Содержание

Сообщение редакционной коллегии 7

МАТЕМАТИКА

Пачев У. М., Кодзоков А. Х., Езаова А. Г., Токбаева А. А., Гучаева З. Х.
Об одном способе решения линейных уравнений над евклидовым кольцом 9

Федоров Б. П., Богданова С. Б., Гладков С. О.
О новых задачах по стереометрии 22

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Макаров Д. В.
Классическая математическая модель С.В. Дубовского и ее некоторые модификации для описания К-волн в экономике 52

Отенова А. Ж., Паровик Р. И.
Математическая модель дробного нелинейного осциллятора Матье 70

Шереметьева О. В., Шевцов Б. М.
Приложение эредитарной модели критичности к исследованию характеристик сейсмического процесса в зоне субдукции Курило-Камчатской островной дуги 89

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Твёрдый Д. А., Паровик Р. И.
Применение высокопроизводительных вычислений для решения задачи Коши с дробным уравнением Риккати по нелокальной неявной конечно-разностной схеме 103

Hayotov A. R., Doniyorov N. N.
Construction of basis functions for finite element methods in a Hilbert space 118

ФИЗИКА

Закупин А. С., Дудченко И. П., Богомолов Л. М., Гуляков С. А., Казаков А. И., Стовбун Н. С.
Кратковременные вариации электротеллурического поля вблизи очага землетрясения на о. Сахалин 134

Marichev V. N., Yushkov V. A., Balugin N. V., Bochkovsky D. A.
Results of an experiment on joint lidar and balloon sounding of the troposphere and stratosphere 165

Contents

Message from the Editorial Board 7

MATHEMATICS

Pachev U. M., Kodzokov A. Kh., Ezaova A. G., Tokbaeva A. A., Guchaeva Z. Kh.
On one way to solve linear equations over a Euclidean ring . . . 9

Fedorov B. P., Bogdanova S. B., Gladkov S. O.
On the new problems in stereometry 22

MATHEMATICAL MODELLING

Makarov D. V.
The classical mathematical model of S.V. Dubovsky and some of its modifications for describing K-waves 52

Otenova A. Zh., Parovik R. I.
Mathematical model of a fractional nonlinear Mathieu oscillator 70

Sheremetyeva O. V., Shevtsov B. M.
Application of the hereditarian criticality model to the study of the characteristics of the seismic process of the Kuril-Kamchatka Island arc subduction zone 89

INFORMATION AND COMPUTATION TECHNOLOGIES

Tverdyi D. A., Parovik R. I.
Application of high-performance computing to solve the Cauchy problem with the fractional Riccati equation using an nonlocal implicit finite-difference scheme 103

Хайотов А. Р., Донийоров Н. Н.
Построение базисных функции в методе конечных элементов в гильбертовом пространстве 118

PHYSICS

Zakupin A. S., Dudchenko I. P., Bogomolov L. M., Gulyakov S. A., Kazakov A. I., Stovbun N. S.
Short temporal variations of electrotelluric field in the vicinity of the earthquake source-site in the Sakhalin island 134

Маричев В. Н., Юшков В. А., Балугин Н. В., Бочковский Д. А.
Результаты эксперимента по совместному лидарному и шар-баллоному зондированию тропосферы и стратосферы. 165

УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ И ЧИТАТЕЛИ!

Журнал Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки вошел в перечень рецензируемых научных изданий ВАК (№ 411 список от 31.12.2023), в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата и доктора наук, как журнал, входящий в **международные** реферативные базы данных и системы цитирования (MathSciNet и zbMath) и согласно таблицы ВАК обладает **категорией К1**.

За последнее время произошло расширение редакционной коллегии журнала, была создан редакционный совет, в который вошли ведущие ученые, в том числе из таких стран как Китай, Индия, Иран, ЮАР, Турция, Италия, Венгрия, Германия, Польша, Узбекистан, Казахстан. Это позволило расширить спектр направлений журнала.

Основные рубрики журнала соответствуют следующим обновленным шифрам научных специальностей:

— Математика

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

— Математическое моделирование

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

— Информационные и вычислительные технологии

1.1.6. Вычислительная математика

2.3.5. Математическое и программное обеспечение вычислительных систем, комплексов и компьютерных сетей

— Физика

1.3.3. Теоретическая физика

1.3.6. Оптика

1.3.7. Акустика

1.3.8. Физика конденсированного состояния

1.6.9. Геофизика

1.6.18. Науки об атмосфере и климате

— Приборы м методы измерений

1.3.2. Приборы и методы экспериментальной физики

2.2.4. Приборы и методы измерений (по видам измерений)

2.2.8. Методы и приборы контроля и диагностики материалов, изделий, веществ и природной среды

Журнал также публикует специальные выпуски, посвященные конференциям разного уровня по тематике журнала.

Журнал «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки» находится в свободном доступе. Тип лицензии CC поддерживаемый журналом: (CC

BY 4.0). Полнотекстовые выпуски журнала размещается на Общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

За 14 лет существования, благодаря авторам и читателям, журнал получил хорошее устойчивое развитие, расширилась география участников и редакционной коллегии, сформировалась база рецензирования, повысились индексы цитируемости, журнал вошел в более 30-ти баз цитирования, всем статьям присваивается цифровой индентификатор DOI.

В октябре 2024 года будет подана заявка на включение Scopus.

В №1 журнала «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки» за 2024 г. было опубликовано 9 статей авторов из России и Узбекистана. Среди 25 авторов: 7 — доктора наук, 8 — кандидаты наук, 10 — молодые ученые, аспиранты и преподаватели, научные сотрудники без степени.

Редакционная коллегия заинтересована в дальнейшем сотрудничестве, в формировании широкого высокопрофессионального научного коллектива авторов, публикующихся на его страницах, в создании своей устойчивой читательской аудитории.

Редакционная коллегия

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 46. №1. С. 9 - 21. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-9-21

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 517.91

Об одном способе решения линейных уравнений над евклидовым кольцом

У. М. Пачев, А. Х. Кодзоков, А. Г. Езаова, А. А. Токбаева, З. Х. Гучаева***

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173, Россия

Аннотация. Линейным уравнениям, т.е. уравнениям первой степени, а также системам из таких уравнений уделяется большое внимание как в алгебре, так в теории чисел. Наибольший интерес представляет случай таких уравнений с целыми коэффициентами и при этом их нужно решать в целых числах. Такие уравнения с указанными условиями называют линейными диофантовыми уравнениями. Еще Эйлер рассматривал способы решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными, причем один из этих способов был основан на применении алгоритма Евклида. Другой способ решения таких уравнений, основанный на цепных дробях, применялся также Лагранжем. Более удобным и перспективным оказался способ Эйлера, чем способ цепных дробей. В настоящей работе рассматривается один новый способ решения линейных уравнений над евклидовым кольцом, основанный на сравнениях по подходящим модулям. Известный ранее матричный метод решения таких уравнений с увеличением числа неизвестных является довольно громоздким в виду того, что он связан с нахождением обратных к унимодулярным целочисленным матрицам. Существенным в нашем способе решения линейных уравнений над евклидовым кольцом является использование алгоритма Евклида и линейного представления НОД элементов в евклидовом кольце. Доказанная в работе теорема применяется к нахождению решения линейного уравнения с тремя неизвестными над кольцом целых гауссовых чисел, являющимся, как известно, евклидовым кольцом. В заключении приводятся замечания о возможных путях дальнейшего развития изложенного исследования.

Ключевые слова: линейное уравнение, евклидово кольцо, алгоритм Евклида, евклидова норма, целые гауссовы числа, сравнение по модулю.

Получение: 30.11.2023; Исправление: 10.01.2024; Принятие: 18.01.2024; Публикация онлайн: 07.03.2024

Для цитирования. Пачев У. М. и др. Об одном способе решения линейных уравнений над евклидовым кольцом // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 46. № 1. С. 9-21. EDN: CZKZBA. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-9-21.

Финансирование. Работа не выполнялась в рамках фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: urusbi@rambler.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Пачев У. М. и др., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2024. vol. 46. no. 1. P. 9 - 21. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-9-21

Research Article

Full text in Russian

MSC 34A99

On One Way to Solve Linear Equations Over a Euclidean Ring

U. M. Pachev**, A. Kh. Kodzokov, A. G. Ezaova, A. A. Tokbaeva, Z. Kh. Guchaeva

Kabardino-Balkarian State University named after H.M. Berbekov,
360004, Nalchick, Chernyshevskogo str., 173, Russia

Abstract. Linear equations, i.e. Equations of the first degree, as well as systems of such equations, receive much attention both in algebra and in number theory. Of greatest interest is the case of such equations with integer coefficients, and in this case they need to be solved in integers. Such equations with the specified conditions are called linear Diophantine equations. Euler also considered ways to solve linear Diophantine equations with two unknowns, and one of these methods was based on the use of the Euclid algorithm. Another method for solving such equations, based on continued fractions, was also used by Lagrange. Euler's method turned out to be more convenient and promising than the method of continued fractions. In this paper, we consider one new method for solving linear equations over a Euclidean ring, based on comparisons over suitable moduli. The previously known matrix method for solving such equations with an increasing number of unknowns is quite cumbersome due to the fact that it is associated with finding the inverses of unimodular integer matrices. Essential in our method of solving linear equations over a Euclidean ring is the use of the Euclidean algorithm and the linear GCD representation of elements in the Euclidean ring. The theorem proved in the work is applied to finding a solution to a linear equation in three unknowns over a ring of Gaussian integers, which, as is known, is a Euclidean ring. In conclusion, comments are made on possible ways of further development of the presented research.

Key words: linear equation, Euclidean ring, Euclidean norm, Gaussian integers, module congruences.

Received: 30.11.2023; Revised: 10.01.2024; Accepted: 18.01.2024; First online: 07.03.2024

For citation. Pachev U. M. et al. On one way to solve linear equations over a Euclidean ring. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **46**: 1, 9-21. EDN: CZKZBA. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-9-21.

Funding. The work was not carried out within the framework of funds

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: urusbi@rambler.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Pachev U. M. et al., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)

Введение

Отдельное самостоятельное изложение, посвященное теории алгебраических уравнений с двумя и тремя неизвестными впервые появилось в «Арифметике» греческого математика Диофанта (3век н.э.), где рассматривались способы решения алгебраических уравнений второй и третьей степени с двумя неизвестными, причем в качестве их возможных значений использовались только рациональные числа. Изложение методов Диофанта с современной точки зрения дается в [1]. Следующий этап в развитии теории алгебраических уравнений с несколькими неизвестными связан с работами Ферма и Виета, которые уже полностью пользовались буквенной записью уравнений (16 век), причем рассматривались решения уравнений уже в целых числах (см. [2], [3]). Вопросам о числе решений линейных диофантовых уравнений в целых числах посвящены [4]-[6]. В последнее время рассматривают также системы линейных диофантовых уравнений над кольцом целых чисел [7].

Линейное уравнение над евклидовым кольцом является обобщением линейного диофантова уравнения. Для более успешного решения вопросов, связанных с линейными уравнениями, мы рассматриваем из над евклидовым кольцом, учитывая при этом что в таком кольце существует наибольший общий делитель (НОД) элементов, а значит, имеется и линейное представление НОД коэффициентов (см. [8], [9]). Элементарное введение в теорию евклидовых колец вместе с приложениями к системам линейных уравнений над такими кольцами дается в [8], где рассматриваются матричный метод решения таких систем. В случае линейных диофантовых уравнений способ их решения с помощью сравнений по подходящим модулям был изложен в [10], [11]. Этот результат использован в [12] в задаче усреднения дифференциального уравнения в частных производных при исследовании предельных циклов обобщенной полиномиальной дифференциальной системы Куклеса, связанной с решением линейного диофантова уравнения специального вида $b_1 + 2b_2 + \cdots + lb_l = l$, где $b_1, b_2, \ldots, b_l$ – неизвестные в обозначениях указанной работы.

Сведения о евклидовых кольцах

При решении линейных уравнения над кольцом важную роль играют кольца, в которых в определенном смысле выполняется теорема о делении с остатком, как в случае кольца целых чисел.

Определение 1. Кольцо целостности E называется евклидовым, если на множестве $E/\{0\}$ можно определить функцию h, значения которой являются целыми неотрицательными числами так, что выполняются условия

$$E_1 : \text{если} \quad b|a, \quad \text{то} \quad h(a) \geq h(b),$$

$$E_2 : \text{для любых} \quad a, b, \in E, \quad \text{где} \quad b \neq 0 \quad \text{найдутся элементы} \quad q, r \in E,$$
$$\text{такие что} \quad a = bq + r, \quad \text{где} \quad r = 0 \quad \text{или} \quad h(r) < h(b).$$

В этом определении функция h есть евклидова норма.

Определение 2. Два элемента a и b евклидова кольца E называются сравнимыми по модулю $m \in E$, если $m|(a-b)$ и записывают $a \equiv b(\mod m)$.

К вопросу о возможности решения линейного уравнения над евклидовым кольцом относятся следующие два утверждения (см. [8], [9]).

Лемма 1. *Всякое конечное множество $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ненулевых элементов евклидова кольца R обладает наибольшим общим делителем и при этом НОД$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ определен с точностью до делителей единицы кольца R.*

Лемма 2. *(о линейном представлении НОД). Наибольший общий делитель элементов множества $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ может быть представлен как линейная комбинация элементов с коэффициентами из евклидова кольца R.*

Линейные уравнения с n неизвестными над евклидовым кольцом

Обобщим теперь метод решения диофантовых уравнений, полученный в [10], [11] на случай линейных уравнений над евклидовым кольцом.

Итак, рассматриваем линейное уравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1}$$

над евклидовым кольцом E, где $a_k \in E$, $k = 1, \ldots, n$; $b \in E$ с евклидовой нормой h.

В силу леммы 1 введем в евклидовом кольце обозначения

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = \text{НОД}(a_1, a_2, \ldots, a_n),\\
&\Delta_2 = \text{НОД}(a_2, \ldots, a_n),\\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\\
&\Delta_k = \text{НОД}(a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n),\\
&\Delta_n = \text{НОД}(a_n) = a_n.
\end{aligned}$$

Уравнение (1) в случае $\Delta_1 \nmid b$ не имеет решений в евклидовом кольце E (по определению делимости в кольце главных идеалов).

Если же $\Delta_1|b$, то уравнение (1) будет разрешимым в евклидовом кольце E. Действительно, пусть для уравнения (1) выполняется указанная делимость. В силу леммы 2 о линейном представлении НОД имеем

$$a_1y_1 + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n = \Delta_1, \tag{2}$$

при некоторых $y_1, y_2, \ldots, y_n \in E$.

Обе части уравнения (2) умножим на элемент $\frac{b}{\Delta_1}$. Тогда уравнение (2) примет вид

$$a_1\left(\frac{b}{\Delta_1}y_1\right) + a_2\left(\frac{b}{\Delta_1}y_2\right) + \cdots + a_n\left(\frac{b}{\Delta_1}y_n\right) = b,$$

откуда получаем равенство

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

где $x_k = \frac{b}{\Delta_1}y_k \in E$, $(k = 1, \ldots, n)$.

