau(x) \in C[0, r] \cap C^2(0, r)$, $\nu(x) \in C^1(0, r) \cap L_1(0, r)$. Тогда регулярное в области Ω_1 решение задачи (6), (7) для уравнения (2) выписывается по формуле [14, с. 14]:

$$u(x, y) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)} \int_0^1 \tau[x + (1-\beta)(-y)^{1/(1-\beta)}(2t-1)] t^{\beta_2-1} (1-t)^{\beta_1-1} dt + \\ + \frac{\Gamma(2-\beta)y}{\Gamma(1-\beta_1)\Gamma(1-\beta_2)} \int_0^1 \nu[x + (1-\beta)(-y)^{1/(1-\beta)}(2t-1)] t^{-\beta_1} (1-t)^{-\beta_2} dt, \quad (10)$$

где $\Gamma(p) = \int_0^\infty \exp(-t) t^{p-1} dt$ – интеграл Эйлера второго рода (Гамма-функция).

Удовлетворяя (10) условию (5), находим:

$$u[\theta_r(x)] = u\left[\frac{r+x}{2}, -(2-2\beta)^{\beta-1} (r-x)^{1-\beta}\right] = \\ = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)} \int_0^1 \tau[x + (r-x)t] t^{\beta_2-1} (1-t)^{\beta_1-1} dt - \\ - \frac{(2-2\beta)^{\beta-1} (r-x)^{1-\beta} \Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\beta_1)\Gamma(1-\beta_2)} \int_0^1 \nu[x + (r-x)t] t^{-\beta_1} (1-t)^{-\beta_2} dt = \psi(x).$$

Вводя новую переменную интегрирования $z = x + (r-x)t$, последнее равенство переписывается в виде

$$\frac{\Gamma(\beta)(r-x)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)} \int_x^r \frac{\tau(z)(r-z)^{\beta_1-1}}{(z-x)^{1-\beta_2}} dz - \frac{(2-2\beta)^{\beta-1} \Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\beta_1)\Gamma(1-\beta_2)} \int_x^r \frac{\nu(z)(r-z)^{-\beta_2}}{(z-x)^{\beta_1}} dz = \psi(x). \quad (11)$$

Воспользуемся далее следующим определением оператора дробного интегрирования [13, с. 9]: оператором дробного (в смысле Римана-Лиувилля) интегрирования порядка $|\alpha|$ с началом в точке c и с концом в точке x называется оператор D_{cx}^α , который действует на абсолютно интегрируемую функцию $\varphi(t) \in L[a, b]$ по формуле

$$D_{cx}^\alpha \varphi(t) = \frac{\operatorname{sgn}(x-c)}{\Gamma(-\alpha)} \int_c^x |x-t|^{-(\alpha+1)} \varphi(t) dt, \quad \alpha < 0,$$

$$D_{cx}^\alpha \varphi(t) = \operatorname{sgn}^{[\alpha]+1}(x-c) \frac{d^{[\alpha]+1}}{dx^{[\alpha]+1}} \{D_{cx}^{\alpha-[\alpha]-1} \varphi(t)\}, \quad \alpha > 0,$$

где символ $\operatorname{sgn}(z)$ определяет знак числа z ; $[\alpha]$ – целая часть числа α , удовлетворяющая неравенству $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$. По определению $D_{cx}^0 \varphi(t) \equiv \varphi(x)$,

а $D_{cx}^n \varphi(t) \equiv \varphi^{(n)}(x)$ при $n \in \mathbb{N}$. Подробное исследование свойств оператора D_{cx}^α приведены в монографиях [15], [16].

В терминах оператора D_{cx}^α равенство (11) перепишется в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(\beta)(r-x)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta_1)} D_{rx}^{-\beta_2} \{ \tau(t) (r-t)^{\beta_1-1} \} - \\ & - \frac{(2-2\beta)^{\beta-1} \Gamma(2-\beta)}{\Gamma(1-\beta_2)} D_{rx}^{\beta_1-1} \{ \nu(t) (r-t)^{-\beta_2} \} = \psi(x). \end{aligned} \quad (12)$$

Применяя к обеим частям соотношения (12) оператор $D_{rx}^{1-\beta_1}$, с учетом закона взвешенной композиции операторов дробного (в смысле Римана-Лиувилля) дифференцирования и интегрирования с одинаковыми началами [15, с. 18], находим

$$\nu(x) = \gamma_1 D_{rx}^{1-\beta} \tau(t) - \gamma_2 (r-x)^{\beta_2} D_{rx}^{1-\beta_1} \psi(t), \quad (13)$$

где $\gamma_1 = \frac{\Gamma(1-\beta_2) \Gamma(\beta) (2-2\beta)^{1-\beta}}{\Gamma(\beta_1) \Gamma(2-\beta)}$, $\gamma_2 = \frac{\Gamma(1-\beta_2) (2-2\beta)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$.

Так как $\tau(x), \psi(x) \in C[0, r]$, а $\tau'(x), \psi'(x) \in L[0, r]$, то пользуясь следующим свойством оператора D_{rx}^α порядка $0 < \alpha \leq 1$ [16, с. 43]

$$D_{rx}^\alpha \varphi(t) = \frac{\varphi(r)}{\Gamma(1-\alpha)} (r-x)^{-\alpha} - D_{rx}^{\alpha-1} \varphi'(t)$$

с учетом условия согласования $\tau(r) = \psi(r)$, соотношение (13) можно переписать и в следующей форме

$$\nu(x) = -\gamma_1 D_{rx}^{-\beta} \tau'(t) + \gamma_2 (r-x)^{\beta_2} D_{rx}^{-\beta_1} \psi'(t), \quad (14)$$

Соотношение, выражаемое одной из равенств (13) или (14) и есть основное фундаментальное соотношение между искомыми функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное из области Ω_1 на линию изменения типа J в случае, когда $|\lambda| < \frac{m}{2}$.

Если $\lambda = -\frac{m}{2}$, то коэффициенты $\beta_1 = \beta = \frac{m}{m+2}$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \frac{(2-2\beta)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$ и решение задачи (6), (7) для уравнения (2) выписывается по формуле [14, с. 15]:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \tau \left[x - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} \right] + \\ & + \frac{2y}{m+2} \int_0^1 \nu \left[x - \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} (2t-1) \right] (1-t)^{-\beta} dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Удовлетворяя представление (15) условию (5), приходим к фундаментальному соотношению между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ следующего вида

$$\nu(x) = \gamma_1 [D_{rx}^{1-\beta} \tau(t) - D_{rx}^{1-\beta} \psi(t)]. \quad (16)$$

Если же $\lambda = \frac{m}{2}$, то $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta = \frac{m}{m+2}$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 2^{1-\beta} (1-\beta)^{-\beta}$. Решение задачи (6), (7) для уравнения (2) в этом случае имеет вид [14, с. 15]:

$$u(x, y) = \tau \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} \right] +$$

$$+\frac{2y}{m+2} \int_0^1 v \left[x + \frac{2}{m+2} (-y)^{(m+2)/2} (2t-1) \right] (1-t)^{-\beta} dt. \quad (17)$$

Из (17) при условии (5) сразу находим:

$$v(x) = 2^{1-\beta} (1-\beta)^{-\beta} (r-x)^{\beta} \psi'(x). \quad (18)$$

Справедлива следующая теорема о единственности регулярного решения задачи 1.

Теорема 3.1. *Задача 1 не может иметь более одного регулярного в области Ω решения.*

Доказательство. Для доказательства теоремы 1 рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче 1, то есть будем считать, что $f(x, y) \equiv 0 \ \forall (x, y) \in \bar{\Omega}_2$, $\psi(x) \equiv 0 \ \forall x \in [0, r]$ и $\varphi_1(y) = \varphi_2(y) = \varphi_3(y) \equiv 0 \ \forall y \in [0, h]$. При этом, с учетом того, что $\tau(r) = \varphi_2(0) = \psi(r) = 0$ из соотношений (13), (14), (16), (18) для различных значений λ получаем соответствующие равенства

$$v(x) = \gamma_1 D_{rx}^{1-\beta} \tau(t) = \gamma_1 D_{rx}^{-\beta} \tau'(t), \quad -\frac{m}{2} \leq \lambda < \frac{m}{2}; \quad (19)$$

$$v(x) \equiv 0, \quad \lambda = \frac{m}{2}. \quad (20)$$

Предварительно докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 3.1. *Для любой абсолютно непрерывной на сегменте $[0, r]$ функции $\varphi = \varphi(x)$, удовлетворяющей условию $\varphi(r) = 0$, имеет место неравенство:*

$$\varphi(x) D_{rx}^{\alpha} \varphi(t) \geq \frac{1}{2} D_{rx}^{\alpha} \varphi^2(t), \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (21)$$

Действительно, если $\varphi(r) = 0$, то по определению имеем

$$D_{rx}^{\alpha} \varphi(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt.$$

Аналогично,

$$D_{rx}^{\alpha} \varphi^2(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^r \frac{2\varphi(t) \varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt.$$

Пользуясь приведенными равенствами, находим

$$\begin{aligned} \varphi(x) D_{rx}^{\alpha} \varphi(t) - \frac{1}{2} D_{rx}^{\alpha} \varphi^2(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^r \frac{\varphi'(t) [\varphi(t) - \varphi(x)]}{(t-x)^{\alpha}} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}} \left(\int_x^t \varphi'(s) ds \right) dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^r \left(\int_x^t \frac{\varphi'(s) \varphi'(t)}{(t-x)^{\alpha}} ds \right) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^r \left(\int_s^r \frac{\varphi'(s) \varphi'(t)}{(t-x)^\alpha} dt \right) ds = \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^r (s-x)^\alpha \frac{\varphi'(s)}{(s-x)^\alpha} \left(\int_s^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^\alpha} dt \right) ds = \\
&= -\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_x^r (s-x)^\alpha \frac{d}{ds} \left[\left(\int_s^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^\alpha} dt \right)^2 \right] ds = \\
&= \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_x^r (s-x)^{\alpha-1} \left(\int_s^r \frac{\varphi'(t)}{(t-x)^\alpha} dt \right)^2 ds \geq 0,
\end{aligned}$$

откуда и вытекает неравенство (21). Лемма доказана.

Рассмотрим теперь интеграл вида

$$I = \int_0^r \tau(x) \nu(x) dx. \quad (22)$$

При $-\frac{m}{2} \leq \lambda < \frac{m}{2}$ из (19) и (22) с учетом (21) приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^r \tau(x) \nu(x) dx = \gamma_1 \int_0^r \tau(x) D_{rx}^{1-\beta} \tau(t) dx \geq \\
&\geq \frac{\gamma_1}{2} \int_0^r D_{rx}^{1-\beta} \tau^2(t) dx = \frac{\gamma_1}{2\Gamma(\beta)} \int_0^r x^{\beta-1} \tau^2(x) dx \geq 0.
\end{aligned} \quad (23)$$

С другой стороны, для соответствующей задаче 1 однородной задачи интеграл (22) с учетом (8) и (9) примет вид:

$$I = \int_0^r \tau(x) \nu(x) dx = - \int_0^r \tau(x) \tau'''(x) dx = -\frac{1}{2} [\tau'(0)]^2 \leq 0. \quad (24)$$

Из неравенств (23) и (24) следует равенство $I = 0$, которое, как следует из (23), может иметь место в том и только в том случае, когда $\tau(x) \equiv 0 \forall x \in [0, r]$. При этом из соотношений (8) и (19) находим, что и $\nu(x) \equiv 0$ для всех $x \in [0, r]$ и любых $\lambda \in [-\frac{m}{2}; \frac{m}{2}]$.

Если же $\lambda = \frac{m}{2}$, то из (8), (9) и (20) приходим к однородной задаче

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(r) = 0, \quad \tau'(r) = 0 \quad (25)$$

для уравнения

$$\tau'''(x) = 0, \quad 0 < x < r. \quad (26)$$

Решение задачи (25) для уравнения (26), как и в случае $\lambda \in [-\frac{m}{2}; \frac{m}{2}]$, не может отличаться от тривиального: $\tau(x) \equiv 0$ и $\nu(x) \equiv 0$ для всех $x \in [0, r]$.

Тогда, как следует из формул (10), (15), (17), в области Ω_1 решение $u(x, y) \equiv 0$ как решение однородной задачи Коши (6), (7) для уравнения (2). А в области Ω_2 однородная задача

$$\begin{aligned} u_{xxx} + u_y &= 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega_2, \\ u(0, y) &= 0, \quad u(r, y) = 0, \quad u_x(r, y) = 0, \quad 0 \leq y < h, \\ u(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq r \end{aligned}$$

будет обладать только нулевым решением $u(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}_2$ [12, с. 144]. Таким образом, $u(x, y) \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \bar{\Omega}$. $\square$

4. Теорема существования

Перейдем к исследованию вопроса о существовании регулярного решения задачи 1. Здесь справедлива следующая

Теорема 4.1. Пусть заданные функции $f(x, y)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$, $\psi(x)$ таковы, что они обладают свойствами

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y) \in C[0, h]; \quad \psi(x) \in C[0, r] \cap C^2(0, r); \quad f(x, y) \in C(\bar{\Omega}_2). \quad (27)$$

Тогда существует регулярное в области Ω решение задачи 1.

Доказательство. Действительно, из полученных выше фундаментальных соотношений (8), (13) и (16), относительно искомых функций $\tau(x)$ и $v(x)$ при $\lambda \in [-\frac{m}{2}; \frac{m}{2})$ приходим к следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \tau'''(x) + v(x) = f(x, 0), \\ v(x) = \gamma_1 D_{rx}^{1-\beta} \tau(t) - \gamma_2 (r-x)^{\beta_2} D_{rx}^{1-\beta_1} \psi(t), \end{cases} \quad (28)$$

откуда относительно искомой функции $\tau(x)$ приходим к задаче нахождения регулярного решения обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка с дробной производной в младших членах вида

$$\tau'''(x) + \gamma_1 D_{rx}^{1-\beta} \tau(t) = f(x, 0) + \gamma_2 (r-x)^{\beta_2} D_{rx}^{1-\beta_1} \psi(t), \quad 0 < x < r, \quad (29)$$

удовлетворяющего условиям (9).

Путем применения оператора D_{rx}^{-3} к обеим частям последнего уравнения, решение уравнения (29) эквивалентным образом редуцируется к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода вида

$$\tau(x) = \frac{\gamma_1}{\Gamma(\beta+2)} \int_x^r (t-x)^{\beta+1} \tau(t) dt + c_1 (r-x)^2 + c_2 (r-x) + c_3 - \frac{1}{2} \int_x^r (t-x)^2 F(t) dt, \quad (30)$$

где $F(x) = f(x, 0) + \gamma_2 x^{\beta_1} D_{0x}^{1-\beta_2} \psi(t)$, а c_1, c_2, c_3 – пока произвольные постоянные.

Функция

$$R(x, t; \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_1^n (t-x)^{n\beta+2n-1}}{\Gamma(n\beta+2n)} = (t-x)^{\beta+1} E_{\frac{1}{\beta+2}} [\gamma_1 (t-x)^{(\beta+2)}; \beta+2],$$

где $E_\rho(z; \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{\Gamma(\rho^{-1}m + \mu)}$ – функция Миттаг-Леффлера [17, с. 117], является резольвентой ядра $K(x, t; \beta) = \frac{(t-x)^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+2)}$ уравнения (30) и с помощью функции $R(x, t; \beta)$ решение уравнения (30) выписывается в следующем виде

$$\begin{aligned} \tau(x) = & c_1 (r-x)^2 + c_2(r-x) + c_3 - \frac{1}{2} \int_x^r (t-x)^2 F(t) dt + \\ & + c_1 \gamma_1 \int_x^r (r-t)^2 R(x, t; \beta) dt + c_2 \gamma_1 \int_x^r (r-t) R(x, t; \beta) dt + c_3 \gamma_1 \int_x^r R(x, t; \beta) dt - \\ & - \frac{\gamma_1}{2} \int_x^r R(x, t; \beta) \int_t^r (s-t)^2 F(s) ds dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Непосредственным вычислением находим, что

$$\begin{aligned} \int_x^r R(x, t; \beta) dt &= (r-x)^{\beta+2} E_{\frac{1}{\beta+2}} [\gamma_1 (r-x)^{(\beta+2)}; \beta+3], \\ \int_x^r (r-t) R(x, t; \beta) dt &= (r-x)^{\beta+3} E_{\frac{1}{\beta+2}} [\gamma_1 (r-x)^{(\beta+2)}; \beta+4], \\ \int_x^r (r-t)^2 R(x, t; \beta) dt &= 2 (r-x)^{\beta+4} E_{\frac{1}{\beta+2}} [\gamma_1 (r-x)^{(\beta+2)}; \beta+5], \\ \int_x^r R(x, t; \beta) \int_t^r (s-t)^2 F(s) ds dt &= 2 \int_x^r (t-x)^{\beta+4} E_{\frac{1}{\beta+2}} [\gamma_1 (t-x)^{(\beta+2)}; \beta+5] F(t) dt. \end{aligned}$$

С учетом приведенных выше вычислений равенство (31) перепишется в следующей форме

$$\begin{aligned} \tau(x) = & \left\{ (r-x)^2 + 2 \gamma_1 (r-x)^{\beta+4} E_{\frac{1}{\beta+2}} [\gamma_1 (r-x)^{(\beta+2)}; \beta+5] \right\} c_1 + \\ & + \left\{ (r-x) + \gamma_1 (r-x)^{\beta+3} E_{\frac{1}{\beta+2}} [\gamma_1 (r-x)^{(\beta+2)}; \beta+4] \right\} c_2 + \\ & + \left\{ 1 + \gamma_1 (r-x)^{\beta+2} E_{\frac{1}{\beta+2}} [\gamma_1 (r-x)^{(\beta+2)}; \beta+3] \right\} c_3 - \\ & - \frac{1}{2} \int_x^r \left\{ (t-x)^2 + 2 \gamma_1 (t-x)^{\beta+4} E_{\frac{1}{\beta+2}} [\gamma_1 (t-x)^{(\beta+2)}; \beta+5] \right\} F(t) dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Удовлетворяя (32) условиям (9), находим:

$$\begin{aligned} c_2 &= -\varphi_3(0), \quad c_3 = \varphi_2(0), \\ c_1 &= \frac{1}{\delta} \left\{ \varphi_1(0) + \gamma_1 \left[1 + r^{\beta+2} E_{\frac{1}{\beta+2}} (\gamma_1 r^{(\beta+2)}; \beta+3) \right] \varphi_2(0) - \right. \end{aligned}$$

$$- \left[r + \gamma_1 r^{\beta+3} E_{\frac{1}{\beta+2}}(\gamma_1 r^{(\beta+2)}; \beta+4) \right] \varphi_3(0) - \\ - \frac{1}{2} \int_0^r \left[t^2 + 2\gamma_1 t^{\beta+4} E_{\frac{1}{\beta+2}}(\gamma_1 t^{(\beta+2)}; \beta+5) \right] F(t) dt \Bigg\},$$

где $\delta = \frac{r^2}{2} + \gamma_1 r^{\beta+4} E_{\frac{1}{\beta+2}}(\gamma_1 r^{(\beta+2)}; \beta+5) > 0$.

Таким образом единственное решение задачи (29), (9) при $\lambda \in [-\frac{m}{2}; \frac{m}{2})$ дается по формуле (32), где значения постоянных c_1, c_2, c_3 определяются по приведенным выше формулам.

При $\lambda = \frac{m}{2}$ из соотношений (8) и (18) с учетом условий (9) находим

$$\tau(x) = \frac{(r-x)^2}{r^2} \varphi_1(0) + \left[1 - \frac{(r-x)^2}{r^2} \right] \varphi_2(0) + \frac{x^2 - rx}{r} \varphi_3(0) - \frac{1}{2} \int_x^r (t-x)^2 f(t,0) dt + \\ + \frac{(r-x)^2}{2r^2} \int_0^r t^2 f(t,0) dt + \frac{(r-x)^2}{2^\beta r^2 (1-\beta)^{(1+\beta)}} \int_0^r [t^2 + 2(1-\beta)t] (r-t)^\beta \psi(t) dt - \\ - 2^{-\beta} (1-\beta)^{-(1+\beta)} \int_x^r [(t-x)^2 + 2(1-\beta)(t-x)] (r-t)^\beta \psi(t) dt.$$

После того, как функция $\tau = \tau(x)$ найдена, вторую искомую функцию $v = v(x)$, в зависимости от значения λ , можно найти из соотношений (8), (13) или (18). Тогда регулярное решение задачи 1 в области Ω_1 определяется как решение задачи Коши (6), (7) для уравнения (2) и выписывается по одной из формул (10), (15) или (17), а в области Ω_2 приходим к начально-краевой задаче (4), (6) для уравнения (2), решение которого выписывается аналогично результатам работы [12, с. 132, 159]. При этом указанный в формуле (27) класс заданных функций $f(x, y)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$, $\psi(x)$ обеспечивают регулярность полученного решения в области Ω . $\square$

Заключение

Сформулирована первая краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка в том смысле, в котором она была сформулирована и исследована Адамом Маремовичем Нахушевым для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа второго порядка. Доказаны теоремы существования и единственности регулярного решения задачи.

Список литературы

1. Стручина Г. М. Задача о сопряжении двух уравнений, *Инженерно-физический журнал*, 1961. Т. 4, № 11, С. 99-104.
2. Золина Л. А. О краевой задаче для модельного уравнения гипербола-параболического типа, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, 1966. Т. 6, № 6, С. 991-1001.
3. Сабитов К. Б. К теории уравнений смешанного парабола-гиперболического типа со спектральным параметром, *Диффееренц. уравнения*, 1989. Т. 25, № 1, С. 117-126.
4. Нахушев А. М. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гипербола-параболического типа, *Диффееренц. уравнения*, 1978. Т. 14, № 1, С. 66-73.
5. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*. М.: Наука, 2006. 287 с.
6. Балкизов Ж. А. Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения, *Владикавказский Математический журнал*, 2016. Т. 18, № 2, С. 19-30.
7. Балкизов Ж. А. Первая краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области гиперболичности, *Уфимский Математический журнал*, 2017. Т. 9, № 2, С. 25-39.
8. Balkizov Zh. A. The first boundary value problem with deviation from the characteristics for a second order parabolic-hyperbolic equation, *Bulletin of the Karaganda University*, 2018. № 2 (90), С. 34-42.
9. Джураев Т. Д., Сопуев А., Мамажанов М. *Краевые задачи для уравнений парабола-гиперболического типа*. Ташкент: Фан, 1986. 220 с.
10. Сабитов К. Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного парабола-гиперболического типа*. М.: Наука, 2016. 272 с.
11. Смирнов М. М. *Уравнения смешанного типа*. М.: Наука, 1970. 296 с.
12. Джураев Т. Д. *Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов*. Ташкент: Фан, 1979. 238 с.
13. Нахушев А. М. *Уравнения математической биологии*. М.: Высшая школа, 1995. 301 с.
14. Смирнов М. М. *Вырождающиеся гиперболические уравнения*. Минск: Вышэйшая школа, 1977. 160 с.
15. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
16. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
17. Джрбашян М. М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости*. М.: Наука, 1966. 672 с.

Информация об авторе



Балкизов Жираслан Анатольевич✉ – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела уравнений смешанного типа, Института прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия,
 ID ORCID 0000-0001-5329-7766.

References

- [1] Struchina G. M. Zadacha o sopryazhenii dvukh uravnenij. Inzhenerno-fizicheskij zhurnal. 1961. vol. 4. no. 11. pp. 99-104 (in Russian)
- [2] Zolina L. A. Boundary value problem for the model equation of the hyperbolic-parabolic type. U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1966. vol. 6. no. 6, pp. 63-78.
- [3] Sabitov K. B. On the theory of equations of mixed parabolic-hyperbolic type with a spectral parameter. Differ. Equ. 1989. vol. 25. no. 1. pp. 93-100.
- [4] Nakhushev A. M. On the theory of linear boundary value problems for a second order equation of mixed hyperbolic-parabolic type. Dif. Ur. 1978. vol. 14. no. 1. 66-73 (in Russian)
- [5] Nakhushev A. M. Zadachi so smeshcheniem dlya uravnenij v chastnykh proizvodnykh [Shift problems for partial differential equations]. Moscow. Nauka. 2006, 287 p. (in Russian)
- [6] Balkizov Zh. A. The first boundary value problem for a hyperbolic equation degenerating inside a domain. Vladikav. Matemat. Zhurnal. 2016. vol. 18. no. 2. pp. 19-30. DOI: 10.23671/VNC.2016.2.5915 (in Russian)
- [7] Balkizov Zh. A. Dirichlet boundary value problem for a third order parabolic-hyperbolic equation with degenerating type and order in the hyperbolicity domain. Ufa Math. J. 2017. vol. 9. no. 2. pp. 25-39. DOI:10.13108/2017-9-2-25.
- [8] Balkizov Zh. A. The first boundary value problem with deviation from the characteristics for a second order parabolic-hyperbolic equation. Bulletin of the Karaganda University. 2018. no. 2(90). pp. 34-42. DOI: 10.31489/2018m2/34-42.
- [9] Dzhuraev T. D., Sopuev A., Mamazhanov M. Kraevye zadachi dlya uravnenij parabologiperbolicheskogo tipa [Boundary value problems for parabolic-hyperbolic equations]. Tashkent. Fan. 1986. 220 p. (in Russian)
- [10] Sabitov K. B. Pryamyie i obratnye zadachi dlya uravnenij smeshannogo parabologiperbolicheskogo tipa [Direct and inverse problems for equations of mixed parabolic-hyperbolic type]. Moscow. Nauka. 2016. 272 p. (in Russian)
- [11] Smirnov M. M. Uravneniya smeshannogo tipa [Mixed type equations]. Moscow. Nauka. 1970. 296 p. (in Russian)
- [12] Djuraev T. D. Kraevye zadachi dlya uravnenij smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov [Boundary value problems for equations of mixed and mixed-composite types]. Tashkent. Fan. 1979. 238 p. (in Russian)
- [13] Nakhushev A. M. Uravneniya matematicheskoy biologii [Equations of Mathematical Biology]. Moscow. Visshaya shkola. 1995. 301 p. (in Russian)
- [14] Smirnov M. M. Vyrozhdayushchiesya giperbolicheskie uravneniya [Degenerate hyperbolic equations]. Minsk. Visheishaya shkola. 1977. 160 p. (in Russian)
- [15] Nakhushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego primeneniye [Fractional calculus and its applications]. Moscow. Fizmatlit. 2003. 272 p. (in Russian)
- [16] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk. Nauka i tekhnika. 1987. 688 p. (in Russian)
- [17] Djrbashyan M. M. Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funkciy v kompleksnoj ploskosti [Integral transforms and representations of functions in the complex plane]. Moscow. Nauka. 1966. 672 p. (in Russian)

Information about the author



Balkizov Zhiraslan Anatolevich ✉ – Ph. D. (Phys. & Math.), Leading Researcher, Dep. of Mixed Type Equations, Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russia,  ORCID 0000-0001-5329-7766.



Bitsadze-Samarskii Type Problem for the Diffusion Equation and Degenerate Hyperbolic Equation

M. Kh. Ruziev^{*1}, *R. T. Zunnunov*², *N. T. Yuldasheva*¹, *G. B. Rakhimova*³

¹ V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, 100174, Tashkent, University street, 9, Uzbekistan

² Branch of the Russian State University of Oil and Gas (NRU) named after I.M. Gubkin in Tashkent, 100125, Tashkent, Durmon yuli street, 34, Uzbekistan

³ Fergana State University, 150100, Fergana, Murabbiylar street, 19, Uzbekistan

Abstract. A boundary value problem of the Bitsadze-Samarskii type is studied in the article for a fractional-order diffusion equation and a degenerate hyperbolic equation with singular coefficients at lower terms in an unbounded domain. The article considers a mixed domain where the parabolic part of the domain under consideration coincides with the upper half-plane and the hyperbolic part is bounded by two characteristics of the equation under consideration and a segment of the abscissa axis. The uniqueness of the solution to the problem under consideration is proven by the method of energy integrals. The existence of a solution to the problem under consideration is reduced to the concept of solvability of a fractional-order differential equation. An explicit form of the solution to the modified Cauchy problem is given in the hyperbolic part of the mixed domain under consideration. Using this solution, due to the boundary condition of the problem, the main functional relationship between the traces of the unknown function brought to the interval of the degeneracy line of the equation is obtained. Further, using the representation of the solution of the diffusion equation of fractional order, the second main functional relationship between the traces of the sought-for function on the interval of the abscissa axis from the parabolic part of the considered mixed domain is obtained. Through the conjugation condition of the problem under study, an equation with fractional derivatives is obtained from two functional relationships by eliminating one unknown function; its solution is written out in explicit form. In the study of the boundary value problem, generalized fractional integro-differentiation operators with the Gauss hypergeometric function are employed. The properties of the Wright and Mittag-Leffler type functions are extensively utilized in the study.

Key words: boundary value problem, diffusion equation, degenerate hyperbolic equation, Gauss hypergeometric function, Wright function, uniqueness of the solution to the problem, existence of a solution to the problem.

Received: 16.09.2024; Revised: 23.09.2024; Accepted: 27.10.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Ruziev M. Kh., Zunnunov R. T., Yuldasheva N. T., Rakhimova G. B. Bitsadze-Samarskii type problem for the diffusion equation and degenerate hyperbolic equation. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 48: 3, 33-42. EDN: GCWUEC. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-33-42>

Funding. The first author is supported by the Grant of the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan No. F-FA-2021-424.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:**  E-mail: mruziev@mail.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Ruziev M. Kh., Zunnunov R. T., Yuldasheva N. T., Rakhimova G. B., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)





Задача типа Бицадзе-Самарского для уравнения диффузии и вырождающегося гиперболического уравнения

*М. Х. Рузиев^{*1}, Р. Т. Зуннунов², Н. Т. Юлдашева¹, Г. Б. Рахимова³*

¹ Институт математики им. В. И. Романовского Академии наук Узбекистана, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 9, Узбекистан

² Филиал Российского государственного университета нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина в г. Ташкенте, 100125, г. Ташкент, улица Дурмон йули, 34, Узбекистан

³ Ферганский государственный университет, 150100, г. Фергана, улица Мураббийлар, 19, Узбекистан

Аннотация. В статье изучается краевая задача типа Бицадзе-Самарского для дробного уравнения диффузии и вырождающегося гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами при младших членах в неограниченной области. В статье рассматривается смешанная область, в которой параболическая часть рассматриваемой области совпадает с верхней полуплоскостью, а гиперболическая часть ограничена двумя характеристиками рассматриваемого уравнения и отрезком оси абсцисс. Единственность решения рассматриваемой задачи доказывается методом интегралов энергии. Существование решения рассматриваемой задачи сводится к понятию разрешимости дробного дифференциального уравнения. Приводится явный вид решения модифицированной задачи Коши в гиперболической части рассматриваемой смешанной области. С помощью этого решения в силу граничного условия задачи получена основная функциональная связь между следами неизвестной функции, приведенными на интервал линии вырождения уравнения. Далее, используя представление решения уравнения диффузии дробного порядка, получено второе основное функциональное соотношение между следами искомой функции на отрезке оси абсцисс из параболической части рассматриваемой смешанной области. Через условие сопряжения исследуемой задачи из двух функциональных соотношений путем исключения одной неизвестной функции получено уравнение с дробными производными, решение которого выписано в явном виде. При исследовании краевой задачи используются обобщенные операторы дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса. При исследовании широко используются свойства функций типа Райта и Миттаг-Леффлера.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение диффузии, вырожденное гиперболическое уравнение, гипергеометрическая функция Гаусса, функция Райта, единственность решения задачи, существование решения задачи

Получение: 16.09.2024; Исправление: 23.09.2024; Принятие: 27.10.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Ruziev M. Kh., Zunnunov R. T., Yuldasheva N. T., Rakhimova G. B. Bitsadze-Samarskii type problem for the diffusion equation and degenerate hyperbolic equation // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 33-42. EDN: GCWUEC. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-33-42>.

Финансирование. Первый автор поддержан грантом Министерства высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан № Ф-ФА-2021-424.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** ✉ E-mail: mruziev@mail.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Ruziev M. Kh., Zunnunov R. T., Yuldasheva N. T., Rakhimova G. B., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)



Introduction and problem statement

Fractal theory explains the structure of disordered media, like porous materials, and the processes that take place within them. A fractional-order differential equation is used to describe the movement of a substance in a uniform fluid flow [1]. The topic of fractional-order diffusion is covered in [2]. Fractional-order differential equations come up in various areas, such as classical mechanics (inverse problems), heat conduction (heat flow dynamics), diffusion (electrochemical analysis of electrode surfaces), and in the study of stochastic transport processes. Problems involving fluid filtration in highly porous (fractal) media often require studying boundary value problems for fractional-order partial differential equations. Boundary value problems for the fractional-order diffusion equation were explored in [3–6]. A certain family of generalized derivatives of the Riemann–Liouville operators $D_{a+}^{\alpha,\beta}$ of orders α and β was studied in [7]. Applications of this operator are given in [8]. The unique solvability of the problem for a partial fractional derivative equation of the Riemann–Liouville type with a boundary condition containing a generalized fractional integro-differentiation operator is investigated in [9–11]. Reference [12] studies an analog of the Bitsadze–Samarskii type problem for a mixed-type partial fractional derivative equation in an unbounded domain.

Let us consider a partial differential equation of the second order

$$\begin{cases} u_{xx} - D_{0+,y}^{\gamma} u = 0, & y > 0, 0 < \gamma < 1, \\ -(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\alpha_0}{(-y)^{1-\frac{m}{2}}} u_x + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

where $D_{0+,y}^{\gamma}$ is the partial fractional Riemann-Liouville derivative of order γ ($0 < \gamma < 1$) of function $u(x, y)$ for the second variable [13] in domain $D = D^+ \cup D^- \cup I$, where D^+ is the half-plane $y > 0$, D^- is a finite domain of the half-plane $y < 0$, bounded by characteristics OC and BC of equation (1) emanating from point $O(0, 0)$ and $B(1, 0)$ and segment OB of the straight line $y = 0$, $I = \{(x, y) : 0 < x < 1, y = 0\}$. In equation (1) m, α_0, β_0 are some real numbers satisfying conditions $m > 0, |\alpha_0| < \frac{m+2}{2}, -\frac{m}{2} < \beta_0 < 1$.

Let us introduce the following notation: $\Theta(x) = \left(\frac{x}{2}; -\left(\frac{m+2}{4}x\right)^{\frac{m+2}{2}}\right)$ is the intersection point of the characteristic of equation (1) emanating from point $(x, 0)$ ($x \in I$), with characteristic OC, $I_{0+}^{\sigma,\delta,\eta}$ is the operator of generalized fractional integro-differentiation with the Gauss hypergeometric function $F(a, b, c; z)$ introduced by M.A. Saigo [14] and having the following form for real σ, δ, η and $x > 0$

$$(I_{0+}^{\sigma,\delta,\eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\sigma-\delta}}{\Gamma(\sigma)} \int_0^x (x-t)^{\sigma-1} F\left(\sigma+\delta, -\eta, \sigma; 1-\frac{t}{x}\right) f(t) dt, & (\sigma > 0), \\ \frac{d^n}{dx^n} (I_{0+}^{\sigma+n,\delta-n,\eta-n} f)(x), & (\sigma \leq 0, n = [-\sigma] + 1). \end{cases} \quad (2)$$

In particular [14],

$$(I_{0+}^{0,0,\eta} f)(x) = f(x), \quad (I_{0+}^{\sigma,-\sigma,\eta} f)(x) = (I_{0+}^{\sigma} f)(x),$$

$$(I_{0+}^{-\sigma, \sigma, \eta} f)(x) = (D_{0+}^{\sigma} f)(x), \quad (3)$$

where $(I_{0+}^{\sigma} f)(x)$ and $(D_{0+}^{\sigma} f)(x)$ are the Riemann–Liouville fractional integration and differentiation operators of order $\sigma > 0$.