Следовательно, уравнение (1) в случае $\Delta_1|b$ будет разрешимым в евклидовом кольце E и тем самым условие разрешимости линейного диофантова уравнения, изложенное в [11] переносится на евклидовы кольца.

Считая, что $\Delta_1|b$, перепишем уравнение (1) в следующем виде

$$a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b - a_1x_1.$$

Тогда найдется $x_1 = x_1^{(0)} \in E$, что выполняется делимость $\Delta_2|b - a_1x_1^{(0)}$ и значит, $a_1x_1^{(0)} \equiv b(\mod \Delta_2)$, при этом в качестве x_1 можно взять любой элемент из класса вычетов $x_1 \equiv x_1^{(0)}(\mod \Delta_2)$.

Заменяем это сравнение равенством $a_1x_1^{(0)} + a_2\nu_2 = b$, где $x_1^{(0)}, \nu_2 \in E$, при этом для нахождения $x_1^{(0)}$ нужно применить алгоритм Евклида, справедливый и для кольца E вместе с леммой 2 о линейном представлении НОД.

Обозначим $b_2 = b - a_1x_1^{(0)}$ и рассмотрим уравнение

$$a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b_2.$$

Как и в предыдущем случае перепишем опять это уравнение в следующем виде

$$a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b_2 - a_2x_2.$$

В силу предыдущего рассуждения найдется значение $x_2 = x_2^{(0)} \in E$, что выполняется делимость

$$a_3|b_2 - a_2x_2^{(0)},$$

т.е. $a_2x_2^{(0)} \equiv b_2(\mod \Delta_3)$.

Тогда в качестве значения x_2 можно взять любой элемент из класса вычетов $x_2 \equiv x_2^{(0)}(\mod \Delta_3)$, при этом $x_2^{(0)}$ находим по алгоритму Евклида с применением линейного представления НОД.

Продолжая такой процесс, на предпоследнем шаге получим сравнение вида

$$a_{n-1}x_{n-1}^{(0)} \equiv b_{n-1}(\mod \Delta_n).$$

Тогда в качестве значения неизвестного x_{n-1} можно взять любой элемент из класса вычетов $(\mod \Delta_n)$.

На последнем шаге получаем уравнение вида

$$a_nx_n = b_{n-1} - a_{n-1}x_{n-1}^{(0)},$$

откуда

$$x_n = \frac{b_n}{\Delta_n},$$

где $b_n = b_{n-1} - a_{n-1}x_{n-1}^{(0)}$.

Получившийся набор элементов $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \in E^n$ есть одно из решений линейного уравнения над евклидовым кольцом E.

Действительно, имеем

$$x_n^{(0)} = \frac{b_n}{\Delta_n} = \frac{b_n}{a_n} \Rightarrow a_n x_n^{(0)} = b_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_n x_n^{(0)} = b_{n-1} - a_{n-1}x_{n-1}^{(0)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_n x_n^{(0)} + a_{n-1}x_{n-1}^{(0)} = b_{n-1}$$

и т.д.

В итоге получаем, что

$$a_1 x_1^{(0)} + a_2 x_2^{(0)} + \cdots + a_n x_n^{(0)} = b_1 = b.$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема. *Любое решение линейного уравнения*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

над евклидовым кольцом E *при* $НОД(a_1, a_2, \ldots, a_n)|b$ *имеет вид*

$$\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right) \in E^n,$$

где

$$a_k x_k^{(0)} \equiv b_k(\mod \Delta_{k+1}), \quad 1 \le k \le n-1; \quad x_n^{(0)} = \frac{b_n}{\Delta_n};$$

при этом элементы b_k *определяются рекуррентными соотношениями*

$$b_k = b_{k-1} - a_{k-1}x_{k-1}^{(0)}; \quad 2 \le k \le n; \quad b_1 = b;$$

$$\Delta_k = НОД\left(a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n\right).$$

Пример. Найти какое-нибудь решение линейного уравнения

$$(5+5i)x_1 + (7+6i)x_2 + (11+7i)x_3 = 1$$

над кольцом $\mathbb{Z}[i]$ целых гауссовых чисел.

Решение. Ввиду того, что кольцо $\mathbb{Z}[i]$ является евклидовым, можно применить доказанную теорему. Начнем с того, что евклидова норма в кольце $\mathbb{Z}[i]$ определяется равенством $h(a+bi) = a^2 + b^2$, где $a, b \in \mathbb{Z}$. Следуя теореме, будем находить значения $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ для заданного уравнения.

Имеем

$$\Delta_1 = НОД(5+5i, 7+6i, 11+7i).$$

Применяя алгоритм Евклида, сначала находим $НОД(5+5i, 7+6i)$ первых двух коэффициентов заданного уравнения. Для этого рассматриваем частное

$$\frac{5+5i}{7+6i} = \frac{(5+5i)(7-6i)}{85} = \frac{13}{17} + \frac{1}{17}i.$$

Подбирая ближайшие целые к числам $\frac{13}{17}$ и $\frac{1}{17}$, будем иметь

$$\frac{5+5i}{7+6i} = 1 + 0i + \left(-\frac{4}{17} + \frac{1}{17}i\right),$$

откуда

$$5 + 5i = (7 + 6i)(1 + 0i) + (-2 - i)$$

при этом очевидно, что $h(-2-i) < h(7+6i)$.

Следуя алгоритму Евклида, делим теперь с остатком число $7 + 6i$ на $-2 - i$ в кольце $\mathbb{Z}[i]$. Имеем

$$\frac{7+6i}{-2-i} = \frac{(7+6i)(-2+i)}{5} = -4 - i,$$

откуда

$$7 + 6i = (-2 - i) \cdot (-4 - i).$$

Значит, НОД$(5 + 5i, 7 + 6i) = -2 - i$.
Тогда

$$\Delta_1 = \text{НОД}(-2 - i, 11 + 7i) = \text{НОД}(11 + 7i, -2 - i).$$

Опять разделив с остатком число $7 + 6i$ на $-2 - i$, получим

$$7 + 6i = (-2 - i) \cdot (-6 - i),$$

при этом $h(-i) < h(-2 - i)$.

Делим еще с остатком число $-2 - i$ на $-i$. Имеем

$$-2 - i = (-i)(1 - 2i).$$

По алгоритму Евклида получаем

$$\text{НОД}(11 + 7i, -2 - i) = -i.$$

Значит, $\Delta_1 = -i$.
Находим теперь

$$\Delta_2 = \text{НОД}(a_2, a_3) = \text{НОД}(7 + 6i, 11 + 7i) = \text{НОД}(11 + 7i, 7 + 7i).$$

Применяя опять алгоритм Евклида, выполняем последовательные деления с остатками. Имеем

$$11 + 7i = (7 + 6i) \cdot 1 + 4 + i,$$

при этом $h(4 + i) < h(7 + 6i)$.
Далее делим $7 + 6i$ на $4 + i$. Имеем

$$\frac{7+6i}{4+i} = 2 + i,$$

откуда $7 + 6i = (4 + i)(2 + i)$.

Так как последний ненулевой остаток равен $4 + i$, то $\Delta_2 = 4 + i$.

Наконец, в силу теоремы автоматически получаем

$$\Delta_3 = \text{НОД}(a_3) = a_3 = 11 + 7i.$$

Перейдем теперь к нахождению одного из решений заданного уравнения. Запишем его в следующем виде

$$a_2x_2 + a_3x_3 = b - a_1x_1.$$

Тогда найдется $x_1 = x_1^{(0)} \in \mathbb{Z}[i]$, что выполняется делимость

$$\Delta_2 | \left(1 - (5 + 5i)x_1^{(0)}\right),$$

т.е. $(5 + 5i)x_1^{(0)} \equiv 1(\mod 4 + i)$.
Заменим это сравнение равенством

$$(5 + 5i)u_1 + (4 + i)v_1 = 1, \tag{3}$$

где $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}[i]$.
Значения для u_1 и v_1 найдем, применяя алгоритм Евклида к числам $5 + 5i$ и $4 + i$, при этом значения для v_1 на самом деле не нужно находить. Для этого рассматриваем отношение

$$\frac{5 + 5i}{4 + i} = \frac{25}{17} + \frac{15}{17}i = 1 + i + \frac{8}{17} - \frac{2}{17}i,$$

откуда

$$5 + 5i = (4 + i)(1 + i) + 2$$

при этом $h(2) < h(4 + i)$.

Следующее деление с остатком дает

$$4 + i = 2 \cdot 2 + i, \quad h(i) < h(2)$$

и последнее деление будет

$$2 = i(-2i).$$

Итак, имеем следующую последовательность делений с остатками

$$\begin{aligned} &5 + 5i = (4 + i)(1 + i) + 2, \\ &4 + i = 2 \cdot 2 + i, \\ &2 = i(-2i). \end{aligned} \tag{4}$$

По алгоритму Евклида получаем

$$\text{НОД}(5 + 5i, 4 + i) = i$$

и значит,

$$i = (5 + 5i)u_1 + (4 + i)v_1$$

при некоторых $u_1, v_1 \in \mathbb{Z}[i]$.

С другой стороны, поднимаясь снизу вверх по равенствам (4), получаем

$$i = 4 + i - 2 \cdot 2 = 4 + i - 2 \cdot \{5 + 5i - (4 + i)(1 + i)\} = (5 + 5i) \cdot (-2) + (4 + i)(3 + 2i),$$

откуда

$$1 = (5 + 5i) \cdot 2i + (4 + i)(2 - 3i).$$

Сравнивая это с (3), получаем

$$u_1 = 2i, \quad \text{т.е.} \quad x_1^{(0)} = 2i.$$

Теперь по теореме находим $x_2^{(0)}$ из сравнения

$$a_2 x_2^{(0)} \equiv b_2 (\mod \Delta_3),$$

т.е. $(7 + 6i)x_2^{(0)} \equiv b_1 - a_1 x_1^{(0)} (\mod a_3)$, где $a_3 = \Delta_3$
откуда

$$(7 + 6i)x_2^{(0)} \equiv 1 - (5 + 5i) \cdot (2i) (\mod a_3),$$
$$(7 + 6i)x_2^{(0)} \equiv 11 - 10i (\mod 11 + 7i).$$

Запишем это сравнение в виде равенства

$$(7 + 6i)x_2^{(0)} - (11 + 7i)v_1 = 11 - 10i. \tag{5}$$

Так как НОД$(7 + 6i, 11 + 7i) = \Delta_2 = 4 + i$, то из (5) получаем

$$(2 + i)x_2^{(0)} - (3 + i)v_2 = 2 - 3i.$$

Ясно, что

$$\text{НОД}(2 + i, 3 + i) = 1. \tag{6}$$

Находим НОД$(2 + i, 3 + i)$ по алгоритму Евклида

$$2 + i = (3 + i) \cdot 1 + (-1),$$
$$3 + i = (-1) \cdot (-3 - i).$$

Значит, $-1 = (2 + i) \cdot 1 - (3 + i) \cdot 1$, т.е.

$$1 = (2 + i)(-1) + (3 + i) \cdot 1. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует, что

$$x_2^{(0)} = -1, \quad v_2 = 1.$$

Теперь получаем по теореме

$$a_3 x_3^{(0)} = b_2 - a_2 x_2^{(0)},$$

т.е.

$$(11 + 7i)x_3^{(0)} = b - a_1 x_1^{(0)} - a_2 x_2^{(0)} = 1 - (5 + 5i)2i - (7 + 6i)(-1) = 18 - 4i,$$

откуда по теореме

$$x_3^{(0)} = \frac{b_3}{\Delta_3} = \frac{18 - 4i}{11 + 7i} = 1 - i.$$

Итак, $x_1 = 2i$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1 - i$ есть одно из решений заданного линейного уравнения.

Заключение

1. Доказанная теорема позволяет получить все решения линейного уравнения над евклидовым кольцом, но они будут параметрически зависеть от представителей используемых классов вычетов.
2. Полученный результат можно распространить на все евклидовы квадратичные поля (см. [13]).
3. Интересно перенести изложенный метод на линейные уравнения над евклидовыми кольцами многочленов и матриц.
4. Представляет также обобщение проведенного исследования на системы линейных уравнений над евклидовым кольцом.

Список литературы

1. Башмакова И. Г. *Диофант и диофантовы уравнения.* М.: Наука, 1972. 68 с.
2. Эдвардс Г. *Последняя теорема Ферма. Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел.* М.: Мир, 1980. 425 с.
3. Серпинский В. *О решении уравнений в целых числах.* М.: Наука, 1961.
4. Фрид Э., Пастор И., Рейман И., Ревес П., Ружа И. *Малая математическая энциклопедия.* Будапешт: Академия наук Венгрии, 1976. 693 с.
5. Самсонадзе Э. Т. Формулы для числа решений линейного диофйантового уравнения и неравенства, *Труды Тбилисского ун-та*, 1983. Т. 239, № 2, С. 34-42.
6. Журавлев Ю. И. *Компъютер и задачи выбора.* М.: Наука, 1989. 208 с.
7. Манин Ю. И., Панчишкин А. А. Введение в теорию чисел, *Итоги науки и техники. соврем. пробл. матем. фундам. направления. ВИНИТИ*, 1990. Т. 49, С. 5-341.
8. Родосский К. А. *Алгоритм Евклида.* М.: Наука, 1988. 236 с.
9. Калужнин Л. А. *Введение в общую алгебру.* М.: Наука, 1973. 447 с.
10. Пачев У. М., Бесланеев З.О., Кодзоков А. Х *Решатель диофантова уравнения*, Государственная регистрация программы для ЭВМ № 2015617110. КБГУ, 2015.
11. Кодзоков А. Х., Бесланеев З. О., Нагоров А. Л., Тхамоков М. Б. О линейных диофантовых уравнениях и способах их решения, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2016. Т. 13, № 2, С. 18-23.
12. Мальков И. Н., Мачулис В. В. Неподвижные точки и предельные циклы обобщённой полиномиальной дифференциальной системы Куклеса, *Известия вузов. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2022. № 2, С. 3-16.
13. Боревич З. И., Шафаревич И. Р. *Теория чисел.* М.: Наука, 1985. 504 с.

Информация об авторах



Пачев Урусби Мухамедович – доктор физико-математических наук, профессор, старший научный сотрудник кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0002-8362-6174.



Кодзоков Азамат Хасанович – старший преподаватель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, институт физики и математики, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0007-3431-1228.



Езаова Алена Георгиевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0004-8691-0706.



Токбаева Альбина Анцуаровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0007-4926-4452.



Гучаева Зера Хамидбиевна – старший преподаватель кафедры алгебры и дифференциальных уравнений, институт физики и математики, Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик, Россия, ORCID 0009-0000-9777-4018.