Problem 1. Find in domain D solution $u = u(x, y)$ to equation (1) satisfying the following conditions:

$$y^{1-\gamma} u|_{y=0} = 0, \quad (-\infty < x \leq 0, 1 \leq x < \infty), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} A_1 \left(I_{0+}^{a, b, \beta-1-a} u[\Theta_0(t)] \right)(x) + A_2 \left(I_{0+}^{a+1, b-1+\alpha, \beta-1-a} \lim_{y \rightarrow 0-} (-y)^{\beta_0} u_y(t, y) \right)(x) + \\ + A_3 \left(I_{0+}^{\gamma+a+\alpha, b-\gamma, \beta-1-a} \lim_{y \rightarrow 0-} (-y)^{\beta_0} u_y(t, y) \right)(x) = g(x), \end{aligned} \quad (5)$$

and the conjugation conditions

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\gamma} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} u(x, y), \quad \forall x \in \bar{I}, \quad (6)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\gamma} (y^{1-\gamma} u(x, y))_y = \lim_{y \rightarrow 0-} (-y)^{\beta_0} u_y(x, y), \quad \forall x \in I. \quad (7)$$

Here $\alpha = \frac{m+2(\beta_0+\alpha_0)}{2(m+2)}$, $\beta = \frac{m+2(\beta_0-\alpha_0)}{2(m+2)}$, $0 < \alpha, \beta < \frac{1}{2}$, A_1, A_2, A_3 are real constants such that $A_1 > 0, A_2 \leq 0, A_3 \leq 0$ or $A_1 < 0, A_2 \geq 0, A_3 \geq 0$, a, b, γ are real numbers, $g(x)$ is a given function such that $g(x) \in C^1(\bar{I}) \cap C^2(I)$. We will seek solution $u(x, y)$ to the problem the class of twice differentiable functions in domain D such that $u(x, y)$ tends to zero as $(x^2 + y^2) \rightarrow \infty$,

$$y^{1-\gamma} u(x, y) \in C(\overline{D^+}), \quad u(x, y) \in C(\overline{D^-}),$$

$$y^{1-\gamma} (y^{1-\gamma} u(x, y))_y \in C(D^+ \cup I),$$

$$u_{xx} \in C(D^+ \cup D^-), \quad u_{yy} \in C(D^-).$$

Note that nonlocal boundary value problems for equation (1) in unbounded and bounded domains were studied in [15], [16], [17], and for equation (1) for $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$ problems were considered in [9, 11]. In works [18], [19] nonlocal problems with shift on conjugation of two hyperbolic equations of the second order, consisting of a wave equation in one part of the domain and a degenerate hyperbolic equation of the first kind in the other part, are studied.

Uniqueness of the solution to the problem

Theorem 1. Let condition $g(x) \equiv 0$ be satisfied. Then the problem cannot have more than one solution.

Proof. Let there be a solution to the problem. We introduce the following notation

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\gamma} u(x, y) = \tau_1(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0-} u(x, y) = \tau_2(x), \quad (8)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\gamma} (y^{1-\gamma} u(x, y))_y = v_1(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0-} (-y)^{\beta_0} u_y(x, y) = v_2(x). \quad (9)$$

It is known [5] that the solution to equation (1) in domain D^+ satisfying condition (4) and condition

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\gamma} u(x, y) = \tau_1(x), \quad \forall x \in \bar{I}$$

is given by the following formula

$$u(x, y) = \int_0^1 G(x, y, t) \tau_1(t) dt, \quad (10)$$

where

$$G(x, y, t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2} y^{\frac{\gamma}{2}-1} e_{1, \frac{\gamma}{2}}^{1, \frac{\gamma}{2}} \left(-|x - t| y^{-\frac{\gamma}{2}} \right),$$

$$e_{\mu, \delta}^{\zeta, \xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\zeta n + \mu) \Gamma(\delta - \xi n)}, \quad \zeta > \xi, \quad \zeta > 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

is the Wright-type function [6].

By (10), the functional relationship between $\tau_1(x)$ and $v_1(x)$ brought the parabolic part D^+ to the line $y = 0$, following form [20]

$$v_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \tau_1''(x). \quad (11)$$

Let us find the functional relationship between $\tau_2(x)$ and $v_2(x)$ brought to the line $y = 0$ from the hyperbolic part D^- of domain D .

The solution to the modified Cauchy problem (8)-(9) in domain D^- has the following form [15], [21]

$$u(x, y) = \gamma_1 \int_0^1 \tau_2 \left(x + \frac{2}{m+2} (2t-1)(-y)^{\frac{m+2}{2}} \right) t^{\beta-1} (1-t)^{\alpha-1} dt + \\ + \gamma_2 (-y)^{1-\beta_0} \int_0^1 v_2 \left(x + \frac{2}{m+2} (2t-1)(-y)^{\frac{m+2}{2}} \right) t^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} dt, \quad (12)$$

$$\text{rAe } \gamma_1 = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, \quad \gamma_2 = -\frac{2\Gamma(1-\alpha-\beta)}{(m+2)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)}.$$

From formula (12) and relation (2) we obtain

$$u[\theta(x)] = \gamma_1 \Gamma(\alpha) (I_{0+}^{\alpha, 0, \beta-1} \tau_2)(x) + \gamma_2 \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-\alpha-\beta} \Gamma(1-\beta) (I_{0+}^{1-\beta, \alpha+\beta-1, \beta-1} v_2)(x). \quad (13)$$

Substituting (13) into the boundary condition (5), in view of (8) and (9) and applying the following relation [14]

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} I_{0+}^{\gamma, \delta, \alpha+\eta} f)(x) = (I_{0+}^{\alpha+\gamma, \beta+\delta, \eta} f)(x), \quad (\gamma > 0), \quad (14)$$

we obtain

$$\begin{aligned} A_1 \gamma_1 \Gamma(\alpha) \left(I_{0+}^{\alpha+a, b, \beta-1-a} \tau_2 \right) (x) + \\ + A_1 \gamma_2 \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-\alpha-\beta} \Gamma(1-\beta) \left(I_{0+}^{a+1-\beta, b+\alpha+\beta-1, \beta-1-a} \nu_2 \right) (x) + \\ + A_2 \left(I_{0+}^{a+1, b+\alpha-1, \beta-1-a} \nu_2 \right) (x) + A_3 \left(I_{0+}^{\gamma+a-\alpha, b-\gamma, \beta-1-a} \nu_2 \right) (x) = g(x). \end{aligned} \quad (15)$$

where $k_1 = A_1 \gamma_1 \Gamma(\alpha)$, $k_2 = A_1 \gamma_2 \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-\alpha-\beta} \Gamma(1-\beta)$. We apply operator $I_{0+}^{-\alpha-a, -b, \alpha+\beta-1}$ to both sides of equality (15). Direct calculations using formulas (14) and (3) show that

$$\tau_2(x) = -k_1 \left(I_{0+}^{1-\alpha-\beta} \nu_2 \right) (x) - k_2 \left(I_{0+}^{1-\alpha} \nu_2 \right) (x) - k_3 \left(I_{0+}^{\gamma} \nu_2 \right) (x) + g_1(x), \quad (16)$$

where

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\gamma_2 \left(\frac{m+2}{4} \right)^{1-\alpha-\beta} \Gamma(1-\beta)}{\gamma_1 \Gamma(\alpha)}, \quad k_2 = \frac{A_2}{A_1 \gamma_1 \Gamma(\alpha)}, \\ k_3 &= \frac{A_3}{A_1 \gamma_1 \Gamma(\alpha)}, \quad g_1(x) = \frac{1}{A_1 \gamma_1 \Gamma(\alpha)} \left(I_{0+}^{-a-\alpha, -b, \alpha+\beta-1} g \right) (x). \end{aligned}$$

Let us estimate the integral

$$K = \int_0^1 \tau_2(x) \nu_2(x) dx.$$

By virtue of the conjugation conditions (6), (7) and relation (11), we have

$$K = \frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \int_0^1 \tau_1(x) \tau_1''(x) dx.$$

Integrating by parts and assuming that $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$, we obtain

$$K = -\frac{1}{\Gamma(1+\gamma)} \int_0^1 [\tau_1'(x)]^2 dx \leq 0. \quad (17)$$

Now we find a lower bound for the integral K . For $g(x) = 0$, equality (16) takes the following form

$$\begin{aligned} \tau_2(x) &= -k_1 \left(I_{0+}^{1-\alpha-\beta} \nu_2 \right) (x) - k_2 \left(I_{0+}^{1-\alpha} \nu_2 \right) (x) - k_3 \left(I_{0+}^{\gamma} \nu_2 \right) (x) = \\ &= -\frac{k_1}{\Gamma(1-\alpha-\beta)} \int_0^x \nu_2(t) (x-t)^{-\alpha-\beta} dt - \frac{k_2}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \nu_2(t) (x-t)^{-\alpha} dt - \\ &\quad - \frac{k_3}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x \nu_2(t) (x-t)^{\gamma-1} dt, \end{aligned}$$

and, therefore,

$$K = -\frac{k_1}{\Gamma(1-\alpha-\beta)} \int_0^1 v_2(x) dx \int_0^x (x-t)^{-\alpha-\beta} v_2(t) dt - \\ -\frac{k_2}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 v_2(x) dx \int_0^x (x-t)^{-\alpha} v_2(t) dt - \frac{k_3}{\Gamma(\gamma)} \int_0^1 v_2(x) dx \int_0^x (x-t)^{\gamma-1} v_2(t) dt.$$

Next, we use the well-known formula for the gamma function $\Gamma(\sigma)$ [22]

$$\int_0^\infty s^{\sigma-1} \cos(ks) ds = \frac{\Gamma(\sigma)}{k^\sigma} \cos\left(\frac{\sigma\pi}{2}\right), \quad (k > 0, \quad 0 < \sigma < 1).$$

Assuming that $k = |x - t|$, $\sigma = \alpha + \beta$, we obtain

$$|x - t|^{-\alpha-\beta} = \\ = \frac{1}{\Gamma(\alpha + \beta) \cos(\frac{\pi(\alpha+\beta)}{2})} \int_0^\infty s^{\alpha+\beta-1} \cos(s |x - t|) ds, \quad (0 < \alpha + \beta < 1),$$

for $k = |x - t|$, $\sigma = \alpha$ we obtain

$$|x - t|^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} \int_0^\infty s^{\alpha-1} \cos(s |x - t|) ds,$$

for $k = |x - t|$, $\sigma = 1 - \gamma$ we obtain

$$|x - t|^{\gamma-1} = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma) \cos(\frac{\pi(1-\gamma)}{2})} \int_0^\infty s^{-\gamma} \cos(s |x - t|) ds.$$

Applying these formulas and the Dirichlet formula for the permutation of the order of integration in the repeated, we arrive at the following relation

$$K = -\frac{2k_1 \sin(\frac{\pi(\alpha+\beta)}{2})}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha+\beta-1} \left[\left(\int_0^1 v_2(x) \cos(sx) dx \right)^2 + \left(\int_0^1 v_2(x) \sin(sx) dx \right)^2 \right] ds - \\ - \frac{2k_2 \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{\pi} \int_0^\infty s^{\alpha-1} \left[\left(\int_0^1 v_2(x) \cos(sx) dx \right)^2 + \left(\int_0^1 v_2(x) \sin(sx) dx \right)^2 \right] ds - \\ - \frac{2k_3 \sin \frac{(1-\gamma)\pi}{2}}{\pi} \int_0^\infty s^{-\gamma} \left[\left(\int_0^1 v_2(x) \cos(sx) dx \right)^2 + \left(\int_0^1 v_2(x) \sin(sx) dx \right)^2 \right] ds \geq 0. \quad (18)$$

From (17) and (18), it follows that $K = 0$, and, consequently, according to (17)

$$\int_0^1 [\tau_1(x)]^2 dx = 0.$$

Hence, by virtue of equalities $\tau_1(0) = \tau_1(1) = 0$, we obtain $\tau_1(x) = 0$ for all $x \in \bar{I}$.

Thus, according to formula (10), makes it possible to assert that $u(x, y) \equiv 0$ in domain $\bar{D}^+$.

By virtue of the conjugation condition (6) $\tau_2(x) \equiv \tau_1(x)$ and so $\tau_2(x) \equiv 0 \forall x \in [0, 1]$, and by virtue of (7), (9), (11), also $v_1(x) \equiv 0 \forall x \in [0, 1]$. Then $u(x, y) \equiv 0$ in the domain $\bar{D}^-$ as a solution to the modified Cauchy problem with zero data, which proves the uniqueness of the solution to the original problem. $\square$

Existence of a solution to the problem

Theorem 2. *Let conditions $\alpha > \max\{-\alpha, \beta - 1\}$, $\gamma > 1 - \beta$ be satisfied. Then the solution to the problem exists.*

Proof. Differentiate both sides of relation (16) with respect to x twice:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \tau_2(x) = & -k_1 \frac{d^2}{dx^2} \left(I_{0+}^{1-\alpha-\beta} v_2 \right) (x) - k_2 \frac{d^2}{dx^2} \left(I_{0+}^{1-\alpha} v_2 \right) (x) - k_3 \frac{d^2}{dx^2} \left(I_{0+}^{\gamma} v_2 \right) (x) + \\ & + \frac{d^2}{d(x)^2} g_1(x), \end{aligned}$$

or (assuming that $\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$, $v_1(x) = v_2(x) = v(x)$)

$$\left(D_{0+}^{1+\alpha+\beta} v \right) (x) - \lambda \left(D_{0+}^{1+\alpha} v \right) (x) - \delta \left(D_{0+}^{2-\gamma} v \right) (x) - \mu v(x) = g_2(x), \quad (19)$$

where $\lambda = -\frac{k_2}{k_1}$, $\delta = -\frac{k_3}{k_1}$, $\mu = -\frac{\Gamma(1+\gamma)}{k_1}$, $g_2(x) = \frac{1}{k_1} g_1''(x)$. In the monograph [23], the equation with fractional derivatives is considered

$$\left(D_{0+}^{\alpha} y \right) (x) - \lambda \left(D_{0+}^{\beta} y \right) (x) - \delta \left(D_{0+}^{\gamma} y \right) (x) - \mu y(x) = f(x),$$

where $x > 0$, $\alpha > \beta > \gamma > 0$, $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{R}$, $l-1 < \alpha \leq l$, $l \in \mathbb{R}$, and its solution is written out in the following form

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} G_{\gamma, \beta, \alpha; \lambda}(x-t) f(t) dt.$$

Here

$$\begin{aligned} G_{\gamma, \beta, \alpha; \lambda}(z) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+v=n} \right) \frac{\mu^i \delta^v}{i! v!} z^{(\alpha-\beta)n + \beta i - (\beta-\gamma)v} \times \\ & \times {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ \left((\alpha-\beta)n + \beta i + \alpha + (\beta-\gamma)v, \alpha-\beta \right) \end{matrix} \middle| \lambda z^{\alpha-\beta} \right]. \\ {}_p\Psi_q(z) = & \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_k = \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i k)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{1}{k!}, \quad (k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \dots\}), \\ & z, a_i, b_j \in \mathbb{C}, \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q}. \end{aligned}$$

For equation (19), this solution takes the following form

$$v(x) = \int_0^x (x-t)^{\alpha+\beta} G_{2-\alpha, 1+\alpha, 1+\alpha+\beta; \lambda}(x-t) g_2(t) dt,$$

$$G_{2-\alpha, 1+\alpha, 1+\alpha+\beta; \lambda}(x-t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i+v=n} \right) \frac{\mu^i \delta^v}{i!v!} (x-t)^{\beta n + (1+\alpha)i - (\alpha+\gamma-1)v} \times$$

$$\times {}_1\Psi_1 \left[\begin{matrix} (n+1, 1) \\ (\beta n + (1+\alpha)i + (1+\alpha+\beta) + (\alpha+\gamma-1)v, \beta) \end{matrix} \middle| \lambda (x-t)^{\beta} \right].$$

This completes the proof of the existence of a solution to the original problem. $\square$

Conclusion

The article investigated a nonlocal boundary value problem for a fractional diffusion equation and a degenerate hyperbolic equation in an unbounded domain. The main results obtained are new. We can use these results to investigate various boundary value problems for differential equations with a partial fractional derivative.

References

1. Nigmatullin R. R. The realization of generalized transfer equation in a medium with fractal geometry, *Phys. Status solidi*, 1986. vol. 133, pp. 425–430 (In Russian).
2. Kochubey A. N. Fractional order diffusion, *Differential equations*, 1990. vol. 26, no. 4, pp. 660–670 (In Russian).
3. Gekkieva S. Kh. On one analog of the Tricomi problem for a mixed-type equation with a fractional derivative, *Reports of the AMAN*, 2001. vol. 5, no. 2, pp. 18–22 (In Russian).
4. Gekkieva S. Kh. The Cauchy problem for a generalized transport equation with a fractional time derivative, *Reports of the AMAN*, 2000. vol. 5, no. 1, pp. 16–19 (In Russian).
5. Kilbas A. A., Repin O. A. Analog of the Bitsadze-Samarskii problem for a mixed-type equation with a fractional derivative, *Differential Equations*, 2003. vol. 39, no. 5, pp. 638–644 (In Russian).
6. Pskhu A. V. Solution of boundary value problems for a fractional-order diffusion equation by the Green's function method, *Differential Equations*, 2003. vol. 39, no. 10, pp. 1430–1433 (In Russian).
7. Tomovski Z., Hilfer R., Srivastava H. M. Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag-Leffler type functions, *Trans. and Special functions*, 2010. vol. 21, no. 11, pp. 797–814 DOI:10.1080/10652461003675737.
8. Hilfer R. Experimental evidence for fractional time evolution in glass forming materials, *Chemical Phys.*, 2002. vol. 284, no. 1-2, pp. 399–408.
9. Repin O. A., Frolov A. A. On a boundary value problem for an equation of mixed type with a Riemann–Liouville fractional partial derivative, *Differential Equations*, 2016. vol. 52, no. 10, pp. 1384–1388 DOI: 10.1134/S0012266116100165.
10. Kilbas A. A., Repin O. A. An analogue of the Bitsadze-Samarskiy problem for a mixed-type equation with a fractional derivative, *Differential Equations*, 2003. vol. 39, no. 10, pp. 1430–1433.
11. Repin O. A. Boundary value problem for a differential equation with a partial fractional Riemann–Liouville derivative, *Ufa Mathematical Journal*, 2015. vol. 7, no. 3, pp. 70–75 (In Russian).
12. Zunnunov R. T. Analog of Bitsadze-Samarskii problem for a mixed-type equation with a fractional derivative an unbounded domain, *Uzbek Mathematical Journal*, 2023. vol. 67, no. 3, pp. 189–195.
13. Samko S. G., Kilbas A. A., Repin O. A. *Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications*. Minsk: Science and Technology, 1987. 688 pp. (In Russian)
14. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function, *Math. Rep. Kyushu Univ.*, 1978. vol. 11, no. 2, pp. 135–143.

15. Ruziev M. Kh. A boundary value problem for a partial differential equation with fractional derivative, *Fractional calculus and Applied Analysis*, 2021. vol. 24, no. 2, pp. 509–517 DOI:10.1515/fca-2021-0022.
16. Ruziev M. Kh., Rakhimova G. B. On a boundary value problem for a differential equation with a partial fractional derivative, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2023. vol. 6, no. 2, pp. 114–121 (In Russian).
17. Ruziev M. Kh., Zunnunov R. T. On a nonlocal problem for mixed-type equation with partial Riemann-Liouville fractional derivative, *Fractal Fractional*, 2022. vol. 6, no. 2, pp. 110 DOI:10.3390/fractalfract6020110.
18. Balkizov Zh. A. Boundary value problems with data on opposite characteristics for a second-order mixed-hyperbolic equation., *Adyghe Inst. Sci. J.*, 2023. vol. 23, no. 1, pp. 11-19 DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-1-11-19 (In Russian).
19. Balkizov Zh. A. Nonlocal problems with displacement for matching two second order hyperbolic equations., *Ufa Mathematical Journal*, 2023. vol. 15, no. 2, pp. 9-19 DOI: 10.13108/2023-15-2-9.
20. Gekkieva S. Kh. Analog of the Tricomi problem for a mixed-type equation with a fractional derivative, *Izv. Kabardino-Balkarian Sci. center*, 2001. vol. 2, no. 7, pp. 78–80 (In Russian).
21. Ruziev M. Kh., Yuldasheva N. T. On a boundary value problem for a mixed type equations with a partial fractional derivative, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022. vol. 43, no. 11, pp. 3264–3270 DOI: 10.1134/S1995080222140293.
22. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. *Integrals and series*. Moscow: Nauka, 2003. 688 pp. (In Russian)
23. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo Y. Y. *Theory and applications of fractional differential equations*. Amsterdam-Boston. Tokio: North Holland. Math. Studies, 2006. 204 pp.

Information about the authors



Ruziev Menglibay Kholtozhibayevich ✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Senior Researcher, Leading Researcher, V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0002-1097-0137.



Zunnunov Rakhimjon Temirbekovich ✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Senior Researcher, Senior Lecturer, Branch of the Russian State University (National Research University) named after I.M. Gubkin in Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0001-9392-5464.



Yuldasheva Nargiza Takhirjonovna ✉ – Basic Doctoral Candidate, V.I. Romanovsky Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0001-6921-5374.



Rakhimova Gulkhayo Botirjon kizi ✉ – Applicant, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan, ORCID 0009-0002-3090-8442.

МАТЕМАТИКА

 <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55>

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.926



Задача Коши для уравнения дробного порядка с инволюцией

*Л. М. Энеева**

Институт прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского
научного центра РАН, 360000, Нальчик, ул. Шортанова, д. 89 А, Россия

Аннотация. В работе рассматривается линейное обыкновенное дифференциальное уравнение с производной дробного порядка, которое содержит оператор инволюции в подчиненном слагаемом. Рассматриваемое уравнение является модельным и относится к классу дифференциальных уравнений, к необходимости исследовать которые приводит изучение краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка, содержащих композицию лево- и правосторонних операторов дробного дифференцирования. Последние возникают при моделировании различных физических и геофизических процессов, и, в частности, имеет важное значение при описании диссипативных колебательных систем. Для рассматриваемого уравнения исследуется начальная задача в единичном интервале. Основным результатом работы – теорема существования и единственности решения изучаемой задачи. В терминах ограничений на коэффициент и правую часть рассматриваемого уравнения сформулированы достаточные условия, обеспечивающие однозначную разрешимость исследуемой задачи. Построено фундаментальное решение, получены его различные представления, изучены его основные свойства. В терминах фундаментального решения найдено явное представление решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: уравнение дробного порядка, задача Коши, производная Римана–Лиувилля, инволюция, фундаментальное решение.

Получение: 01.11.2024; Исправление: 08.11.2024; Принятие: 18.11.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Энеева Л. М. Задача Коши для уравнения дробного порядка с инволюцией // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 43-55. EDN: RHKXQA. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55>.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМА КВНЦ РАН (рег. № 122041800015-8).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция:  E-mail: eneeva72@list.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Энеева Л. М., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)





Cauchy Problem for Fractional Order Equation with Involution

*L. M. Eneeva**

Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkarian Scientific Center RAS,
360000, Nalchik, Shortanova st., 89 A, Russia

Abstract. The paper considers a linear ordinary differential equation with a fractional derivative that contains an involution operator in the subordinate term. The equation under consideration is a model equation and belongs to the class of differential equations that need to be investigated due to the study of boundary value problems for fractional differential equations containing a composition of left- and right-hand fractional differentiation operators. The latter arise when modeling various physical and geophysical processes and, in particular, are of great importance when describing dissipative oscillatory systems. For the equation under consideration, the initial value problem in a unit interval is investigated. The main result of the paper is a theorem of existence and uniqueness of a solution to the problem under consideration. Sufficient conditions that ensure unique solvability of the problem under consideration are formulated in terms of constraints on the coefficient and the right-hand side of the equation under consideration. A fundamental solution is constructed, its various representations are obtained, and its main properties are studied. An explicit representation of the solution to the problem under consideration is found in terms of the fundamental solution.

Key words: fractional equation, Cauchy problem, Riemann-Liouville derivative, involution, fundamental solution.

Received: 01.11.2024; Revised: 08.11.2024; Accepted: 18.11.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Eneeva L. M. Cauchy problem for fractional order equation with involution. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 48: 3, 43-55. EDN: RHKXQA. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-43-55>

Funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the IPMA KBSC RAS (reg. No. 122041800015-8).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. Author is solely responsible for providing the final version of the article in print.

***Correspondence:**  E-mail: eneeva72@list.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Eneeva L. M., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



Введение

Рассмотрим уравнение

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) - \lambda u(1-x) = f(x), \quad (1)$$

где $f(x)$ — заданная функция; $x \in]0, 1[$; D_{0x}^{α} — дробная производная порядка α ($0 < \alpha < 1$) в смысле Римана–Лиувилля с началом в точке $x = 0$ [1] (см. определение ниже).

Дробное исчисление и дифференциальные уравнения дробного порядка, как известно [1], занимают особое место в математическом моделировании физических и геофизических процессов. При этом, как отмечено в [2], [3], приходится рассматривать уравнения, содержащие композиции производных дробного порядка с различными началами. В частности, такие уравнения возникают при моделировании диссипативных колебательных систем (см. [4]–[21], а также библиографию там). В работе [21] был предложен подход к решению краевых задач для уравнений дробного порядка, содержащих композицию лево- и правосторонних операторов дробного дифференцирования Римана–Лиувилля и Капуто, возникающих при моделировании диссипативных колебательных систем, основанный на редукции изучаемых задач к исследованию уравнений дробного порядка с инволюцией.

В данной работе мы рассматриваем модельное дифференциальное уравнение дробного порядка с инволюцией — уравнение (1). Для рассматриваемого уравнения исследуется начальная задача. Мы указываем достаточные условия однозначной разрешимости, находим фундаментальное решение, в терминах которого строим представление решения исследуемой задачи.

Дробное дифференцирование и оператор инволюции

Левосторонний и правосторонний дробные интегралы Римана–Лиувилля порядка $\mu > 0$, с началами в точке $x = 0$ и $x = 1$ определяются, соответственно, равенствами [1]

$$D_{0x}^{-\mu} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^x u(t)(x-t)^{\mu-1} dt, \quad (2)$$

и

$$D_{1x}^{-\mu} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_x^1 u(t)(t-x)^{\mu-1} dt, \quad (3)$$

Дробная производная Римана–Лиувилля порядка α , $\alpha \in]0, 1[$, с началом в точке $x = 0$ задается формулой [1]

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = \frac{d}{dx} D_{0x}^{\alpha-1} u(x),$$

т.е.

$$D_{0x}^{\alpha} u(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x u(t)(x-t)^{-\alpha} dt.$$

В дальнейшем, через I_x будем обозначать оператор инволюции, действующий на произвольную функцию $g(x)$, определенную на отрезке $[0, 1]$, по правилу

$$I_x g(x) = g(1 - x). \quad (4)$$

Очевидно, что

$$I_x^2 g(x) = I_x (I_x g(x)) = g(x).$$

Постановка задачи

Далее, как принято, $AC[0, 1]$ обозначает пространство абсолютно непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций, а $L[0, 1]$ — пространство суммируемых функций.

Определение. Регулярным решением уравнения (1) будем называть функцию $u = u(x)$ из класса

$$u(x) \in L[0, 1], \quad D_{0x}^{\alpha-1} u(x) \in AC[0, 1],$$

удовлетворяющую уравнению (1) для всех $x \in]0, 1[$.

Будем рассматривать следующую задачу: *найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию*

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = u_0. \quad (5)$$

Вспомогательные утверждения

Рассмотрим оператор

$$Q_x^\alpha = D_{0x}^{-\alpha} I_x. \quad (6)$$

Пусть $g(x) \in L[0, 1]$. В силу (2), (4) и (6) можем записать

$$\begin{aligned} Q_x^\alpha g(x) &= D_{0x}^{-\alpha} I_x g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x g(1-t)(x-t)^{\alpha-1} dt = \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{1-x}^1 g(s)(s+x-1)^{\alpha-1} ds. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (3) и (4), следует равенство

$$Q_x^\alpha = I_x D_{1x}^{-\alpha},$$

а также представление

$$Q_x^\alpha g(x) = \int_0^1 q(x, s) g(s) ds, \quad (7)$$

где

$$q(x, s) = \frac{(s+x-1)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Здесь и далее,

$$(z)_+ = \begin{cases} z, & z > 0, \\ 0, & z \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

Таким образом, Q_x^α — интегральный оператор с симметричным ядром. Причем, как легко заметить,

$$Q_x^\alpha (L[0, 1]) \subset L[0, 1]. \quad (9)$$

Действительно, если $g(x) \in L[0, 1]$, то, очевидно, $h(x) = I_x g(x) \in L[0, 1]$. Поэтому $Q_x g(x) = D_{0x}^{-\alpha} h(x) \in L[0, 1]$. Отсюда следует (9).

Кроме того,

$$\int_0^1 \int_0^1 |q(x, s)|^2 dx ds < \infty, \quad \text{если } \alpha > \frac{1}{2}.$$

То есть, Q_x^α является оператором Гильберта — Шмидта в $L_2[0, 1]$ при $\alpha > 1/2$.

Пусть $a \in [0, 1]$. Примем следующие обозначения

$$\|g\|_{(a, \mu)} = \sup_{[0, 1]} \frac{|g(x)|}{(|x - a|^{-\mu} + |x + a - 1|^{-\mu})}$$

и

$$M_a^\mu[0, 1] = \{g(x) \in C([0, 1] \setminus \{a, 1 - a\}) : \|g\|_{(a, \mu)} < \infty\}. \quad (10)$$

Лемма 1. Пусть $a \in [0, 1]$ и $g(x) \in M_a^{1-\alpha}[0, 1]$. Тогда

$$\|Q_x^\alpha g(x)\|_{(a, 1-\alpha)} \leq C_\alpha \|g(x)\|_{(a, 1-\alpha)}, \quad (11)$$

где

$$C_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)}.$$

Доказательство. В силу (7) имеем

$$\|Q_x^\alpha g(x)\|_{(a, 1-\alpha)} \leq \frac{\|g(x)\|_{(a, 1-\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int_{1-x}^1 (s + x - 1)^{\alpha-1} (|s - a|^{\alpha-1} + |s + a - 1|^{\alpha-1}) ds.$$

Оценим далее величины

$$J_1 = \int_{1-x}^1 (s + x - 1)^{\alpha-1} |s - a|^{\alpha-1} ds$$

и

$$J_2 = \int_{1-x}^1 (s + x - 1)^{\alpha-1} |s + a - 1|^{\alpha-1} ds. \quad (12)$$

Для J_1 получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{1-x}^{\max(a, 1-x)} (s + x - 1)^{\alpha-1} (a - s)^{\alpha-1} ds + \\ &+ \int_{\max(a, 1-x)}^1 (s + x - 1)^{\alpha-1} (s - a)^{\alpha-1} ds = J_{11} + J_{12}. \end{aligned} \quad (13)$$

Если $a + x - 1 \leq 0$, то, очевидно, $J_{11} = 0$. Рассмотрим случай, когда $a + x - 1 > 0$. В этом случае получаем

$$J_{11} = \int_0^{a+x-1} s^{\alpha-1} (a + x - 1 - s)^{\alpha-1} ds = (a + x - 1)^{2\alpha-1} \int_0^1 s^{\alpha-1} (1 - s)^{\alpha-1} ds.$$

Таким образом, с учетом обозначения (8) получаем

$$J_{11} = \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} (a + x - 1)_+^{2\alpha-1} \quad (14)$$

Оценим теперь J_{12} . Примем обозначения $\xi = \max(a, 1 - x)$ и $\eta = \min(a, 1 - x)$. Очевидно, что $\xi \geq \eta$ и $\xi, \eta \in [0, 1]$. С учетом этого получаем

$$\begin{aligned} J_{12} &= \int_{\max(a, 1-x)}^1 (s + x - 1)^{\alpha-1} (s - a)^{\alpha-1} ds = \int_{\xi}^1 (s - \xi)^{\alpha-1} (s - \eta)^{\alpha-1} ds = \\ &= \int_0^{1-\xi} s^{\alpha-1} (s + \xi - \eta)^{\alpha-1} ds = (\xi - \eta)^{2\alpha-1} \int_0^{\frac{1-\xi}{\xi-\eta}} s^{\alpha-1} (s + 1)^{\alpha-1} ds \leq \\ &\leq (\xi - \eta)^{2\alpha-1} \int_0^{\frac{1-\xi}{\xi-\eta}} s^{\alpha-1} ds = \frac{1}{\alpha} (\xi - \eta)^{\alpha-1} (1 - \xi)^{\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$J_{12} \leq \frac{1}{\alpha} |x + a - 1|^{\alpha-1}. \quad (15)$$

Подставляя (14) и (15) в (13) получаем

$$J_1 \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \right) |x + a - 1|^{\alpha-1}. \quad (16)$$

Заменяя в (12) a на $1 - a$, получаем

$$J_2 \leq \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \right) |x - a|^{\alpha-1}.$$

Отсюда, учитывая (16) и равенство

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\Gamma^2(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)},$$

приходим к (11). $\square$

Фундаментальное решение

Рассмотрим функцию $F_{\alpha,\lambda}(x, t)$, которая определяется как решение интегрального уравнения

$$F_{\alpha,\lambda}(x, t) = \lambda Q_x^\alpha F_{\alpha,\lambda}(x, t) + q_0(x, t), \quad (0 < x, t < 1), \quad (17)$$

где

$$q_0(x, t) = \frac{(x - t)_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Определение. Множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$ для которых однородное уравнение

$$g(x) = \lambda Q_x^\alpha g(x), \quad (0 < x < 1),$$

не имеет в пространстве $M_t^{1-\alpha}[0, 1]$ для всех $t \in [0, 1]$ решений, отличных от тривиального, обозначим через S_α .

Лемма 2. Пусть

$$|\lambda| < \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} \right)^{-1}. \quad (18)$$

Тогда $\lambda \in S_\alpha$, и уравнение (17) имеет решение, и притом единственное. Это решение может быть представлено в виде

$$F_{\alpha, \lambda}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (Q_x^\alpha)^n q_0(x, t). \quad (19)$$

Доказательство. Как нетрудно заметить, ряд в (19) является рядом Неймана, получаемым при решении уравнения (17) методом последовательных приближений. Из сходимости этого ряда и будет следовать утверждение леммы.

Принимая во внимание определение (10), имеем $q_0(x, t) \in M_t^{1-\alpha}[0, 1]$ для любого фиксированного $t \in [0, 1]$. Отсюда, с учетом (11), следует, что

$$\| (Q_x^\alpha)^n q_0(x, t) \|_{(t, 1-\alpha)} \leq C_\alpha^n \| q_0(x, t) \|_{(t, 1-\alpha)}.$$

В силу (11), это означает, что ряд в (19), сходится в пространстве $M_t^{1-\alpha}[0, 1]$ равномерно относительно λ из любого компактного множества чисел, удовлетворяющих (18). $\square$

Замечание. Принимая во внимание (6), нетрудно заметить, что для λ , удовлетворяющих (18), функция $F_{\alpha, \lambda}$ может быть представлена в виде

$$F_{\alpha, \lambda}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n q_n(x, t),$$

где функции $q_n(x, t)$ задаются равенствами

$$q_n(x, t) = D_{0x}^{-\alpha} I_x q_{n-1}(x, t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

или, что в силу (7) то же самое,

$$q_n(x, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (s + x - 1)_+^{\alpha-1} q_{n-1}(x, s) ds.$$

Замечание. Как отмечено выше (см. (9)), Q_x^α является интегральным оператором с симметричным ядром, действующим в $L[0, 1]$, и при $\alpha > 1/2$ является оператором Гильберта — Шмидта в $L_2[0, 1]$. Это означает, что по крайней мере при $\alpha > 1/2$ интегральное уравнение (17) однозначно разрешимо для всех λ , за исключением не более чем счетного числа действительных значений.

Лемма 3. Пусть $\lambda \in S_\alpha$ и функция $G(x)$ представима в виде

$$G(x) = \int_0^1 g(s) q_0(x, s) ds,$$

где $g(x) \in M_a^{1-\alpha}[0, 1]$, $a \in [0, 1]$. Тогда интегральное уравнение

$$v(x) - \lambda Q_x^\alpha v(x) = G(x) \quad (20)$$

имеет единственное решение. Это решение имеет вид

$$v(x) = \int_0^1 F_{\alpha,\lambda}(x, t) g(t) dt. \quad (21)$$

Доказательство. Тот факт, что уравнение (20) имеет и притом единственное решение следует из определения множества S_α . Для доказательства леммы остается показать, что функция (21) является его решением. Действительно, в силу (17), имеем

$$\lambda Q_x^\alpha v(x) = \lambda \int_0^1 g(t) Q_x^\alpha F_{\alpha,\lambda}(x, t) dt = \int_0^1 [F_{\alpha,\lambda}(x, t) - q_0(x, t)] g(t) dt = v(x) - G(x).$$

Отсюда следует, что (21) является решением (20). $\square$

Лемма 4. Пусть $\lambda \in S_\alpha$. Для функции $F_{\alpha,\lambda}(x, t)$ имеют место равенства

$$D_{0x}^\alpha F_{\alpha,\lambda}(x, t) - \lambda F_{\alpha,\lambda}(1 - x, t) = 0 \quad (0 < x < 1, 0 \leq t \leq 1, x \neq t) \quad (22)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-1} F_{\alpha,\lambda}(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t > 0, \\ 1, & \text{если } t = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Доказательство. Подействуем на обе части уравнения (17) оператором $D_{0x}^{\alpha-1}$, учитывая (6) и равенство

$$D_{0x}^{\alpha-1} q_0(x, t) = H(x - t),$$

где $H(z)$ — функция Хевисайда, получаем

$$D_{0x}^{\alpha-1} F_{\alpha,\lambda}(x, t) = \lambda D_{0x}^{-1} I_x F_{\alpha,\lambda}(x, t) + H(x - t). \quad (24)$$

Устремляя x к нулю получаем (23). Дифференцируя (24) приходим к (22). $\square$

Представление решения

Пусть $u(x)$ — регулярное решение задачи (1), (5), $f(x) \in M_a^{1-\alpha}[0, 1]$, $a \in [0, 1]$, и пусть $\lambda \in S_\alpha$. Применяя к обеим частям (1) оператор $D_{0x}^{-\alpha}$, принимая во внимание законы композиции для операторов дробного интегро-дифференцирования [1], начальное условие (5) и определение (6), получим

$$u(x) - \lambda Q_x^\alpha u(x) = D_{0x}^{-\alpha} f(x) + u_0 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \quad (25)$$

В силу линейности (25) функцию $u(x)$ суммы $u_1(x) + u_2(x)$, где

$$u_1(x) - \lambda Q_x^\alpha u_1(x) = D_{0x}^{-\alpha} f(x) \quad (26)$$

и

$$u_2(x) - \lambda Q_x^\alpha u_2(x) = u_0 \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Заметив, что

$$D_{0x}^{-\alpha} f(x) = \int_0^1 q_0(x, s) f(s) ds,$$

получаем, что в силу доказанного выше (см. лемму 3), решение уравнения (26) имеет вид

$$u_1(x) = \int_0^1 F_{\alpha, \lambda}(x, s) f(s) ds.$$

Далее, учитывая, что

$$\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = q_0(x, 0),$$

получаем

$$u_2(x) = u_0 F_{\alpha, \lambda}(x, 0).$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Теорема. Пусть $\lambda \in S_\alpha$, $f(x) \in M_a^{1-\alpha}[0, 1]$, $a \in [0, 1]$. Существует единственное регулярное решение задачи (1), (5), и оно представимо в виде

$$u(x) = u_0 F_{\alpha, \lambda}(x, 0) + \int_0^1 F_{\alpha, \lambda}(x, s) f(s) ds. \quad (27)$$

Доказательство. Из приведенных ранее рассуждений следует, что если $u(x)$ — регулярное решение задачи (1), (5), и выполнены условия теоремы, то $u(x)$ имеет вид (27). Отсюда, в частности, следует единственность решения рассматриваемой задачи. Для завершения доказательства теоремы остается показать, что функция $u(x)$, заданная формулой (27) действительно является решением задачи (1), (5).

В силу (23) имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-1} u(x) = u_0 \lim_{x \rightarrow 0} D_{0x}^{\alpha-1} F_{\alpha, \lambda}(x, 0) + \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 D_{0x}^{\alpha-1} F_{\alpha, \lambda}(x, s) f(s) ds = u_0.$$

Далее, с учетом (24) получаем

$$\begin{aligned} D_{0x}^\alpha u(x) &= u_0 D_{0x}^\alpha F_{\alpha, \lambda}(x, 0) + \frac{d}{dx} \int_0^1 [\lambda D_{0x}^{-1} I_x F_{\alpha, \lambda}(x, s) + H(x-s)] f(s) ds = \\ &= \lambda u_0 F_{\alpha, \lambda}(1-x, 0) + \lambda \int_0^1 F_{\alpha, \lambda}(1-x, s) f(s) ds + f(x) = \lambda u(1-x) + f(x). \end{aligned}$$

Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Заключение

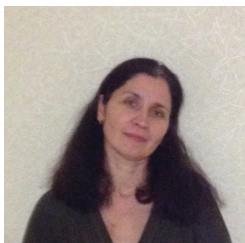
В работе доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного уравнения дробного порядка с инволюцией. Доказана теорема существования и единственности решения, в которой сформулированы достаточные условия, обеспечивающие однозначную разрешимость исследуемой задачи. Построено фундаментальное решение, изучены его основные свойства. В терминах фундаментального решения найдено явное представление решения исследуемой задачи.

Список литературы

1. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
2. Рехвиашвили С. Ш. Формализм Лагранжа с дробной производной в задачах механики, *Письма в ЖТФ*, 2004. Т. 30, № 2, С. 33–37.
3. Рехвиашвили С. Ш. К определению физического смысла дробного интегро-дифференцирования, *Нелинейный мир*, 2007. Т. 5, № 4, С. 194–197.
4. Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives, *Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série*, 2006. Т. 80(94), С. 259–272.
5. Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2007. Т. 10, № 2, С. 139–150.
6. Zayernouri M., Karniadakis G. E. Fractional Sturm–Liouville eigen-problems: Theory and numerical approximation, *Journal of Computational Physics*, 2013. № 252, С. 495–517.
7. Klimek M., Agrawal O. P. Fractional Sturm–Liouville problem, *Computers and Mathematics with Applications*, 2013. № 66, С. 795–812.
8. Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum, *Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics*, 2014. Т. 13, № 1, С. 125–142.
9. Энеева Л. М. Краевая задача для дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными начальными, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2015. Т. 3, № 2(11), С. 39–44.
10. Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm–Liouville Operator, *Documenta Mathematica*, 2016. Т. 21, С. 1503–1514.
11. Энеева Л. М. Оценка первого собственного значения задачи Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными начальными, *Известия КБНЦ РАН*, 2017. № 1(75), С. 34–40.
12. Энеева Л. М. О задаче Неймана для уравнения с дробными производными с различными начальными, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018. № 4(24), С. 61–65 DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-61-65.
13. Энеева Л. М. Неравенство Ляпунова для уравнения с производными дробного порядка с различными начальными, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2019. № 3(28), С. 32–40 DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-32-39.
14. Энеева Л. М. Априорная оценка для уравнения с производными дробного порядка с различными начальными, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2019. № 4(29), С. 41–47 DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-41-47.
15. Eneeva L. M., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Rekhviashvili S. Sh. Lyapunov inequality for a fractional differential equation modelling damped vibrations of thin film MEMS, *Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19100)*.
16. Rekhviashvili S. Sh., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Eneeva L. M. Modeling damped vibrations of thin film MEMS, *Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19101)*.
17. Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S. Ordinary Differential Equation with Left and Right Fractional Derivatives and Modeling of Oscillatory Systems, *Mathematics*, 2020. Т. 8(12), С. 2122 DOI: 10.3390/math8122122.

18. Энеева Л. М. Смешанная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения с производными дробного порядка с различными начальными, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 36, № 3, С. 65–71 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-65-71.
19. Энеева Л. М. Решение смешанной краевой задачи для уравнения с производными дробного порядка с различными начальными, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 40, № 3, С. 64–71 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-64-71.
20. Энеева Л. М. Нелокальная краевая задача для уравнения с производными дробного порядка с различными начальными, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 44, № 3, С. 58–66 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-58-66.
21. Энеева Л. М. К вопросу о решении смешанной краевой задачи для уравнения с производными дробного порядка с различными начальными, *Доклады АМАН*, 2023. Т. 23, № 4, С. 62–68 DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-62-68.

Информация об авторе



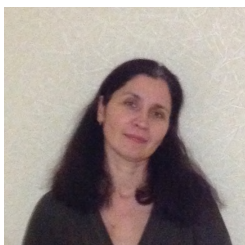
Энеева Лиана Магомедовна ✉ – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела математического моделирования геофизических процессов, Института прикладной математики и автоматизации – филиал Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия,  ORCID 0000-0003-2530-5022.

References

- [1] Nakhushev A. M. Fractional calculus and its application. Moscow. Fizmatlit, 2003. 272 p.
- [2] Rekhviashvili S. Sh. Lagrange formalism with fractional derivative in problems of mechanics, Technical Physics Letters, 2004, vol. 30, no. 2, pp. 33–37.
- [3] Rekhviashvili S. Sh. Fractional derivative physical interpretation, Nonlinear world, 2007, vol. 5, no. 4, pp. 194–197.
- [4] Stanković B. An equation with left and right fractional derivatives, Publications de l'institut mathématique. Nouvelle série, 2006. vol. 80(94), pp. 259–272.
- [5] Atanackovic T. M., Stankovic B. On a differential equation with left and right fractional derivatives, Fractional Calculus and Applied Analysis, 2007. vol. 10, no. 2, pp. 139–150.
- [6] Zayernouri M., Karniadakis G. E. Fractional Sturm–Liouville eigen-problems: Theory and numerical approximation, Journal of Computational Physics, 2013, no. 252, pp. 495–517. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2013.06.031>
- [7] Klimek M., Agrawal O. P. Fractional Sturm–Liouville problem, Computers and Mathematics with Applications, 2013, no. 66, pp. 795–812. DOI:10.1016/j.camwa.2012.12.011
- [8] Torres C. Existence of a solution for the fractional forced pendulum, Journal of Applied Mathematics and Computational Mechanics, 2014. vol. 13, no. 1, pp. 125–142.
- [9] Eneeva L. M. Boundary value problem for differential equation with fractional order derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2015, vol. 3, no. 2(11), pp. 39–44.
- [10] Tokmagambetov N., Torebek B. T. Fractional Analogue of Sturm–Liouville Operator Documenta Mathematica, 2016. vol. 21, pp. 1503–1514.
- [11] Eneeva L. M. An estimate for the first eigenvalue of the dirichlet problem for an ordinary differential equation with fractional derivatives with different origins, News Of The Kabardino-Balkarian Scientific Center Of RAS, 2017, no. 1(75), pp. 34–40.
- [12] Eneeva L. M. On Neumann problem for equation with fractional derivatives with different starting points, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2018, no. 4(24), pp. 61–65. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-24-4-61-65
- [13] Eneeva L. M. Lyapunov inequality for an equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2019, no. 3(28), pp. 32–40. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-28-3-32-39
- [14] Eneeva L. M. A priori estimate for an equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2019, no. 4(29), pp. 41–47. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-29-4-41-47
- [15] Eneeva L. M., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Rekhviashvili S. Sh. Lyapunov inequality for a fractional differential equation modelling damped vibrations of thin film MEMS, Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19100).
- [16] Rekhviashvili S. Sh., Pskhu A. V., Potapov A. A., Feng T., Eneeva L. M. Modeling damped vibrations of thin film MEMS, Advances in Intelligent Systems and Computing. ICCD2019 (paper ID: E19101).
- [17] Eneeva L., Pskhu A., Rekhviashvili S. Ordinary Differential Equation with Left and Right Fractional Derivatives and Modeling of Oscillatory Systems. Mathematics, 2020. vol. 8(12). 2122.
- [18] Eneeva L. M. Mixed boundary value problem for an ordinary differential equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2021, vol. 36, no. 3, pp. 65–71. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-36-3-65-71

- [19] Eneeva L. M. Solution of a mixed boundary value problem for an equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2022, no. 3(40), pp. 64–71. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-40-3-64-71
- [20] Eneeva L. M. Nonlocal boundary value problem for an equation with fractional derivatives with different origins, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2023, no. 3(44), pp. 58–66. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-58-66
- [21] Eneeva L. M. On the question of solving a mixed boundary value problem for an equation with fractional derivatives with different origins, Adyghe International Scientific Journal, 2023, Vol. 23, no. 4, Pp. 62–68. DOI: 10.47928/1726-9946-2023-23-4-62-68

Information about the author



Eneeva Liana Magometovna ✉ – Ph. D. (Phys. & Math.), Senior Researcher at the Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Nalchik, Russia,  ORCID 0000-0003-2530-5022.



Математическое моделирование автоколебаний нейрона в клеточной мембране с использованием дробной модели ФитцХью-Нагумо с функцией интенсивности раздражителя

Н. Б. Алимова*

Ташкентский государственный финансовый университет, 100000, Республика Узбекистан,
г. Ташкент, проспект Амира Темура, 60А

Аннотация. В статье проводится исследование процесса временного распространения нервного импульса в клеточной мембране. Для этой цели была предложена новая математическая модель, основанная на дробном осцилляторе ФитцХью-Нагумо с функцией интенсивности раздражителя. Особенность дробного осциллятора является, то, что модельное уравнение содержит производные дробных переменных порядков типа Герасимова-Капуто. Предложенная математическая модель представляет собой задачу Коши. В силу нелинейности модельного уравнения решение задачи Коши искалось с помощью численного метода нелокальной явной конечно-разностной схемы первого порядка точности. Численный метод был реализован на языке Maple 2022. С помощью численного алгоритма была проведена визуализация результатов моделирования, построены осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях параметров модели. Показано, что решение новой математической модели может обладать релаксационными колебаниями. Кроме того, приведен пример, в котором предельный цикл является устойчивым. Также показано, что предложенный дробный осциллятор ФитцХью-Нагумо с функцией интенсивности раздражителя обладает богатой динамикой: различные регулярные и хаотические режимы.

Ключевые слова: модель, осциллятор ФитцХью-Нагумо, производная дробного переменного порядка, нелокальная конечно-разностная схема, осциллограммы, фазовые траектории

Получение: 15.10.2024; Исправление: 02.11.2024; Принятие: 15.11.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Алимова Н.Б. Математическое моделирование автоколебаний нейрона в клеточной мембране с использованием дробной модели ФитцХью-Нагумо с функцией интенсивности раздражителя // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 56-69. EDN: RBCKMK. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-56-69>.

Финансирование. Научное исследование проведено без финансовой поддержки фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция:  E-mail: alimova_nazira85@mail.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Алимова Н.Б., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)





Mathematical Modeling of the Neuron Autocoling in the Cell Membrane Using the Fractional Model of FitzHugh-Nagumo with the Function of Irritant Intensity

*N. B. Alimova**

Tashkent State Financial University, 100000, Republic of Uzbekistan, Tashkent,
Amir Temura Avenue, 60A

Abstract. The article studies the process of temporary propagation of a nerve impulse in a cell membrane. For this purpose, a new mathematical model based on the fractional FitzHugh-Nagumo oscillator with a stimulus intensity function was proposed. A feature of the fractional oscillator is that the model equation contains derivatives of fractional variables of the Gerasimov-Caputo type. The proposed mathematical model is a Cauchy problem. Due to the nonlinearity of the model equation, the solution to the Cauchy problem was sought using a numerical method of a nonlocal explicit finite-difference scheme of the first order of accuracy. The numerical method was implemented in the Maple 2022 language. Using a numerical algorithm, the simulation results were visualized, oscillograms and phase trajectories were constructed for various values of the model parameters. It is shown that the solution to the new mathematical model can have relaxation oscillations. In addition, an example is given in which the limit cycle is stable. It is also shown that the proposed FitzHugh-Nagumo fractional oscillator with stimulus intensity function has rich dynamics: various regular and chaotic modes.

Key words: model, FitzHugh-Nagumo oscillator, fractional variable order derivative, nonlocal finite difference scheme, oscillograms, phase trajectories

Received: 15.10.2024; Revised: 02.11.2024; Accepted: 15.11.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Alimova N. B. Mathematical modeling of the neuron autocoling in the cell membrane using the fractional model of FitzHugh-Nagumo with the function of irritant intensity. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 48: 3, 56-69. EDN: RBCKMK. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-56-69>

Funding. The scientific research was carried out without financial support from foundations.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. Author is solely responsible for providing the final version of the article in print.

***Correspondence:**  E-mail: alimova_nazira85@mail.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Alimova N. B., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



Введение

В работах 60-ых годов Р. ФитцХью [1] и Дж. Нагумо [2] была предложена математическая модель (осциллятор ФитцХью-Нагумо) для описания возбуждения нервного импульса в мембране. Модель описывает быструю и медленную динамику двух переменных — "возбуждающей" переменной, характеризующей мембранный потенциал в биологической возбудимой ткани и "восстанавливающей" переменной, отвечающей за ток восстановления. Модель являлась упрощенной версией ранее известной модели Ходжкина-Хаскли [3] и широко используются в нейробиологии для описания активации и деактивации нейронов.

Необходимо отметить, что существует модели ФитцХью-Нагумо [2], которые учитывают пространственное распространение возбуждения нейронов (диффузионная модель), что позволяет изучать пространственно-временные паттерны в нейронных системах. Такие модели описываются уравнениями в частных производных диффузионного типа [4].

В настоящей работе мы будем изучать модель ФитцХью-Нагумо, которая описывает возбуждение нейрона в биологических тканях с учетом наследственности. Наследственность — это свойство динамической системы помнить о оказанном на нее воздействии. Это воздействие проявляется не мгновенно, а с течением некоторого времени. С точки зрения математики такие системы с наследственностью можно описать с помощью интегро-дифференциальных уравнений с разностными ядрами — функциями памяти [5].

В случае, если функции памяти являются степенными, то мы можем перейти к понятию дробной производной и соответственно к дробным дифференциальным уравнениям [6]. Математические модели, которые описываются с помощью дробных дифференциальных уравнений будем называть дробными моделями.

Одни из первых работ по исследованию дробной модели ФитцХью-Нагумо были проведены в статьях [7–9]. В этих работах была построена дробная математическая модель ФитцХью-Нагумо в терминах дробной производной Герасимова-Капуто [10, 11] постоянного порядка. Далее с помощью численных методов были исследованы количественные и качественные свойства решения предложенной модели, получены различные динамические режимы, показано, что предельный цикл не всегда является устойчивым.

Настоящая работа является продолжением исследований дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо и его обобщения. Обобщение ранее предложенной дробной модели ФитцХью-Нагумо заключается в учете зависимости порядков дробных производных от времени, а также в учете зависимости интенсивности раздражителя от времени.

Целью работы является исследование осциллограмм и фазовых траекторий, построенных при различных значениях параметров модели для установления релаксационных колебаний и проверке их устойчивости с помощью компьютерного моделирования.

Постановка задачи и методика решения

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \partial_{0t}^{\alpha(t)} x(t) - c(x^2(t) + p) \partial_{0t}^{\beta(t)} x(t) + qx(t) + gx^3(t) - a - bz(t) &= 0, \\ x(0) = k_1, \dot{x}(0) &= k_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где $p = \frac{b}{c^2} - 1$, $q = 1 - b$, $g = b/3$, здесь a, b, c — константы, удовлетворяющие условиям $1 - 2b/3 < a < 1$, $0 < b < 1$, $b < c^2$, $x(t) \in C^2[0, T]$ — мембранный потенциал, $z(t) \in C[0, T]$ — функция, которая отвечает за интенсивность раздражителя, $t \in [0, T]$ — время рассматриваемого процесса, $T > 0$ — время моделирования, k_1, k_2 — константы, которые определяют начальные условия, операторы дробных производных имеют вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(2 - \alpha(t))} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\alpha(t)-1}}, \quad \partial_{0t}^{\beta(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta(t))} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t - \tau)^{\beta(t)}},$$

понимаются в смысле Герасимова-Капуто, переменные порядки которых $1 < \alpha(t) < 2$, $0 < \beta(t) < 1$ являются функциями из класса $C[0, T]$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Замечание 1. Отметим, что в случае когда $\alpha(t), \beta(t), z(t)$ являются константами мы приходим к результатам работ [7–9].

Замечание 2. В случае, когда $\alpha(t) = \beta(t) = 1$ и $z(t)$ является константой, то мы переходим к классической модели ФитцХью-Нагумо [1, 2]

Замечание 3. Производные дробного переменного порядка можно изучить в обзорной статье [12].

Дробная математическая модель ФитцХью-Нагумо (1) является объектом нашего исследования. В силу того, что модельное уравнение (1) является нелинейным, то для получения решения нам нужно привлечь численные методы.

В качестве численного метода возьмем нелокальную явную конечно-разностную схему первого порядка точности. Схема является условно устойчивой, а более детальное исследование этого вопроса можно посмотреть в статье [13]. На равномерной сетке с числом узлов N и шагом дискретизации $\tau = T/N$ введем следующую схему ($x_k, \alpha_k, \beta_k, z_k$ — сеточные функции):

$$\begin{aligned} x_1 &= k_1 + \tau k_2, \quad k = 0, \\ x_2 &= \frac{1}{A_1 + cB_1(x_1^2 + p)} (a + bz_1 + (2A_1 + cB_1(x_1^2 + p) - q)x_1 - x_1^3 g - A_1 x_0), \quad k = 1, \\ x_{k+1} &= \frac{1}{A_k + cB_k(x_k^2 + p)} \left(a + bz_k + (2A_k + cB_k(x_k^2 + p) - q)x_k - x_k^3 g - A_k x_{k-1} \right. \\ &\quad \left. - B_k c(x_k^2 + p) \sum_{j=1}^{k-1} ((j+1)^{1-\beta_k} - j^{1-\beta_k})(x_{k-j+1} - x_{k-j}) \right. \\ &\quad \left. - A_k \sum_{j=1}^{k-1} ((j+1)^{2-\alpha_k} - j^{2-\alpha_k})(x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$A_k = \frac{\tau^{\alpha_k}}{\Gamma(3 - \alpha_k)}, \quad B_k = \frac{\tau^{\beta_k}}{\Gamma(2 - \beta_k)}, \quad \Gamma(\cdot) - \text{гамма-функция}, \quad k = 2, \dots, N - 1.$$

Результаты моделирования

Численный алгоритм (2) был реализован в компьютерной программе Maple 2022. Рассмотрим некоторые примеры.

Для дробной модели ФитцХью-Нагумо (1) вид функций был задан следующим образом:

$$\alpha(t) = \alpha_0 - M_1 \frac{t}{T}, \quad \beta(t) = \beta_0 - M_2 \frac{t}{T}, \quad z(t) = \phi \sin(\omega t). \quad (3)$$

Для параметров функций (3) были выбраны следующие значения: $\alpha_0 = 2$, $\beta_0 = 1$, $M_1 = 0.01$, $M_2 = 0.08$, $\phi = 1$, $\omega = 1$.

Значения остальных параметров выберем согласно работе : $c = 3$, $a = 0.7$, $b = 0.8$, $k_1 = 0.2$, $k_2 = 0.3$, $t \in [0, 100]$.

Для расчета по алгоритму (2) количество узлов расчетной сетки $N = 3000$, $\tau = 1/30$. На рис. 1-3 приведены расчетные осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях ϕ и ω .

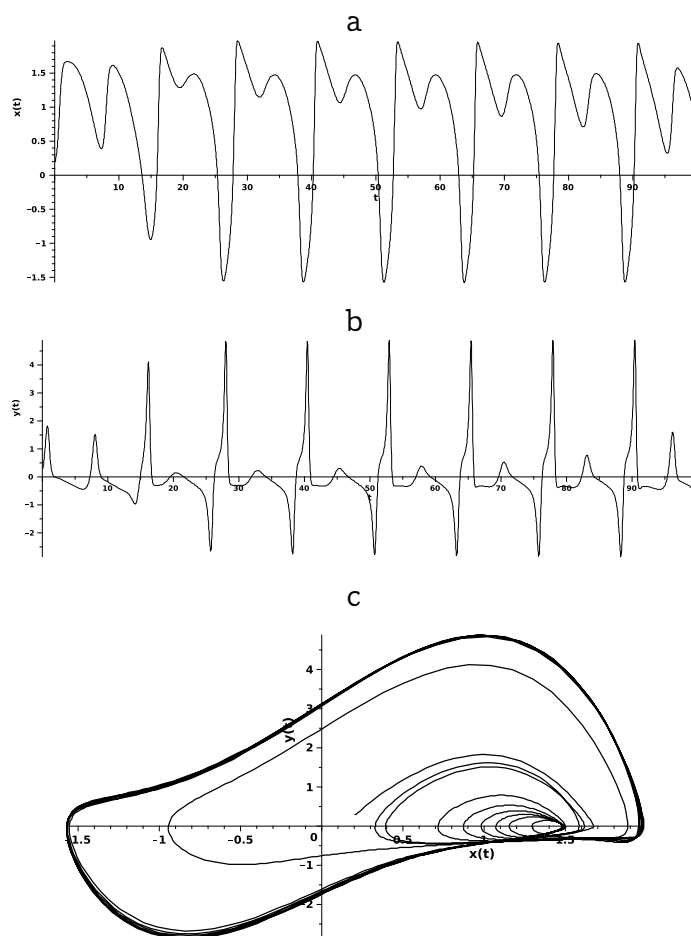


Рис. 1. Осциллограммы а) и б), фазовая траектория с) для $\phi = \omega = 1$.

[Figure 1. Oscillograms a) and b), phase trajectory c) for $\phi = \omega = 1$.]

На рис.1 отчетливо видно наличие нескольких колебательных режимов. На фазовой траектории рис.1с, что существует точка равновесия (устойчивый фокус), фазовая траектория сначала закручивается по часовой стрелке, а далее с некоторого момента времени происходит движение в обратную сторону и траектория выходит на предельный цикл.

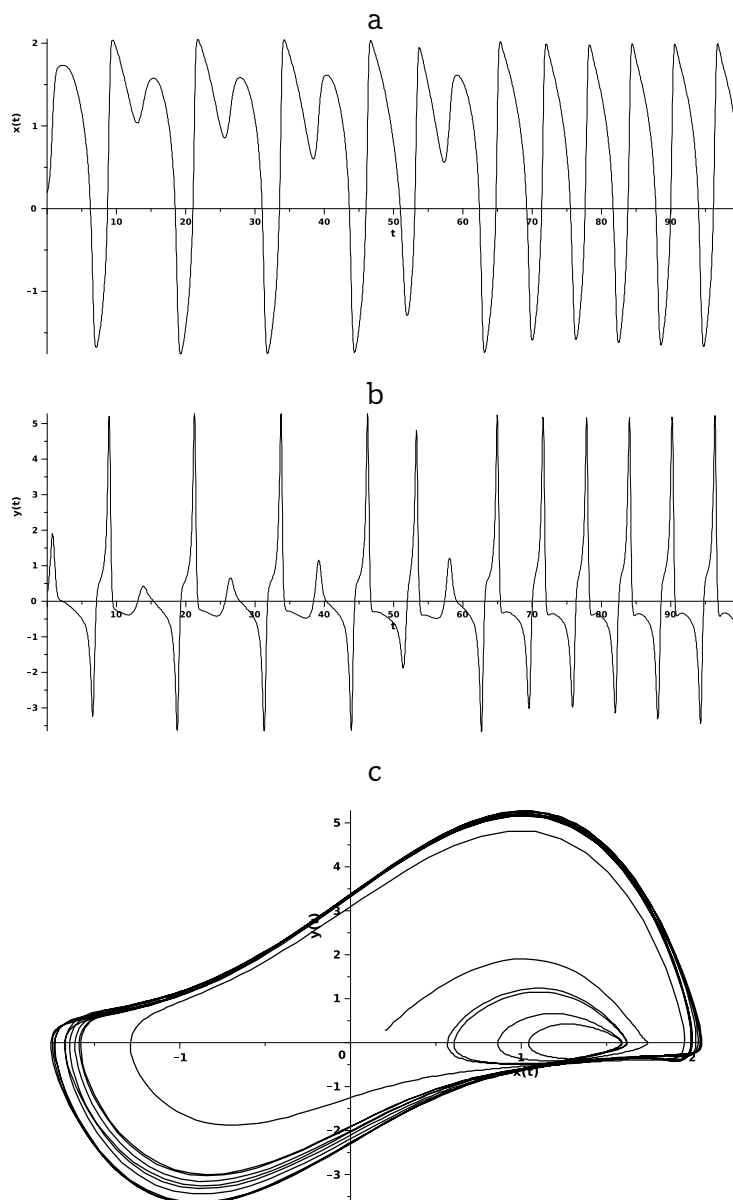


Рис. 2. Осциллограммы а) и б), фазовая траектория с) для $\phi = 1.5$, $\omega = 1$.

[Figure 2. Oscillograms a) and b), phase trajectory c) for $\phi = 1.5$, $\omega = 1$.]

Далее при увеличении значения параметра ϕ мы отчетливее видим два колебательных режима как на осциллограммах (рис.2а,б), так и на фазовой траектории (рис.2с). Здесь наблюдается такая же динамика как и на рис.1. Однако число закручивающихся витков меньше и выход на предельный цикл происходит медленнее.

Отметим, что осциллограмма на рис. 2b очень напоминает сигнал искусственного ЭКГ, полученный по модели МакШерри [14], а это может указывать на большой потенциал в применении предложенной модели.

Увеличим еще раз значение параметра ϕ (рис.3), остальные параметры оставим без изменения.

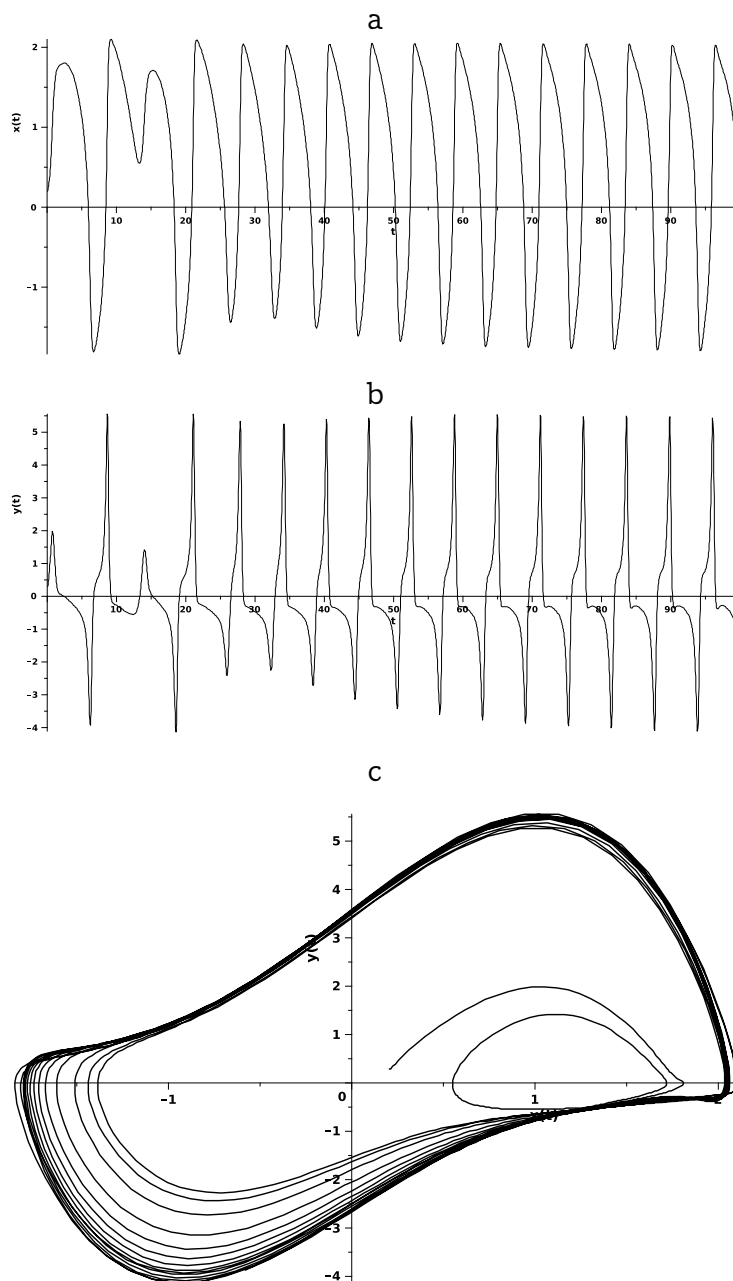


Рис. 3. Осциллограммы а) и б), фазовая траектория с) для $\phi = 2$, $\omega = 1$.

[Figure 3. Oscillograms a) and b), phase trajectory c) for $\phi = 2$, $\omega = 1$.]

На рис.3с мы видим, что число закручивающихся витков уменьшилось, а траектория выходит на предельный цикл. Исходя из выше сказанного значения параметра ϕ влияет на затухающий режим и при его достаточно больших значениях может привести к его исчезновению (рис.4).

Действительно на рис.4 при значении параметра $\phi = 2.5$ на фазовой траектории (рис.4с) мы видим, что затухающий режим исчез и остаются только релаксационные колебания (предельный цикл).