References

[1] Bashmakova I. G. Diophantus and Diophantine equations. Moscow. Nauka, 1972. 68 p. (In Russian)

[2] Edwards G. Fermat's Last Theorem. Genetic introduction to algebraic number theory. Moscow. Mir, 1980. 425 p. (In Russian)

[3] Sierpinski V. On solving equations in integers. Moscow. Nauka, 1961. (In Russian)

[4] Fried E., Pastor I., Reiman I., Reves P., Ruzsa I. Small mathematical encyclopedia. Budapest: the Hungarian Academy of Sciences. 1976. 693 p. (In Russian)

[5] Samsonadze E.T. Formulas for the number of solutions of a linear Diofiant equation and inequality. Proceedings of Tbilisi University, 1983, vol. 239, pp. 34-42. (In Russian)

[6] Zhuravlev Yu.I. Computer and choice problems. Moscow. Nauka, 1989, 208 p. (In Russian)

[7] Manin Yu.I., Panchishkin A.A. Introduction to number theory. Results of science and technology. let's modernize problem math. fundam. directions. VINITI, 1989, vol. 49, pp. 5-348. (In Russian)

[8] Rodossky K.A. Euclid's algorithm. Moscow. Nauka, 1988, 236 p. (In Russian)

[9] Kaluzhnin A.A. Introdicction to general algebra. Moscow: Nauka, 1973, 447 p. (In Russian)

[10] Pachev U.M., Beslaneev Z.O., Kodzokov A.Kh. Diophantine equation solver. State registration of the computer program: 2015617110. KBSU, 2015. (In Russian)

[11] Kodzokov A.Kh., Beslaneev Z.O., Nagorov A.L., Tkhamokov M.B. On linear Diophantine equations and methods for solving nhem. Vestnik KRAUNTS. Fiz.-mat. Nauki. 2016. vol. 13. no 2. pp. 18-23. (In Russian)

[12] Malkov I.N., Machulis V.V. Fixed points and limit cycles of the generalized polynomial differential system of Kukles. Izvestia of universities. Volga region. Physics and Mathematics. 2002. no 2. pp. 3-16. (In Russian)

[13] Borevich Z.I., Shafarevich I.R. Number theory. Moscow. Nauka, 1985. 504 p. (In Russian)

Information about authors



Pachev Urusbi Muhamedovich – D. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0002-8362-6174.



Kodzokov Azamat Khasanovich – Senior Lecturer, Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0007-3431-1228.



Ezaova Alena Georgievna – Ph.D. (Phys. & Math. Sci.), Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0004-8691-0706.



Tokbaeva Al'bina Aniuarovna – Ph.D. (Phys. & Math. Sci.), Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0007-4926-4452.



Guchaeva Zera Hamidbievna – Senior Lecturer, Department of Algebra and Differential Equations, Institute of Physics and Mathematics, Kabardino-Balkarian State University, Nalchik, Russia, ORCID 0009-0000-9777-4018.

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 46. №1. С. 22 - 51. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-22-51

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 514.113.5

О новых задачах по стереометрии

Б. П. Федоров*, *С. Б. Богданова**, *С. О. Гладков

Московский авиационный институт, 125993, г. Москва, Волоколамское ш, 4, Россия

Аннотация. Приводятся оригинальные комбинационные задачи с правильными многогранниками, к числу которых относятся как популярные тетраэдры и кубы, так и менее распространенные в силу своей сложности октаэдры, додекаэдры и икосаэдры. Приведено решение задачи о вычислении ребра октаэдра, додекаэдра и икосаэдра через сторону вписанного и описанного куба. Вычислен радиус описанной и полувписанной сфер вокруг додекаэдра и икосаэдра. Приведены интересные факты из геометрии, касающиеся углов, ребер, вершин и граней выпуклых многогранников. Во второй части работы приведены несколько нетривиальных комбинаций тел с общей вершиной, в которых высота одного тела служит боковым ребром другого, и в которых найден объем общей части тел. Скомбинированными оказываются две треугольные и две четырехугольные пирамиды, треугольная пирамида с конусом. Каждая задача сопровождается подробным чертежом, а решение задач с платоновыми телами содержит также и несколько вспомогательных рисунков. Работа может быть полезной преподавателям математики средних школ не только в качестве методического обеспечения, но и в виде наглядной помощи при подготовке к олимпиадным мероприятиям.

Ключевые слова: правильные тела, соотношение Эйлера, теорема Евклида, угловой дефект, комбинации и пересечения тел.

Получение: 16.01.2024; Исправление: 25.02.2024; Принятие: 27.02.2023; Публикация онлайн: 07.03.2023

Для цитирования. Федоров Б. П., Богданова С. Б. Гладков С.О. О новых задачах по стереометрии // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 46. № 1. С. 22-51. EDN: PSNZPU. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-22-51.

Финансирование. Работа не выполнялась в рамках фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: sonjaf@list.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Федоров Б. П., Богданова С. Б. Гладков С.О., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2024. vol. 46. no. 1. P. 22 - 51. ISSN 2079-6641

MATHEMATICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-22-51

Research Article

Full text in Russian

MSC 97G40

On the New Problems in Stereometry

B. P. Fedorov, *S. B. Bogdanova**, *S. O. Gladkov*

Moscow Aviation Institute, 125993, Moscow, Volokolamskoe sh., 4, Russia

Abstract. It were given original combinative problems with regular polyhedrons, which including well-known tetrahedrons and cubes, and also the lesser-known octahedrons, dodecahedrons and icosahedrons due to its complexity. The solution of the problem of the calculation of the edge of octahedron, dodecahedron and icosahedron by using the the side of inscribed and circumscribed cubes has been given. The radius of the circumsphered circle and midsphere around the dodecahedron and icosahedron has been calculated. Two triangular pyramids and two tetragonal ones, as well as the triangular pyramid with a cone have been arranged. In the second chapter of the paper, it were shown several non-trivial combinations of the bodies with a common vertex, in which the height of one body was a lateral edge of the other one and in which the volume of generalities bodies was found. Two triangular pyramids and two tetragonal ones, as well as the triangular pyramid with a cone have been arranged. Each problem was going with the detailed figure, and the solution to the problems with Platon body was including several supporting ones as well. This paper could be used by high school mathematics teachers not only as methodological support, but also as a clear example in preparation for the Olympiad tasks in math for students.

Key words: regular bodies, Euler ratio, Euclid's theorem, angular defect, aggregates and crosscuts of the bodies.

Received: 16.01.2024; Revised: 25.02.2024; Accepted: 27.02.2024; First online: 07.03.2024

For citation. Fedorov B. P., Bogdanova S. B., Gladkov S. O. On the new problems in stereometry. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **46**: 1, 22-51. EDN: PSNZPU. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-22-51.

Funding. The work was not carried out within the framework of funds

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: sonjaf@list.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Fedorov B. P., Bogdanova S. B., Gladkov S. O., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)

Введение

В последней из серии авторских работ [1–3] была приведена цитата И. Кеплера [4]: «среди правильных тел самое первое, начало и родитель остальных – куб ... а его, если позволительно так сказать, супруга – октаэдр, ибо у октаэдра столько углов, сколько у куба граней». Следуя сделанному в заключении [3] обещанию, настоящую работу мы начнем с комбинационных задач с правильными телами. Вторая же часть работы будет содержать оригинальные комбинационные сюжеты с правильными пирамидами и конусами. Добавим к сказанному, что так же, как и в [1–3], все нижеприведенные задачи были впервые разработаны Б.П. Федоровым в его многолетней работе со студентами физико – математического факультета педагогического института г. Орехово – Зуево, и не содержатся ни в одном из классических сборников задач по стереометрии [5–13].

Комбинационные задачи с платоновыми телами

Напомним, что многогранник, каждая грань которого является правильным многоугольником одного типа, называется платоновым (правильным) телом. Впервые их исследовал Евклид в своих «Началах», где доказал, что всего в Природе существует ровно пять таких тел:

1. Тетраэдр. Его гранями являются четыре правильных треугольника.
2. Гексаэдр (куб). Шестигранник, имеющий квадратами грани.
3. Октаэдр. Восьмигранник, каждая грань которого является правильным треугольником.
4. Додекаэдр. Двенадцатигранник, у которого каждая грань это правильный пятиугольник.
5. Икосаэдр. Двадцатигранник, каждая грань которого является правильным треугольником.

В связи с этим для справки приведем некоторые красивые факты из стереометрии [4, 14–18].

Во – первых, доказательство того, что платоновых тел всего пять основывается на так называемой теореме Евклида, которая гласит: «В любом выпуклом многогранном угле сумма плоских углов при вершине всегда меньше 360°». В частности, для платоновых тел оказывается возможным только пять комбинаций: в тетраэдре сумма указанных углов равна 180°, в кубе - 270°, октаэдре - 240°, икосаэдре - 300°, додекаэдре - 324°.

Во – вторых, для выпуклых тел оказывается справедлива теорема Рене Декарта, к которой он пришел, рассматривая сумму всех разностей между углом в 360° и углом из теоремы Евклида. Эта сумма, носит название «угловой дефект», и согласно теореме Декарта всегда равна 720°. Действительно, в случае, например,

тетраэдра он будет составлять $(360^\circ - 180^\circ) \cdot 4 = 720^\circ$ (напомним, что вершин у тетраэдра четыре), для куба угловой дефект также будет $(360^\circ - 270^\circ) \cdot 8 = 720^\circ$, для октаэдра $(360^\circ - 240^\circ) \cdot 6 = 720^\circ$ и т.д.

В – третьих, для выпуклых многогранников выполняется теорема Эйлера: $V - R + G = 2$, в которой V–количество вершин, R–количество ребер и G–число граней многогранника.

В рассматриваемых ниже трех задачах мы скомбинировали додекаэдр, икосаэдр, тетраэдр и октаэдр с кубом. Для ясности восприятия условие каждой задачи сопровождается дополнительным рисунком, на котором мы специально избегаем всех буквенных обозначений.

Задача 1. *Ребро куба равно* a. *В куб вписан правильный тетраэдр так, что его ребра являются диагоналями граней куба. В этот тетраэдр вписан октаэдр таким образом, что его вершины лежат на серединах ребер тетраэдра. Середины ребер октаэдра соединены так, что внутри октаэдра оказался вписанным прямоугольный параллелепипед. Выразить стороны тетраэдра, октаэдра и прямоугольного параллелепипеда через ребро куба (см. рис. 1). Проанализировать случай, когда внутренний прямоугольный параллелепипед является кубом.*

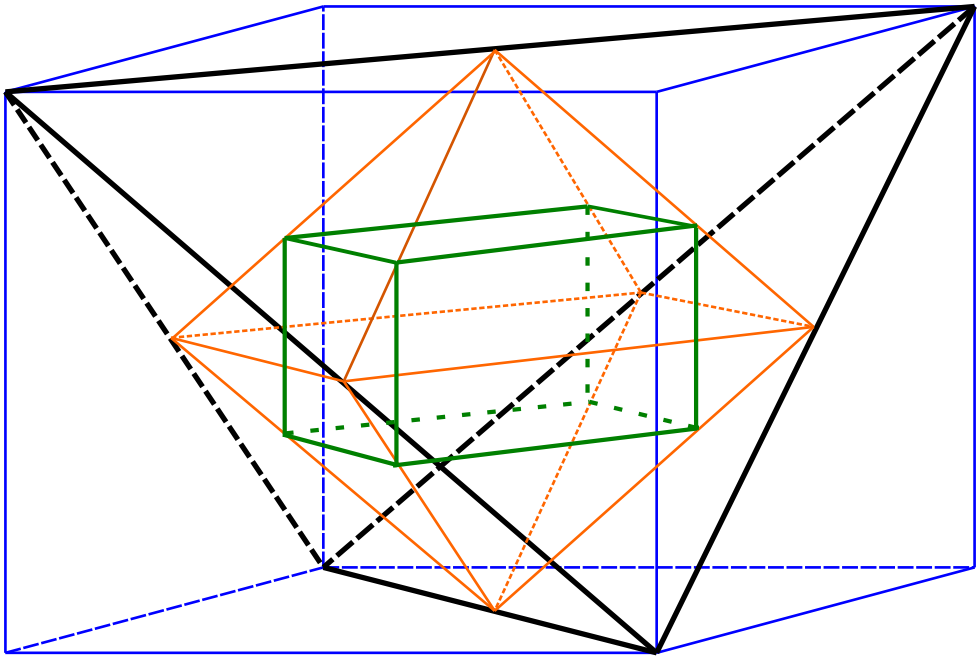


Рис. 1. Схематическое изображение всех вписанных в куб тел.
[Figure 1. The schematic drawing of all bodies inscribed in a cube.]

Решение

Чтобы не загромождать рис.1, решение задачи будем проводить на отдельных чертежах, каждый из которых для наглядности содержит только одну пару тел, но уже с необходимыми нам обозначениями.

1. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ куб с ребром a (рис. 2). Поскольку ребро p правильного тетраэдра является диагональю квадрата со стороной a, то, очевидно, что $p = a\sqrt{2}$.

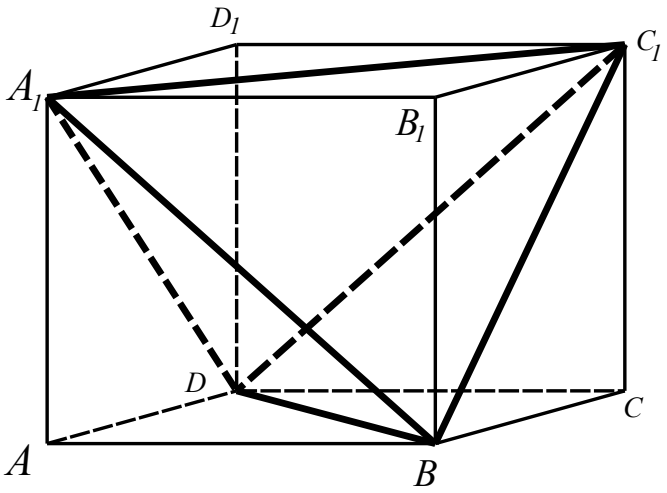


Рис. 2. Вершины куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служат вершинами правильного тетраэдра A_1BC_1D.

[Figure 2. The cube corners of $ABCDA_1B_1C_1D_1$ are the vertices of a regular tetrahedron A_1BC_1D.]

2. Рассмотрим отдельно получившийся правильный тетраэдр A_1BC_1D с ребром $p = a\sqrt{2}$ (рис.3). Поскольку вершины правильного октаэдра лежат на серединах ребер тетраэдра A_1BC_1D, то ребро октаэдра q служит средней линией правильного треугольника со стороной $p = a\sqrt{2}$, и потому равно $q = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

3. На ребрах октаэдра $MNFKTP$ отметим середины A', B', C', D' и A'', B'', C'', D'' (рис. 4). Найдем стороны получившегося прямоугольного параллелепипеда. Понятно, что $A'B' = B'C' = \dfrac{q}{2}$, как средняя линия правильного треугольника со стороной q. Но поскольку $q = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, то $A'B' = B'C' = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$ и тогда $NK = q\sqrt{2}$, как диагональ квадрата $NFKT$ со стороной q. В результате из треугольника MOK следует, что

$$MO = \sqrt{q^2 - \left(\frac{q\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{q\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{2}.$$

Тогда и $A'A'' = \dfrac{a}{2}$. Таким образом, все размеры прямоугольного параллелепипеда $A'B'C'D'A''B''C''D''$ равны $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $\dfrac{a}{2}$.