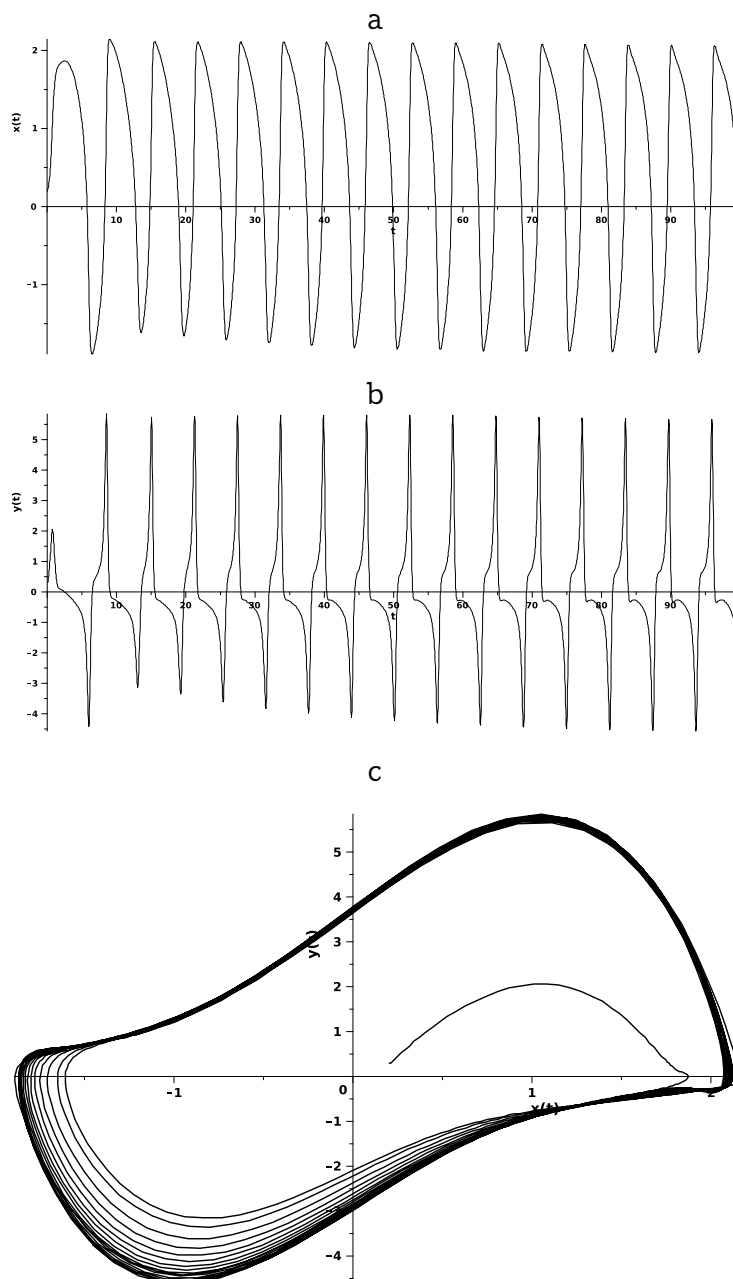


Рис. 4. Осциллограммы а) и б), фазовая траектория с) для $\phi = 2.5$, $\omega = 1$.

[Figure 4. Oscillograms a) and b), phase trajectory c) for $\phi = 2.5$, $\omega = 1$.]

Отметим, что на рис.1с-4с фазовая траектория рано или поздно выходит на один и тот же предельный цикл. Поэтому естественным образом здесь возникает вопрос является предельный цикл устойчивым?

Прежде, чем ответить на этот вопрос необходимо отметить, что в случае, когда производные целочисленные, то по критерию Бендиксона можно установить устойчивость предельного цикла [15]. Однако в общем случае, когда в модельном

уравнении производные дробные, то критерий Бендиксона не работает. Нужен его аналог. В работе мы экспериментально покажем с помощью компьютерного моделирования, что предельный цикл может быть устойчивым.

Об устойчивости предельного цикла

Устойчивый предельный цикл — это замкнутая траектория в фазовом пространстве динамической системы, обладающая следующими свойствами:

1. Периодичность: система совершает повторяющиеся колебания с постоянным периодом.

2. Притяжение: близлежащие траектории со временем приближаются к этому циклу.

3. Устойчивость: малые возмущения не выводят систему из этого режима колебаний надолго. После возмущения система возвращается к тому же циклу.

Первое свойство очевидно выполняется (рис.4).

Покажем, что может выполняться второе свойство. Для этого построим фазовую траекторию при других начальных значениях $k_1 = 0.2$, $k_2 = 5$, значения остальных параметров оставим без изменения, как на рис.4. Обратим внимание, что точка $(0.2, 5)$ лежит вне предельного цикла.

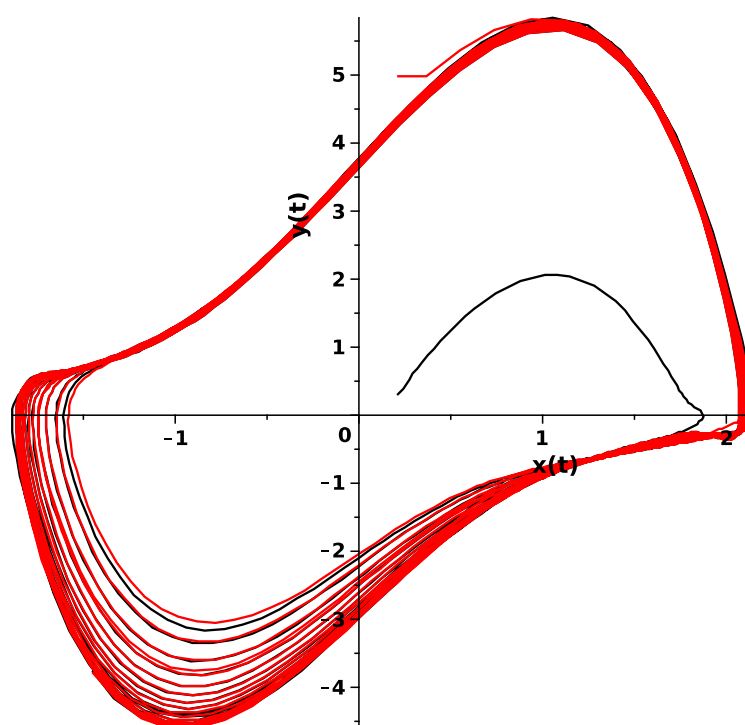


Рис. 5. Фазовая траектория: черная кривая — фазовая траектория из рис.4; красная кривая — фазовая траектория для $k_1 = 0.2$, $k_2 = 5$.

[Figure 5. Phase trajectory: black curve — phase trajectory from Fig. 4; red curve — phase trajectory for $k_1 = 0.2$, $k_2 = 5$.]

Из рис. 5 видно, что второе свойство выполняется – две фазовые траектории с различными начальными точками притягиваются к одному и тому же предельному циклу. Оно указывает на то, что существует единственный устойчивый предельный цикл.

Проверим третье свойство. Для этого возмутим, начальные условия: $k_1 = 0.2 + \epsilon$, $k_2 = 0.3 + \epsilon$, где ϵ – малая величина.

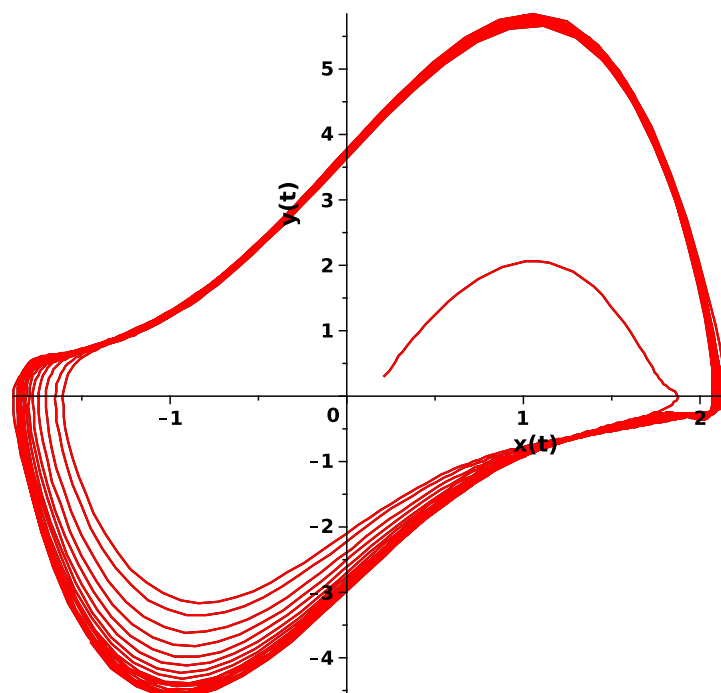


Рис. 6. Фазовая траектория: черная кривая — фазовая траектория из рис.4; красная кривая — фазовая траектория для возмущенных данных $k_1 = 0.2002$, $k_2 = 0.3002$.

[Figure 6. Phase trajectory: black curve — phase trajectory from Fig.4; red curve — phase trajectory for disturbed data $k_1 = 0.2002$, $k_2 = 0.3002$.]

Последний пример на рис.6 показывает, что предельный цикл может быть устойчивым.

Необходимо также отметить, что наличие дробной производной в инерциальном члене, как показали работы [16, 17], для динамических систем не автоколебательного типа приводят к диссипации и затуханию. Однако как показали примеры выше для дробных динамических систем автоколебательного типа может сохраняться релаксационные колебания. Это очень важно для решения прикладных задач.

Заключение

В работе предложена новая математическая модель ФитцХью-Нагумо, которая обобщает ранее известные модели. Далее проведен численный анализ модели, построены осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях параметров модели. Показано с помощью компьютерного моделирования, что существует возможность наличия единственного устойчивого предельного цикла. Здесь нужно отметить, что для более подробного анализа необходимо разработать аналог теоремы Бендиксона о существовании единственного устойчивого предельного цикла.

Дальнейшее развитие дробного осциллятора ФитцХью-Нагумо — исследования хаотических и регулярных режимов [18, 19], построение карт динамических режимов, исследование других функциональных зависимостей в модельном уравнении (1).

Список литературы

1. FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane, *Biophysical Journal*, 1961. no. 1, pp. 446–446.
2. Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon, *Proc. IRE.*, 1962. no. 50, pp. 2061–2070.
3. Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve, *J. Physiol.*, 1952. vol. 117(4), pp. 500–544 DOI: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764.
4. Ambrosio B. Qualitative analysis of certain reaction-diffusion systems of the FitzHugh-Nagumo type, *Evolution Equations and Control Theory*, 2023. vol. 12, no. 6, pp. 1507–1526 DOI: 10.3934/eect.2023023..
5. Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005. 288 pp.
6. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит, 2003. 272 с.
7. Lipko O. D. Mathematical model of propagation of nerve impulses with regard hereditarity, *Vestnik KRAUNC Fiz.-Mat. Nauki*, 2017. vol. 1(17), pp. 33–43 DOI: 10.18454/2079-6641-2017-17-1-33-43..
8. Lipko O. D., Parovik R. I. Some aspects of investigation of limit cycles of Fitzhugh-Nagumo oscillator with degree memory, *Journal of Physics: Conference Series*, 2018. vol. 1141, 012125 DOI: 10.1088/1742-6596/1141/1/012125.
9. Lipko O., Parovik R. The study of chaotic and regular regimes of the fractal oscillators FitzHugh-Nagumo, *E3S Web of Conferences*, 2018. vol. 62, 02017 DOI: 10.1051/e3sconf/20186202017.
10. Герасимов А. Н. Обобщение законов линейного деформирования и их применение к задачам внутреннего трения, *АН СССР. Прикладная математика и механика*, 1948. Т. 44, № 6, С. 62–78.
11. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent - II, *Geophysical Journal International*, 1967. vol. 13, pp. 529–539.
12. Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: A review, *Proc. R. Soc. A R. Soc. Publ.*, 2020. no. 476, 20190498 DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.
13. Parovik R. I. Explicit Finite-Difference Scheme for the Numerical Solution of the Model Equation of Nonlinear Hereditary Oscillator with Variable-Order Fractional Derivatives, *Archives of Control Sciences*, 2016. vol. 26, no. 3, pp. 429–435 DOI: 10.1515/acsc-2016-0023..
14. McSharry P. E., Clifford G. D., Tarassenko L., Smith L. A. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals, *IEEE transactions on biomedical engineering.*, 2003. vol. 50, no. 3, pp. 289–294.
15. Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, 1901. vol. 24(1), pp. 1–88.

16. Псху А. В. Рехвиашвили С. Ш. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора, *Письма в Журнал технической физики*, 2019. Т. 45, № 1, С. 34-37 DOI: 10.21883/PJTF.2019.01.47154.17540.
17. Паровик Р. И. Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики вынужденных колебаний нелинейного дробного осциллятора, *Письма в Журнал технической физики*, 2019. Т. 45, № 13, С. 25-28 DOI:10.21883/PJTF.2019.13.47953.17811.
18. Petras I. *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Berlin: Springer, 2011. 218 pp.
19. Липко О. Д. Исследование хаотических и регулярных режимов фрактального осциллятора ФитцХью-Нагумо, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2018. Т. 23, № 3, С. 116-123 DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-116-123.

Информация об авторе



Алимова Назира Баходировна✉ – преподаватель кафедры "Высшей и прикладной математики", Ташкентский государственный финансовый университет, г. Ташкент, Узбекистан,  ORCID /0009-0003-9684-045X.

References

- [1] FitzHugh R. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophysical Journal*. 1961. no. 1. P. 446–446.
- [2] Nagumo J., Arimoto S., Yoshizawa S. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*. 1962. no. 50. P. 2061–2070.
- [3] Hodgkin A.L., Huxley A.F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.* 1952. no. 117(4). P. 500–544. doi: 10.1113/jphysiol.1952.sp004764 .
- [4] Ambrosio B. Qualitative analysis of certain reaction-diffusion systems of the FitzHugh-Nagumo type. *Evolution Equations and Control Theory*. 2023. vol. 12, No. 6. P. 1507–1526. DOI 10.3934/eect.2023023.
- [5] Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York. Dover Publications. 2005. 288 p.
- [6] Nakhushev A.M. *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye* [Fractional calculus and its application]. Moscow. Fizmatlit. 2003. 272 p. (In Russian).
- [7] Lipko O. D. Mathematical model of propagation of nerve impulses with regard hereditary. *Vestnik KRAUNC. Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2017. no. 1(17). P. 33–43. DOI 10.18454/2079-6641-2017-17-1-33-43.
- [8] Lipko O.D., Parovik R.I. Some aspects of investigation of limit cycles of Fitzhugh-Nagumo oscillator with degree memory. *Journal of Physics: Conference Series*. 2018. vol. 1141. 012125. DOI: 10.1088/1742-6596/1141/1/012125.
- [9] Lipko O., Parovik R. The study of chaotic and regular regimes of the fractal oscillators FitzHugh-Nagumo. *E3S Web of Conferences*. 2018. vol. 62. 02017 DOI: 10.1051/e3sconf/20186202017.
- [10] Gerasimov A. N. Generalization of the laws of linear deformation and their application to problems of internal friction. *AN SSR. Prikladnaya matematika i mekhanika*. 1948. vol. 44. no. 6. P. 62–78. (In Russian).
- [11] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent - II. *Geophysical Journal International*. 1967. vol. 13. P. 529–539.
- [12] Patnaik S., Hollkamp J.P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: A review. *Proc. R. Soc. A R. Soc. Publ.* 2020. no. 476. 20190498. DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.
- [13] Parovik R.I. Explicit Finite-Difference Scheme for the Numerical Solution of the Model Equation of Nonlinear Hereditary Oscillator with Variable-Order Fractional Derivatives. *Archives of Control Sciences*. 2016. vol. 26. no. 3. P. 429–435. DOI: 10.1515/acsc-2016-0023.
- [14] McSharry P. E., Clifford G. D., Tarassenko L., Smith L. A. A dynamical model for generating synthetic electrocardiogram signals, *IEEE transactions on biomedical engineering*, 2003. vol. 50, no. 3, P. 289–294.
- [15] Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Math*. 1901. vol. 24(1). P. 1–88.
- [16] Pskhu A.V., Rekhviashvili S.Sh. Analysis of Forced Oscillations of a Fractional Oscillator. *Technical Physics Letters*. 2018. vol. 44, no. 12. pp. 1218–1221. DOI: 10.1134/S1063785019010164.
- [17] Parovik R. I. Amplitude-Frequency and Phase-Frequency Performances of Forced Oscillations of a Nonlinear Fractional Oscillator. *Technical Physics Letters*. 2019. vol. 45. no. 7. pp. 660–663. DOI: 10.1134/S1063785019070095.
- [18] Petras I. *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Berlin: Springer, 2011. 218 p.

- [19] Lipko O. D. Investigation of regular and chaotic modes of the FitzHugh- Nagumo fractal oscillator, Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2018. vol. 23. no. 3. P. 116-123. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-23-3-116-123(In Russian).

Information about the author



Alimova Nazira Bakhodyrova ✉ – teacher of the department of "Higher and applied mathematics", Tashkent State Financial University, Tashkent, Uzbekistan,  ORCID 0009-0003-9684-045X.



Стохастическая двумодовая эредитарная модель космического динамо

Е. А. Казаков, Г. М. Водинчар*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, с. Паратунка, Елизовский район, Камчатский край, ул. Мирная, д. 7, Россия

Аннотация. Работа посвящена классу стохастических двумодовых эредитарных моделей космического динамо. Модели включают в себя два генератора магнитного поля — крупномасштабный и турбулентный (α -эффект). Влияние магнитного поля на движения среды представлено через подавление α -эффекта функционалом от компонент поля, что вводит в модель память (эредитарность). Модель описывает динамику только крупномасштабных компонент, однако учитывает возможное воздействие мелкомасштабных мод с помощью стохастического члена. Это член моделирует влияние возможной спонтанной синхронизации мелкомасштабных мод. Так же в работе представлена численная схема для решения интегро-дифференциальных уравнений модели. Численная схема состоит из двух частей: для дифференциальной части используется метод «предиктор-корректор» Адамса четвертого порядка, а для интегральной части — метод Симпсона. Основным результатом работы является обобщенная модель динамо-системы, с аддитивным добавлением случайной поправки в α -генератор. Учет такой поправки существенно разнообразит динамические режимы в модели.

Ключевые слова: гидромагнитное динамо, системы с памятью, эредитарность, интегро-дифференциальные уравнения, стохастическая модель, α -эффект, когерентные структуры.

Получение: 11.11.2024; Исправление: 13.11.2024; Принятие: 15.11.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Казаков Е. А., Водинчар Г. М. Стохастическая двумодовая эредитарная модель космического динамо // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 70-82. EDN: YFWFOR. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-70-82>.

Финансирование. Работа выполнена за счет Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № НИОКТР 124012300245-2).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*Корреспонденция: ✉ E-mail: Kazakov@ikir.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License



© Казаков Е. А., Водинчар Г. М., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)



Stochastic Two-Mode Hereditary Model of a Cosmic Dynamo

E. A. Kazakov, G. M. Vodinchar*

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034,
Paratunka, Mirnaya str. 7, Russia

Abstract. The paper is devoted to a class of stochastic two-mode hereditary models of the cosmic dynamo. The models include two magnetic field generators — large-scale and turbulent (α -effect). The influence of the magnetic field on the motion of the medium is presented through the suppression of the α -effect by a functional of the field components, which introduces memory (hereditary) into the model. The model describes the dynamics of only large-scale components, but takes into account the possible impact of small-scale modes using a stochastic term. This term models the influence of possible spontaneous synchronization of small-scale modes. The paper also presents a numerical scheme for solving the integro-differential equations of the model. The numerical scheme consists of two parts, for the differential part the Adams «predictor-corrector» method of the fourth order is used, and for the integral part the Simpson method. The main result of the work is a generalized model of a dynamo system, with an additive addition of a random correction to the α -generator. Taking into account such a correction significantly diversifies the dynamic modes in the model.

Key words: hydromagnetic dynamo, memory, heredity, integro-differential equations, stochastic model, α -effect, coherent structures.

Received: 11.11.2024; Revised: 13.11.2024; Accepted: 15.11.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Kazakov E. A., Vodinchar G. M. Stochastic two-mode hereditary model of a cosmic dynamo. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 48: 3, 70–82. EDN: YFWFOR. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-70-82>

Funding. The work was supported by IKIR FEB RAS State Task (Reg. No. NIOKTR 124012300245-2).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

*Correspondence:  E-mail: Kazakov@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Kazakov E. A., Vodinchar G. M., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



Введение

Теория гидромагнитного динамо успешно описывает существование крупномасштабных магнитных полей космических объектов (планет, звезд и галактик) [1, 2]. В простейшей форме этот механизм для космических динамо-систем представляет собой взаимную генерацию тороидальной и полоидальной компонент поля друг из друга с помощью крупномасштабных движений проводящей среды и мелкомасштабных турбулентных пульсаций [1, 3]. Работа динамо-системы носит самосогласованный характер с обратной связью.

Одним из направлений работ по динамо-системам является учет в моделях памяти (эредитарности). Обычно эта обратная связь считается мгновенной во времени и локальной в пространстве. Однако правильное описание турбулентного переноса включает свертку интегральных ядер со средним полем [4]. В работе [5] показано, что эффект памяти также сильно влияет на действие динамо.

Прямое численное моделирование для уравнений динамо требует очень больших вычислительных ресурсов. Для воспроизведения в моделях реализаций поля, сравнимых по длительности со временем существования космических объектов, приходится ограничиваться маломодовыми приближениями. Предельно возможное усечение числа мод приводит к двумодовым моделям. Даже при таком сильном пространственном усечении в моделях с памятью удается воспроизводить динамические режимы, подобные реальным, включая такие свойства, как фрактальность шкалы полярности магнитного поля и степенное распределение времени ожидания инверсии.

Авторами разработана двумодовая эредитарная модель динамо в виде следующей интегро-дифференциальной системы [6–8], в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -\eta x + y \left[\eta - ps^2 \int_0^t K(t-\tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right], \\ \frac{dy}{dt} &= -y + x \left[D - \int_0^T K(t-\tau) Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau \right].\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь $x(t)$ и $y(t)$ представляют собой амплитуды тороидальной и полоидальной компонент поля, положительные коэффициенты η, s, p, D являются управляющими параметрами модели. При $p = 0$ получим $\alpha\omega$ -динамо, при $p \neq 0$ получим $\alpha^2\omega$.

Физический смысл интегрального члена – это память в обратной связи динамо-системы, когда подавление генерации магнитного поля обеспечивается взвешенной по прошлым состояниям функцией $Q(x, y)$ от компонент поля. В реальной физической динамо-системе обратная связь обеспечивается силой Лоренца, которая квадратична по полю. Поэтому функция $Q(x, y)$ будем считать некоторой квадратичной формой своих аргументов, т.е. $Q(x, y) = Ax^2 + 2Cxy + Ay^2$, где A, C – некоторые постоянные коэффициенты, не равные нулю одновременно. При $A = 0$ подавление генератора спиральностью поля, при $C = 0$ подавление генератора энергией поля.

Доказательство существования и единственности решения системы (1) при произвольных начальных условиях приведено в работе [8].

В работе будем использовать компактную форму записи системы (1), которая имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\eta - ps^2z)y - \eta x, \\ \frac{dy}{dt} &= (D - z)x - y, \\ z &= \int_0^t K(t - \tau)Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau.\end{aligned}\tag{2}$$

Как показано в работе [9], интегральный член в системе (2) для одного класса ядер $K(t - \tau)$ с экспоненциальной асимптотикой можно устранить, введя дополнительные фазовые переменные. Система (2) при этом заменяется на систему дифференциальных уравнений с некоторыми начальными условиями на дополнительные переменные. Примером такого ядра может быть функция $K(t) = e^{-bt}$. В этом случае интегральное равенство в (2) заменится равносильным соотношением $\frac{dz}{dt} = Q(x, y) - bz$, $z(0) = 0$. Тогда при значении $p = 0$ и функции $Q(x, y) = xy$ получим классическую систему Лоренца [10]. Её динамические режимы при $\eta = 10$, $b = \frac{8}{3}$ прекрасно известны.

Стохастическая двумодовая модель

Использование маломодовых приближений всегда предполагает, что общий эффект от отброшенных мелкомасштабных мод равен нулю. Однако в действительности эти моды могут самопроизвольно синхронизироваться и их влиянием уже нельзя пренебречь. Образование таких когерентных структур хорошо известно в теории турбулентности. Эти структуры спонтанно возникают и спонтанно разрушаются [11].

Введем в систему 2 стохастический член $\xi(t)$, который описывает случайное влияние когерентных структур, которые спонтанно образуются мелкомасштабными пульсациями скорости и магнитного поля, на интенсивность α -эффекта. В зависимости от амплитуды каждой такой структуры, влияние может усиливаться или ослабевать. Введем этот член в систему, как аддитивную поправку для $z(t)$, в результате получим:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (\eta - ps^2(z + \xi_1))y - \eta x, \\ \frac{dy}{dt} &= (D - z - \xi_2)x - y, \\ z &= \int_0^t K(t - \tau)Q(x(\tau), y(\tau)) d\tau,\end{aligned}\tag{3}$$

здесь ξ_1 и ξ_2 импульсные случайные процессы, описывающие влияние синхронизировавшихся мод на генерацию α -эффектом тороидальной и полоидальной компонент.

Опишем модельную структуру этих процессов [12]. Предполагается, что k -я структура спонтанно образуется в случайный момент ϕ_k и существует случайное время θ_k . Мы пренебрегаем возможностью одновременного существования двух и более структур. Следовательно, мы имеем стохастическую возрастающую последовательность моментов времени:

$$0 < \phi_1 < \theta_1 < \phi_2 < \theta_2 < \dots < \phi_k < \theta_k < \dots \quad (4)$$

Тогда $\tau_k^W = \phi_k - \theta_{k-1}$ - случайное время ожидания формирования k -ой структуры, а $\tau_k^E = \theta_k - \phi_k$ случайное время ее существования. Синхронизация мод происходит довольно редко и существуют они недолго. Поэтому мы будем предполагать, что переменные τ_k^W имеют степенное распределение с некоторым медианным значением T_w :

$$\tau_k^W = c T_w \left(R^{\frac{1}{1-\alpha}} - 1 \right), \quad (5)$$

где $c = \left(2^{\frac{1}{\alpha-1}} - 1 \right)^{-1}$. А переменные τ_k^E имеют показательное распределение с медианным значением T_E :

$$\tau_k^E = -\frac{T_E}{\ln 2} \ln R. \quad (6)$$

Параметры T_w и T_E имеют смысл характерных времен ожидания и существования структур.

Пусть случайные величины ξ_{1k} и ξ_{2k} описывают интенсивность влияния k -ой структуры на генерацию тороидальной и полоидальной компонент. Эти интенсивности предполагаются одинаково распределенными гауссовскими случайными величинами $N(0, \sigma^2)$.

Все случайные величины τ_k^W , τ_k^E , ξ_{1k} и ξ_{2k} предполагаются независимыми между собой и при различных k .

Теперь определим процессы $\xi_i(t)$ следующим образом:

$$\xi_i(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{ik} [H(t - \tau_k) - H(t - \theta_k)], \quad i = 1, 2, \quad (7)$$

где $H(\cdot)$ - ступенчатая функция Хевисайда.

Один из возможных примеров реализации такого случайного процесса со значениями $T_w = 1$ и $T_E = 1$ представлена на рис. 1.

Реальные динамо-системы демонстрируют большое разнообразие динамических режимов: стационарные, осциллирующие, хаотические, всплески генерации (dynamo bursts). Однако, в двумодовых моделях типа (2) при фиксированных значениях управляющих параметров проблематично получать смены режимов. Но процессы ξ_i в стохастическом варианте двумодовой модели (3) являются случайными возмущениями двух из этих параметров.

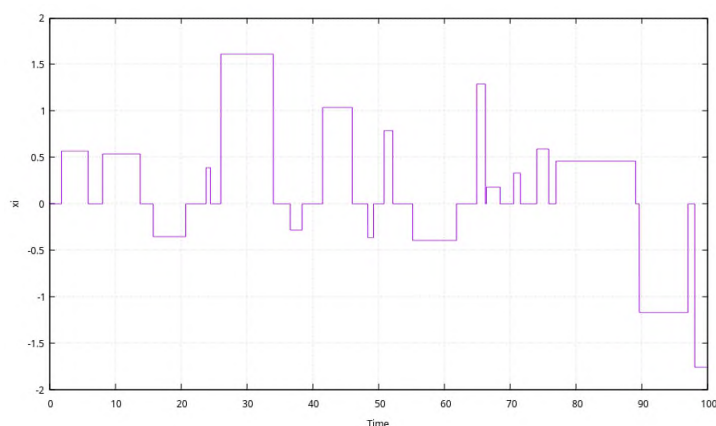


Рис. 1. Пример случайного процесса $\xi(t)$.

Figure 1. Example of a random process $\xi(t)$.

Поэтому, если выбрать значения параметров модели вблизи критических (соответствующих смене режимов), то в модели можно воспроизводить разнообразие динамики, присущее реальным динамо-системам.

Численный метод

Для численного исследования модели (2) необходимо совмещение разностных схем для дифференциальной части и квадратурной формы для интегральной части.

В качестве разностной схемы для дифференциальной части мы будем использовать схему «предиктор–корректор» на основе явной и неявной схем Адамса 4 порядка [13–15]:

$$x^p = x_n + \frac{h}{24} [55f(x_n, z_n) - 59f(x_{n-1}, z_{n-1}) + 37f(x_{n-2}, z_{n-2}) - 9f(x_{n-3}, z_{n-3})],$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{24} [9f(x^p, z^p) + 19f(x_n, z_n) - 5f(x_{n-1}, z_{n-1}) + 1f(x_{n-2}, z_{n-2})]$$

В качестве квадратурной формулы для интегрального члена используем формулу Симпсона [16], которую представим в виде:

$$z_{n+1} = L + \frac{h}{3} K_0 Q(x_{n+1}), \quad (8)$$

где L в случае четного n :

$$L = \frac{h}{3} K_n Q(x_1) + \frac{h}{6} \left(K_{n+1} Q(x_0) + K_n Q(x_1) + 4K_{n+\frac{1}{2}} Q(x_{\frac{1}{2}}) \right) + \frac{4h}{3} \sum_{i=1}^{n/2} K_{n+1-2i} Q(x_{2i}) + \frac{2h}{3} \sum_{i=1}^{n/2-1} K_{n+1-(2i+1)} Q(x_{2i+1}), \quad (9)$$

а в случае нечетного n :

$$L = \frac{h}{3} K_{n+1} Q(x_0) + \frac{4h}{3} \sum_{i=0}^{n/2} K_{n-2i+1} Q(x_{2i+1}) + \frac{2h}{3} \sum_{i=1}^{n/2-1} K_{n-2i} Q(x_{2i}). \quad (10)$$

Поскольку, семейство методов Адамса являются многошаговыми, нам необходимо для запуска итерационной процедуры начальное приближение. В частности, нам необходимо знать значения функций $f(x)$ в точках $t = 0, h, 2h, 3h$ и значения функций $Q(x)$ в точках $t = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$.

Один из возможных способов получения этих значений в следующем. Заменим ядро $K(t)$ на аппроксимирующее $J(t)$, для которого интегральный член можно исключить и перейти к дифференциальной системе. В работе [9] показано, что это можно сделать для некоторых ядер с экспоненциальной асимптотикой, в том числе, для ядер вида $Ae^{-\tilde{b}t}$ и $te^{-\tilde{b}t}$. Поэтому, при $K(0) \neq 0$ берем первый тип ядра $J(t)$, полагая $A = K(0)$, а при $K(0) = 0$ берем второй тип ядра $J(t)$. В обоих случаях, получим совпадение ядер $K(t)$ и $J(t)$ в нулевой точке. Далее легко определить $\tilde{b}$, чтобы исходное и аппроксимирующее ядра совпадали в точке $t = 3h$.

Для таких систем мы можем получить решение в точках $t = 0, \frac{1}{2}, h, 2h, 3h$ численным методом Рунге-Кутты 4 порядка. Решение системы в точках $t = 0, h, 2h, 3h$ необходимы для дифференциальной части численной схемы, а значение в точке $\frac{1}{2}$ требуется для квадратурной формы.

В зависимости от вида ядра $J(t)$ динамическая система будет иметь следующий вид:

Для ядра $J(t) = K(0)e^{-\tilde{b}t}$.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (\eta - ps^2x_3)x_2 - \eta x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= (D - x_3)x_1 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= Q(x_1, x_2) - \tilde{b}x_3. \end{aligned} \quad (11)$$

Для ядра $J(t) = te^{-\tilde{b}t}$.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (\eta - ps^2x_3)x_2 - \eta x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= (D - x_3)x_1 - x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_4(t) \\ \frac{dx_4}{dt} &= Q(x_1, x_2) - 2\tilde{b}x_4 - \tilde{b}^2x_3 \end{aligned} \quad (12)$$

Получаем алгоритм поиска начального приближения для многошагового метода:

1. Находим значения функций $f(x)$ и $Q(x)$ в точке $t = 0$.

2. С шагом $\frac{h}{2}$ находим значения $x_{\frac{1}{2}}$. Находим значение функции $Q(x_{\frac{1}{2}})$.
3. С шагом $\frac{h}{2}$ находим значения x_1 . Находим значения функций $f(x)$ и $Q(x)$ в точке $t = h$.
4. С шагом h находим значения x_1 . Находим значения функций $f(x)$ и $Q(x)$ в точке $t = 2h$.
5. С шагом h находим значения x_1 . Находим значения функций $f(x)$ и $Q(x)$ в точке $t = 3h$.

После нахождения значений всех необходимых функций, мы можем запустить вычислительную процедуру методом Адамса.

Вычислительные эксперименты

Была проведена серия вычислительных экспериментов в модели (3). Далее на рисунках представлены результаты моделирования. Вычисления проводились на системе (3) со следующими значениями управляющих параметров:

$$\eta = 10, \quad D = 24, \quad b = \frac{8}{3}, \quad ps^2 = 0,$$

$$K(t) = e^{-bt}, \quad Q(x, y) = xy.$$

На рис. 2б. показано решение $x(t)$ системы (3) без случайного воздействия ξ .