4. Исследуем теперь случай, когда вписанный прямоугольный параллелепипед $A'B'C'D'A''B''C''D''$ является кубом и найдем его ребро (см. рис. 5). Обозначим

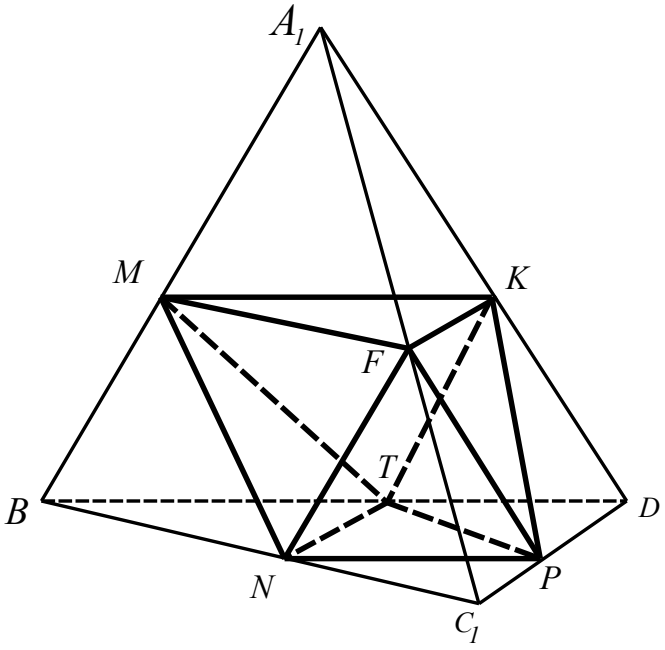


Рис. 3. Середины ребер правильного тетраэдра A_1BC_1D являются вершинами октаэдра MNFKTP.
[Figure 3. The middles of the edges of a regular tetrahedron of A_1BC_1D are the angular points of the regular octahedron MNFKTP.]

сторону куба $A'B'C'D'A''B''C''D''$ через l. Тогда $B''L = \frac{l}{2}$. Пусть отношение $\frac{MB''}{MF} = k$, т.е. $\frac{l}{q} = k$ и $l = kq$. В результате из подобия треугольников MOF и B″LF следует, что $\frac{B''L}{MO} = \frac{B''F}{MF}$, т.е.

$$\frac{B''L}{MO} = \frac{MF - MB''}{MF} = 1 - \frac{MB''}{MF} = 1 - k.$$

А поскольку

$$MO = \frac{q\sqrt{2}}{2},$$

то

$$\frac{B''L}{\frac{q\sqrt{2}}{2}} = 1 - k.$$

И, значит,

$$B''L = q\frac{1-k}{\sqrt{2}}.$$

С одной стороны, ребро куба можно записать в виде

$$l = 2 \cdot B''L = q\,(1-k)\,\sqrt{2}.$$

С другой стороны, как

$$l = kq.$$

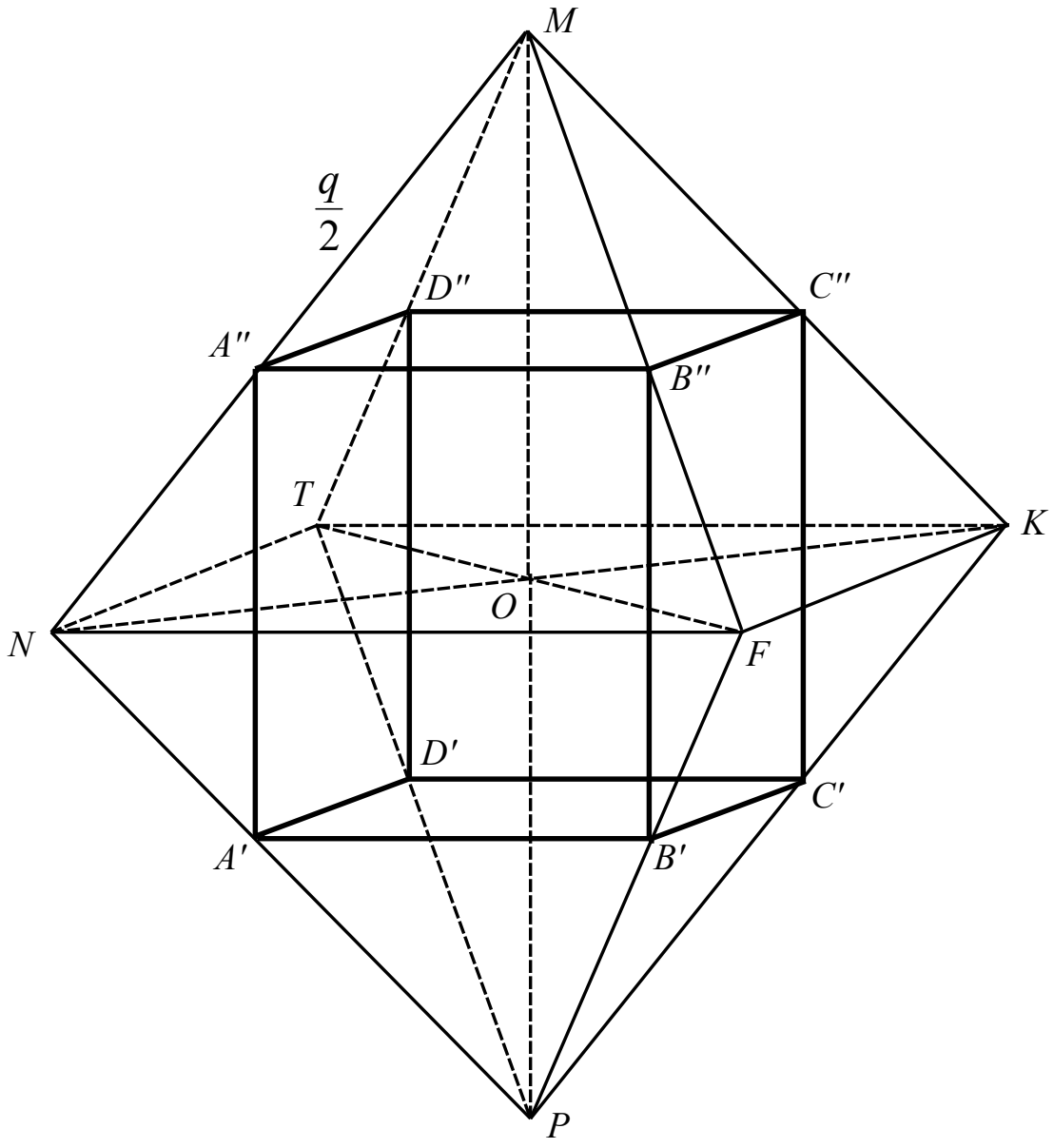


Рис. 4. Середины ребер октаэдра MNFKTP являются вершинами прямоугольного параллелепипеда A′B′C′D′A″B″C″D″.

[Figure 4. The middles edges of the regular octahedron of MNFKTP are the vertices of the right-angled parallelepiped of A′B′C′D′A″B″C″D″.]

Приравнивая эти два равенства, получим

$$q\,(1-k)\,\sqrt{2} = kq,$$

откуда

$$k = \sqrt{2} - 1.$$

Поэтому ребро l вписанного куба A′B′C′D′A″B″C″D″ будет

$$l = q = a\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right) = a\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

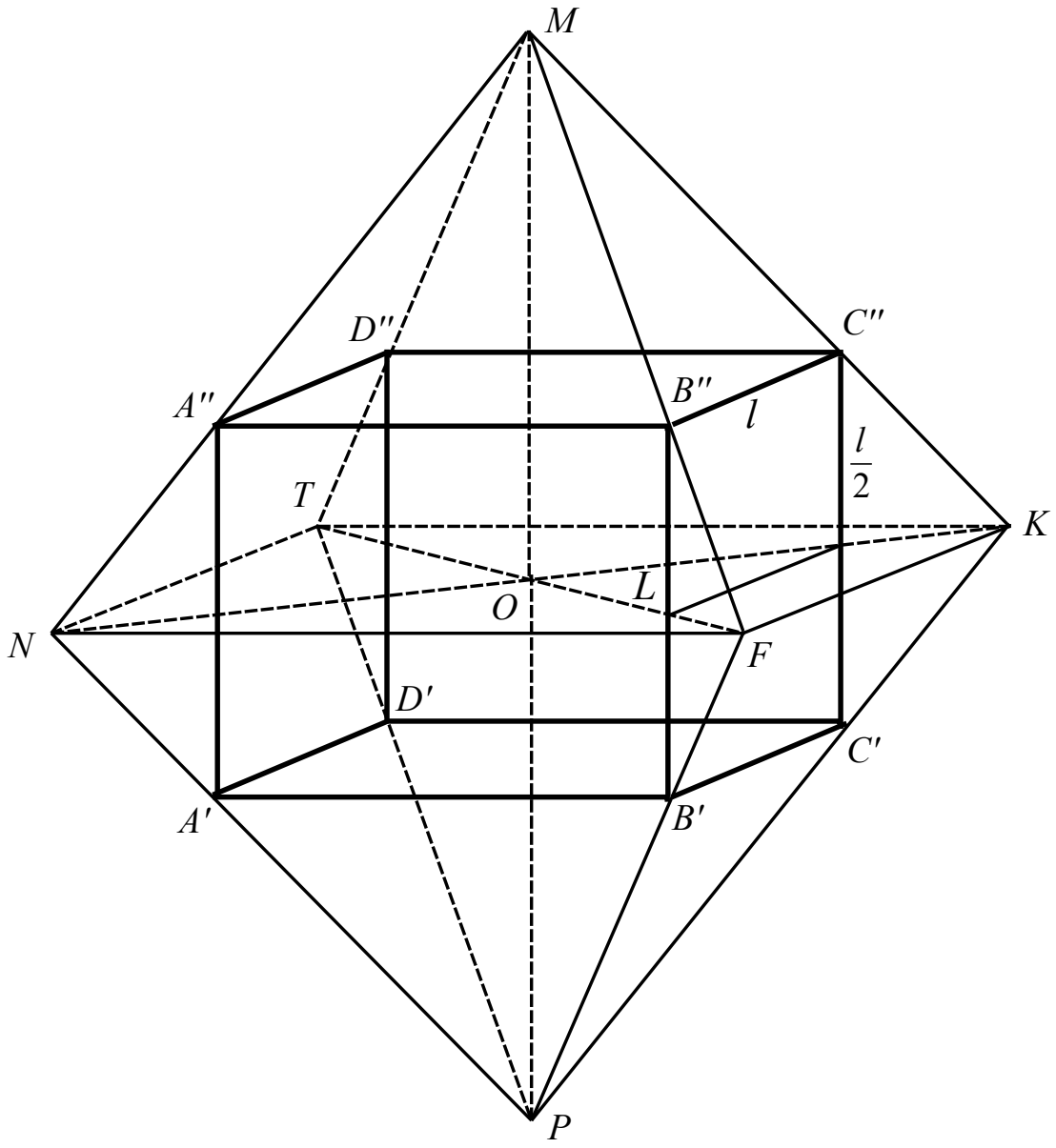


Рис. 5. Вписанный в октаэдр прямоугольный параллелепипед $A'B'C'D'A''B''C''D''$ является кубом.

[Figure 5. The right-angled parallelepiped of $A'B'C'D'A''B''C''D''$ inscribed in the regular octahedron is a cube.]

Итак, ребро вписанного в куб со стороной a тетраэдра равно $a\sqrt{2}$; ребро вписанного в этот тетраэдр октаэдра составляет $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; измерения вписанного в октаэдр параллелепипеда суть $\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $\frac{a\sqrt{2}}{4}$, $\frac{a}{2}$. Ребро вписанного в октаэдр со стороной $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ куба составляет величину $a\frac{2-\sqrt{2}}{2}$.

Задача 2. *В правильный додекаэдр (правильный многогранник, каждая из двенадцати граней которого является правильным пятиугольником) вписан куб со стороной* a *(рис.6). Выразить ребро додекаэдра через ребро куба. Найти радиус описанной около додекаэдра сферы, а также радиус сферы, касающейся всех ребер додекаэдра (полувписанной сферы).*

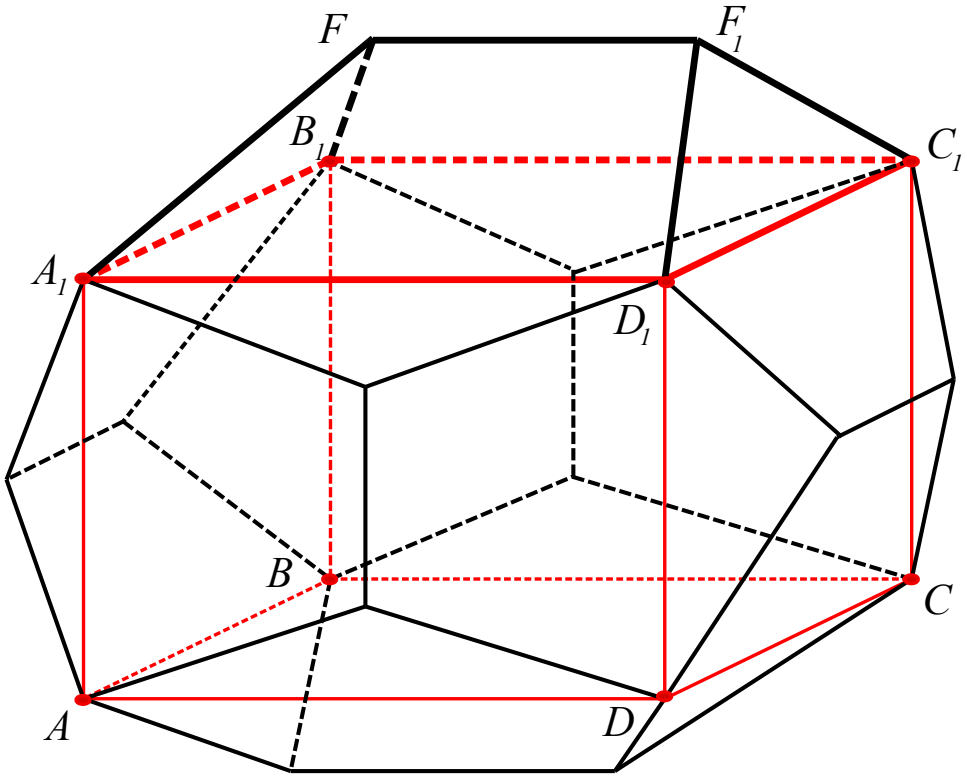


Рис. 6. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписан в додекаэдр так, что его вершины служат диагоналями граней додекаэдра. Все грани куба являются основаниями многогранников типа $A_1B_1C_1D_1FF_1$, в котором ребра FF_1, A_1D_1, B_1C_1 параллельны друг другу. Центр симметрии куба и додекаэдра, а также радиусы описанной и полувписанных сфер показаны на рис. 9.