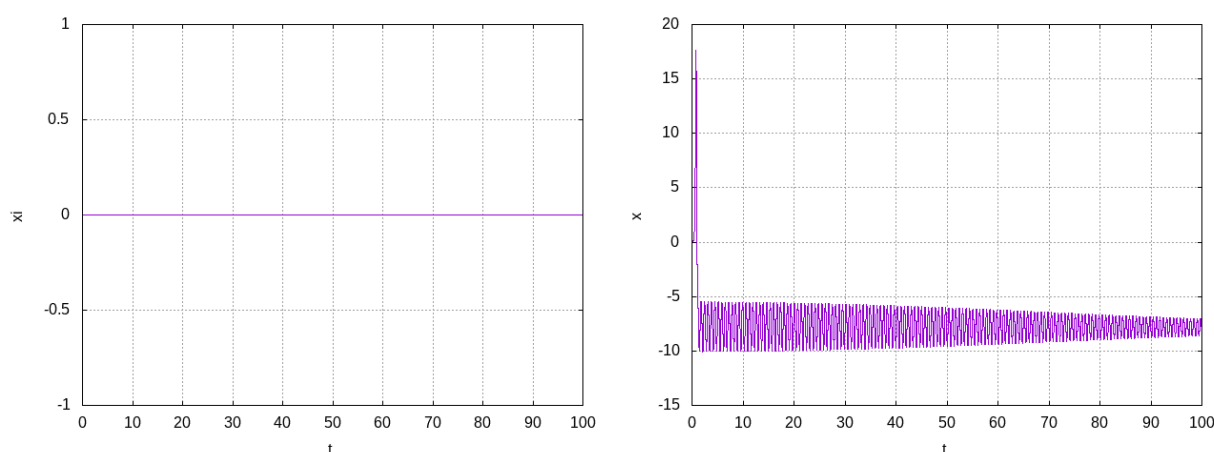
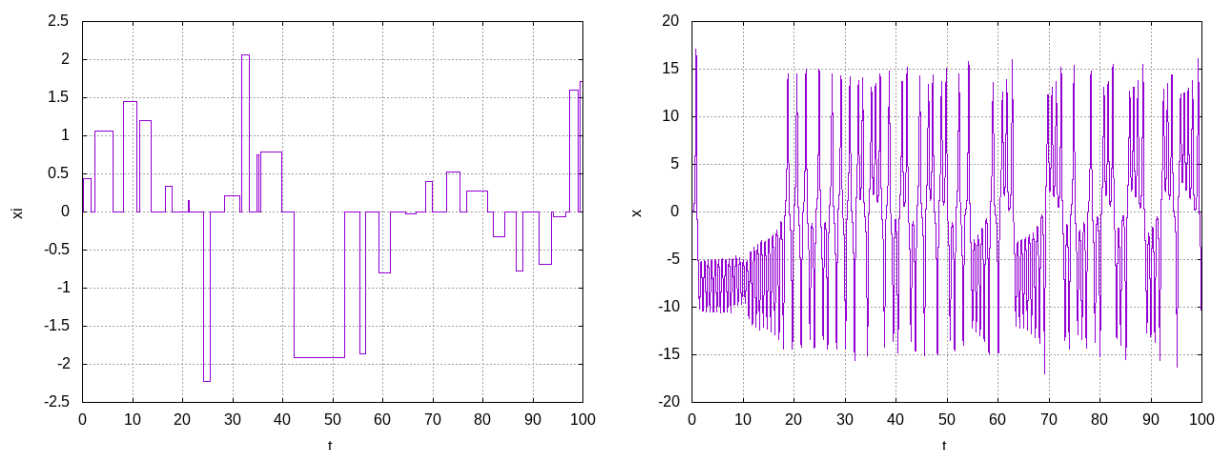
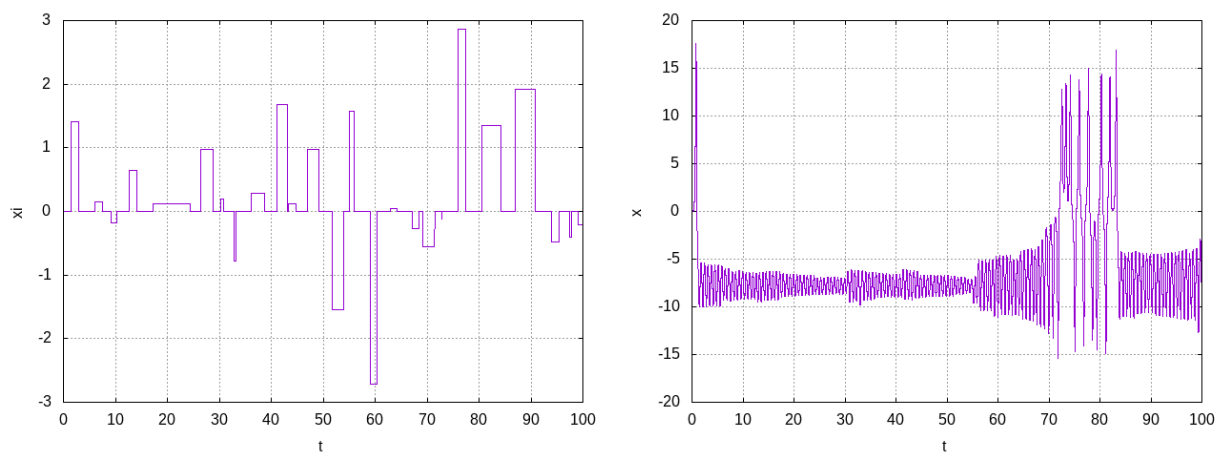


Рис. 2. Случайный процесс $\xi(t)$ (а) и фазовая координата $x(t)$ (б).

Figure 2. Random process $\xi(t)$ (a) and phase coordinate $x(t)$ (b).

На рис. 3б изображено решение $x(t)$ системы (3) с случайным воздействием $\xi(t)$ приведенным на рис. 3а.

Рис. 3. Случайный процесс $\xi(t)$ (a) и фазовая координата $\chi(t)$ (b).Figure 3. Random process $\xi(t)$ (a) and phase coordinate $\chi(t)$ (b).Рис. 4. Случайный процесс $\xi(t)$ (a) и фазовая координата $\chi(t)$ (b).Figure 4. Random process $\xi(t)$ (a) and phase coordinate $\chi(t)$ (b).

Еще одна реализация случайного процесса и его влияния на систему (3) представлены на рис. 4.

Теперь рассмотрим случай, когда система (2) без случайного воздействия имеет хаотический режим динамики рис. 5b. Для этого зафиксируем значения управляющих параметров следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta &= 10, \quad D = 21, \quad b = 2, \quad ps^2 = 0, \\ K(t) &= e^{-bt}, \quad Q(x, y) = xy. \end{aligned} \quad (13)$$

На рис. 6 представлен результат моделирования системы (3) со значениями управляющих параметров (13) и влиянием случайного процесса.

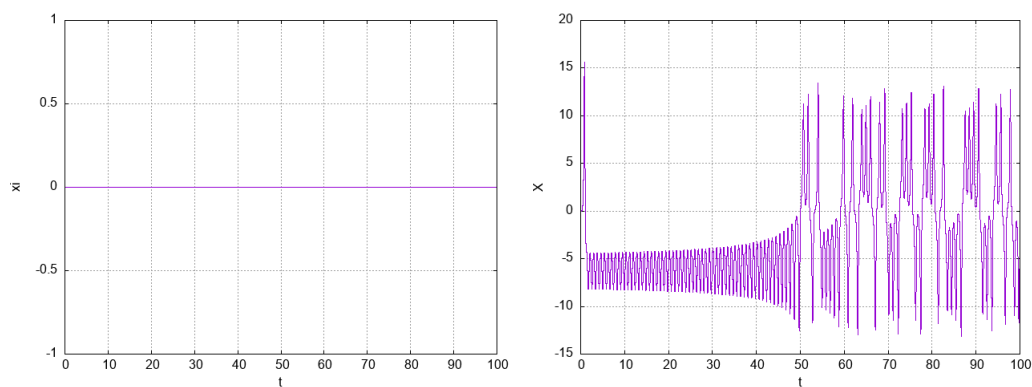


Рис. 5. Случайный процесс $\xi(t)$ (a) и фазовая координата $\chi(t)$ (b).
Figure 5. Random process $\xi(t)$ (a) and phase coordinate $\chi(t)$ (b).

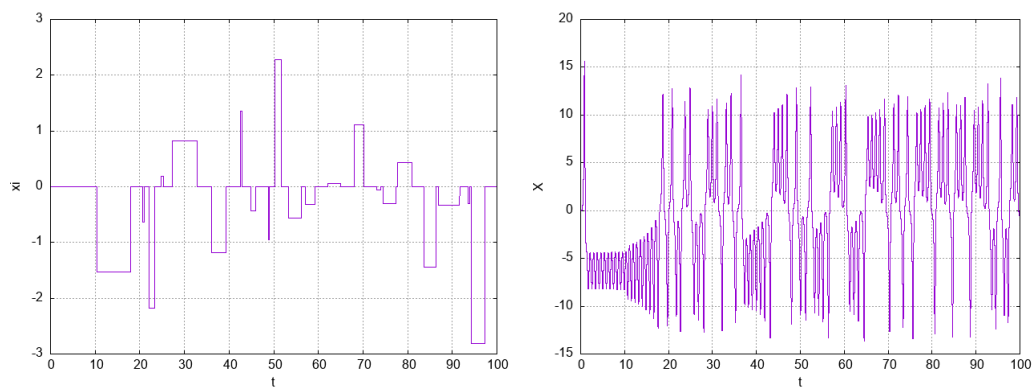


Рис. 6. Случайный процесс $\xi(t)$ (a) и фазовая координата $\chi(t)$ (b).
Figure 6. Random process $\xi(t)$ (a) and phase coordinate $\chi(t)$ (b).

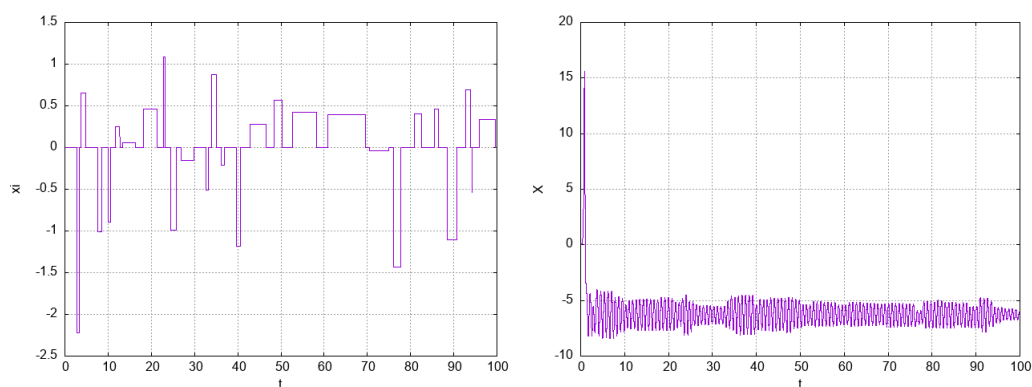


Рис. 7. Случайный процесс $\xi(t)$ (a) и фазовая координата $\chi(t)$ (b).
Figure 7. Random process $\xi(t)$ (a) and phase coordinate $\chi(t)$ (b).

На рис. 7 представлена еще одна реализация случайного процесса и его влияния на систему (3) с управляющими параметрами (13). На данном примере видно, что случайное воздействие на хаотическую систему может подавлять хаотическое поведение.

Заключение

В данной работе был представлен метод генерации случайного процесса моделирующий влияния спонтанно возникающих и спонтанно разрушающихся структур. Реализован этот метод в виде случайного процесса, включающий в себя набор случайных величин распределенных по разным законам распределения, так например интенсивность влияния когерентных структур описывается гауссовским распределением, а время ожидания k -ой структуры описывается степенным распределением, в свою очередь, время существования структуры, показательным.

В работе была обобщена модель космических динамо-систем, аддитивным образом добавлена случайная поправка в α -генератор, что позволило получить, при статично заданных значениях управляющих параметров, резкие смены режимов динамики, включая появление промежутков прекращения генерации – остановки динамо.

Список литературы

1. Зельдович Я. Б., Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д. *Магнитные поля в астрофизике*. М.: Ижевск: НИЦ «РХД», 2006.
2. Krause F., Rädler K.-H. *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. New York: PergamonPress, 1980.
3. Merrill R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*. London: Academic Press, 1996.
4. Brandenburg A. Memory effects in turbulent transport, *Astrophys. J*, 2009. vol. 706, pp. 712–726.
5. Hori K., Yoshida S. Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity, *Geophys. Astro. Fluid.*, 2008. vol. 102, pp. 601–632.
6. Vodinchar G. Hereditary Oscillator Associated with the Model of a Large-Scale $\alpha\omega$ -Dynamo, *Mathematics*, 2020. vol. 8(11), pp. 2065 DOI: 10.3390/math8112065.
7. Казаков Е. А. Эредитарная маломодовая модель динамо, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2021. Т. 35(2), С. 40-47 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47.
8. Казаков Е.А. Двухмодовая модель гидромагнитного динамо с памятью, *Вычислительные технологии*, 2022. Т. 27(6), С. 19-32 DOI: 10.25743/ICT.2022.27.6.003.
9. Водинчар Г. М., Казаков Е.А. Исключение интегрального члена в уравнениях одной эредитарной системы, связанной с задачей гидромагнитного динамо, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, 2023. Т. 42(1), С. 180-190 DOI: doi.org/10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190.
10. Vodinchar G., Kazakov E. The Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory, *E3S Web of Conf*, 2018. vol. 62 DOI: 10.1051/e3sconf/20186202011.
11. Колесниченко А. В., Маров М. Я. *Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред*. М.: БИНОМ, 2009.
12. Vodinchar G., Feshchenko L. Fractal Properties of the Magnetic Polarity Scale in the Stochastic Hereditary $\alpha\omega$ -Dynamo Model, *Fractal Fract*, 2022. vol. 6(6), pp. 328 DOI: 10.3390/math8112065.
13. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. М.: Наука, 1968.
14. Калиткин Н. Н. *Численные методы*. М.: Наука, 1978.

15. Тутуева А. В., Бутусов Д. Н., Копец Е. Е., Рыбин В. Г., Давидчук А. Г. Полужавные многошаговые методы Адамса-Башфорта-Мултона при решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений, *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*, 2021. Т. 64, № 8, С. 599-607..
16. Moheuddin M.M., Titu M.A.S., Hossai S.A New Analysis of Approximate Solutions for Numerical Integration Problems with Quadrature-based Methods, *Pure and Applied Mathematics Journal*, 2020. vol. 9, no. 3, pp. 46-54, DOI: 0.11648/j.pamj.20200903.11.

Информация об авторах



Казakov Евгений Анатольевич ✉ – младший научный сотрудник лаборатории электромагнитных излучений Института космofизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия, ORCID 0000-0001-7235-4148.



Водинчар Глеб Михайлович ✉ – кандидат физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов Института космofизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия, ORCID 0000-0002-5516-1931.

References

- [1] Zeldovich Ya.B., Ruzmaikin A.A., Sokolov D.D. Magnitie polay v astrofizike [Magnetic fields in astrophysics] Moscow-Izhevsk: SIC «RHD», 2006. (In Russian).
- [2] Krause F., Rädler K.-H. Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. - New York: PergamonPress, 1980.
- [3] Merrill R.T., McElhinny M.W., McFadden P.L. The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle. London: Academic Press, 1996.
- [4] Brandenburg A. Memory effects in turbulent transport, *Astrophys. J.*, 2009. vol. 706. P. 712–726.
- [5] Hori K., Yoshida S. Non-local memory effects of the electromotive force by fluid motion with helicity and two-dimensional periodicity. *Geophys. Astro. Fluid.* 2008. vol. 102. P. 601–632.
- [6] Vodinchar G.M. Hereditary Oscillator Associated with the Model of a Large-Scale $\alpha\omega$ -Dynamo, *Mathematics*, 2020, vol. 8, no. 11, p. 2065. DOI: 10.3390/math8112065.
- [7] Kazakov E. A. Hereditary low-mode dynamo model. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2021. vol. 35. no. 2. P. 40-47. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-40-47 (In Russian).
- [8] Kazakov E. A. Two-mode model of a hydromagnetic dynamo with memory. *Computational Technologies.* 2022. vol. 27. no. 6. P.19–32. DOI:10.25743/ICT.2022.27.6.003. (In Russian).
- [9] Vodinchar G. M., Kazakov E. A. Elimination of the integral term in the equations of one hereditary system related to the hydromagnetic dynamo. *Vest. KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2023. vol. 42. no. 1. P. 180-190. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-42-1-180-190. (In Russian).
- [10] Vodinchar G., Kazakov E. The Lorenz system and its generalizations as dynamo models with memory. *E3S Web of Conf.* 2018, vol. 62. 02011. DOI: 10.1051/e3sconf/20186202011.
- [11] Kolisnichenko A. V., Marov M. Ya. Turbulence and self-organization. Problems of modeling space and natural environments. Moscow. Binom, 2009. (In Russian).
- [12] Vodinchar G., Feshchenko L. Fractal Properties of the Magnetic Polarity Scale in the Stochastic Hereditary $\alpha\omega$ -Dynamo Model, *Fractal Fract.*, 2022. vol. 6, no. 6, p. 328. DOI: 10.3390/math8112065.
- [13] Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnih rabotnikov i inzhenerov* [Handbook of mathematics for scientists and engineers]. Moscow. Nauka. 1968. (In Russian).
- [14] Kalitkin N. N. Numerical methods Moscow: Science. 1978. 512. (In Russian).
- [15] Tutueva A. V., et al. G. Semi-explicit multistep Adams-Bashforth-Moulton methods for solving stiff systems of ordinary differential equations. *Jour. of Instrum. Enginer.* 2021. vol. 64, no. 8. P. 599-607 (in Russian).
- [16] Moheuddin M.M., Titu M.A.S., Hossain S. A New Analysis of Approximate Solutions for Numerical Integration Problems with Quadrature-based Methods. *Pure and Applied Mathem. Jour.* 2020. vol. 9. no. 3. P. 46-54. DOI: 10.11648/j.pamj.20200903.11.

Information about the authors



Kazakov Evgeny Anatolevich ✉ – Junior Researcher, Lab. of electromagnetic propagation, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia,
 ORCID 0000-0001-7235-4148.



Vodinchar Gleb Mikhailovich ✉ – Ph. D. (Phys. & Math.), Leading Researcher, Lab. for Simulation of Physical Processes, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia,
 ORCID 0000-0002-5516-1931.



Математическая дробная модель Зимана для описания сердечных сокращений

Г. С. Исраилжанова^{*1}, Ш. Т. Каримов¹, Р. И. Паровик^{2,3}

¹ Ферганский государственный университет, 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, д. 19, Узбекистан

² Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 4, Узбекистан

³ Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683009, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, д. 4. Россия

Аннотация. В статье предлагается принципиально новое обобщение ранее известной математической модели Зимана сердечных сокращений за счет электрохимического воздействия. Это обобщение обусловлено наличием эффектов наследственности в колебательной системе, которые указывают на то, что она может сохранять информацию о своих предыдущих состояниях. С точки зрения математики свойство наследственности можно описать с помощью интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа со степенными разностными ядрами или с помощью производных дробных порядков. В статье были введены в модельные уравнения Зимана операторы дробного дифференцирования в смысле Герасимова-Капуто, а также характерное время для согласования размерностей в модельных уравнениях. Полученная математическая дробная модель Зимана исследовалась в силу ее нелинейности с помощью численных методов – нелокальной конечно-разностной схемы. Численный алгоритм был реализован на языке Python в среде PyCharm 2024.1, в которой была реализована возможность визуализации расчетов с помощью осциллограмм и фазовых траекторий. Проведена интерпретация результатов моделирования.

Ключевые слова: сердечные сокращения, дробная математическая модель Зимана, дробная производная Герасимова-Капуто, численный алгоритм, осциллограмма, фазовая траектория.

Получение: 30.09.2024; Исправление: 01.11.2024; Принятие: 14.11.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Исраилжанова Г. С., Каримов Ш. Т., Паровик Р. И. Математическая дробная модель Зимана для описания сердечных сокращений // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 83-94. EDN: SGWSTH. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-83-94>.

Финансирование. Исследование не проводилось при поддержке фондов

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:**  E-mail: gulbaxor19802020@gmail.com

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Исраилжанова Г. С., Каримов Ш. Т., Паровик Р. И., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)





Mathematical Fractional Zeeman Model for Describing Cardiac Contractions

G. S. Israyiljanova^{*1}, *Sh. T. Karimov*¹, *R. I. Parovik*^{2,3}

¹ Fergana State University, 150100, Fergana, Murabbiylar str., 19, Uzbekistan

² National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 100174, Tashkent, Universitetskaya str., 4, Uzbekistan

³ Kamchatka State University named after Vitus Bering, 683009, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya str., 4. Russia

Abstract. The article proposes a fundamentally new generalization of the previously known mathematical Zeeman model of heart contractions due to electrochemical action. This generalization is due to the presence of heredity effects in the oscillatory system, which indicate that it can store information about its previous states. From the mathematical point of view, the property of heredity can be described using integro-differential equations of the Volterra type with power difference kernels or using fractional derivatives. In the article, fractional differentiation operators in the sense of Gerasimov-Caputo were introduced into the Zeeman model equations, as well as the characteristic time for matching dimensions in the model equations. The resulting mathematical fractional Zeeman model was studied due to its nonlinearity using numerical methods - a nonlocal finite-difference scheme. The numerical algorithm was implemented in Python in the PyCharm 2024.1 environment, which implemented the ability to visualize calculations using oscillograms and phase trajectories. The interpretation of the modeling results was carried out.

Key words: heart contractions, fractional mathematical Zeeman model, fractional derivative of Gerasimov-Caputo, numerical algorithm, oscillogram, phase trajectory.

Received: 30.09.2024; Revised: 01.11.2024; Accepted: 14.11.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Israyiljanova G.S., Karimov Sh.T., Parovik R.I. Mathematical fractional Zeeman model for describing cardiac contractions. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 48: 3, 83-94. EDN: SGWSTH. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-83-94>

Funding. The research was not supported by any foundation.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:**  E-mail: gulbaxor19802020@gmail.com

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Israyiljanova G. S., Karimov Sh. T., Parovik R. I., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



Введение

Сердечные сокращения представляют собой сложный и высокоорганизованный процесс, обеспечивающий эффективную работу сердечно-сосудистой системы. Эти процессы являются результатом взаимодействия различных физиологических механизмов, включая электрическую активность миокарда, механическую работу сердца и нейрогуморальную регуляцию. Понимание этих механизмов имеет критическое значение для диагностики и лечения сердечно-сосудистых заболеваний, которые остаются одной из основных причин смертности в мире [1].

Современные исследования сердечных сокращений охватывают широкий спектр тем, включая электрофизиологию, механофизиологию, а также молекулярные и клеточные основы сердечной функции. Например, работа по изучению электрической активности сердца показала, что нарушения в проведении импульсов могут приводить к аритмиям и другим серьезным состояниям [2]. Кроме того, исследования механики сердечного сокращения, такие как работа по оценке сократительной способности миокарда, играют важную роль в понимании патофизиологии сердечной недостаточности [3].

В последние годы наблюдается рост интереса к новым методам визуализации и мониторинга сердечной деятельности, таким как магнитно-резонансная томография и ультразвуковая диагностика, которые позволяют более точно оценивать функции сердца и выявлять патологии на ранних стадиях [4]. Эти достижения открывают новые горизонты для клинической практики и научных исследований, что подчеркивает необходимость дальнейшего изучения процессов сердечных сокращений.

Таким образом, исследование процессов сердечных сокращений не только углубляет наши знания о физиологии сердца, но и способствует разработке более эффективных методов диагностики и лечения сердечно-сосудистых заболеваний, в том числе с помощью методов математического моделирования. В данной статье мы рассмотрим некоторые аспекты математического моделирования сердечных сокращений и предложим на основе уже известной модели новую модель сердечных сокращений.

В вопросах математического моделирования работы сердца применяют в основном модели двух типов: динамические и структурно-функциональные. Все они в качестве математического аппарата используют дифференциальные уравнения (обыкновенные или в частных производных, а также их системы). Структурно-функциональные модели более сложны, так как необходимо для их решения знать множество параметров от геометрических размеров, например, знать размеры сердечных камер, до физических свойств, например, знать эластичность сосудов и т.д. Как правило без экспериментальных данных тут невозможно обойтись. Поэтому мы остановимся на более простой динамической (механической) модели работы сердца, которая описывает сокращение сердечной мышцы - модель Зимана [5].

Сокращение мышечных волокон в рамках модели Зимана происходит за счет электрохимического воздействия. Как правило, мышечное волокно быстро

сокращается и остается некоторое время в таком состоянии, а затем быстро возвращается к расслабленному состоянию. Далее процесс повторяется. Исходя из выше сказанного, естественным образом здесь возникают релаксационные колебания, которые можно описать с помощью нелинейного осциллятора автоколебательного (Льенаровского) типа, например, вида:

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{x}(t) = x(t) - x^3(t) - y(t), \\ \dot{y}(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $x(t), y(t) \in C^1[0, T]$ — функции решения, где $x(t)$ — длина мышечного волокна, $y(t)$ — функция, отвечающая за электрохимическое управление сокращением мышечного волокна; $t \in [0, T]$ — время рассматриваемого процесса; $T > 0$ — время моделирования; $0 < \varepsilon \ll 1$ — положительная постоянная (малый параметр).

Замечание 1. Задачу Коши (1) будем называть классической моделью Зимана или просто моделью Зимана.

В настоящей работе предлагается обобщение модели Зимана (1) на случай учета наследственности [6]. Эффект наследственности (памяти) или в западной литературе эредитарности в колебательных системах означает, что текущее состояние системы зависят от предыдущих состояний. Это может быть связано с физическими свойствами материалов или структур, которые изменяются в результате предыдущих нагрузок, свойствами среды в которых протекает процесс, например, вязкоупругие пластичные среды и т.д.

В случае учета наследственности, с точки зрения ее математического описания, мы имеем дело с интегро-дифференциальными уравнениями с разностными степенными ядрами, которые изучаются в рамках теории дробного исчисления [7, 8].

Постановка задачи и методика ее решения

Рассмотрим следующую задачу Коши.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \partial_{0t}^\alpha x(t) = x(t) - x^3(t) - y(t), \\ \varepsilon_2 \partial_{0t}^\beta y(t) = x(t), \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon \theta^{\alpha-1}$, $\varepsilon_2 = \theta^{\beta-1}$, θ — параметр, имеющий размерность времени.

Дробные производные порядков $0 < \alpha, \beta < 1$ в (2) понимаются в смысле Герасимова-Капуто [9, 10]:

$$\partial_{0t}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}, \quad \partial_{0t}^\beta y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\dot{y}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\beta}. \quad (3)$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Замечание 2. Из (2) следует, что при $\alpha = \beta = 1$ мы получаем классическую модель Зимана (1).

Замечание 3. Задачу Коши (2) будем называть дробной моделью Зимана (ДМЗ).

Замечание 4. Необходимо отметить, что определенный интерес представляет исследование вопроса существования и единственности решения задачи Коши (2) [11].

В силу нелинейности ДМЗ, далее мы применяем численные методы для ее исследования. Численные методы основаны на построении нелокальных конечно-разностных схем [12]. Введем равномерную расчетную сетку для этого разобьем временной интервал $t \in [0, T]$ на N равных частей с шагом дискретизации $\tau = T/N$. Тогда функции решения в задаче Коши (2) перейдут в сеточные функции: $x(t_k) = x_k, y(t_k) = y_k, t_k = k\tau, k = 0, \dots, N$.

Операторы дробных производных (3) будут иметь аппроксимации:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) \approx A \sum_{j=0}^{k-1} w_j^{\alpha} (x_{k-j+1} - x_{k-j}), \partial_{0t}^{\beta} y(t) \approx B \sum_{j=0}^{k-1} w_j^{\beta} (y_{k-j+1} - y_{k-j}). \quad (4)$$

где весовые коэффициенты: $w_j^{\alpha} = (j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}$, $w_j^{\beta} = (j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}$, $A = \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$, $B = \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)}$.

Подставляя соотношения (4) в (2) с учетом сеточных функций, получаем следующую дискретную задачу:

$$\begin{cases} x_{k+1} = \frac{1}{A\varepsilon_1} \left((1 + A\varepsilon_1) x_k - x_k^3 - y_k - A\varepsilon_1 \sum_{j=1}^{k-1} w_j^{\alpha} (x_{k-j+1} - x_{k-j}) \right), \\ y_{k+1} = \frac{1}{B\varepsilon_2} \left(x_k + B\varepsilon_2 y_k - B\varepsilon_2 \sum_{j=1}^{k-1} w_j^{\beta} (y_{k-j+1} - y_{k-j}) \right), k = 1, \dots, N-1, \\ x_0 = a, y_0 = b. \end{cases} \quad (5)$$

Задача (5) представляет собой нелокальную явную конечно-разностную схему для численного решения задачи Коши (2).

Замечание 5. Нелокальная конечно-разностная схема (4) обладает первым порядком точности и условно сходится [12]. Однако в статье нас не будет интересовать высокая точность численного алгоритма, а устойчивость и сходимости метода мы можем контролировать, уменьшая шаг расчетной сетки, например, по правилу Рунге.

Замечание 6. В силу того, что в задаче Коши (2) присутствует малый параметр ε , то необходимо для численной схемы (5) выбирать достаточно плотную расчетную сетку. В дальнейших расчетах мы будем полагать $\varepsilon = 0.001$, а число узлов расчетной сетки N будем выбирать достаточно большим.

Результаты моделирования

Численный алгоритм (5) был реализован на языке Python в среде PyCharm 2024.1 [13]. Далее с помощью, разработанной компьютерной программы была проведена визуализация результатов моделирования при различных значениях параметров модели (2) и дана их интерпретация.

Пример 1. (Классическая модель Зимана). Значения параметров: $\alpha = \beta = 1$, $x_0 = 1, y_0 = 0.3, \varepsilon = 0.001, t \in [0, 50], N = 2 \cdot 10^5$. Результаты моделирования с помощью численного алгоритма (5) приведены на рис. 1.

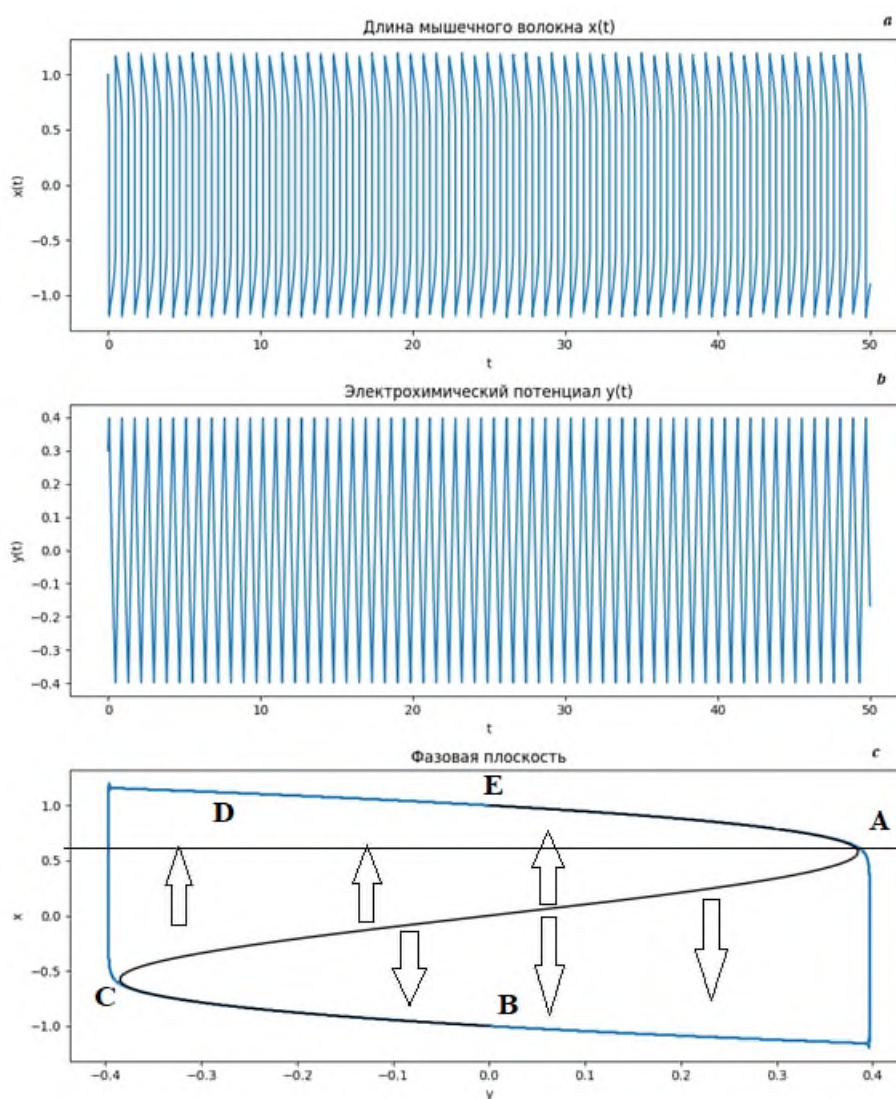


Рис. 1. Классическая модель Зимана: а — изменение мышечного волокна; б — изменение электрохимического потенциала; в — фазовая траектория на плоскости.

Figure 1. Classical Zeeman model: а — change in muscle fiber; б — change in electrochemical potential; в — phase trajectory on the plane.

На рис.1 приведены осциллограмма изменения длины мышечного волокна (рис.1a), осциллограмма изменения электрохимического потенциала (рис. 1b) и фазовая траектория (рис. 1c). Осциллограммы обладают постоянной амплитудой и частотой, фазовая траектория представляет собой предельный устойчивый цикл, который содержит изоклину $y(t) = x(t) - x^3(t)$. Механизм сердечных сокращений здесь работает следующим образом: из устойчивой точки равновесия Е происходит переход в близкое состояние в точку А, $(x = 1/\sqrt{3})$. Далее мышечное волокно быстро сокращается и при этом координата x убывает вдоль траектории от точки А до точки В. Быстрая релаксация мышечного волокна происходит на участке траектории CD, после чего происходит возвращение к положению равновесия Е. Далее процесс повторяется и мы получаем цикл EABCD.

Пример 2. (Дробная модель Зимана). Значения параметров: $\alpha = 0.9$, $\theta = \beta = 1$ и $N = 10^5$, а остальные значения параметров выберем из Примера 1.

Результаты расчета приведены на рис.2.

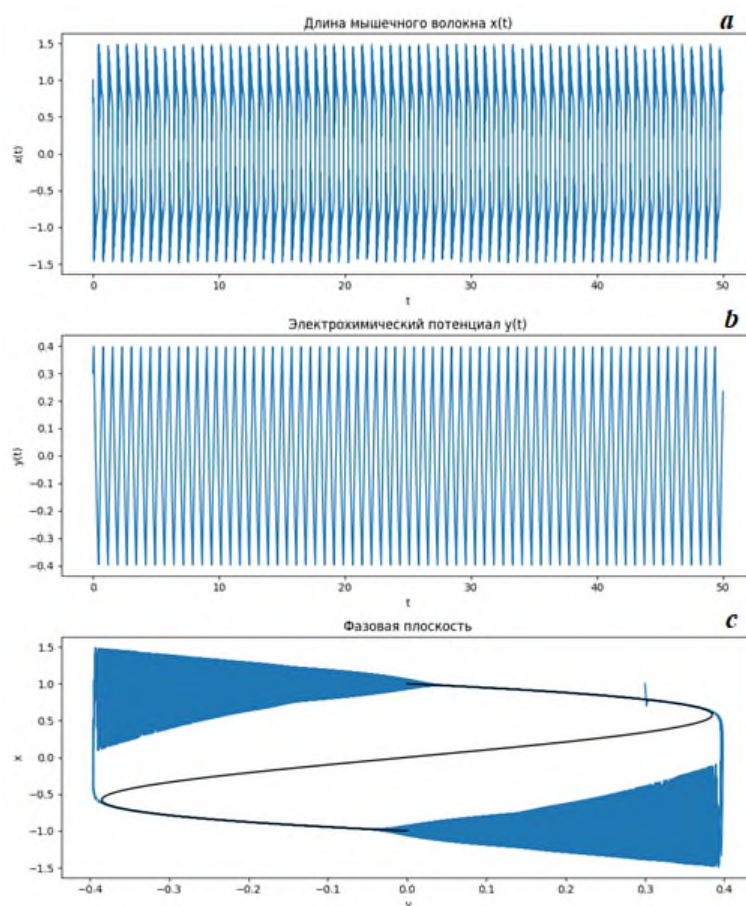


Рис. 2. Дробная модель Зимана: а — изменение мышечного волокна; б — изменение электрохимического потенциала; в — фазовая траектория на плоскости.

Figure 2. Fractional Zeeman model: a — change in muscle fiber; b — change in electrochemical potential; c — phase trajectory on the plane.

На рис. 2 мы видим, что переход к положению равновесия происходит в режиме затухающих колебаний. Рассмотрим другие значения параметров: $\alpha = 0.9$, $\beta = 0.8$, $\theta = \varepsilon = 0.1$, $T = 100$, $N = 2 \cdot 10^4$ и $N = 10^5$, остальные значения параметров оставим без изменения.