[Figure 6. The cube of $ABCDA_1B_1C_1D_1$ iscribed in dodecahedron as its vertices are the face diagonals of the dodecahedron. All the cube faces are the bases of the polyhedrons, for instance, $A_1B_1C_1D_1FF_1$ in which the edges are parallel to each other. The symmetry center of cube and dodecahedron, and also the radiuses of the midsphere and circumscribed spheres are shown in the Fig.9.]

Решение

1. Выразим ребро додекаэдра через ребро куба a. Из рис. 6 следует, что ребро куба a совпадает с одной из диагоналей грани додекаэдра. На рис. 7 отдельно рассмотрим грань додекаэдра, являющуюся правильным пятиугольником. Сумма всех его внутренних углов составляет, как известно, 540° , поэтому в равнобедренном треугольнике A_1FC_1 углы $A_1FO = 54^\circ$ и $FA_1O = 36^\circ$, а сторона

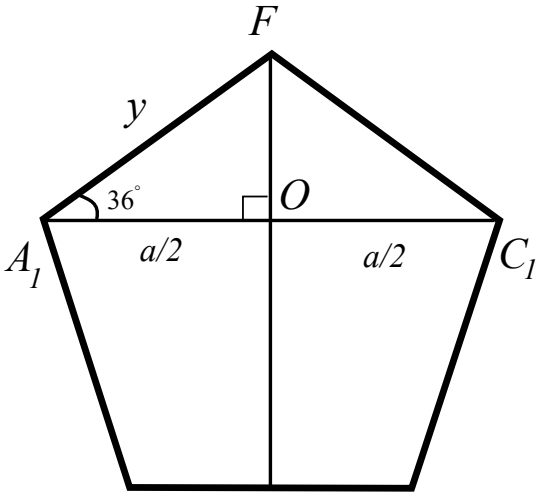


Рис. 7. Диагональ грани A_1C_1 является ребром куба.

[Figure 7. The face diagonal of A_1C_1 is a cube edge.]

$A_1O = \dfrac{a}{2}$ по построению. Тогда сторона y правильного пятиугольника, т.е. ребро описанного додекаэдра, равна

$$y = \frac{a}{2\cos 36^\circ} \tag{1}$$

Приведем вычисление $\cos 36^\circ$. Для этого рассмотрим равнобедренный треугольник с углом при вершине 36° и основанием a (рис. 8). Важно

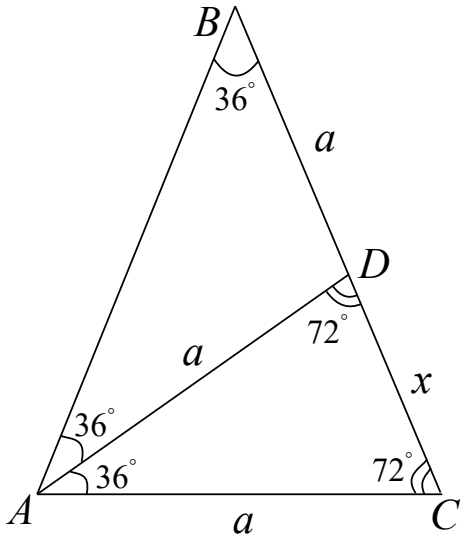


Рис. 8. С помощью равнобедренного треугольника с углом 36° при вершине можно вычислить $\cos 36^\circ$

[Figure 8. Using the isosceles triangle with an angle of 36° at the vertex, we may calculate the following $\cos 36^\circ$.]

сказать, что рис. 8 не является частью никаких предыдущих или последующих

рисунков, а поэтому обозначения на нем никак не связаны с обозначениями на рис. 6, 7 или 9, 10. Проведем биссектрису AD угла при основании и получим еще два равнобедренных треугольника: треугольник ADC с углом при вершине $A = 36^\circ$, основанием $DC = x$ и боковыми сторонами $AC = AD = a$, а также треугольник ADB с углом при вершине $D = 108^\circ$, основанием $AB = a + x$ и боковыми сторонами $BD = AD = a$. Из подобия треугольников ABC и ADC следует очевидное соотношение $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{DC}{AD}$, т.е.

$$\frac{a}{a+x} = \frac{x}{a},$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно x:

$$x^2 + ax - a^2 = 0,$$

решение которого

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a.$$

Далее применим теорему синусов в треугольнике ABC:

$$\frac{AC}{\sin 36^\circ} = \frac{BC}{\sin 72^\circ},$$

т.е.

$$\frac{a}{\sin 36^\circ} = \frac{a+x}{\sin 72^\circ}.$$

Отсюда следует, что

$$a = \frac{a+x}{\sin 72^\circ} \cdot \sin 36^\circ = \frac{a+x}{2\sin 36^\circ \cos 36^\circ} \cdot \sin 36^\circ = \frac{a+x}{2\cos 36^\circ}.$$

Выражая из этого равенства $\cos 36^\circ$, получим:

$$\cos 36^\circ = \frac{a+x}{2a}.$$

Если теперь подставить сюда найденное выше значение

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a,$$

то окончательно найдем, что

$$\cos 36^\circ = \frac{a + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}a}{2a} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}. \tag{2}$$

Подстановка (2) в (1) приводит к нахождению ребра додекаэдра:

$$y = \frac{a}{2\cos 36^\circ} = \frac{a}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}} = \frac{2a}{\sqrt{5}+1} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{3}$$

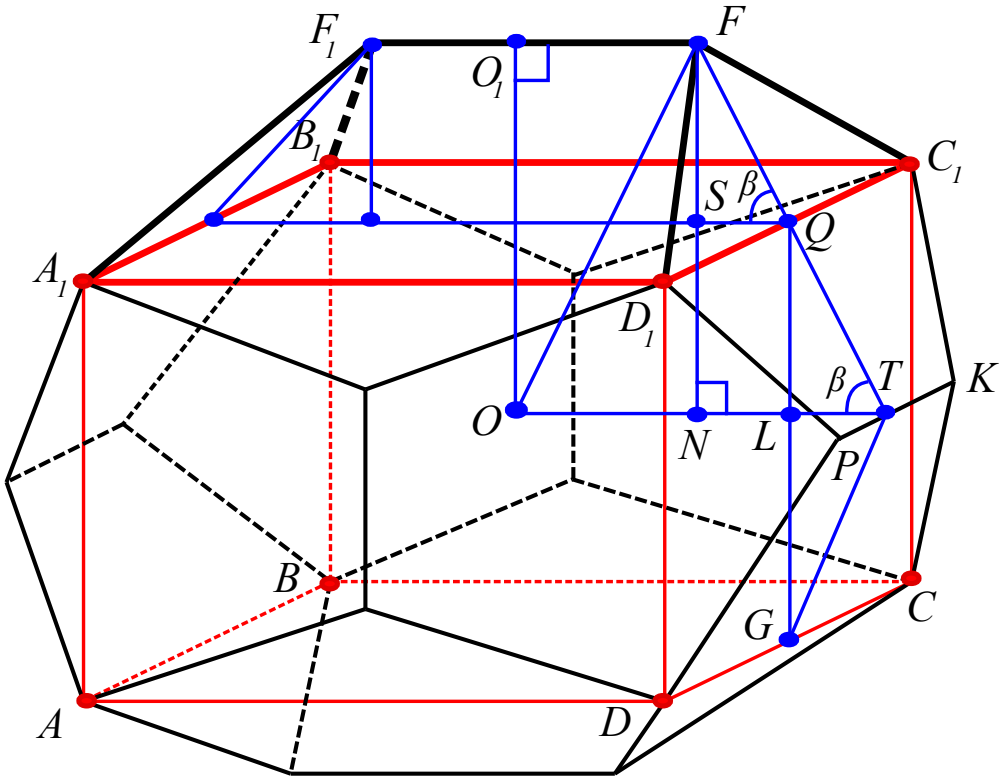


Рис. 9. Точка O - центр описанной и полувписанной сфер вокруг додекаэдра. Радиус полувписанной сферы $OT = OO_1$, радиус описанной сферы OF.

[Figure 9. The point of O is the center of midsphere and circumscribed spheres around the dodecahedron. The radius of the midsphere is $OT = OO_1$, the radius of circumscribed sphere is OF.]

2. Найдем теперь радиус сферы, касающейся всех ребер додекаэдра. Как следует из рис. 9, этот радиус равен отрезку

$$OT = OO_1 = FN = FS + SN = FS + \frac{a}{2}, \tag{4}$$

где a - ребро куба. Из треугольника FSQ следует, что

$$FS = FQ \cdot \sin\beta, \tag{5}$$

где β это угол наклона грани FD_1PKC_1 додекаэдра к плоскости верхнего основания куба. Найти его можно из треугольника QLT. Действительно

$$\sin\beta = \frac{QL}{QT} = \frac{a}{2 \cdot QT}.$$

Как видим, нам требуется знать отрезки FQ и TQ, составляющие диагональ FT правильного пятиугольника FD_1PKC_1. Рассмотрим подробнее рис. 10. Ясно, что $FQ = D_1F \cdot \sin 36^\circ$. Согласно (3) сторона додекаэдра нам известна. А потому

$$D_1F = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

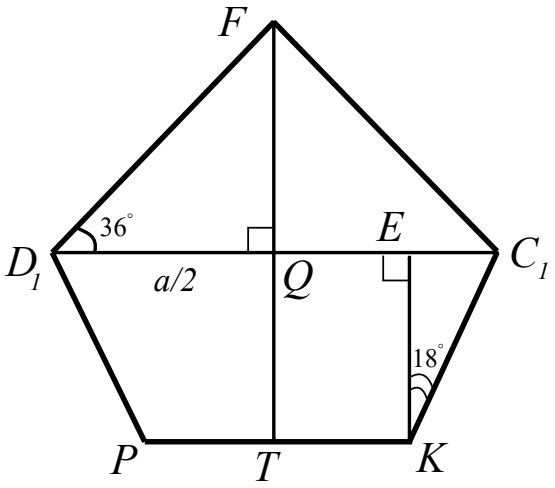


Рис. 10. Грань правильного додекаэдра является правильным пятиугольником.

[Figure 10. The edge of the regular dodecahedron is the regular pentagon.]

и, значит,

$$\sin 36^\circ = \sqrt{1-\cos^2 36^\circ} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Поэтому

$$FQ = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = a\frac{\sqrt{5}-1}{8}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}. \qquad (6)$$

Из рис. 10 следует, что

$$QT = EK = KC_1\cdot\cos 18^\circ.$$

Второй сомножитель легко находится, если воспользоваться формулой двойного угла для косинуса, а именно

$$\cos 36^\circ = 2\cos^2 18^\circ - 1.$$

Подставляя сюда значение

$$\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

получим уравнение

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4} = 2\cos^2 18^\circ - 1.$$

Откуда следует равенство

$$\cos^2 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+5}{8}$$

или

$$\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+5}}{2\sqrt{2}}.$$

Таким образом, с помощью (3) запишем:

$$QT = EK = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{5}+5}}{2\sqrt{2}} = a\frac{\sqrt{5}-1}{4\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+5}.$$

Учитывая эту формулу и равенство $\sin\beta = \dfrac{a}{2\cdot QT}$, которое следует из треугольника QLT, после возвращения к основному рис. 9, получаем интересующее нас значение синуса

$$\sin\beta = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\sqrt{5}+5}}.$$

Если теперь подставить этот результат с учетом формулы (6) в (5), то получим:

$$FS = FQ\cdot\sin\beta = a\frac{\sqrt{5}-1}{8}\cdot\sqrt{10-2\sqrt{5}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}-1\right)\sqrt{\sqrt{5}+5}} =$$
$$= \frac{a\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{\sqrt{5}+5}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}} = \frac{a}{2}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{a}{4}\cdot\frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{a}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

Таким образом, из (5) можно вычислить и радиус сферы, касающейся ребер додекаэдра:

$$FN = FS + \frac{a}{2} = \frac{a}{4}\left(\sqrt{5}-1\right) + \frac{a}{2} = \frac{a}{4}\left(\sqrt{5}+1\right). \qquad (7)$$

3. Что касается радиуса сферы, описанной около додекаэдра, то его можно найти из треугольника OO_1F благодаря соотношению (7). Действительно, имеем для него

$$R = O_1F = \sqrt{OO_1^2 + O_1F^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\left(\sqrt{5}-1\right)\right)^2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (8)$$

Формулы (3), (7) и (8) являются решениями поставленной задачи.

Итак, ребро додекаэдра равно $a\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; радиус описанной около додекаэдра сферы есть $a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; а радиус полувписанной сферы $\dfrac{a}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)$.

Задача 3. *В куб с ребром* a *вписан икосаэдр (правильный многогранник, каждая из двадцати граней которого является правильным треугольником). Выразить ребро икосаэдра, радиус вписанной в него и описанной около него сфер, а также радиус полувписанной сферы, т.е. касающейся всех ребер икосаэдра, через ребро куба* a*. Вычислить объем вписанного икосаэдра. (см. рис. 11).*

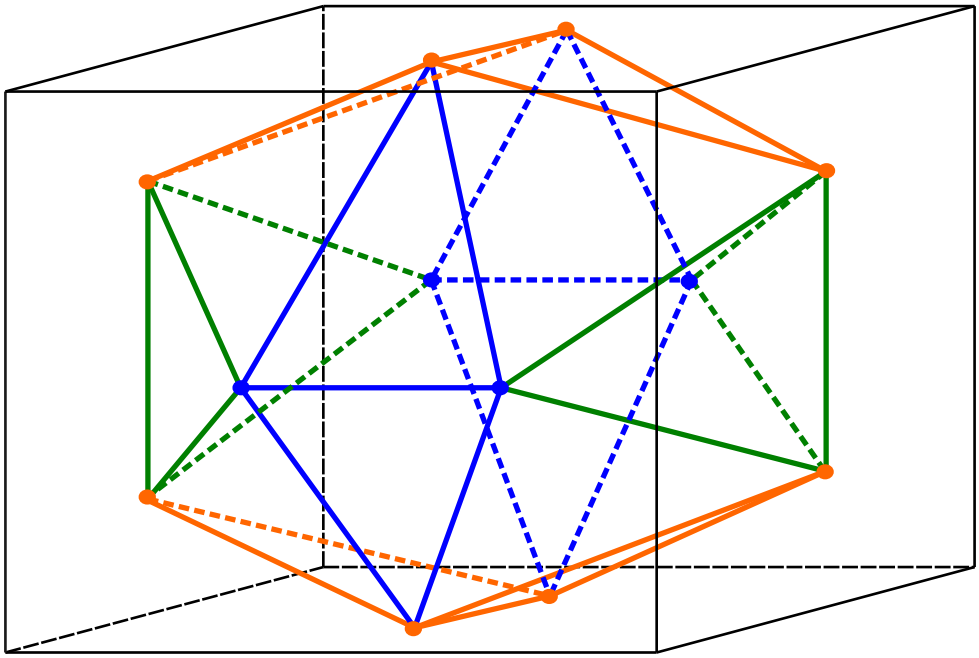


Рис. 11. Схематическое изображение поставленной задачи. Ребра икосаэдра располагаются на осях симметрии противоположных граней куба. Ясно также, что центры описанной около икосаэдра и вписанной в него сфер в силу их симметрий, находятся в центре куба.

[Figure 11. The schematic drawing of the formulated problem. The edges of icosahedron are located on the lines of symmetry of the opposite faces of the cube. What is more, it is clear that the centres of the described around the icosahedron and the spheres inscribed in it due to their symmetries, are located in the center of the cube.]

Решение

Для решения задачи перейдем к рис. 12, на котором показан центр симметрии – точка O, отрезок ON равен радиусу описанной сферы, $OP = \frac{a}{2}$ - радиус сферы, касающейся ребер икосаэдра и отрезок OQ - радиус вписанной сферы. Ребро икосаэдра обозначено через x.

1. Вычислим радиус R описанной около икосаэдра сферы. Из соображений симметрии ясно, что $FN = \frac{a-x}{2} = PM$, а $MN = \frac{a}{2}$. Тогда из треугольника PMN следует, что $PN^2 = PM^2 + MN^2$. Поскольку PN это высота правильного треугольника (грани икосаэдра) со стороной x, то $PN = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Тогда равенство $PN^2 = PM^2 + MN^2$ можно переписать в виде соотношения

$$\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

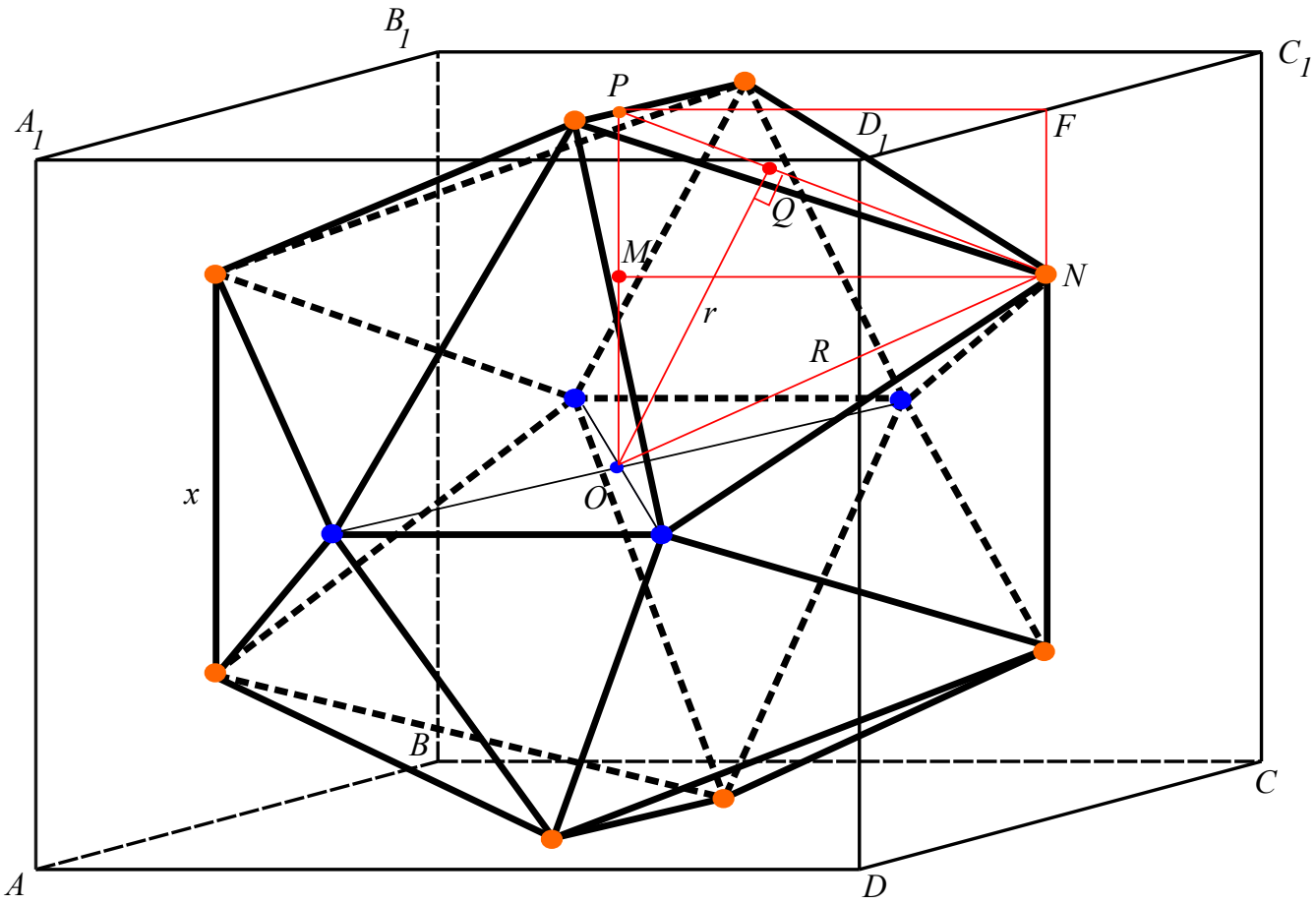


Рис. 12. Ребро икосаэдра равно x. Радиус R описанной вокруг икосаэдра сферы равен ON, отрезок $OP = \frac{a}{2}$ - радиус сферы, касающейся ребер икосаэдра, радиус r вписанной в икосаэдр сферы равен OQ.

[Figure 12. The edge of icosahedron is equal to x. The radius R of the circumscribed sphere around the icosahedron being ON, the length $OP = \frac{a}{2}$ is a radius of the sphere is tangent to the edges of icosahedron, the radius of r inscribed in the icosahedron of the sphere is equal to OQ.]

откуда немедленно следует квадратное уравнение $x^2 + ax - a^2 = 0$. Его решение нам уже встречалось:

$$x = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

И, следовательно, ребро икосаэдра равно

$$a\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Обратимся теперь к треугольнику OMN. В нем $OM = \frac{a}{2} - \frac{a-x}{2} = \frac{x}{2}$, а $ON = R$. Следуя теореме Пифагора, запишем соотношение

$$R^2 = OM^2 + NM^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 + a^2\right).$$

Подставляя сюда значение

$$x = a\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

получим

$$R^2 = \frac{a^2}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{a^2}{8}\left(5-\sqrt{5}\right).$$

Таким образом, радиус описанной сферы будет

$$R = \frac{a}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

2. Для нахождения радиуса r вписанной сферы рассмотрим треугольник OPN, в котором высота

$$PN = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{4}\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right) = \frac{a}{4}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right).$$

Если воспользоваться теперь теоремой косинусов

$$R^2 = OP^2 + PN^2 - 2\cdot OP\cdot PN\cdot \cos P,$$

и подставить сюда все найденные выше величины, то находим, что

$$\frac{a^2}{16}\left(10-2\sqrt{5}\right) = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16}\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)^2 - 2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right)\cdot\cos P.$$

Преобразуя это выражение, приходим к уравнению

$$\frac{6-2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{4}\cdot\cos P.$$

Откуда

$$\cos P = \frac{6-2\sqrt{5}}{\sqrt{15}-\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}-1\right)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}.$$

В результате из прямоугольного треугольника OPQ следует, что

$$PQ = OP\cdot\cos P = \frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}} = \frac{a}{12}\cdot\left(\sqrt{15}-\sqrt{3}\right).$$

Или

$$OQ^2 = OP^2 - PQ^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{16}\cdot\frac{6-2\sqrt{5}}{3} = \frac{a^2}{4}\cdot\frac{6+2\sqrt{5}}{12} = \frac{a^2}{48}\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)^2.$$

И, значит, радиус вписанной в икосаэдр сферы оказывается равным:

$$r = OQ = \frac{a}{12}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right).$$

3. Чтобы теперь вычислить объем икосаэдра, представим его, как сумму двадцати объемов треугольных пирамид с вершиной в точке O, высота которых совпадает с r, то есть

$$H = \frac{a}{12}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right).$$

При этом площадь основания

$$S = x^2\frac{\sqrt{3}}{4} = a^2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Очевидно, что объем икосаэдра будет равен

$$V = 20\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a}{12}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)\cdot a^2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5}{48}a^3\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Итак, ребро икосаэдра равно $a\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$; радиус описанной сферы равен $\dfrac{a}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$; радиус вписанной сферы есть $\dfrac{a}{12}\left(\sqrt{15}+\sqrt{3}\right)$; радиус полувписанной сферы $\dfrac{a}{2}$; а объем икосаэдра составляет значение $\dfrac{5}{48}a^3\left(\sqrt{5}-1\right)$.

Комбинационные задачи с участием правильных пирамид и конусов

Во второй части работы мы хотели бы привести несколько оригинальных комбинационных задач с правильными пирамидами и конусами. Все эти задачи объединены одной идеей: два тела комбинируются так, что высота каждого из них находится на боковом ребре другого, а вершины при этом совпадают. Таким образом, оказываются скомбинированными две правильные треугольные пирамиды, две правильные четырехугольные пирамиды, правильная треугольная пирамида с четырехугольной пирамидой или с конусом. Вполне естественным здесь является вопрос о вычислении объема общей части тел.

Задача 4. *В правильной треугольной пирамиде ребро при основании равно* a*, двугранный угол при боковом ребре* 2α*. В эту пирамиду вписана другая треугольная пирамида так, что боковое ребро её совпадает с высотой данной пирамиды, а высота пирамиды лежит на боковом ребре данной пирамиды (рис.13). Вершины пирамид совпадают. Найти объём общей части пирамид. Проанализировать решение для случая, когда обе пирамиды являются правильными тетраэдрами.*

Решение

Общая часть обеих пирамид представляет собой четырехугольную пирамиду OLQKS. Поскольку ее высота SQ совпадает с ее боковым ребром, то интересующий

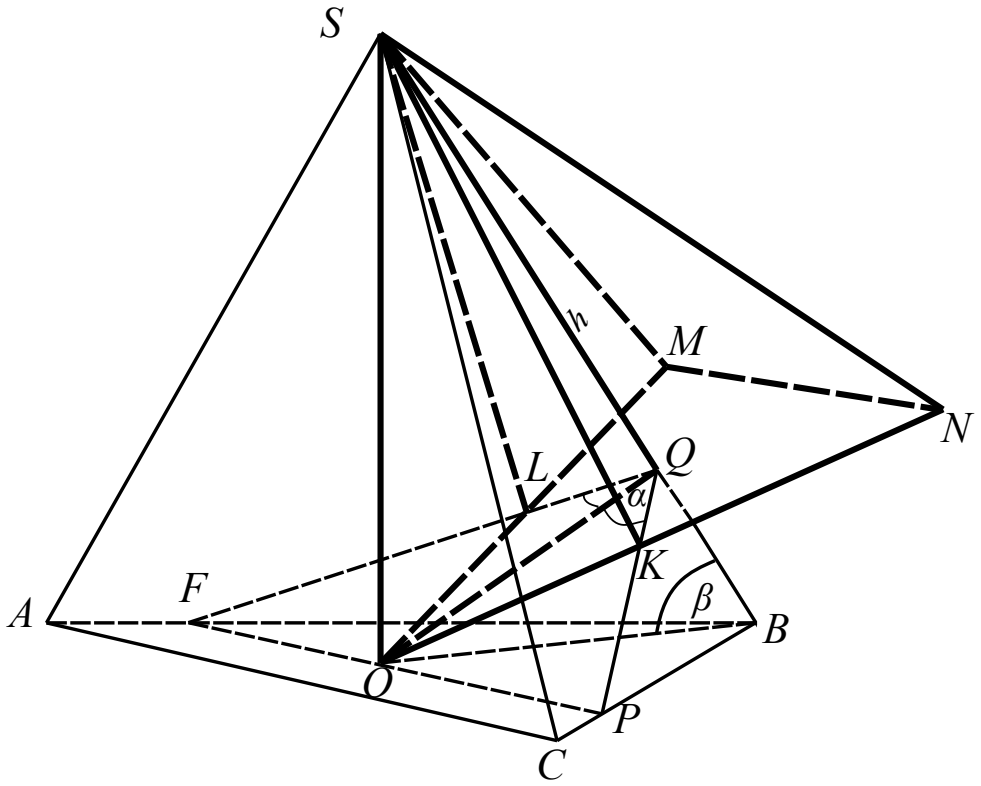


Рис. 13. Ребро основания правильной пирамиды $SABC$ равно a, а двугранный угол при боковом ребре составляет 2α.

[Figure 13. The base edge of the regular pyramid of $SABC$ being a, and the dihedron at the lateral edge is 2α.]

нас объем

$$V_{OLQKS} = \frac{1}{3} S_{OLQK} \cdot SQ \tag{9}$$

Угол наклона бокового ребра к плоскости основания обозначим через β. Тогда из рис.13 следует

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\alpha, \cos\beta = \frac{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{\sqrt{3}\sin\alpha}, \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}. \tag{10}$$

А из треугольника OQP найдем

$$OQ = OP \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{3}\operatorname{ctg}\alpha. \tag{11}$$

В результате из треугольника SOQ найдется высота SQ пирамиды OLQKS:

$$SQ = OQ \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{a \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \cos\alpha}{3\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}. \tag{12}$$

Чтобы найти площадь основания пирамиды OLQKS, заметим, что $S_{OLQK} = 2S_{OQK}$. Площадь треугольника OQK найдем по формуле

$$S_{OQK} = \frac{1}{2} OQ \cdot OK \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} OQ \cdot OK,$$

поскольку треугольник OMN правильный. Чтобы найти OK, воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{OK}{\sin\alpha} = \frac{OQ}{\sin(150^\circ - \alpha)}.$$

Применяя формулу синуса разности углов, получим:

$$OK = \frac{2OQ \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{2OQ}{\operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{3}}.$$

Поэтому

$$S_{OQK} = \frac{1}{2}\frac{OQ^2}{\operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{3}},$$

откуда

$$S_{OLQK} = \frac{OQ^2}{\operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{3}} = \frac{a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{9\left(\operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{3}\right)}. \tag{13}$$

Подставляя формулы (11) и (13) в соотношение (9), находим интересующий нас объем общей части пирамид:

$$V_{OLQKS} = \frac{1}{3}S_{OLQK} \cdot SQ = \frac{a^3\operatorname{ctg}^3\alpha \cdot \cos\alpha}{81\left(\operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{3}\right)\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}.$$

Теперь проанализируем полученный результат для случая, когда обе пирамиды являются правильными тетраэдрами, т.е. боковое ребро пирамиды равно ребру основания. По – прежнему считаем, что $AB = a$. Формулы (10), при этом существенно упрощаются

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin\beta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}.$$

Так как $\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{ctg}\alpha$, то $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$. Далее,

$$SQ = OQ \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{3}\operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{3}\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{2}{3},$$

где $OQ = \frac{a}{3}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. В результате для площади основания пирамиды OLQKS получим

$$S_{OLQK} = 2S_{OQK} = \frac{OQ^2}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}30^\circ} = \frac{2a^2}{9\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}.$$

Итак, объем общей части пирамид равен $\frac{a^3\operatorname{ctg}^3\alpha \cdot \cos\alpha}{81\left(\operatorname{ctg}\alpha + \sqrt{3}\right)\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$; объем общей части правильных тетраэдров составляет $\frac{4}{81}\frac{a^3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$.