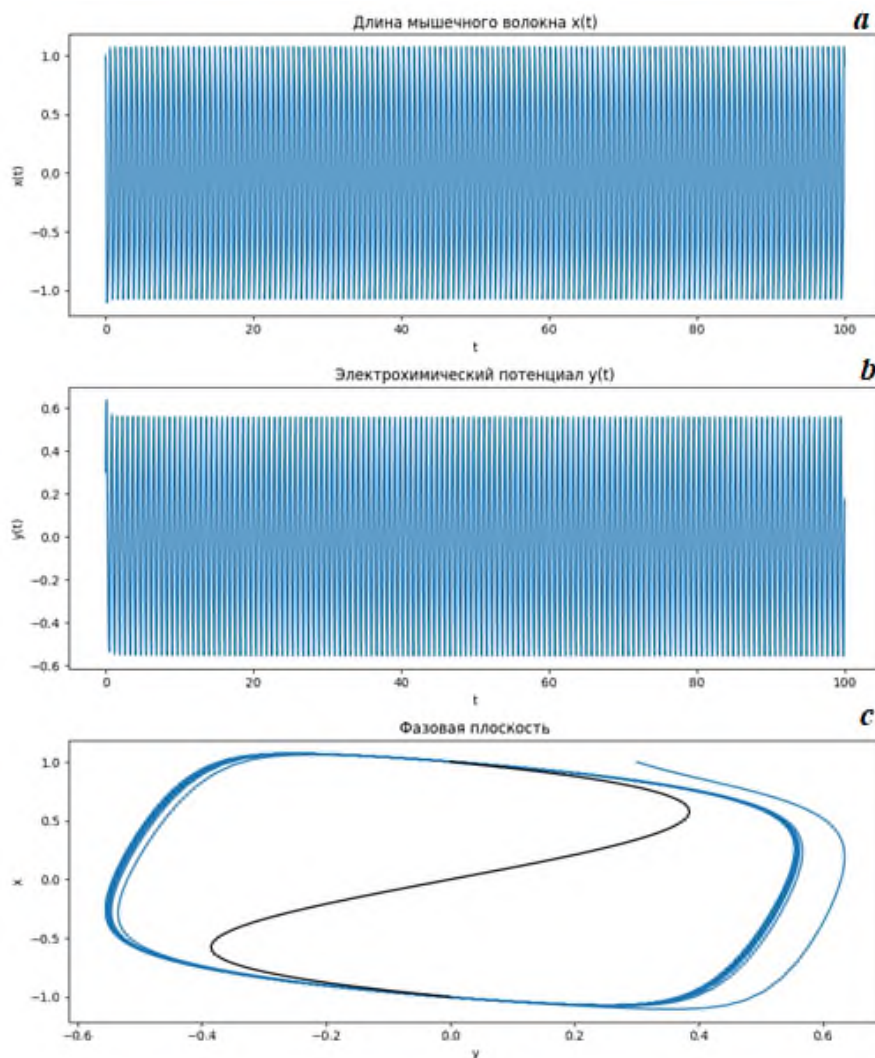


Рис. 3. Дробная модель Зимана при $\theta = 0.1$: а — изменение мышечного волокна; б — изменение электрохимического потенциала; с — фазовая траектория на плоскости.

Figure 3. Fractional Zeeman model at $\theta = 0.1$: а — change in muscle fiber; б — change in electrochemical potential; с — phase trajectory on the plane.

На рис.3 видно, что осциллограммы и фазовая траектория соответствуют предельному циклу, а значение параметра θ влияет на частоту колебаний, чем меньше значение, тем больше частота.

Увеличим значение параметра $\theta = 5$ и проведем расчеты по нелокальной явной конечно-разностной схеме (5), результаты которых приведены на рис. 4.

На рис. 4 видно, что чем больше значение параметра θ , тем меньше частота колебаний. Кроме того, фазовые траектории на рис. 3 и 4 визуальнo имеют одинаковую форму, что указывает на то, что параметр θ на нее не влияет.

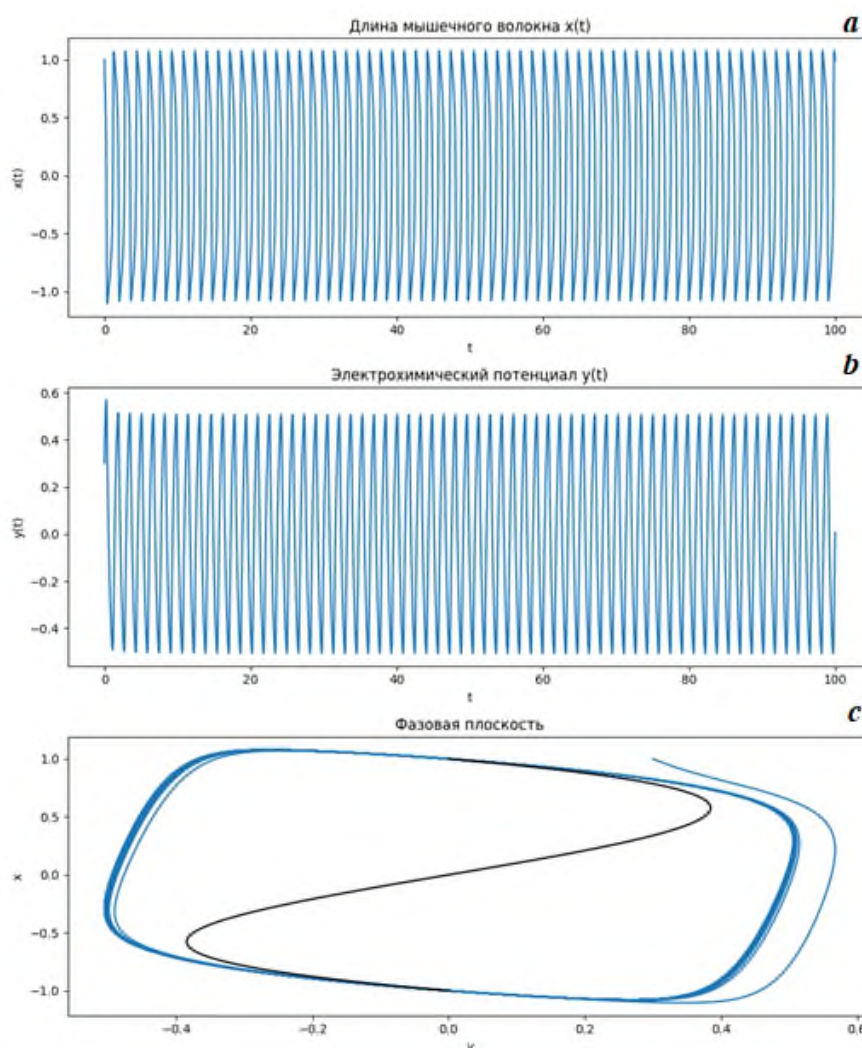


Рис. 4. Дробная модель Зимана при $\theta = 5$: а — изменение мышечного волокна; б — изменение электрохимического потенциала; с — фазовая траектория на плоскости.

Figure 4. Fractional Zeeman model at $\theta = 5$: а — change in muscle fiber; б — change in electrochemical potential; с — phase trajectory on the plane.

На рис. 5 приведены расчеты осциллограмм и фазовых траекторий при других начальных значениях $x_0 = 0.7, y_0 = 0.3$ (остальные значения брались без изменения как на рис. 4), которые указывают на устойчивость предельного цикла. Последнее указывает на то, что если дробная динамическая система является льянаровской, то существует устойчивый предельный цикл. Этот вывод нуждается в строгом обосновании, так как классический критерий Бендиксона [14] здесь не может быть применим.

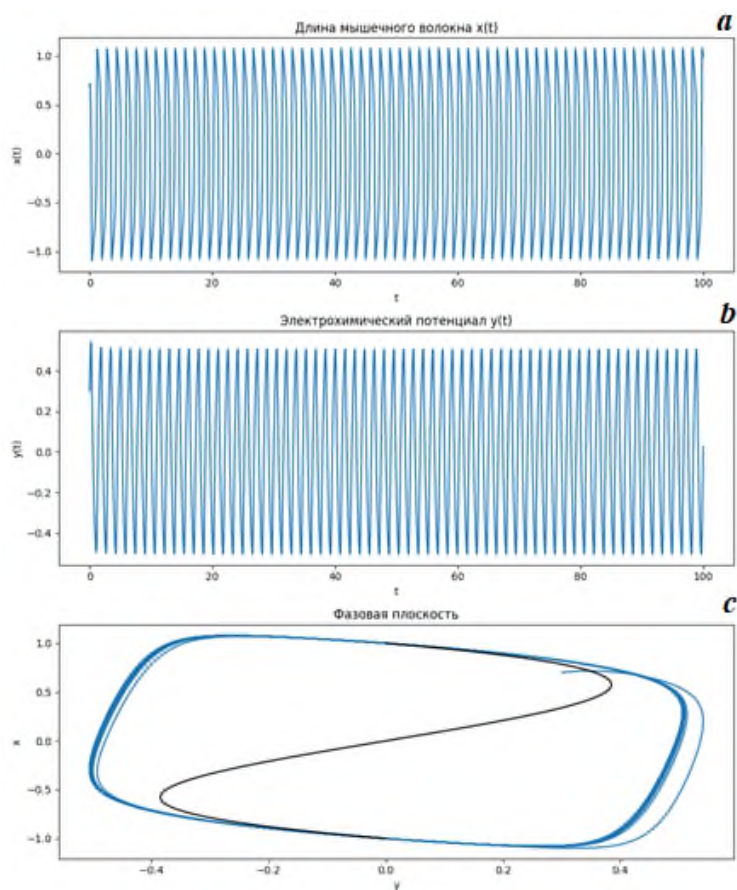


Рис. 5. Дробная модель Зимана при $x_0 = 0.7, y_0 = 0.3$: а — изменение мышечного волокна; б — изменение электрохимического потенциала; с — фазовая траектория на плоскости

Figure 5. Fractional Zeeman model at $x_0 = 0.7, y_0 = 0.3$: а — change in muscle fiber; б — change in electrochemical potential; с — phase trajectory on the plane.

Закключение

В статье была предложена дробная модель Зимана сердечных сокращений с учетом наследственности. Эффекты наследственности были учтены в модельных уравнениях с помощью дробных производных Герасимова-Капуто. Исследование предложенной модели было проведено с помощью нелокальной явной конечно-разностной схемы первого порядка точности, которая была реализована в среде PyCharm 2024.1 на языке программирования Python. Компьютерная программа позволяет производить расчеты осциллограмм и фазовых траекторий при различных значениях параметров модели.

Результаты моделирования показали, что дробная модель Зимана может обладать релаксационными колебаниями, которые на фазовой плоскости соответствуют аттрактору или предельному циклу. Предельный цикл является устойчивым. Дополнительный параметр влияет на частоту колебаний и не влияет на форму предельного цикла.

Дальнейшее развитие дробной модели Зимана – качественное исследование динамических режимов, построение бифуркационных диаграмм и карт динамических режимов по аналогии с работой [15].

Список литературы

1. World Health Organization, Cardiovascular diseases (CVDs). Retrieved from WHO website, 2021.
2. Zipes D. P., Jalife J. *Cardiac Electrophysiology: From Cell to Bedside*: Elsevier, 2018.
3. Nishimura R. A., et al. Mechanisms of Heart Failure, *Circulation Research*, 2020. vol. 126(10), pp. 1404-1420.
4. Klein A. L., et al. Noninvasive Imaging of the Heart: Advances and Applications, *Journal of the American College of Cardiology*, 2019. vol. 73(1), pp. 1-15.
5. Zeeman E. C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulse / *Salvador symposium on Dynamical Systems*, Academic Press, 1973. 683-741 pp.
6. Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005. 288 pp.
7. Nakhushev A. M. *Fractional calculus and its application*. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 pp. (in Russian)
8. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam, 2006. 523 pp.
9. Gerasimov A. N. Generalization of the laws of linear deformation and their application to problems of internal friction, *Academy of Sciences of the SSR. Applied Mathematics and Mechanics*, 1948. vol. 44, no. 6, pp. 62-78 (in Russian).
10. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II, *Geophysical Journal International*, 1967. vol. 13, pp. 529-539.
11. Parovik R. I. Existence and uniqueness of the Cauchy problem for a fractal nonlinear oscillator equation, *Uzbek Mathematical Journal*, 2017. no. 4, pp. 110-118 (in Russian).
12. Parovik R. I. On a Finite-Difference Scheme for an Hereditary Oscillatory Equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2021. vol. 253, no. 4, pp. 547-557.
13. Van Horn B.M. II, Nguyen Q. *Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications like a Pro with the Ultimate Python Development Tool*. Birmingham, UK: Packt Publishing Ltd., 2023.
14. Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, 1901. vol. 24(1), pp. 1-88.
15. Parovik R. I., Yakovleva T. P. Construction of maps for dynamic modes and bifurcation diagrams in nonlinear dynamics using the Maple computer mathematics software package, *Journal of Physics: Conference Series*, 2022. vol. 2373, 52022.

Информация об авторах



Исраилжанова Гулбахор Саминжановна ✉ – соискатель кафедры прикладной математики и информатики, Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан, ORCID 0009-0007-9356-3476.



Каримов Шахобиддин Туйчибоевич ✉ – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики и информатики, Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан, ORCID 0000-0001-8325-998X.



Паровик Роман Иванович ✉ – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры информатики и математики, Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, г. Петропавловск-Камчатский, Россия, ORCID 0000-0002-1576-1860.

References

- [1] World Health Organization. Cardiovascular diseases. Retrieved from WHO website. 2021.
- [2] Zipes D. P., Jalife J. Cardiac Electrophysiology: From Cell to Bedside. Elsevier. 2018.
- [3] Nishimura, R. A., et al. Mechanisms of Heart Failure. Circulation Research, 2020. vol. 126(10), 1404-1420.
- [4] Klein A. L., et al. Noninvasive Imaging of the Heart: Advances and Applications. Journal of the American College of Cardiology, 2019. vol. 73(1), 1-15.
- [5] Zeeman E.C. Differential equations for the heartbeat and nerve impulse. Salvador symposium on Dynamical Systems, Academic Press. 1973. pp. 683-741.
- [6] Volterra V. Functional theory, integral and integro-differential equations. New York: Dover Publications, 2005. 288 p.
- [7] Nakhushev A.M. Fractional calculus and its application. Moscow: Fizmatlit, 2003. 272 p. (in Russian).
- [8] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.
- [9] Gerasimov A. N. Generalization of the laws of linear deformation and their application to problems of internal friction. Academy of Sciences of the SSR. Applied Mathematics and Mechanics, 1948. Vol. 44, No. 6, pp. 62-78. (in Russian).
- [10] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II. Geophysical Journal International. 1967. vol. 13. pp. 529-539.
- [11] Parovik, R. I. Existence and uniqueness of the Cauchy problem for a fractal nonlinear oscillator equation. Uzbek Mathematical Journal. 2017. No. 4. P. 110-118. (in Russian).
- [12] Parovik R. I. On a Finite-Difference Scheme for an Hereditary Oscillatory Equation. Journal of Mathematical Sciences. 2021. vol. 253. no. 4. P. 547-557.
- [13] Van Horn B.M. II, Nguyen Q. Hands-On Application Development with PyCharm: Build Applications like a Pro with the Ultimate Python Development Tool; Packt Publishing Ltd.: Birmingham, UK, 2023.
- [14] Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math. 1901. vol. 24(1). pp. 1-88.
- [15] Parovik R. I., Yakovleva T. P. Construction of maps for dynamic modes and bifurcation diagrams in nonlinear dynamics using the Maple computer mathematics software package. Journal of Physics: Conference Series 2022, 2373, 52022.

Information about the authors



Israyiljanova Gulbahor Saminjanovna ✉ – Applicant of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan, ORCID 0009-0007-9356-3476.



Karimov Shakhobiddin Tuychiboyevich ✉ – D. Sc. (Phys. & Math.), Professor, Professor of the Department of Applied Mathematics and Computer Science, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan, ORCID 0000-0001-8325-998X.



Parovik Roman Ivanovich ✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Associate Professor, Professor of the Department of Computer Science and Mathematics, Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia, ORCID 0000-0002-1576-1860.



Идентификация параметров математической α -модели переноса радона в накопительной камере по данным пункта Карымшина на Камчатке

Д. А. Твёрдый^{*1}, Е. О. Макаров², Р. И. Паровик¹

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7, Россия

² Камчатский филиал Федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба РАН», 683023, г. Петропавловск-Камчатский, ул. бульвар Пийпа, д. 9, Россия

Аннотация. Радон — инертный радиоактивный газ, исследования вариаций которого в сопоставлении с сейсмичностью считаются перспективными для целей разработки методик прогноза землетрясений. На полуострове Камчатка развернута сеть пунктов наблюдения, в которых с помощью накопительных камер с газоразрядными счетчиками ведется мониторинг объемной активности радона (RVA). Анализ данных RVA в рамках радонового мониторинга является одним из методов поиска предвестников сейсмических событий. Это связано с тем, что изменения напряженно-деформированного состояния геосреды, через которую протекает газ, влияют на RVA. Изменение интенсивности переноса радона вследствие изменения напряженно-деформированного состояния геосреды описывается с помощью оператора дробного дифференцирования постоянного вещественного порядка α , который связан с проницаемостью геосреды. Известно, что на RVA в накопительной емкости с датчиками влияет также кратность воздухообмена λ_0 , эффект которого необходимо учитывать в изучение процесса переноса радона. Целью исследования является изучение накопления радона в камере, которое заключается в идентификации значений параметров λ_0 и α с помощью решения соответствующей обратной задачи. В результате исследований было показано, что для эрдитарной α -модели переноса радона методом Левенберга-Марквардта с привлечением экспериментальных данных RVA можно определить оптимальные значения ее параметров λ_0 и α . Полученные модельные кривые хорошо согласуются с данными RVA, полученными в рамках хорошо известной классической модели переноса радона в накопительной камере.

Ключевые слова: математическое моделирование, динамические процессы, объёмная активность радона, Камчатка, предвестники землетрясений, дробные производные Герасимова-Капуто, эффект памяти, нелокальность, нелинейные уравнения, обратные задачи, безусловная оптимизация, алгоритм Левенберга-Марквардта, C, Gnuplot.

Получение: 27.09.2024; Исправление: 30.09.2024; Принятие: 20.10.2024; Публикация онлайн: 20.11.2024

Для цитирования. Твёрдый Д. А., Макаров Е. О., Паровик Р. И. Идентификация параметров математической α -модели переноса радона в накопительной камере по данным пункта Карымшина на Камчатке // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 48. № 3. С. 95-119. EDN: AUYYJMD. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-95-119>.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00064, <https://rscf.ru/project/22-11-00064/>. Частично выполнена при поддержке Минобрнауки России (в рамках государственного задания № 075-00682-24) и частично за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01050, <https://rscf.ru/project/23-71-01050/>

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:**  E-mail: tverdyy@ikir.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License



© Твёрдый Д. А., Макаров Е. О., Паровик Р. И., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)



Identification of Parameters of the Mathematical α -Model of Radon Transport in the Accumulation Chamber Based on Data from the Karymshina Site in Kamchatka

*D. A. Tverdyi^{*1}, E. O. Makarov², R. I. Parovik¹*

¹ Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Paratunka village, Mirnaya str., 7, Russia

² Kamchatka Branch of the Federal Research Center «Unified Geophysical Service of the Russian Academy of Sciences», 683023, Petropavlovsk-Kamchatsky, Piipa Boulevard st., 9, Russia

Abstract. Radon is an inert radioactive gas, and studies of its variations in relation to seismicity are considered promising for the development of earthquake prognosis methods. A network of observation points has been deployed on the Kamchatka peninsula, where radon volumetric activity (RVA) is monitored using accumulation chambers with gas-discharge counters. Analysis of RVA data within the framework of radon monitoring is one of the methods of searching for precursors of seismic events. This is due to the fact that changes in the stress-strain state of the geo-environment, through which the gas flows, affect the RVA. The change in radon transport intensity due to changes in the stress-strain state of the geosphere is described by a fractional differentiation operator of constant real order α , which is related to the permeability of the geosphere. It is known that the RVA in the storage tank with sensors is also affected by the air exchange rate λ_0 , the effect of which should be taken into account in the study of the radon transport process. The aim of the research is to study the accumulation of radon in the chamber, which consists in the identification of the values of the parameters λ_0 and α by solving the corresponding inverse problem. As a result of the research it was shown that for the hereditary α -model of radon transport by the Levenberg-Mackwardt method with the involvement of experimental data of RVA it is possible to determine the optimal values of its parameters λ_0 and α . The obtained model curves agree well with the RVA data obtained within the framework of the well-known classical model of radon transport in an accumulation chamber.

Key words: mathematical modeling, dynamic processes, radon volume activity, Kamchatka, earthquake precursors, fractional derivatives Gerasimov-Caputo, memory effect, nonlocality, nonlinear equations, inverse problems, unconditional optimization, Levenberg-Marquardt algorithm, C, Gnuplot.

Received: 27.09.2024; Revised: 30.09.2024; Accepted: 20.10.2024; First online: 20.11.2024

For citation. Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. Identification of parameters of the mathematical α -model of radon transport in the accumulation chamber based on data from the Karymshina site in Kamchatka. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, 48: 3, 95-119. EDN: AUYJMD. <https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-48-3-95-119>

Funding. The research was funded by a grant from the Russian Science Foundation, project number 22-11-00064, which can be found at <https://rscf.ru/project/22-11-00064/>. The work was supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (075-00682-24). The research was funded by a grant from the Russian Science Foundation, project number 23-71-01050, which can be found at <https://rscf.ru/project/23-71-01050/>

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:**  E-mail: tverdyi@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)



Введение

Известно, что в земной коре постоянно содержится радиоактивный элемент ^{226}Ra , в ходе распада которого образуется ^{222}Rn (радон) — инертный радиоактивный газ с периодом полураспада 3.85 суток. ^{222}Rn является инертным газом, способным за счет основных механизмов массопереноса диффузии и конвекции распространяться по градиенту концентрации. За счет его радиоактивности возможна регистрация радона метрологически простыми методами, в том числе непрерывно и автоматизировано в режиме мониторинга [1, 2].

На этой основе на полуострове Камчатка развернута сеть пунктов наблюдения, где с помощью накопительных камер с газоразрядными счетчиками ведется радоновый мониторинг [3]. Расположение пунктов сети мониторинга подпочвенных газов на Камчатке приурочено к речным долинам, которые следуют вдоль разломных зон. Зоны динамического влияния разломов обладают повышенной проницаемостью, что способствует выходу подпочвенных газов в атмосферу [4]. Газоразрядные счетчики, как правило, самые распространенные детекторы γ/β -излучения. С их помощью возможна реализация простого и надежного способа регистрации ^{222}Rn по излучению его короткоживущих продуктов распада. Количество зарегистрированных импульсов β -излучения в минуту пропорционально объемной активности радона (RVA), вычисляемой по эмпирической формуле: $A(t) = 9 \cdot M$ (Бк/м³), где M — число зарегистрированных импульсов за минуту [5].

Замечание 1. Анализ данных, полученных в ходе непрерывного мониторинга RVA, является одним из методов поиска предвестников сейсмических событий. Это связано с тем, что на вариации RVA влияют изменения напряженно-деформированного состояния геосреды, через которую протекает газ. Таким образом, радон можно считать индикатором реакции геосреды на воздействие тектонических напряжений, возникающих при подготовке очага землетрясения [6, 7]. Радоновый (эманационный) метод поиска предвестников сейсмических событий во всём мире хорошо себя зарекомендовал за последние годы [8, 9], особенно с целью выявления краткосрочных предвестников (до 15 суток) [10, 11].

Замечание 2. Стоит отметить то, что вариации RVA связаны с таким показателем, как плотность потока радона (RFD) с поверхности, т. к. на основе кривых накопления радона в накопительной камере можно оценить RFD [12] с поверхности под ней. Поэтому моделирование изменения RVA в камере имеет прикладное значение при организации пунктов мониторинга подпочвенного радона с целью расширения сети мониторинга, т. к. необходимо знать величину RFD в выбранной точке, где будет устанавливаться накопительная камера со счётчиками.

Целью исследования является изучение накопления радона в подземных камерах с избыточным объемом с помощью методов математического моделирования.

Замечание 3. Рассматривается классическая математическая модель изменения RVA во времени $A(t)$ в накопительной камере на основе уравнения с обыкновенной производной 1-го порядка (ODE-модель RVA), а также понятия и величины, связанные с этим процессом [12–14].

Оператор обыкновенной производной 1-го порядка означает, что в классической модели изменения напряженно-деформированного состояния геосреды не учитываются, а процесс переноса радона рассматривается в однородной среде.

Замечание 4. ODE-модель RVA в простейшем случае предполагает стационарный режим накопления в камере, а значит, модель должна учитывать как минимум λ_0 – постоянный коэффициент кратности воздухообмена (AER) в ней.

Чтобы учесть влияние на поток ^{222}Rn изменений напряженно-деформированного состояния геосреды, вводится обобщение ODE-модели RVA с помощью аппарата дробных производных (FD) [15–17]. Основанием к такому обобщению является то, что под действием тектонических напряжений происходит изменение вертикальной скорости газового потока радона [18], вариации напряженно-деформированного состояния геосреды приводят к изменениям таких ее характеристик, как пористость, проницаемость и трещиноватость [19], а процесс переноса радона происходит в такой проницаемой геосреде [20]. Поэтому в исследовании используется эредитарная α -модель RVA, позволяющая учесть изменение интенсивности переноса радона в процессе накопления, разработанная в ходе цикла исследований [19, 21, 22].

Замечание 5. Обобщение до эредитарной α -модели RVA заключается в замене обыкновенной производной 1-го порядка на FD Капуто (Герасимова-Капуто) [23, 24] постоянного $0 < \alpha < 1$ порядка.

Для апробирования модели оптимально на первом этапе использовать данные о накоплении RVA в камере в условиях, когда отсутствуют воздействующие экзогенные факторы (изменения атмосферного давления, сильный ветер, увлажнение почвы вследствие дождей или таяния снежного покрова). Как известно из работы [12], максимальные аномальные отклики в данных радоновых наблюдений на метеовоздействие связаны с резким падением атмосферного давления в момент прихода циклона.

Замечание 6. Использование данных, когда кривая накопления ^{222}Rn четко визуально просматривается и не зашумлена, позволит строить модельные кривые, максимально близкие по форме к реальным данным и с максимальной корреляцией. Поэтому для работы отбирались данные в периоды, когда отсутствуют резкие изменения атмосферного давления, связанные с циклонической активностью.

Замечание 7. Научная новизна данного исследования заключается в применении методов решения обратных задач [25, 26] по новым известным экспериментальным данным RVA накопительного характера с целью восстановить значения постоянных параметров λ_0 и α в эредитарной α -модели RVA.

Обратные задачи – довольно молодой раздел математики, начавший активное развитие только в XIX–XX веках в связи с бурным развитием математического моделирования и возможностей вычислительной техники. Последние открывают перед исследователями новые, ранее не доступные, возможности для более глубокого понимания явлений природы. Например, если взглянуть на небо, представляется множество объектов для исследований в области астрономии и астрофизики, где применимы обратные задачи. От методов восстановления изображений удаленных объектов на основе данных радиоастрономии до солнечной сейсмологии [27], позволяющей получить информацию о внутреннем устройстве Солнца на основе наблюдаемых свойств солнечных колебаний. Идея последнего не нова, так как такой подход часто возникает здесь, на Земле, при работе с геологическими данными [28]. Особенно остро этот вопрос стоит для геофизики и сейсмологии [29], так как здесь тоже невозможно провести прямые измерения изучаемого объекта.

Статья имеет следующую структуру: раздел 1 представляет собой введение, описывая: область, объект, цель и методы исследования; в разделе 2 представлены экспериментальные данные по накоплению RVA, некоторые сведения о пунктах наблюдения где данные были получены и предпосылки к использованию именно данных по накоплению; в разделе 3 приводятся классическая математическая модель RVA, а также понятия и величины связанные с этим процессом; в разделе 4 описывается эредитарная α -модель RVA как обобщение классической модели, формулируется прямая задача и метод её решения, проводится верификация модели на различных экспериментальных данных RVA; в разделе 5 формулируется обратная задача по восстановлению значений нескольких параметров λ_0 и α , описывается метод её решения; в разделе 6 приводятся результаты решения обратных задач для λ_0 и α на основе различных экспериментальных данных RVA; в разделе 7 подводятся итоги исследования и указывается дальнейшее возможное направление их развития.

Экспериментальные данные RVA

В работе были использованы экспериментальные данные, полученные на пункте KRMR в разные периоды времени в течении 2020 года.

Пункт KRMR организован на базе пункта комплексных геофизических наблюдений «Карымшина» Камчатского филиала «Единой геофизической службы РАН» и одноименной сейсмостанции (пойма реки Карымшина, притока реки Паратунка).

Регистрация RVA с частотой 6 цикл./час выполняется в воздухе сухой скважины глубиной 3 м с помощью скважинного радиометра BMC2 (ALGADE Barisol, Франция). На всю глубину скважина обсажена трубой из нержавеющей стали с перфорацией по всей длине.

Над скважиной организованно укрытие и установлены солнечные панели для обеспечения питания радиометра (рис. 1).

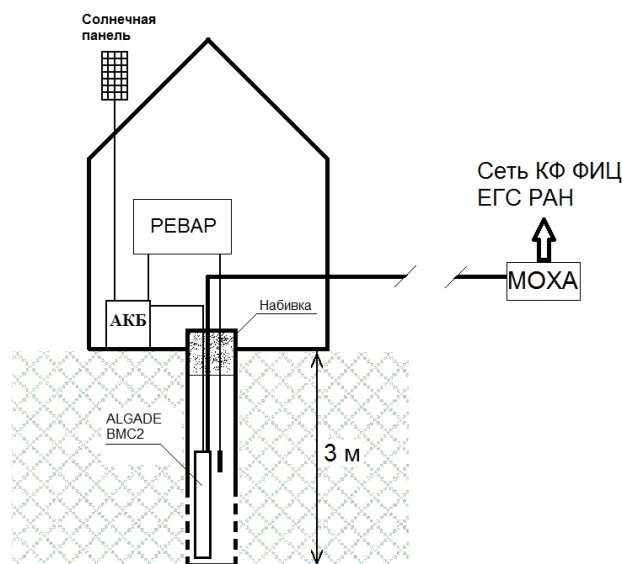


Рис. 1. Схема размещения датчика СБМ-19 и радиометра BMC2 для наблюдений за вариациями ОАР на пункте KRMR

[Figure 1. Scheme of placement of the SBM-19 sensor and BMC2 radiometer for observations of OAR variations at the KRMR station]

Кроме этого в скважину помещен газоразрядный счетчик СБМ-19, с которого ведется регистрация концентрации подпочвенного радона с частотой 2 цикл./час с помощью радиометра РЕВАР [12]. Оголовок скважины закрыт плотной набивкой для уменьшения конвективной составляющей движения воздуха в стволе скважины. С помощью преобразователя интерфейсов МОХА (RS232-Ethernet) радиометр BMC2, имеющий выходной разъем для связи стандарта RS232 соединен с сетью Ethernet Камчатского филиала «Единой геофизической службы РАН».

С некоторыми допущениями внутренний объем обсадной трубы представляет собой накопительную камеру, а отверстия перфорации обеспечивают поток и накопление радона в ней. Избыточный объем камеры составляет $\sim 0.02 \text{ м}^3$.

На рис.2-7 приведены данные RVA за различные периоды 2020 г.

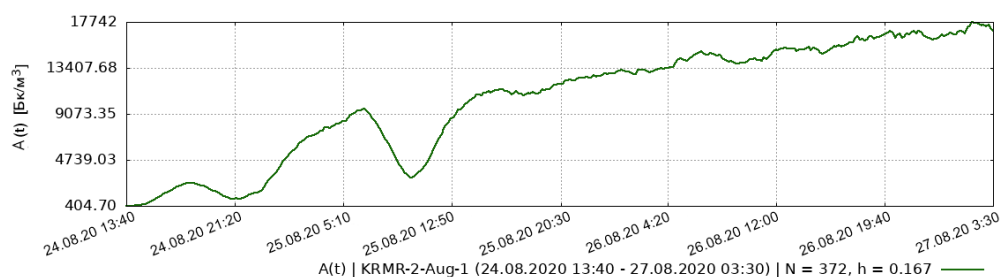


Рис. 2. Экспериментальные данные RVA с пункта наблюдения KRMR полученные в период: 24 августа 2020 г. (13:40) – 27 августа 2020 г. (03:30)

[Figure 2. Experimental RVA data from observation point KRMR obtained in the period: August 24, 2020 (13:40) – August 27, 2020 (03:30)]

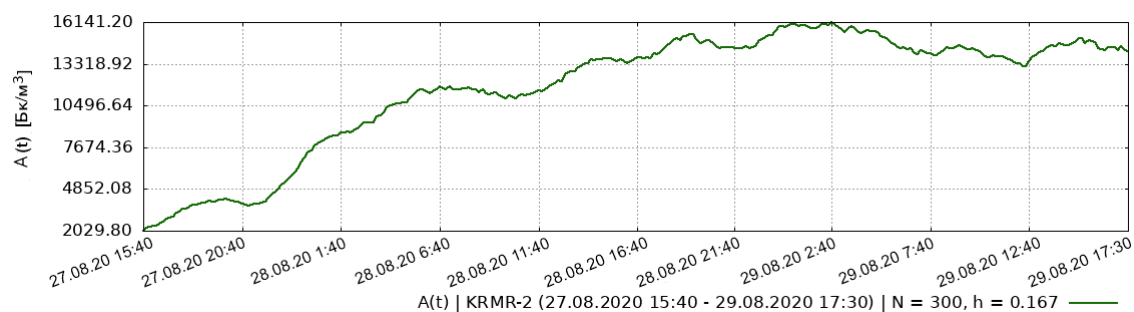


Рис. 3. Экспериментальные данные RVA с пункта наблюдения KRMR полученные в период: 27 августа 2020 г. (15:40) – 29 августа 2020 г. (17:30)

[Figure 3. Experimental RVA data from observation point KRMR obtained in the period: August 27, 2020 (15:40) – August 29, 2020 (17:30)]

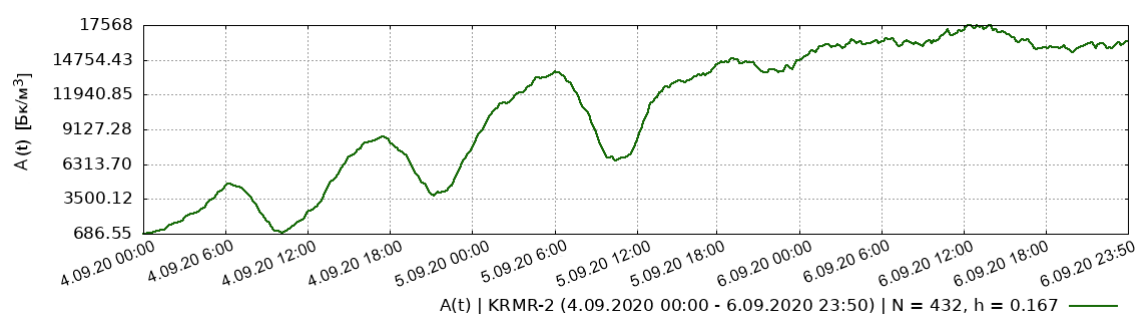


Рис. 4. Экспериментальные данные RVA с пункта наблюдения KRMR полученные в период: 4 сентября 2020 г. (00:00) – 6 сентября 2020 г. (23:50)

[Figure 4. Experimental RVA data from observation point KRMR obtained in the period: September 4, 2020 (00:00) – September 6, 2020 (23:50)]

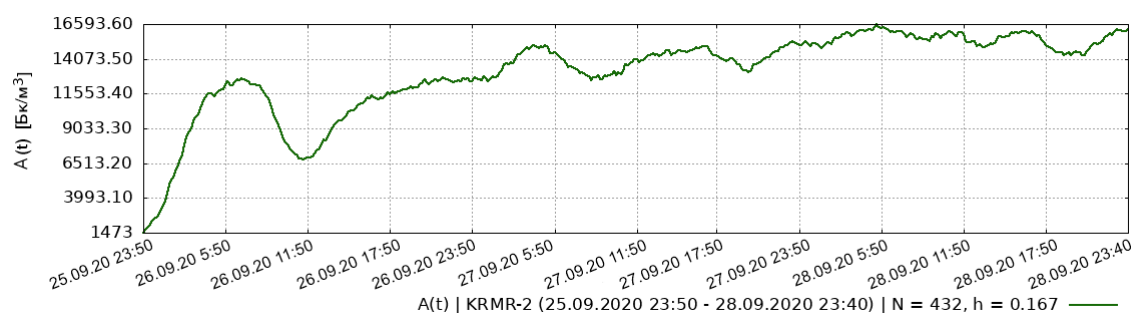


Рис. 5. Экспериментальные данные RVA с пункта наблюдения KRMR полученные в период: 25 сентября 2020 г. (23:50) – 28 сентября 2020 г. (23:40)

[Figure 5. Experimental RVA data from observation point KRMR obtained in the period: September 4, 2020 (23:50) – September 6, 2020 (23:40)]

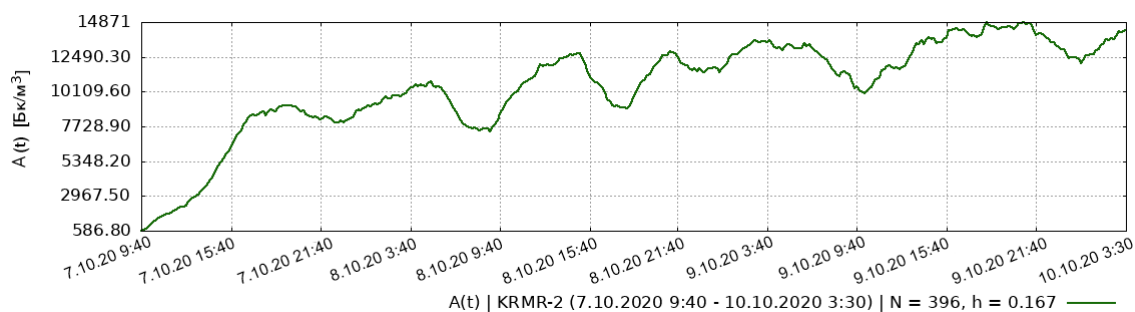


Рис. 6. Экспериментальные данные RVA с пункта наблюдения KRMR полученные в период: 7 октября 2020 г. (9:40) – 10 октября 2020 г. (3:30)

[Figure 6. Experimental RVA data from observation point KRMR obtained in the period: Oktober 7, 2020 (9:40) – Oktober 10, 2020 (3:30)]

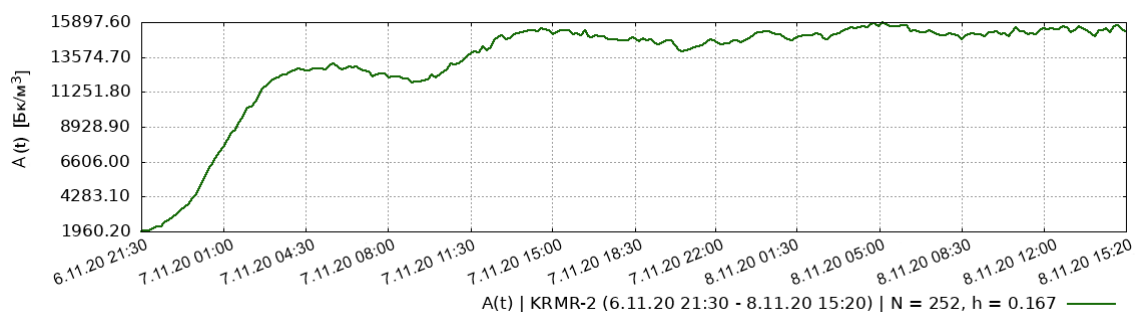


Рис. 7. Экспериментальные данные RVA с пункта наблюдения KRMR полученные в период: 6 ноября 2020 г. (21:30) – 8 ноября 2020 г. (15:20)

[Figure 7. Experimental RVA data from observation point KRMR obtained in the period: November 6, 2020 (21:30) – November 8, 2020 (15:20)]

Классическая математическая модель накопления радона

Для описания механизма переноса радона в геологических средах в рамках эманационного метода [31] разработаны многие математические модели процесса: физико-химическая [32], гидротермальной системы [33], модель «геогаза» в грунте с полным влагонасыщением [34, 35]. Но в данном исследовании интерес представляют механические представления и модели, на них основанные. Механические представления – это выделение радона из кристаллических решеток под действием ультразвуковых колебаний [36], десорбции радона под воздействием упругих колебаний [37], увеличение коэффициента эманирования радона вследствие деформаций горных пород [13], подмешивание радона в подземные воды в активных зонах [38] а также изменение скорости газового потока радона вследствие изменения пористости и трещиноватости под действием тектонических напряжений [18]. Последнее представляет наибольший интерес, так как может помочь с введением в модель параметров, отвечающих за изменение интенсивности процесса переноса радона.

В исследовании будем отталкиваться от хорошо изученной математической модели накопления RVA в накопительной камере [12–14], т.к. она достаточно неплохо описывает накопительные режимы RVA. Модель в основе своей представляет линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (ODE) вида:

$$\frac{dA(t)}{dt} = S(t) - (A(t) - A_{Rn}^{atm}) \lambda_v(t) - (A(t) - A_{Rn}^{atm}) \lambda_{Rn}, \quad (1)$$

где,

- $A(t) \in C^1[0, T]$ – временная зависимость RVA в камере, [Бк/м³];
- $C^1[0, T]$ – класс непрерывно-дифференцируемых функций;
- A_{Rn}^{atm} – RVA в наружном воздухе, [Бк/м³].
- $t \in [0, T]$ – текущее время симуляции RVA, [с].
- $T > 0$ – общее время симуляции, [с].
- $S(t)$ – некоторая функция, которая описывает скорость поступления радона, т.е. суммарное удельное поступление на единицу объёма камеры, [Бк/м³с].
- $\lambda_v(t)$ – функция, описывающая зависимость кратности воздухообмена (AER) в камере от времени, [с⁻¹].
- $\lambda_{Rn} = 2.1 \cdot 10^{-6}$ – постоянная распада радона, [с⁻¹].

Согласно работам [12, 14], модель (1) можно существенно упростить в ряде случаев. Например, членом при λ_{Rn} уравнения (1) можно пренебречь, т. к. даже полностью закрытое помещение с датчиками имеет $\lambda_v(t) \geq 0.05$ [ч] (т.е. $\approx 1.3889 \cdot 10^{-5}$ [с]), что как минимум порядок больше чем λ_{Rn} , а значит, влияние на расчеты по данной модели 3-го члена (1) невелико.

Известно, что за перенос радона в вертикальном направлении могут отвечать тепложидкостная конвекция, турбулентные эффекты при изменении метеорологических факторов, эффузия за счет градиента давления в земной коре, диффузия за счет градиента концентрации радона и др. [39].

Определение 1. Моделируемый процесс накопления радона называется стационарным, когда RFD с поверхности под накопительной камерой постоянна, а также когда нет резких изменений AER, а значит, $\lambda_v(t) = \lambda_0$ и $S(t) = S$ являются постоянными величинами. Тогда RVA будет иметь накопительный характер с выходом на насыщение: $A_{max} = S/\lambda_0$, [Бк/м³] [12]. Откуда получаем, что величина $S = A_{max}\lambda_0$.

Учитывая вышеизложенное, модель (1) можно упростить до ODE, задача Коши для которого примет вид:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda_0 A(t) + A_{max}\lambda_0, \quad A(0) = A_0,$$

где, A_0 – известная константа, значение RVA в момент времени $t = 0$.

Замечание 8. Далее, при работе с экспериментальными данными, необходимо будет сделать для временных рядов RVA нормировку на максимум, переходя таким образом для обозначения $A(t)$ к «относительным единицам» [отн.ед.].

Тогда, очевидно $A_{\max} = 1$, а значит ODE-модель примет вид:

$$\frac{dA(t)}{dt} = -\lambda_0 A(t) + \lambda_0, \quad A(0) = A_0, \quad (2)$$

Замечание 9. Далее, стационарную модель RVA (2) для краткости будем называть ODE-моделью RVA.

Для задачи Коши (2) можно получить аналитическое решение:

$$A(t) = 1 - e^{-\lambda_0 t} (1 - A_0), \quad A(0) = A_0, \quad (3)$$

причём из решения модели при $t \rightarrow \infty$ видно, что RVA $A(t) \rightarrow 1$, т. е. $A(t) = 1$ – горизонтальная асимптотика, которая определяет уровень насыщения RVA.

Эредитарная α -модель накопления радона

В модельных уравнениях (1) и (2) обыкновенная производная 1-го порядка не позволяет учесть изменение интенсивности переноса радона в процессе накопления, т. е. не позволяет учесть влияние на RVA изменений напряженно-деформированного состояния геосреды. Что сильно ограничивает гибкость ODE-модели RVA.

Поэтому авторами в работах [19, 21] предлагается модификация модели (2), состоящая в замене обыкновенной производной 1-го порядка на дробную производную (FD) [15–17] постоянного или переменного вещественного порядка. Основанием к такому обобщению является то, что процесс переноса радона происходит в проницаемой геосреде [20], а также упомянутым ранее представлениям об изменении скорости газового потока [18] и изменении интенсивности эманиции [13].

Замечание 10. Полагается, что пористость среды обусловлена наличием изолированных пор, а проницаемость среды понимается как наличие каналов, проводящих газ между порами. Пористость среды может приводить к замедлению процесса переноса газа, т. е. субдиффузии, а проницаемость среды, наоборот, приводит к ускорению, т. е. супердиффузии [31]. Такие процессы относятся к явлениям аномальной диффузии [40].

Замечание 11. Аномальную диффузию можно связать со свойством системы или среды помнить некоторое время оказанное на нее воздействие – эредитарностью (эффектом памяти) [41].

Собственно, для описания эффекта памяти в математической модели RVA и вводятся FD Капуто (Герасимова-Капуто) [23, 24] постоянного порядка:

$$\partial_{0,t}^{\alpha} A(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{dA(\sigma)}{d\sigma} \frac{1}{(t-\sigma)^{\alpha}} d\sigma, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4)$$

где, $\Gamma(\cdot)$ – известная гамма-функция Эйлера:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(x) > 0,$$

Замечание 12. Следует отметить, что существуют и другие определения производной дробного порядка. Их можно найти, например, в научных трудах [42, 43].

Цикл работ авторов [19, 21, 22] посвящен исследованию вопросов, связанных с математическим моделированием RVA, где предполагается, что параметр α описывает фрактальность [44] геосреды и связан с такими её характеристиками, как пористость, проницаемость и трещиноватость. Эредитарная α -модель RVA представляется следующей задачей Коши:

$$\partial_{0,t}^{\alpha} A(t) = -\lambda_0 A(t) + \lambda_0, \quad A(0) = A_0, \quad (5)$$

где, отличие от (1) важно отметить:

- $A(t) \in C^2[0, T]$ – функция решения, зависимость RVA от времени в камере;
- α – константа, порядок дробной производной (4);
- $C^2[0, T] = \mathbb{A}$ – класс дважды непрерывно-дифференцируемых функций.

Определение 2. Параметр α , согласно [19], дает возможность нам смоделировать изменения проницаемости геосреды, приводящей к изменению интенсивности процесса переноса радона. Предполагается, что постоянная $0 < \alpha < 1$ в относительных единицах описывает среднее по некоторому объёму (и во времени) значение проницаемости геосреды под накопительной камерой регистрирующей RVA. Причём, если $\alpha \rightarrow 0$, это характеризует довольно сильно проницаемую для радона среду, а если $\alpha \rightarrow 1$, это характеризует некую «среднестатистическую» по проницаемости среду.

Замечание 13. Эредитарная α -модель RVA (5) также является стационарной, согласно определению 1.

Для задачи (5) воспользуемся ранее разработанной нелокальной неявной конечно-разностной схемой (IFDS) [45], заданной в равномерной сеточной области:

$$h = T/N, \quad \hat{\Omega} = \{(t_i = ih) : 0 \leq i < N\}, \quad \hat{\mathbb{A}} \in \hat{\Omega}, \quad (6)$$

$$A(t) = A_i, \quad 0 < A_i < 1.$$

Определение 3. Тогда разностная прямая задача:

$$A_i = 1 - \frac{\widehat{\partial_{0,ih}^{\alpha}} A_i}{\lambda_0}, \quad A_0 = \text{const}, \quad 1 \leq i < N, \quad (7)$$

$$\widehat{\partial_{0,ih}^{\alpha}} A_i = \frac{h^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{j=0}^{i-1} ((j+1)^{1-\alpha} - j^{1-\alpha}) (A_{i-j} - A_{i-j-1}).$$

представляет собой задачу Коши, состоящую в поиске дискретной функции A_i , принадлежащей известному классу $\hat{A} \in \hat{\Omega}$, при известной постоянной α .

IFDS схема (7) и её обобщенные аналоги были апробированы в ряде тестовых и прикладных задач [45, 46]. Далее (7) решается модифицированным методом Ньютона (MNM), причём тогда разностная прямая задача на основе IFDS безусловно устойчива.

Замечание 14. Эредитарная α -модель RVA (5) решаемая по схеме (7) при значении $\alpha = 1$ перейдет в ODE-модель RVA (3), это продемонстрировано в работах [22, 46], что говорит о том, что обобщение (5) корректно.

Обратная задача на параметры λ_0 и α для эредитарной α -модели RVA

Ранее авторами [19, 21, 22] параметры моделей λ_0 и α были неизвестны и потому подбирались вручную по максимуму R^2 – коэффициента детерминации [47] и σ – коэффициента корреляции [48] с экспериментальными данными RVA. Такой подход является трудоемким, что неизбежно приводит нас к идеям различных способов автоматизации подбора оптимальных параметров.

Пусть $A_i \in \hat{A}$ (и соответственно $A(t) \in \hat{A}$) – функция зависит от набора параметров $\vec{X} = [X_0, \dots, X_{K-1}]$, где $K = 2$, а $X_0 = \alpha$, $X_1 = \lambda_0$. Пусть в области $\hat{\Omega} = [0, N]$ значения дискретной функции решения $A_i \in \hat{A}$ неизвестны, но известна дополнительная информация – экспериментальные данные RVA $A_i = \theta_i = \vec{\theta}$ о решении разностной прямой задачи Коши (7) для эредитарной α -модели RVA.

Определение 4. Тогда разностная обратная задача для (7) – это восстановление значений $\vec{X} = [X_0, X_1]$ по известным экспериментальным данным RVA имеет вид:

$$\begin{aligned} A_i &= 1 - \frac{\widehat{\partial_{0,ih}^{X_0}} A_i}{X_1}, \quad A_i = \theta_i, \quad 1 \leq i < N, \\ \widehat{\partial_{0,ih}^{X_0}} A_i &= \frac{h^{-X_0}}{\Gamma(2 - X_0)} \sum_{j=0}^{i-1} ((j+1)^{1-X_0} - j^{1-X_0}) (A_{i-j} - A_{i-j-1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Для решения (8) обратимся к теории безусловной оптимизации [49]. Для этого необходимо минимизировать функционал невязки:

$$\vec{\eta} = \vec{\theta} - \omega(\vec{X}), \quad \min(\Psi(\vec{X})) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \eta_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (\theta_i - \omega_i)^2, \quad (9)$$

где, $\vec{\eta}$ – вектор невязки размерности $N > K$, а вектор $\omega(\vec{X}) = [\omega_0, \dots, \omega_N]$ – вектор модельных данных, т. е. решение разностной прямой задачи (7) относительно некоторого приближения $\vec{X}$, получаемого в ходе решения обратной задачи.

Разностная обратная задача решается методом безусловной оптимизации ньютоновского типа [50], а именно итерационным методом Левенберга-Марквардта [51, 52], представимого в виде:

$$\Delta X = (-H^{-1}) \times (J^T \times \vec{\eta}), \quad H = J^T \times J + \gamma E, \quad (10)$$

где,

- ΔX – оптимальное приращение $\vec{X}$ для следующей итерации;
- E – единичная матрица размерности $K \times K$;
- $J = J(\vec{X})$ – матрица Якоби размерности $N \times K$ с элементами вычисляемыми по формуле: $J_{i,k} = \frac{\partial \eta_i}{\partial X_k}$, $i = 0..N - 1$, $k = 0..K - 1$;
- производная $\frac{\partial \eta_i}{\partial X_k}$ аппроксимируется разностным оператором $J_{i,k} = \frac{\eta_i^{\delta} - \eta_i}{\delta X_k}$, где δX – заданное малое приращение $\vec{X}$;
- γ – параметр регуляризации метода. Если $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$, а также матрица Гессе H положительно определена, то тогда ΔX является направлением спуска для оптимального шага метода;
- Стартовое значение: $\gamma^{(0)} = v \cdot \max_i \left(\text{diag} \left(J(X^{(0)})^T \times J(X^{(0)}) \right) \right)$, где v – заданная стартовая константа.

Замечание 15. Решение обратной задачи (8) методом Левенберга-Марквардта (10), далее (IP-LB), сводится к тому, чтобы в ходе цикла, начиная с заданных постоянных $X^{(0)}$, δX , v а также s – константы для пересчёта γ , многократно вычисляя решение разностной прямой задачи (7) при приближениях $\vec{X}$, получаемых в ходе решения обратной задачи, вычислить оптимальные значения $\vec{X}$.

Замечание 16. Критерием получения оптимального значения является $\varepsilon \leq \Sigma$, где Σ – заданная точность решения IP-LB, $\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [\eta_i^{\Delta}]^2$ – среднеквадратичная ошибка (MSE) между экспериментальными и модельными данными RVA.

Результаты моделирования

Далее будут представлены результаты решения IP-LB по восстановлению оптимальных значений $X_0 = \alpha$, $X_1 = \lambda_0$ стационарной эредитарной α -модели RVA (5) по известным экспериментальным данным RVA.

Алгоритмы, реализующие решения прямых задач по моделям (2) и (5), лежащих в основе алгоритма IP-LB, производят вычисления в величинах «метр/час». Это обоснованно тем, что фактический объём накопительной камеры (~ 0.02 [м³]) а частота регистрации RVA (6 цикл./час). Поэтому на рис. 8–13 значения параметров T, t, h в [ч], $X_1 = \lambda_0$ в [ч⁻¹]. Однако, ключевые параметры характеризующие полученные результаты, приведены к «метр/секунда» согласно международной системе единиц СИ и сведены в таблицу 1.

Замечание 17. На восстановление λ_0 сильно влияет выбор его управляющих параметров в алгоритме IP-LB, т. е. $X_1^{(0)}$ – начальное заданное приближение и δ_1 – начальное заданное приращение $X_0^{(0)}$.

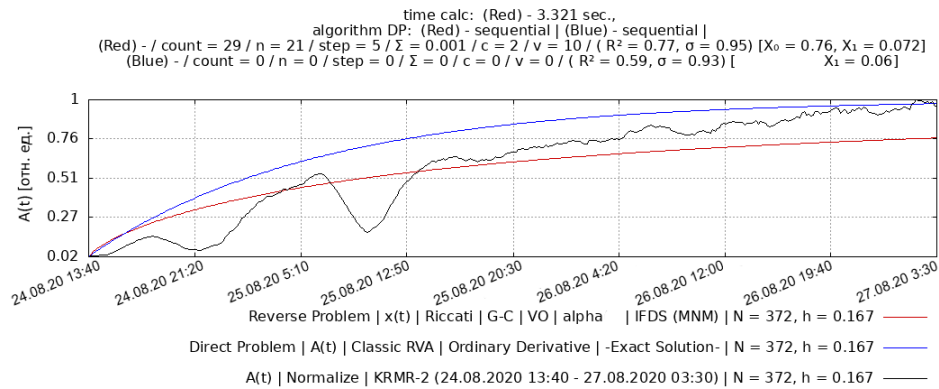


Рис. 8. Результат IP-LB по данным KRMР. Восстановлены: $\alpha = 0.76$, $\lambda_0 = 0.072$
 [Figure 8.Result IP-LB for the KRMР data. Restored: $\alpha = 0.76$, $\lambda_0 = 0.072$]

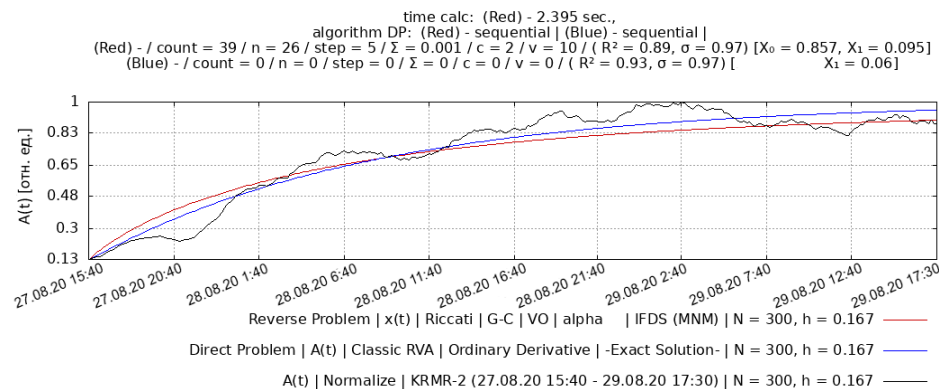


Рис. 9. Результат IP-LB по данным KRMР. Восстановлены: $\alpha = 0.857$, $\lambda_0 = 0.095$
 [Figure 9.Result IP-LB for the KRMР data. Restored: $\alpha = 0.857$, $\lambda_0 = 0.095$]

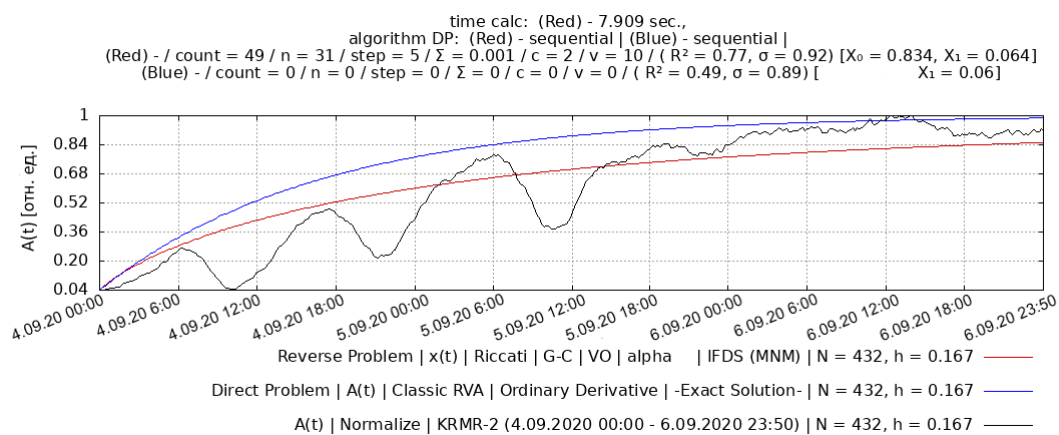


Рис. 10. Результат IP-LB по данным KRMР. Восстановлены: $\alpha = 0.834$, $\lambda_0 = 0.064$
 [Figure 10.Result IP-LB for the KRMР data. Restored: $\alpha = 0.834$, $\lambda_0 = 0.064$]

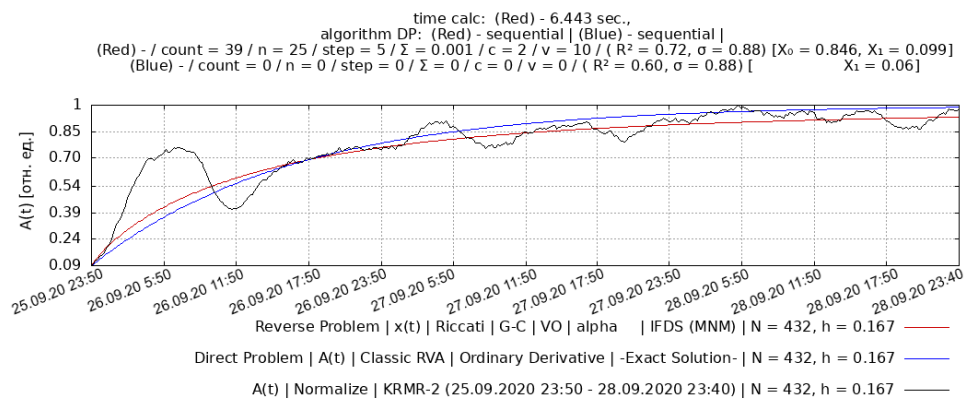


Рис. 11. Результат IP-LB по данным KRM. Восстановлены: $\alpha = 0.846$, $\lambda_0 = 0.099$
 [Figure 11.Result IP-LB for the KRM data. Restored: $\alpha = 0.846$, $\lambda_0 = 0.099$]

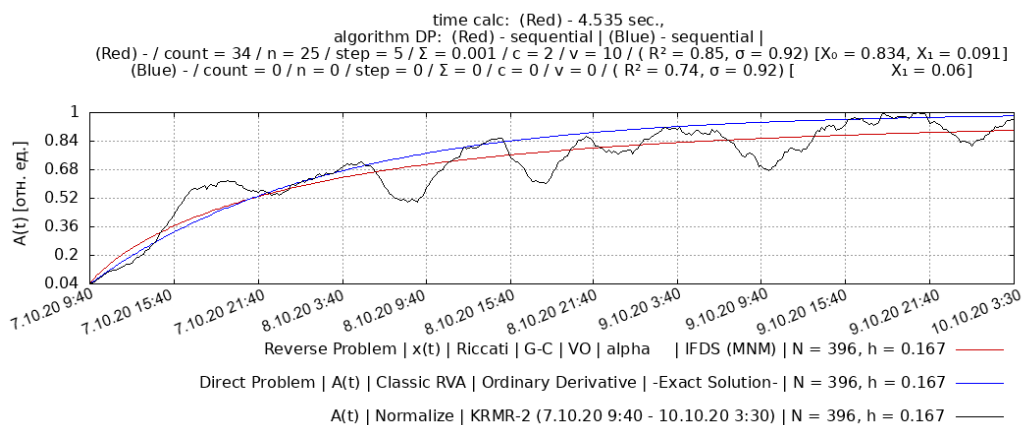


Рис. 12. Результат IP-LB по данным KRM. Восстановлены: $\alpha = 0.834$, $\lambda_0 = 0.091$
 [Figure 12.Result IP-LB for the KRM data. Restored: $\alpha = 0.834$, $\lambda_0 = 0.091$]

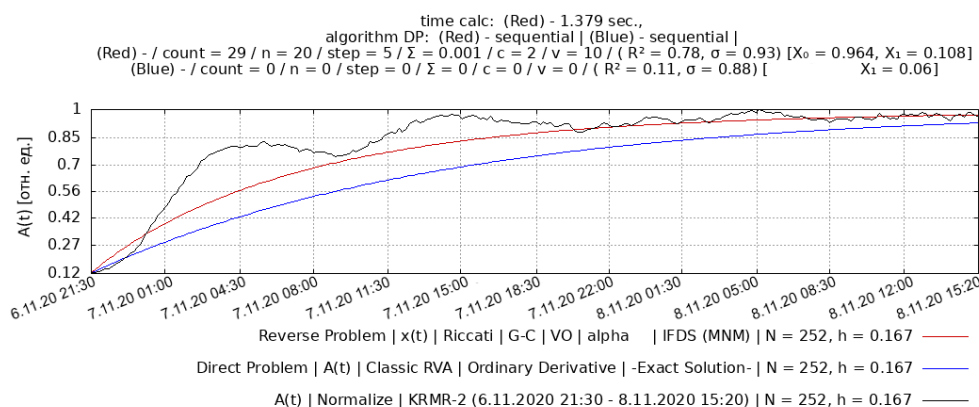


Рис. 13. Результат IP-LB по данным KRM. Восстановлены: $\alpha = 0.964$, $\lambda_0 = 0.108$
 [Figure 13.Result IP-LB for the KRM data. Restored: $\alpha = 0.964$, $\lambda_0 = 0.108$]

Было замечено, что если начальное приближение и его приращение задавать $\pm 1\%$ от оценки максимального значения восстанавливаемого параметра, то эффективность и точность работы IP-LB будет наивысшей (исходя из оценок R^2 и σ) для представленных данных KRMR.

Результаты на рис. 8–13 полученные при следующих значениях управляющих параметров: $[X_0^{(0)}, \delta_0] = [0.05, 0.01]$ для показателя α ; а также $[X_1^{(0)}, \delta_1] = [0.0025, 0.0005]$ для коэффициента λ_0 . Значения управляющих параметров c , v , Σ для алгоритма IP-LB, указаны на рисунках.

Замечание 18. Из рис. 8–13 замечено, что чем больший период по времени охватывают данные RVA (т.е. чем больше T), тем точнее описанные методы решения прямой и обратной задач восстанавливают связку из двух параметров α и λ_0 . Особенно это проявляется при восстановлении λ_0 , тогда значения этого параметра ближе к приблизительным оценкам λ_0 которые может дать эксперт, изучив данные и учитывая иные факторы на пункте наблюдения.

Таблица 1

Параметры математических моделей: классической ODE (2), эредитарной α -модели RVA (5) решаемой методами обратных задач, а также коэффициенты подобия модельных кривых и данных. Значения приведены к международной системе единиц СИ. [Parameters of mathematical models: classical ODE (2), hereditary α -model RVA (5) solved by methods of inverse problems, as well as similarity coefficients of model curves and data. Values are given in the SI international system of units.]

Даты выборки данных KRMR	заданное λ_0 для классич.	восств. λ_0 для эредит.	восст. α для эредит.	R^2 для классич.	R^2 для эредит.
24.08.20 - - 27.08.20	$1.66 \cdot 10^{-5}$	$2.0 \cdot 10^{-5}$	0.76	59 %	77 %
27.08.20 - - 29.08.20	$1.66 \cdot 10^{-5}$	$2.638 \cdot 10^{-5}$	0.857	93 %	89 %
4.09.20 - - 6.09.20	$1.66 \cdot 10^{-5}$	$1.77 \cdot 10^{-5}$	0.834	49 %	77 %
25.09.20 - - 28.09.20	$1.66 \cdot 10^{-5}$	$2.75 \cdot 10^{-5}$	0.846	60 %	72 %
7.10.20 - - 10.10.20	$1.66 \cdot 10^{-5}$	$2.527 \cdot 10^{-5}$	0.834	74 %	85 %
6.11.20 - - 8.11.20	$1.66 \cdot 10^{-5}$	$3.0 \cdot 10^{-5}$	0.964	11 %	78 %

Финансирование и вклад в исследования

Данные с пункта KRMR предоставлены Макаровым Е. О. старшим научным сотрудником лаборатории акустического и радонового мониторинга Камчатского филиала федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба РАН» г. Петропавловск-Камчатский, Россия.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России (в рамках государственного задания № 075-00682-24) и с использованием данных, полученных на уникальной научной установке «Сейсмоинфразвуковой комплекс мониторинга арктической криолитозоны и комплекс непрерывного сейсмического мониторинга Российской Федерации, сопредельных территорий и мира».

Все расчёты, связанные с решением прямых и обратных задач по моделям RVA, а также расчёты по обработке данных, были выполнены в программном комплексе PRPHMM 1.0 на языке MATLAB [53] версии R2023b для GNU/Linux Ubuntu Desktop 22.04. Программой комплекс PRPHMM 1.0 разрабатывается в рамках проекта "Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности" за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00064 (рук. Паровик Р.И.) исполняемого на базе Института космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия.

Визуализация в данной статье была выполнена Твёрдым Д.А. с помощью программного комплекса FEVO 1.0, разрабатываемого в том числе на скриптовом языке Gnuplot 6.0 [54] для GNU/Linux Ubuntu Desktop 22.04. Программой комплекс FEVO 1.0 разрабатывается в рамках проекта "Разработка программного комплекса для моделирования и анализа объемной активности радона как предвестника сильных землетрясений Камчатки" за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-01050 (рук. Твёрдый Д.А.) исполняемого на базе Института космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия.

Заключение

В работе продемонстрировано, что с помощью методов математической безусловной оптимизации, в частности итерационного метода Левенберга-Марквардта, можно решать обратные задачи с использованием экспериментальных данных накопления ^{222}Rn в камере.

На примерах показано, что можно восстанавливать близкие к оптимальным значения: α – степень дробной производной, характеризующей интенсивность процесса переноса радона, λ_0 – постоянная кратность воздухообмена для стационарной эредитарной α -модели RVA. Из результатов моделирования видно, что эредитарная α -модель RVA с параметрами, восстанавливаемыми решением обратной задачи, в сравнении с ODE-моделью RVA при $\lambda_0 = 1.66 \cdot 10^{-5}$ дает более точный результат за счет обобщения до дробной производной, а модельные кривые лучше согласуются с данными накопления, о чем говорят значения коэффициента детерминации R^2 с данными по RVA выше в среднем на 22%.

Продолжение работы может быть связано с применением более обобщенной эредитарной $\alpha(t)$ -модели и методов многомерной оптимизации для моделирования процессов накопления радона по осложненным экспериментальным данным. Усложненность данных накопительного процесса состоит в том, что данные искажены эффектами динамического влияния атмосферного давления и переменной проницаемостью геосреды.

Аббревиатуры

RVA	Radon Volumetric Activity
RFD	Radon Flux Density
FD	Fractional derivative
AER	Air Exchange Rate
ODE	Ordinary differential equation
MNM	Modified Newton's Nethod
IP-LB	Inverse problem by method Levenberg-Marquardt
MSE	Mean Squared Error

Список литературы

1. Рудаков В. П. *Эманиационный мониторинг геосред и процессов*. Москва: Научный мир, 2009. 175 с. ISBN 978-5-91522-102-3.
2. Zuzel G., Simgen H. High sensitivity radon emanation measurements, *Applied radiation and isotopes*, 2009. vol. 67, no. 5, pp. 889–893 DOI: 10.1016/j.apradiso.2009.01.052.
3. Makarov E. O., Firstov P. P., Voloshin V. N. Hardware complex for recording soil gas concentrations and searching for precursor anomalies before strong earthquakes in South Kamchatka, *Seismic instruments*, 2013. vol. 49, no. 1, pp. 46–52 DOI: 10.3103/S0747923913010064.
4. Фирстов П. П., Рудаков В. П. Результаты регистрации подпочвенного радона в 1997–2000 гг. на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне, *Вулканология и сейсмология*, 2003. № 1, С. 26–41.
5. Фирстов П. П. и др. Поиск предвестниковых аномалий сильных землетрясений по данным мониторинга подпочвенных газов на Петропавловск-Камчатском геодинамическом полигоне, *Геосистемы переходных зон*, 2018. Т. 2, № 1, С. 16–32 DOI: 10.30730/2541-8912.2018.2.1.016-032.
6. Barberio M. D. et al. Diurnal and Semidiurnal Cyclicity of Radon (^{222}Rn) in Groundwater, Giardino Spring, Central Apennines, Italy, *Water*, 2018. vol. 10, no. 9:1276 DOI: 10.3390/w10091276.
7. Neri M. et al. Spatial distribution of soil radon as a tool to recognize active faulting on an active volcano: The example of Mt. Etna (Italy), *Journal of Environmental Radioactivity*, 2011. vol. 102, no. 9, pp. 863–870 DOI: 10.1016/j.jenvrad.2011.05.002.
8. Petraki E. et al. Radon-222: A Potential Short-Term Earthquake Precursor, *Earth Science & Climatic Change*, 2015. vol. 6, no. 6 DOI: 10.4172/2157-7617.1000282.
9. Hauksson E. Radon content of groundwater as an earthquake precursor: evaluation of worldwide data and physical basis, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1981. vol. 86, no. B10, pp. 9397–9410 DOI: 10.1029/JB086iB10p09397.
10. Inan S. et al. Geochemical monitoring in the Marmara region (NW Turkey): A search for precursors of seismic activity, *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 2008. vol. 113, no. B3, pp. 1–15 DOI: 10.1029/2007JB005206.
11. Бирюлин С. В., Козлова И. А., Юрков А. К. Исследование информативности объемной активности почвенного радона при подготовке и реализации тектонических землетрясений на примере Южно-Курильского региона, *Вестник Камчатской региональной ассоциации «Учебно-научный центр»*. Серия: Науки о Земле, 2019. Т. 4, № 44, С. 73–83 DOI: 10.31431/1816-5524-2019-4-44-73-83.