Задача 5. *В правильной треугольной пирамиде ребро при основании равно* a*, двугранный угол при боковом ребре равен* 2α*. В эту пирамиду вписан конус так, что его образующая совпадает с высотой пирамиды, а высота конуса лежит на боковом ребре (рис.14). Вершины их совпадают. Найти объём общей части конуса и пирамиды.*

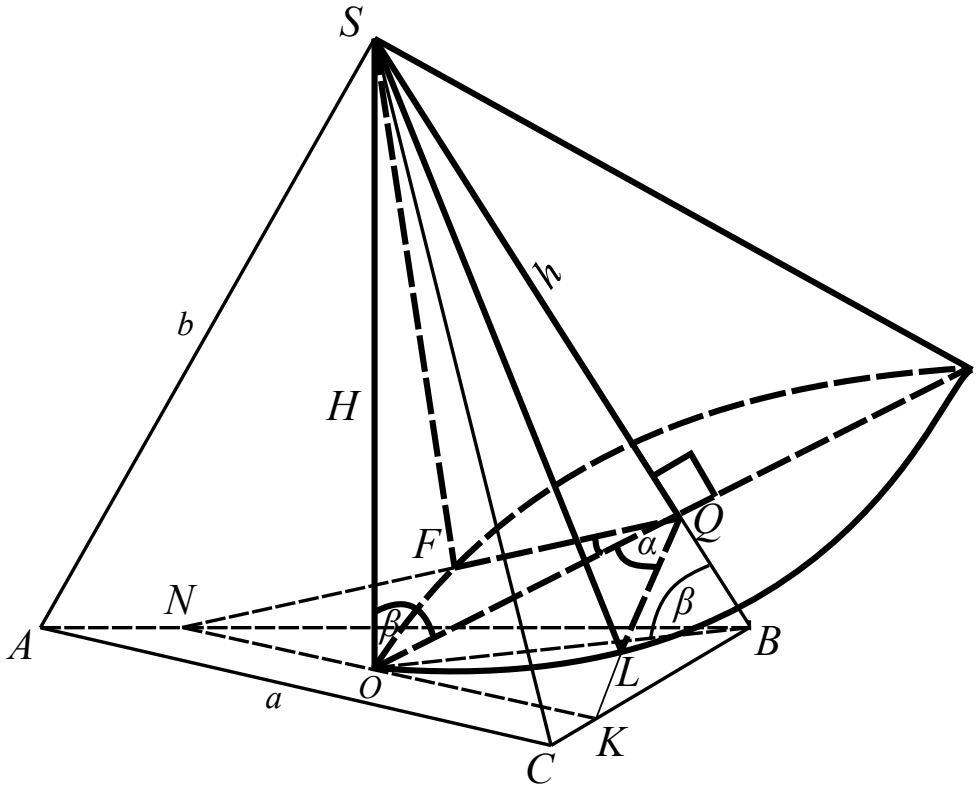


Рис. 14. Высота конуса лежит на боковом ребре пирамиды, образующая конуса совпадает с высотой пирамиды.

[Figure 14. The height of a cone lies on the lateral edge of the pyramid, and the cone generator is the same as height of the pyramid.]

Решение

Общая часть пирамиды и конуса это «пирамида» OFQLS, в основании которой лежит круговой сектор OFQL. Поэтому объем их общей части можно найти по формуле

$$V_{OFQLS} = \frac{1}{3} S_{OFQL} \cdot SQ = \frac{1}{2} \cdot (2\alpha) \cdot OQ^2 \cdot SQ = \alpha \cdot OQ^2 \cdot SQ, \tag{14}$$

где 2α - центральный угол кругового сектора. Нам остается лишь выразить OQ и SQ через сторону основания a пирамиды и двугранный угол α. Из прямоугольного треугольника OQK, в котором $OK = \frac{1}{3}a$, найдем, что

$$OQ = OK \cdot ctg\alpha = \frac{1}{3} a \cdot ctg\alpha. \tag{15}$$

Из прямоугольного треугольника SOQ следует

$$h = SQ = OQ \cdot tg\beta.$$

Выразим $tg\beta$ через $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$. Из треугольника OQB следует, что $OQ = OB \cdot \sin\beta$, а из треугольника OQK находим, что $OQ = OK \cdot ctg\alpha$. Значит,

$$OB \cdot \sin\beta = OK \cdot ctg\alpha$$

или

$$\sin\beta = \frac{OK \cdot ctg\alpha}{OB},$$

где

$$OK = \frac{1}{3}a, OB = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Окончательно,

$$\sin\beta = \frac{ctg\alpha}{\sqrt{3}}, \cos\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{3}ctg^2\alpha} = \frac{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}{\sqrt{3}\sin\alpha}, tg\beta = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}. \quad (16)$$

Стоит обратить внимание также и на следующий факт. Так как по смыслу $0 < \sin\beta < 1$, и поскольку

$$\sin\beta = \frac{ctg\alpha}{\sqrt{3}},$$

то должно выполняться неравенство

$$ctg\alpha < \sqrt{3},$$

т.е.

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Иными словами, в правильной треугольной пирамиде угол между боковыми гранями не может быть меньше $\frac{\pi}{3}$.

Возвратившись к нашей задаче, согласно (15) и (16) находим, что высота «пирамиды» OFQLS

$$SQ = OQ \cdot tg\beta = \frac{1}{3}a \cdot ctg\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}},$$

а площадь ее основания:

$$S = \alpha \cdot OQ^2 = \alpha \cdot \left(\frac{a}{3}ctg\alpha\right)^2 = \alpha \cdot \frac{a^2}{9}ctg^2\alpha.$$

В результате из (14) мы приходим к формуле для объема общей части пирамиды и конуса:

$$V = \frac{1}{3}\alpha \cdot \frac{a^2}{9}ctg^2\alpha \cdot \frac{1}{3}a \cdot \frac{ctg\alpha \cdot \cos\alpha}{\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}} = \frac{\alpha \cdot a^3 ctg^3\alpha \cdot \cos\alpha}{82\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}.$$

Итак, объем общей части пирамиды и конуса составляет $\frac{\alpha \cdot a^3 ctg^3\alpha \cdot \cos\alpha}{82\sqrt{4\sin^2\alpha - 1}}$.

Задача 6. *В правильную четырёхугольную пирамиду* ABCDS *вписана правильная четырёхугольная пирамида* OMNFS *так, что* SQ *высота второй пирамиды лежит на боковом ребре* SC *данной пирамиды (рис.15). Найти объём общей части пирамид, если боковое ребро пирамиды* ABCDS *равно* b, *а двугранный угол при боковом ребре равен* 2α.

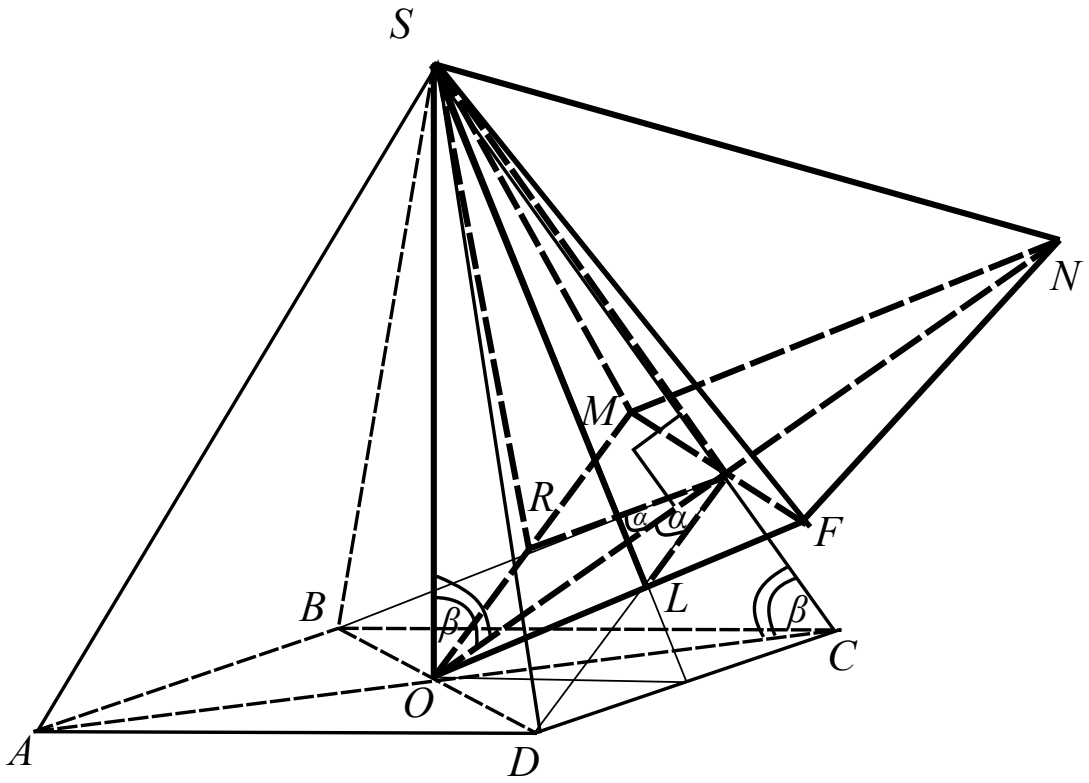


Рис. 15. Высота правильной пирамиды SOMNF находится на боковом ребре правильной пирамиды SABCD, а ее боковое ребро – на высоте SABCD.
[Figure 15. The height of the regular pyramid SOMNF is located on the lateral edge of the regular pyramid SABCD. However, its lateral edge is on the height of SABCD.]

Решение

Обозначим $SA = SB = SC = SD = b$ и $\widehat{BQD} = 2\alpha$. Ясно, что объем общей части пирамид выражается формулой

$$V_{ORQLS} = \frac{1}{3} S_{ORQL} \cdot SQ. \tag{17}$$

Равенства $\sin\beta = \dfrac{OQ}{OC}$ и $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{OQ}{OD}$ следуют из треугольников QOC и QOD соответственно. Отсюда получаем важное соотношение:

$$\sin\beta = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Следовательно,

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}, \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Из прямоугольного треугольника SOC найдем, что

$$OC = b\cos\beta = b\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha},$$

а из прямоугольного треугольника OQC следует равенство

$$OQ = OC\sin\beta = b\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\alpha.$$

Далее, из треугольника OQS находим, что

$$QS = OQ \cdot tg\beta = \frac{bctg\alpha\sqrt{1-ctg^2\alpha}\cdot ctg\alpha}{\sqrt{1-ctg^2\alpha}} = bctg^2\alpha. \tag{18}$$

Ясно, что

$$S_{ORQL} = 2S_{OQL}.$$

Площадь непрямоугольного треугольника OQL найдем, используя формулу

$$S_{OQL} = \frac{1}{2}OL \cdot OQ.$$

Сторону OL вычислим, используя теорему синусов:

$$\frac{OL}{\sin\alpha} = \frac{OQ}{\sin(135^\circ - \alpha)},$$

откуда следует, что

$$OL = \frac{OQ\cdot\sin\alpha}{\sin(135^\circ-\alpha)} = OQ\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin 135^\circ\cos\alpha - \cos 135^\circ\sin\alpha} =$$
$$= \sqrt{2}\cdot OQ\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha} = \sqrt{2}\cdot OQ\cdot\frac{1}{ctg\alpha+1} = \frac{OQ\sqrt{2}}{ctg\alpha+1}.$$

Тогда

$$S_{ORQL} = 2S_{OQL} = OL\cdot OQ = \frac{OQ^2\sqrt{2}}{ctg\alpha+1} = b^2ctg^2\alpha(1-ctg\alpha)\sqrt{2}. \tag{19}$$

Если теперь подставить (18) и (19) в формулу (17), мы получим объем общей части пирамид:

$$V_{ORQLS} = \frac{\sqrt{2}}{3}b^2ctg^2\alpha(1-ctg\alpha)\,bctg^2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}b^3ctg^4\alpha(1-ctg\alpha).$$

Итак, объем общей части пирамид равен $\frac{\sqrt{2}}{3}b^3ctg^4\alpha(1-ctg\alpha)$.

Задача 7. *В правильной треугольной пирамиде ребро при основании равно* a*, двугранный угол при боковом ребре* 2α*. В нее вписана правильная четырёхугольная пирамида так, что боковое ребро пирамиды совпадает с высотой* H *данной пирамиды, а высота* h *пирамиды лежит на боковом ребре данной пирамиды (рис. 16). Вершины их совпадают. Найти объём общей части пирамид.*

Решение

Общая часть пирамид это четырехугольная пирамида SQKOL, высота которой лежит на ее боковом ребре SQ. Следовательно, ее объем можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{3}S_{OQKL}\cdot SQ. \tag{20}$$

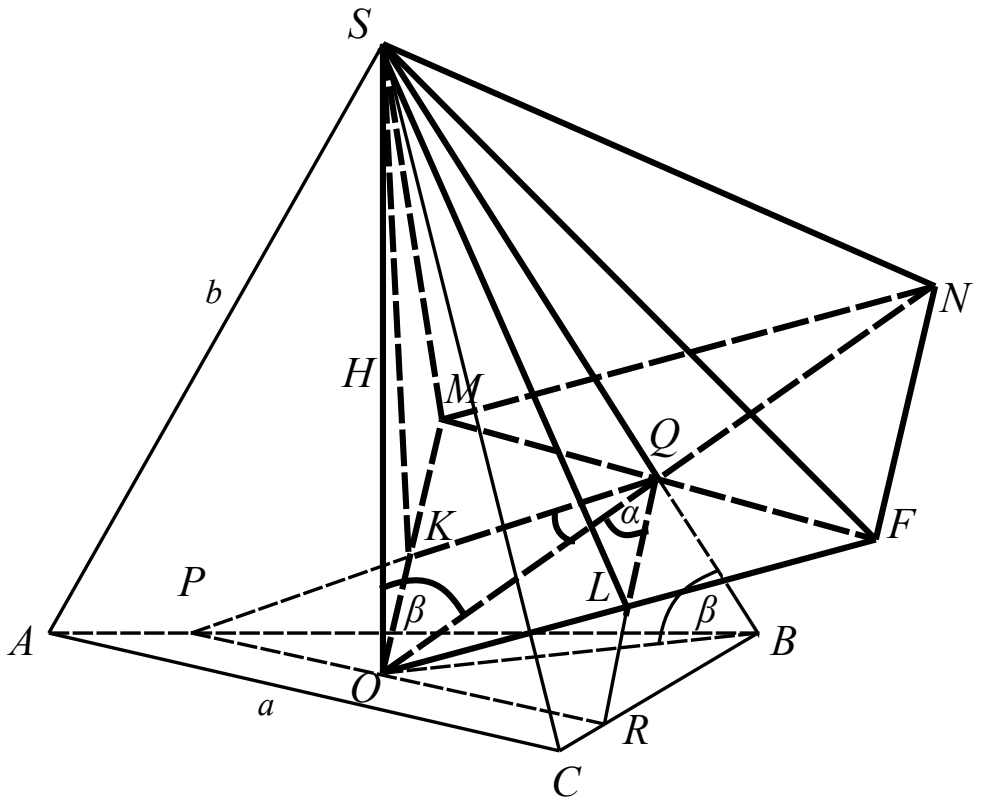


Рис. 16. Правильная треугольная пирамида $SABC$ скомбинирована с правильной четырехугольной пирамидой $SQKOL$ так, что высота каждой из них находится на боковом ребре другой.