12. Фирстов П. П., Макаров Е. О. *Динамика почвенного радона на Камчатке и сильные землетрясения*. Петропавловск-Камчатский: Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 2018. 148 с. ISBN 978-5-7968-0691-3.
13. Dubinchuk V. T. Radon as a precursor of earthquakes, *Isotopic and Geochemical Precursors of Earthquakes and Volcanic Eruptions*, 1993, pp. 9–22.
14. Vasilyev A. V., Zhukovsky M. V. Determination of mechanisms and parameters which affect radon entry into a room, *Journal of Environmental Radioactivity*, 2013. vol. 124, pp. 185–190 DOI: 10.1016/j.jenvrad.2013.04.014.
15. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier Science Limited, 2006. 540 pp. ISBN 9780444518323.
16. Podlubny I. *Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications*. New York: Academic Press, 1999. 340 pp. ISBN 9780125588409.
17. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. Москва: Физматлит, 2003. 272 с. ISBN 5-9221-0440-3.
18. King C. Y. Gas-geochemical approaches to earthquake prediction, *Isotopic and Geochemical Precursors of Earthquakes and Volcanic Eruptions*, 1993, pp. 22–36.
19. Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber, *Mathematics*, 2023. vol. 11, no. 4, pp. 850 DOI: 10.3390/math11040850.
20. Parovik R. I., Shevtsov B. M. Radon transfer processes in fractional structure medium, *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2010. vol. 2, pp. 180–185 DOI: 10.1134/S2070048210020055.
21. Tverdyi D. A., Parovik R. I., Makarov E. O., Firstov P. P. Research of the process of radon accumulation in the accumulating chamber taking into account the nonlinearity of its entrance, *E3S Web Conference*, 2020. vol. 196, no. 02027, pp. 1–6 DOI: 10.1051/e3sconf/202019602027.
22. Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. Research of Stress-Strain State of Geo-Environment by Emanation Methods on the Example of $\alpha(t)$ -Model of Radon Transport, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2023. vol. 44, no. 3, pp. 86–104 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-86-104.
23. Gerasimov A. N. Generalization of linear deformation laws and their application to internal friction problems, *Applied Mathematics and Mechanics*, 1948. vol. 12, pp. 529–539.
24. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II, *Geophysical Journal International*, 1967. vol. 13, no. 5, pp. 529–539 DOI: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x.
25. Mueller J. L., Siltanen S. *Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012. 372 pp. ISBN 978-1611972337.
26. Tarantola A. *Inverse problem theory : methods for data fitting and model parameter estimation*. Amsterdam and New York: Elsevier Science Pub. Co., 1987. 613 pp. ISBN 0444427651.
27. Arregui I. Inversion of Physical Parameters in Solar Atmospheric Seismology, *Multi-scale Dynamical Processes in Space and Astrophysical Plasmas*, 2012, pp. 159–169 DOI: 10.1007/978-3-642-30442-2_18.
28. Tahmasebi P., Javadpour F., Sahimi M. Stochastic shale permeability matching: Three-dimensional characterization and modeling, *International Journal of Coal Geology*, 2016. vol. 165, pp. 231–242 DOI: 10.1016/j.coal.2016.08.024.
29. Lailly P. The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations, *Conference on Inverse Scattering, Theory and application*, 1983, pp. 206–220.
30. Utkin V. I., Yurkov A. K. Radon as a tracer of tectonic movements, *Russian Geology and geophysics*, 2010. vol. 51, no. 2, pp. 220–227 DOI: 10.1016/j.rgg.2009.12.022.
31. Паровик Р. И. *Математические модели неклассической теории эманационного метода*. Петропавловск-Камчатский: Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, 2014. 80 с. ISBN 978-5-7968-0450-6.
32. Понамарев А. С. Фракционирование в гидротерме как потенциальная возможность формирования предвестников землетрясений, *Геохимия*, 1989. № 5, С. 714–724.
33. Барсуков В. Л., Варшал Г. М., Гаранин А. В., Замокина Н. С. Значение гидрогеохимических методов для краткосрочного прогноза землетрясений / *Гидрогеохимические предвестники землетрясений*. Москва, Наука, 1985, С. 3–16.

34. Etiope G., Martinelli G. Migration of carrier and trace gases in the geosphere: an overview, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 2002. vol. 129, no. 3–4, pp. 185–204 DOI: 10.1016/S0031-9201(01)00292-8.
35. Varhegyi A., Baranyi I., Somogyi G. A. Model for the vertical subsurface radon transport in «geogas» microbubbles, *Geophysical Transactions*, 1986. vol. 32, no. 3, pp. 235–253.
36. Горбушина Л. В., Рябоштан Ю. С. Эманиационный метод индикации геодинамических процессов при инженерно-геологических изысканиях, *Советская геология*, 1975. № 4, С. 106–112.
37. Козлова И. А., Юрков А. К. Отражение последовательных сейсмических событий в поле объемной активности радона, *Уральский геофизический вестник*, 2016. № 1(27), С. 35–39.
38. Гудзенко В. В., Дубинчук В. Т. *Изотопы радия и радон в природных водах*. Москва: Наука, 1987. 156 с.
39. Новиков Г. Ф. *Радиометрическая разведка*. Ленинград: Недра, 1989. 406 с. ISBN 5-247-00832-4.
40. Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. I. Background and Theory*. Berlin/Heidelberg: Springer, 2013. 373 pp. ISBN 978-3-642-33911-0 DOI: 10.1007/978-3-642-33911-0.
41. Volterra V. Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications, *Acta Mathematica*, 1912. vol. 35, no. 1, pp. 295–356 DOI: 10.1007/BF02418820.
42. Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: a review, *Proceedings of the Royal Society A*, 2020. vol. 476, no. 2234, pp. 20190498 DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.
43. Coimbra C. F. M. Mechanics with variable-order differential operators, *Annalen der Physik*, 2003. vol. 515, no. 11–12, pp. 692–703 DOI: 10.1002/andp.200351511-1203.
44. Mandelbrot B. B. *The fractal geometry of nature*. New York: W.H. Freeman and Co., 1982. 468 pp.
45. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation, *Fractal and Fractional*, 2022. vol. 6, no. 1, pp. 23 DOI: 10.3390/fractalfract6010023.
46. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Application of the Fractional Riccati Equation for Mathematical Modeling of Dynamic Processes with Saturation and Memory Effect, *Fractal and Fractional*, 2022. vol. 6, no. 3, pp. 163 DOI: 10.3390/fractalfract6030163.
47. Chicco D., Warrens M. J., Jurman G. The coefficient of determination R-squared is more informative than SMAPE, MAE, MAPE, MSE and RMSE in regression analysis evaluation, *PeerJ Computer Science*, 2021. vol. 299, pp. e623 DOI: 10.7717/peerj-cs.623.
48. Cox D. R. Hinkley D. V. *Theoretical Statistics, 1st edition*. New York: Chapman and Hall/CRC, 1974. 528 pp. ISBN 9780429170218.
49. Dennis J. E., Moré J. J., Schnabel B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Philadelphia: SIAM, 1996. 394 pp. ISBN 9781611971200.
50. Gill P. E., Murray W., Wright M. H. *Practical Optimization*. Philadelphia: SIAM, 2019. 421 pp.
51. Levenberg K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares, *Quarterly of applied mathematics*, 1944. vol. 2, no. 2, pp. 164–168 DOI: 10.1090/qam/10666.
52. Marquardt D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, *Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics*, 1963. vol. 11, no. 2, pp. 431–441 DOI: 10.1137/0111030.
53. Ford W. *Numerical linear algebra with applications: Using MATLAB, 1st edition*. Massachusetts: Academic Press, 2014. 628 pp. ISBN 978-0123944351 DOI: 10.1016/C2011-0-07533-6.
54. Janert P. K. *Gnuplot in Action: Understanding Data with Graphs, 2nd Edition*. New-York: Manning, 2016. 400 pp. ISBN 1633430189.

Информация об авторах



Твёрдый Дмитрий Александрович ✉ – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории электромагнитных излучений, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0001-6983-5258.



Макаров Евгений Олегович ✉ – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории акустического и радонового мониторинга, Камчатский филиал федерального исследовательского центра "Единая геофизическая служба РАН г. Петропавловск-Камчатский, Россия,  ORCID 0000-0002-0462-3657.



Паровик Роман Иванович ✉ – доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия,  ORCID 0000-0002-1576-1860.

References

- [1] Rudakov V. P. Emanacionnyj monitoring geosred i processov [Emanational monitoring of geoenvironments and processes]. Moscow: Science World, 2009, 175 pp., isbn: 978-5-91522-102-3 (In Russian)
- [2] Zuzel G., Simgen H. High sensitivity radon emanation measurements, Applied radiation and isotopes, 2009, vol. 67, no. 5, pp. 889–893. DOI: 10.1016/j.apradiso.2009.01.052.
- [3] Makarov E. O. Firstov P. P., Voloshin V. N. Hardware complex for recording soil gas concentrations and searching for precursor anomalies before strong earthquakes in South Kamchatka, Seismic instruments, 2013, vol. 49, no. 1, pp. 46–52. DOI: 10.3103/S0747923913010064
- [4] Firstov P. P., Rudakov V. P. Results from observations of subsurface radon in 1997–2000 at the Petropavlovsk-Kamchatskii geodynamic site. Journal of Volcanology and Seismology, 2003, no. 1, pp. 26–41 (In Russian)
- [5] Firstov P. P. et al. Search for predictive anomalies of strong earthquakes according to monitoring of subsoil gases at Petropavlovsk-Kamchatsky geodynamic test site. Geosystems of Transition Zones, 2018, vol. 2, no. 1, pp. 16–32, DOI: 10.30730/2541-8912.2018.2.1.016-032, (In Russian)
- [6] Barberio M. et al. Diurnal and Semidiurnal Cyclicity of Radon (^{222}Rn) in Groundwater, Giardino Spring, Central Apennines, Italy. Water, 2018, vol. 10, no. 9:1276. DOI: 10.3390/w10091276.
- [7] Neri M., Giammanco S., Ferrera E., Patane G., Zanon V. Spatial distribution of soil radon as a tool to recognize active faulting on an active volcano: The example of Mt. Etna (Italy), Journal of Environmental Radioactivity, 2011, vol. 102, no. 9, pp. 863–870. DOI: 10.1016/j.jenvrad.2011.05.002.
- [8] Petraki E., et al. Radon-222: A Potential Short-Term Earthquake Precursor, Earth Science & Climatic Change, 2015, vol. 6, no. 6. DOI: 10.4172/2157-7617.1000282.
- [9] Hauksson E. Radon content of groundwater as an earthquake precursor: evaluation of worldwide data and physical basis, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 1981, vol. 86, no. B10, pp. 9397–9410. DOI: 10.1029/JB086iB10p09397.
- [10] Inan S., Akgul T., Seyis C., Saatcilar R., Baykut S., Ergintav S., Bas M. Geochemical monitoring in the Marmara region (NW Turkey): A search for precursors of seismic activity, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, 2008, vol. 113, no. B3, pp. 1–15. DOI: 10.1029/2007JB005206.
- [11] Biryulin S. V., Kozlova I. A., Yurkov A. K. Investigation of informative value of volume radon activity in soil during both the stress build up and tectonic earthquakes in the South Kuril region, Bulletin of Kamchatka Regional Association «Educational-Scientific Center» Earth Sciences, 2019, vol. 4, no. 44, pp. 73–83. DOI: 10.31431/1816-5524-2019-4-44-73-83.
- [12] Firstov P. P., Makarov E. O. Dynamics of subsurface radon in Kamchatka and strong earthquakes. Petropavlovsk-Kamchatsky, Vitus Bering Kamchatka State University, 2018, 148 pp., isbn: 978-5-7968-0691-3 (In Russian)
- [13] Dubinchuk V. T. Radon as a precursor of earthquakes, Isotopic and Geochemical Precursors of Earthquakes and Volcanic Eruptions, 1993, pp. 9–22.
- [14] Vasilyev A. V., Zhukovsky M. V. Determination of mechanisms and parameters which affect radon entry into a room, Journal of Environmental Radioactivity, 2013, vol. 124, pp. 185–190. DOI: 10.1016/j.jenvrad.2013.04.014.
- [15] Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam, Elsevier, 2006, 540 pp., isbn: 9780444518323.

- [16] Podlubny I. Fractional differential equations: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. New York, Academic Press, 1999, 340 pp., isbn: 9780125588409.
- [17] Nakhushiev A. M. Drobnoe ischislenie i ego primeneniye [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 pp., isbn: 5-9221-0440-3 (In Russian)
- [18] King C. Y. Gas-geochemical approaches to earthquake prediction, Isotopic and Geochemical Precursors of Earthquakes and Volcanic Eruptions, 1993, pp. 22–36.
- [19] Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber, Mathematics, 2023, vol. 11, no. 4:850, pp. 1–20. DOI: 10.3390/math11040850.
- [20] Parovik R. I., Shevtsov B. M. Radon transfer processes in fractional structure medium, Mathematical Models and Computer Simulation, 2010, vol. 2, pp. 180–185. DOI: 10.1134/S2070048210020055.
- [21] Tverdyi D. A., Parovik R. I., Makarov E. O., Firstov P. P. Research of the process of radon accumulation in the accumulating chamber taking into account the nonlinearity of its entrance, E3S Web Conference, 2020, vol. 196, no. 02027, pp. 1–6. DOI: 10.1051/e3sconf/202019602027.
- [22] Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. Research of Stress-Strain State of Geo-Environment by Emanation Methods on the Example of $\alpha(t)$ -Model of Radon Transport, Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, 2023, vol. 44, no. 3, pp. 86–104. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-86-104. (In Russian)
- [23] Gerasimov A. N. Generalization of linear deformation laws and their application to internal friction problems, Applied Mathematics and Mechanics, 1948, vol. 12, pp. 529–539.
- [24] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II, Geophysical Journal International, 1967, vol. 13, no. 5, pp. 529–539. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x.
- [25] Mueller J. L., Siltanen S. Linear and Nonlinear Inverse Problems with Practical Applications. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012, 372 pp.
- [26] Tarantola A. Inverse problem theory : methods for data fitting and model parameter estimation, Amsterdam and New York: Elsevier Science Pub. Co., 1987, 613 pp.
- [27] Arregui I. Inversion of Physical Parameters in Solar Atmospheric Seismology, Multi-scale Dynamical Processes in Space and Astrophysical Plasmas, 2012, pp. 159–169. DOI: 10.1007/978-3-642-30442-2_18
- [28] Tahmasebi P., Javadpour F., Sahimi M. Stochastic shale permeability matching: Three-dimensional characterization and modeling, International Journal of Coal Geology, 2016, pp. 231–242, vol. 165, DOI: 10.1016/j.coal.2016.08.024.
- [29] Lailly P. The seismic inverse problem as a sequence of before stack migrations, Conference on Inverse Scattering, Theory and application, 1983, pp. 206–220.
- [30] Utkin V. I., Yurkov A. K. Radon as a tracer of tectonic movements, Russian Geology and geophysics, 2010, vol. 51, no. 2, pp. 220–227. DOI: 10.1016/j.rgg.2009.12.022
- [31] Parovik R. I. Matematicheskie modeli neklassicheskoy teorii emanatsionnogo metoda [Mathematical models of the neoclassical theory of the emanation method]. Petropavlovsk-Kamchatsky, Vitus Bering Kamchatka State University, 2014, 80 pp., isbn: 978-5-7968-0450-6 (In Russian)
- [32] Ponamarev A. S. Frakcionirovaniye v gidroterme kak potentsial'naya vozmozhnost' formirovaniya predvestnikov zemletryaseniy [Fractionation in hydrothermal fluid as a potential opportunity for the formation of earthquake precursors]. Geokhimiya [Geochemistry], 1989, no. 5, pp. 714–724 (In Russian)

- [33] Barsukov V. L., Varshal G. M., Garanin A. V., Zamokina N. S. *Znachenie gidrogeohimicheskikh metodov dlya kratkosrochnogo prognoza zemletryasenij* [Significance of hydrogeochemical methods for short-term earthquake prediction], In book: *Gidrogeohimicheskie predvestniki zemletryasenij* [Hydrogeochemical precursors of earthquakes], 1985, Moscow: Science, pp. 3–16.
- [34] Etiope G., Martinelli G. Migration of carrier and trace gases in the geosphere: an overview, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 2002, vol. 129, no. 3–4, pp. 185–204. DOI: 10.1016/S0031-9201(01)00292-8.
- [35] Varhegyi A., Baranyi I., Somogyi G. A. Model for the vertical subsurface radon transport in «geogas» microbubbles, *Geophysical Transactions*, 1986, vol. 32, no. 3, pp. 235–253.
- [36] Gorbushina L. V., Ryaboshtan YU. S. *Emanacionnyj metod indikacii geodinamicheskikh processov pri inzhenerno-geologicheskikh izyskaniyah* [Emanation method of indication of geodynamic processes in engineering-geological surveys]. *Sovetskaya geologiya* [Soviet geology], 1975, pp. 106–112 (In Russian)
- [37] Kozlova I. A., Yurkov A. K. Reflection consecutive seismic events in the field of radon volume activity. *Ural'skij geofizicheskij vestnik* [Ural Geophysical Bulletin], 1975, no. 1(27), pp. 35–39 (In Russian)
- [38] Gudzenko V. V., Dubinchuk V. T. *Izotopy radiya i radon v prirodnyh vodah* [Isotopes of radium and radon in natural waters]. Moscow: Science, 1987, 156 pp. (In Russian)
- [39] Novikov G. F. *Radiometricheskaya razvedka* [Radiometric intelligence]. Leningrad: Nedra, 1989, 406 pp., isbn: 5-247-00832-4. (In Russian)
- [40] Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. I. Background and Theory*. Berlin/Heidelberg, Springer, 2013, 373 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-33911-0.
- [41] Volterra V. *Sur les équations intégral-différentielles et leurs applications*, *Acta Mathematica*, 1912, vol. 35, no. 1, pp. 295–356. DOI: 10.1007/BF02418820.
- [42] Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: a review, *Proceedings of the Royal Society A*, 2020, vol. 476, no. 2234, pp. 20190498. DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.
- [43] Coimbra C. F. M. Mechanics with variable-order differential operators, *Annalen der Physik*, 2003, vol. 515, no. 11-12, pp. 692–703. DOI: 10.1002/andp.200351511-1203.
- [44] Mandelbrot B. B. *The fractal geometry of nature*. New York, W.H. Freeman and Co., 1982, 468 pp.
- [45] Tverdyi D. A., Parovik R. I. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation, *Fractal and Fractional*, 2022, vol. 6, no. 1, pp. 23. DOI: 10.3390/fractalfract6010023.
- [46] Tverdyi D. A., Parovik R. I. Application of the Fractional Riccati Equation for Mathematical Modeling of Dynamic Processes with Saturation and Memory Effect, *Fractal and Fractional*, 2022, vol. 6, no. 3, pp. 163. DOI: 10.3390/fractalfract6030163.
- [47] Chicco D., Warrens M. J., Jurman G. The coefficient of determination R-squared is more informative than SMAPE, MAE, MAPE, MSE and RMSE in regression analysis evaluation, *PeerJ Computer Science*, 2021, no. 299, pp. e623. DOI: 10.7717/peerj-cs.623.
- [48] Cox D. R., Hinkley D. V. *Theoretical Statistics*, 1st edition. New York, Chapman and Hall/CRC, 1974, 528 pp., isbn: 9780429170218.
- [49] Dennis J. E., Moré J. J., Schnabel B. *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*. Philadelphia, SIAM, 1996, 394 pp., isbn: 9781611971200
- [50] Gill P. E., Murray W., Wright M. H. *Practical Optimization*. Philadelphia, SIAM, 2019, 421 pp.

- [51] Levenberg K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares, Quarterly of applied mathematics, 1944, vol. 2, no. 2, pp. 164–168. DOI: 10.1090/qam/10666.
- [52] Marquardt D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics, 1963, vol. 11, no. 2, pp. 431–441. DOI: 10.1137/0111030.
- [53] Ford W. Numerical linear algebra with applications: Using MATLAB, 1st edition. Massachusetts, Academic Press, 2014, 628 pp., DOI: 10.1016/C2011-0-07533-6
- [54] Janert P. K. Gnuplot in Action: Understanding Data with Graphs, 2nd Edition. New-York: Manning, 2016, 400 pp., isbn: 1633430189.

Information about the authors



Tverdyi Dmitrii Aleksandrovich✉ – PhD (Phys. & Math.), Researcher, Electromagnetic Radiation Laboratory, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, FEB RAS, Paratunka village, Russia,
ORCID 0000-0001-6983-5258.



Makarov Evgeny Olegovich✉ – PhD (Phys. & Math.), Senior Researcher, Acoustic and Radon Monitoring Laboratory, Kamchatka Branch of the Federal Research Centre "Unified Geophysical Service of the Russian Academy of Sciences Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia,
ORCID 0000-0002-0462-3657.



Parovik Roman Ivanovich✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Leading Researcher, Physical Process Modeling Laboratory, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, FEB RAS, Paratunka village, Russia,
ORCID 0000-0002-1576-1860.

Профессор Мирсаид Мирсиддинович Арипов к 85-летию со дня рождения



Профессор М.М. Арипов

Мирсаид Мирсиддинович Арипов родился 20 сентября 1939 года в селе Испай, Бостанлыкского района Ташкентской области в семье служащего. В 1961 году окончил Ташкентский государственный университет (ныне Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека НУУз) по специальности «Математика». К трудовой деятельности приступил в качестве старшего лаборанта вычислительного центра ТашГУ в 1961 году и последовательно прошел путь от научного сотрудника, старшего преподавателя, доцента, декана, профессора, заведующего кафедрой в течении 35 лет, председателя

объединенного профсоюзного комитета ТашГУ до первого проректора Ташкентского государственного университета. В 1963-1968 годах проходил стажировку и аспирантуру в Вычислительном центре Сибирского отделения РАН. Также, М. Арипов четырежды проходил повышение квалификации на факультете вычислительной математики и кибернетики МГУ в 1972-1986 годах. За время работы в университете М. Арипов на высоком уровне читал общие и специальные курсы по информатике, информационной технологии, математическому моделированию нелинейных процессов, а также курс «Математические задачи естествознания» для бакалавров, магистров, аспирантов, слушателей повышения квалификации в ТашГУ.

М. Арипов ведёт активную научно-исследовательскую работу в целом ряде предметных областей, включая математическое моделирование нелинейных процессов, защиту информации, информационные технологии, вычислительную лингвистику и методики преподавания информационных технологий. Профессор М. Арипов является автором более 600 научных работ, 7 монографий, 50 учебников и учебных пособий по прикладной математике и информационным технологиям, 4 из которых признаны лучшими учебниками и учебными пособиями. Им также получены сертификаты интеллектуального агентства РУз на 30 программных продуктов. Значительный научный интерес М. Арипова связан с исследованиями асимптотической теории исследования различных качественных свойств решений обобщенных уравнений типа Эмдена-Фаулера второго и третьего порядка, описывающие ряд физических процессов. М. Арипов для изучения

асимптотических свойств решений уравнение типа Эмдена-Фаулера предложил и обосновал метод эталонных уравнений (метод ВКВ) известный ранее лишь для линейных уравнений. Им установлено, что обобщенные уравнения типа Эмдена-Фаулера второго и третьего порядка тесно связаны с автомодельными решениями нелинейных вырождающихся уравнений параболического типа в дивергентной и недивергентной формах с уравнением тонкой пленки, встречающихся в различных приложениях.

Вместе со своими учениками М. Арипов предложил и обосновал методы, исследования краевых задач для дважды нелинейных вырождающихся уравнений параболического типа и их систем, описывающие процессы: фильтрации в газах и жидкостях, нелинейной диффузии, теплопроводности, пыле-соле переноса, биологической популяции, распространение вирусов, биологической популяции типа Колмогорова Фишера в одно- и многокомпонентных нелинейных средах, с учетом переменной плотности и двойной нелинейности. Созданные им теория и практика позволили установить новые явления свойственные лишь рассмотренным нелинейным задачам такие как «конечная скорость распространения», «пространственная локализация», «blow up», «стена», «вымирание за конечное время».

М. Арипов — один из инициативных ученых, успешно наладивший международное сотрудничество. В течение 1976-2023 годов он участвовал более 60 раз во всемирных математических конгрессах, в конгрессах ISAAC, TWMS, GAMM, проводимых в различных странах Северной Америки, Западной Европы и Восточной Азии. М. Арипов является членом американского и европейского математических обществ, общества прикладной математики и механики (GAMM, Германия), математических обществ ISAAC, TWMS, рецензентом престижного издания Zentralblatt, членом редколлегии 7 международных журналов «Pure and Applied Mathematics», «Информационная безопасность», Вычислительная физика, Вычислительные нанотехнологии. «Вестника РГУГН», «Бюллетень УзМУ», «Бюллетень ТУИТ», «Проблемы вычислительной и прикладной математики» и других журналов. Большое внимание М. Арипов уделяет вопросам научного сотрудничества с ведущими вузами и научными исследованиями. центры. В результате этого сотрудничества под руководством М. Арипова были реализованы 3 проекта Евросоюза COCUZ, CANDI, CLASS и Всемирного банка, общий объем его инвестиций составил более 2 млн. долларов США. В результате этих проектов создан 21 новый курс дистанционного обучения для магистратуры и ведется подготовка магистров и бакалавров по новым специальностям «Компьютерные науки», «Компьютерная лингвистика». В рамках этих грантов 10 магистров завершили магистерскую работу и 30 человек из профессорско-преподавательского состава прошли тренинг курсы зарубежом в известных европейских университетах. В ходе реализации этого проекта был подписан договор с Университетом Адама Мицкевича в Польше.

М. Арипов руководил 2 российско-узбекскими, 2 фундаментальными, 3 прикладными и 2 инновационными научными проектами и проектом всемирного

банка УзУДТ: Универсальный корпус дерева отношений для обработки естественного языка на узбекском языке и его семантический анализ». Также, он руководил более 12 хозяйственными договорами заключенных с различными предприятиями России и нашей Республики. Результаты научных изысканий были внедрены в Институте физики РАН, в Научном объединении «Фотон», Зеленоградском военном предприятии, МГУ и ряде крупных предприятий нашей страны, а также на заводе №84, «Узтрансгаз», «Узнефтегаз», Ташкентском проектно-конструкторском бюро, Институт астрономии, Объединение «Малика» и др. М. Арипов также активно работает в системе «устоз- шогирд» и с одаренными учениками. Среди его учеников в 2011 году аспирант Д. Абдуллаев, в 2022 г. докторант С. Матлатипов, ставший стипендиатом Президентской стипендии, а ученик Т.Р. Азларов в 2013 году был удостоен звания «Герой Узбекистана».

М. Арипов создал научную школу в области прикладной математики и информационных технологий. Он подготовил 14 докторов наук (в том числе 3 доктора наук из Египта, Саудовской Аравии и Турции), 35 кандидатов наук (в том числе 23 PhD), руководил 60 магистерскими диссертациями. М. Арипов является организатором 16 международных конференций Аль-Хорезми по актуальным проблемам прикладной математики и информационных технологий, которая проводится раз в два года, он также является членом организационных и программных комитетов многих международных конференций, проводимых за рубежом.

В 1990-1995 годах М. Арипов был депутатом городского совета Ташкента. За трудовые заслуги М. Арипову присвоено почетное звание «Заслуженный работник народного образования Республики Узбекистан» (1990 г.). В 2020 году был награжден орденом «Фидокорона хизматлари учун». Кроме того, М. Арипов неоднократно награжден почетными грамотами и медалями НУУз, МВиССО РУз, Мининновации и профсоюза, включая почетные грамоты МВиССО РУз, медаль «Гордость Национального университета» (2023 г.), нагрудный знак «Ветеран труда» (2023 г.), грамота «За заслуги в повышении академической репутации вуза» (2022 г.). За вклад в развитие Национального университета Казахстана М. Арипов был награжден нагрудным знаком «За вклад в развитии Казахстанского Национального университета» (2015 г.).

Мирсаид Мирсиддинович Арипов уже последних несколько лет является членом редакционного совета журнала «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки» и введет активную работу по развитию журнала. Редакционная коллегия и совет журнала «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки» сердечно поздравляет Мирсаида Мирсиддиновича с 85-летним юбилеем, желает ему крепкого здоровья, неиссякаемой жизненной энергии, дальнейших творческих успехов в работе и благополучия в семье.

Редакционная коллегия и совет

Директор ИПМА КБНЦ РАН Арсен Владимирович Псху к 55-летию со дня рождения



Директор ИПМА КБНЦ РАН
А.В. Псху

30 октября 2024 года Арсен Владимирович Псху отметил 55-летний юбилей. А.В. Псху является директором Института прикладной математики и автоматизации – филиала Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр РАН с 2021 года по настоящее время (далее – Институт). В Институте А.В. Псху работает с 1996 года, прошел путь от младшего научного сотрудника до руководителя. В 1991 году закончил механико-математический факультет Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, в 1999 году защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (г. Нальчик, Институт), в 2007 году – диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук (Москва, МГУ).

Псху А.В. – специалист в области прикладной и теоретической математики (дифференциальные уравнения, дробное исчисление, математическое моделирование). Индекс Хирша РИНЦ – 21, ИХ WOS – 10, ИХ Scopus – 11.

Псху А.В. получены фундаментальные научные результаты, связанные с разработкой и развитием аналитических методов решения обыкновенных и в частных производных дифференциальных уравнений, содержащих операторы дробного и распределенного дифференцирования, их применением к математическому моделированию широкого класса физических процессов; методами решения и анализа начальных и краевых задач для уравнений в частных производных; теорией интегральных преобразований и специальных функций. Является руководителем научного направления Института. Полученные им научные результаты привлекли широкое внимание специалистов как у нас в стране, так и за рубежом, его научный авторитет широко известен в КБР и за его пределами.

Псху А.В. — автор более 200 научных работ, в том числе 3 монографий, руководитель проектов, финансируемых РФФИ, программ фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН, лауреат Фонда поддержки отечественной науки. Псху А.В. успешно сочетает научную и научно-образовательную деятельность, читает специальные курсы для аспирантов и молодых ученых в Научно-образовательном центре Института и студентов старших курсов математического факультета Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х.М. Бербекова, руководит научной работой аспирантов и соискателями ученых степеней. Под его руководством защищено 9 кандидатских диссертаций и PhD. Успешно руководит Институтом, в научный коллектив которого вливаются молодые ученые. Продолжает развитие ведущего научного направления и научной школы по теории дробного исчисления, создавая комфортные условия для успешной научной работы коллективу.

Псху А.В. — член редколлегии журналов: Journal of Fractional Calculus and Applications (JFCA); Fractional Differential Calculus (FDC); Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications (EJMAA); Вестник КРАУНЦ; Вестник ДГУ; Известия КВНЦ РАН; Доклады АМАН. Является экспертом в Федеральном реестре экспертов научно-технической сферы Минобрнауки РФ; член экспертного совета РНФ. Внес существенный вклад в развитие науки в Кабардино-Балкарской республике, в укрепление научных связей с вузами республик Северного Кавказа, консолидации научного сообщества ЮФО.

Деятельность Псху А.В. была отмечена Почетной грамотой Российской академии наук и Профсоюзов работников Российской академии наук (2007), Почетной грамотой Министерства образования и науки Кабардино-Балкарской республики (2011), Почетной грамотой Парламента КБР (2013), Почетными грамотами Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук (1999, 2008).

Арсен Владимирович Псху является более 10 лет активным членом редакционной коллегии журнала «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки» и введет активную работу по развитию журнала. Редакционная коллегия журнала «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки» сердечно поздравляет Арсена Владимировича с 55-летним юбилеем, желает ему крепкого здоровья, неиссякаемой жизненной энергии, дальнейших творческих успехов в работе и благополучия в семье.

Редакционная коллегия

ВЕСТНИК КРАУНЦ
(Камчатской региональной ассоциации «Учебно-научный центр»)
Физико-математические науки
2024. Т. 48. № 3

Главный редактор Ю.В. Марапулец
Редактор, технический редактор Р.И. Паровик
Компьютерная верстка LaTeX Р.И. Паровик
Макет обложки CorelDRAW И.Р. Бондарева

Учредители: ФГБУН Институт космифизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
ФГБОУ ВО «Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга»

Адрес учредителей, редакции и издательства:
684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7
Тел. (4153) 133-193, parovik@krasec.ru, feshchenko@krasec.ru, www.ikir.ru
683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
Тел. (4152) 427-078, parovik@krasec.ru, www.kamgu.ru

Подписано в печать 02.12.2024. Дата выхода в свет 20.12.2024. Формат 60x84/8.
Бумага офсетная. Печать цифровая. Гарнитура «Times New Roman».
Усл. печ. л. 15,25. Тираж 500 экз. Заказ №228

Отпечатано
в Издательско-полиграфическом центре НГУ, 630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова, 2

Bulletin KRASEC
(Kamchatka Regional Association «Scientific-Education Centre»)
Physical and Mathematical Sciences
2024. vol. 48. no. 3

Editor-in-Chief Yu. V. Marapulets
Technical Editor R.I. Parovik
Computer Makeup LaTeX R.I. Parovik
Cover Mockup CorelDRAW I.R. Bondareva

Establishers: Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS,
Vitus Bering Kamchatka State University
Address of establishers, editors office and publisher's house:
684034, Kamchatskiy kray, v. Paratunka, Mirnaya St., 7
Phone (4153) 133-193, parovik@krasec.ru, feshchenko@krasec.ru, www.kamgu.ru
683032, Petropavlovsk-Kamchatskiy, Pogranichnaya St., 4
Phone (4152) 427-078, parovik@krasec.ru, www.kamgu.ru
Signed to print 02.12.2024. Imprint day 20.12.2024. Format 60x84/8
Offset paper. Digital printing. Font «Times New Roman»
Conv. printer's sheet 15,25. Editons 500 copies. Order 228.

Printed
In Publishing and Printing Center of NSU, 630090, Novosibirsk, st. Pirogova, 2