[Figure 16. The regular triangular pyramid of $SABC$ is arranged to the regular four-angled pyramid of $SQKOL$ as the height of of each is on the lateral edge of the other.]

Из прямоугольного треугольника ROQ найдем, что:

$$OQ = OR \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{3}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Обозначим угол наклона бокового ребра к плоскости основания через β. Тогда из прямоугольного треугольника OBQ (прямая $SQ \perp PQR$) найдем, что $OQ = OB \cdot \sin\beta$. Получившееся равенство

$$OQ = \frac{a\sqrt{3}}{3}\sin\beta = \frac{a}{3}\operatorname{ctg}\alpha \tag{21}$$

позволяет нам записать, что

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{ctg}\alpha,$$

откуда

$$\cos\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2\alpha}, \operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Высоту SO можно найти из прямоугольного треугольника SOQ. В самом деле, имеем для нее

$$SQ = OQ \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{3} \cdot \operatorname{ctg}\alpha \cdot \frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{a}{3} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\alpha}} \tag{22}$$

Вычислим теперь площадь основания пирамиды SQKOL:

$$S_{OKQL} = 2S_{OQL} = OQ \cdot OL.$$

Поскольку плоская фигура OMNF представляет собой квадрат, то угол $QOL = 45^\circ$. Если к треугольнику OQL применить теперь теорему синусов:

$$\frac{OL}{\sin\alpha} = \frac{OQ}{\sin(135^\circ - \alpha)},$$

то из не следует, что

$$OL = \frac{OQ \cdot \sin\alpha}{\sin(135^\circ - \alpha)} = \frac{OQ \cdot \sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha)} = \frac{OQ \cdot \sqrt{2}}{1 + \operatorname{ctg}\alpha}.$$

В результате согласно (21) и (22) получим, что

$$S_{OKQL} = \frac{a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha}{9 \cdot (1 + \operatorname{ctg}\alpha)}. \tag{23}$$

Подставляя (22) и (23) в соотношение (20), мы приходим, следовательно, к интересующему нас объему общей части пирамид:

$$V = \frac{1}{3}S_{OQKL} \cdot SQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha}{9 \cdot (1 + \operatorname{ctg}\alpha)} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\alpha}} = \frac{a^3}{27} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha}{(1 + \operatorname{ctg}\alpha)\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\alpha}}.$$

Итак, объем общей части пирамид составляет $\frac{a^3}{27} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^4\alpha}{(1 + \operatorname{ctg}\alpha)\sqrt{3 - \operatorname{ctg}^2\alpha}}$.

Заключение

В заключение работы стоит отметить три основных момента.

1. Приведен подробный алгоритм решения задачи о вычислении ребра октаэдра, додекаэдра и икосаэдра через сторону вписанного и описанного куба.

2. В качестве полезной справки приведены основные сведения из теории выпуклых тел: теорема Евклида, теорема Декарта, теорема Эйлера.

3. Проанализирован новый класс комбинационных задач с многогранниками, в которых два тела комбинируются так, что высота каждого из них находится на боковом ребре другого, а вершины при этом совпадают.

Список литературы

1. Федоров Б. П., Богданова С. Б., Гладков С. О. Некоторые миниатюры с кубом, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2023. Т. 44, №3, С. 39–57 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-39-57.
2. Федоров Б. П., Богданова С. Б., Гладков С. О. О некоторых неизвестных результатах, связанных с нетривиальными свойствами обычных треугольников. Ч. I., *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 37, №4, С. 216–234 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-216-234.
3. Федоров Б. П., Богданова С. Б., Гладков С. О. О некоторых неизвестных результатах, связанных с нетривиальными свойствами обычных треугольников. Ч. II., *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2022. Т. 39, №2, С. 197–221 DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-197-221.
4. Венниджер М. *Модели многогранников*, Пер. с англ. В.В. Фирсова. Под ред. и с послесл. И. М. Яглома.. М.: Мир, 1974. 236 с.
5. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. *Факультативный курс по математике: Решение задач*, Учеб. пособие для 11 кл.. М.: Просвещение, 1991. 384 с.
6. Сканави М. И. *Сборник задач по математике для поступающих в вузы.* М.: Мир и Образование, 2013. 608 с.
7. Антонов Н. П., Выгодский М. Я., Никитин В. В., Санкин А. И. *Сборник задач по элементарной математике.* М.: Физматлит, 1960. 928 с.
8. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. *Избранные вопросы элементарной математики*, Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Наука, 1976. 638 с.
9. Литвиненко В. Н. *Сборник задач по стереометрии с методами решений.* М.: Просвещение, 1998. 255 с.
10. Литвиненко В. Н. *Решение типовых задач по геометрии.* М.: Просвещение, 1999. 280 с.
11. Прасолов В. В. *Задачи по стереометрии.* М.: МЦНМО, 2010. 352 с.
12. Смирнов В. А. *Геометрия. Стереометрия*, Пособие для подготовки к ЕГЭ. М.: МЦНМО, 2009. 273 с.
13. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. *Стереометрия. Геометрия в пространстве*, Учеб. пособие для уч. ст. кл. и абитуриентов.. Висагинас: Alfa, 1998. 576 с.
14. Прохоров Ю. В. *Математический энциклопедический словарь*. М.: Советская энциклопедия, 1988. 847 с.
15. Александров П. С., Маркушевич А. И., Хинчин А. Я. *Энциклопедия элементарной математики*, Геометрия, Т. 5. М.: Наука, 1966. 624 с.
16. Кокстер Г. С. М. *Введение в геометрию.* М.: Наука, 1988. 847 с.
17. Люстерник Л. А. *Выпуклые фигуры и многогранники.* Москва: ГИТТЛ, 1956. 212 с.
18. Понарин Я. П. *Элементарная геометрия*, Стереометрия, преобразования пространства, Т. 2. Москва: МЦНМО, 2006. 256 с.

Информация об авторах



Федоров Борис Павлович – преподаватель кафедры математики (1967 – 2000) Государственного гуманитарно - технологического университета, г. Орехово – Зуево, Россия.



Богданова Софья Борисовна✉ – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры Прикладные программные средства и математические методы, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия, ORCID 0000-0001-8503-1794.



Гладков Сергей Октябринович✉ – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры Прикладные программные средства и математические методы, Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия, ORCID 0000-0002-2755-9133.

References

[1] Fedorov B. P., Bogdanova S./,B., Gladkov S./,O. Some Miniatures With a Cube. Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2023, vol. 44, no. 3, pp. 39–57. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-44-3-39-57 (In Russian)

[2] Fedorov B. P., Bogdanova S./,B., Gladkov S./,O. On some unknown results related to the nontrivial properties of ordinary triangles. Part 1. Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2021, vol. 37, no. 4, pp. 216–234. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-37-4-216-234 (In Russian)

[3] Fedorov B. P., Bogdanova S./,B., Gladkov S./,O. On some unknown results related to the nontrivial properties of ordinary triangles. Part 2. Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2022, vol. 39, no. 2, pp. 197–221. DOI: 10.26117/2079-6641-2022-39-2-197-221 (In Russian)

[4] Wenninger M. Polyhedron models. Cambridge. Cambridge University Press, 1971.

[5] Sharygin I. F., Golubev V. I. Fakul'tativnyy kurs po matematike: Resheniye zadach [Optional course in mathematics: Problem solving]. Moscow, Prosveshcheniye, 1991, 384 pp. (In Russian)

[6] Ckanavi M. I. Sbornik zadach po matematike dlya postupayushchikh v vuzy [Collection of problems in mathematics for those entering universities]. Moscow, Mir i Obrazovaniye, 2013, 608 pp. (In Russian)

[7] Antonov N. P., Vygodskiy M. YA., Nikitin V. V., Sankin A. I. Sbornik zadach po elementarnoy matematike [Collection of problems in elementary mathematics]. Moscow, Fizmatlit, 1960, 928 pp. (In Russian)

[8] Dorofeev G. V., Potapov M. K., Rozov N. X. Posobiye po matematike dlya postupayushchikh v vuzy (izbrannyye voprosy elementarnoy matematiki) [A manual on mathematics for those entering universities (selected questions of elementary mathematics)]. Moscow, Nauka, 1976, 638 pp. (In Russian)

[9] Litvinenko V. N., Sbornik zadach po stereometrii s metodami resheniy [Collection of problems on stereometry with methods of solutions]. Moscow, Enlightenment, 1998, 255 pp. (In Russian)

[10] Litvinenko V. N., Resheniye tipovykh zadach po geometrii [Solving typical problems in geometry]. Moscow, Enlightenment, 1999 (In Russian)

[11] Prasolov V. V., Zadachi po stereometrii [Problems in stereometry]. Moscow, MTsNMO, 2010, 352 pp. (In Russian)

[12] Smirnov V. A. Geometriya. Stereometriya. Posobiye dlya podgotovki k YEGE. [Geometry. Stereometry. A guide for preparing for the Unified State Exam]. Moscow, MTsNMO, 2009, 273 pp. (In Russian)

[13] Aleksandrov A. D., Verner A. L., Ryzhik V. I. Stereometriya. Geometriya v prostranstve: Ucheb. posobiye dlya uch. st. kl. i abituriyentov. [Stereometry. Geometry in space: Textbook. manual for students Art. class and applicants]. Visaginas, Alfa, 1998, 576 pp. (In Russian)

[14] Prokhorov Yu V. Matematicheskiy entsiklopedicheskiy slovar' [Mathematical encyclopedic dictionary.]. Moscow, Soviet Encyclopedia, 1988, 847 pp. (In Russian)

[15] Aleksandrov P. S., Markushevich A. I., Khinchin A. Ya. Entsiklopediya elementarnoy matematiki. vol. 5. Geometriya [Encyclopedia of elementary mathematics]. Moscow, Nauka, 1966, 624 pp. (In Russian)

[16] Coxeter H S M. Introduction to geometry. New York - London, John Wiley and Sons.Inc, 1961.

[17] Lyusternik L. A. Vypuklyye figury i mnogogranniki [Convex figures and polyhedra.]. Moscow, State publishing house of technical and theoretical literature, 1956, 212 pp. (In Russian)

[18] Ponarin Ya. P. Elementarnaya geometriya. vol. 2. Stereometriya, preobrazovaniya prostranstva [Elementary geometry: In 2 volumes - Volume 2: Stereometry, space transformations.]. Moscow, MCNMO, 2006, 256 pp. (In Russian)

Information about authors



Fedorov Boris Pavlovich (1931-2003) – Lecturer at the Department of Mathematics (1967 to 2000) at the State Humanitarian and Technological University, Orekhovo-Zuevo, Russia.



Bogdanova Sofya Borisovna – Ph.D. (Phys. & Math.), Associate Professor, Associate Professor of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID 0000-0001-8503-1794.



Gladkov Sergey Oktyabrinovich – D.Sc. (Phys. & Math.), Professor, Associate Professor of the Department of Applied Software and Mathematical Methods, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, ORCID 0000-0002-2755-9133.

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 46. №1. С. 52 - 69. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-52-69

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 519.622.2

Классическая математическая модель С.В. Дубовского и ее некоторые модификации для описания К-волн в экономике

Д. В. Макаров[*1,2]

[1] Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, д. 4, Россия

[2] Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 4, Узбекистан

Аннотация. В настоящей работе была исследована классическая математическая модель С.В. Дубовского для описания длинных волн Н.Д. Кондратьева (К-волн). Эта модель описывает динамику свободных колебаний эффективности новых технологий и эффективности фондоотдачи. С точки зрения математики она представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Целью исследований является визуализация результатов решения с помощью численного моделирования модификации математической модели С.В. Дубовского, которая заключается в учете зависимости нормы накопления от фондоотдачи и внешнего притока инвестиций и новых технологических моделей. Также было показано с помощью критерия Бендиксона, что классическая модель С.В. Дубовского может генерировать замкнутые фазовые траектории, что указывает на ее применение для описание экономических кризисов и циклов. Аналогично было показано, что в рамках модифицированной математической модели С.В. Дубовского также могут существовать замкнутые фазовые траектории. Показано с помощью компьютерного моделирования, что зависимость нормы накопления от фондоотдачи может влиять на период циклических колебаний, что важно при моделировании реальных экономических циклов и кризисов. Учет внешнего притока инвестиций и новых технологий (управленческих решений) с помощью гармонических функций значительно усложняет вид фазовых траекторий, однако и здесь возможны замкнутые фазовые траектории. Эти гармонические функции определяют вынужденные колебания эффективности новых технологий и эффективности фондоотдачи и здесь возможно возникновение эффектов резонанса, которые были показаны с помощью компьютерного моделирования в настоящей статье. Компьютерное моделирование проводилось в среде компьютерной алгебры Matlab.

Ключевые слова: К-волны, осциллограмма, фазовая траектория, экономические циклы и кризисы, норма накопления, критерий Бендиксона, модель, метод Адамса-Башфорта-Мултона

Получение: 19.02.2024; Исправление: 04.03.2024; Принятие: 06.03.2024; Публикация онлайн: 07.03.2024

Для цитирования. Макаров Д. В. Классическая математическая модель С.В. Дубовского и ее некоторые модификации для описания К-волн в экономике // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 46. № 1. С. 52-69. EDN: DFSKUX. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-52-69.

Финансирование. Исследования выполнены рамках программы "Приоритет-2030. Дальний Восток".

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Автор участвовал в написании статьи и полностью несет ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

*__Корреспонденция:__ E-mail: danil.makarov.pk@yandex.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Макаров Д. В., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2024. vol. 46. no. 1. P. 52 - 69. ISSN 2079-6641

MATHEMATICAL MODELLING

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-52-69

Research Article

Full text in Russian

MSC 34A34

The Classical Mathematical Model of S.V. Dubovsky and Some of its Modifications for Describing K-Waves

D. V. Makarov[*1,2]

[1] Vitus Bering Kamchatka State University, Petropavlovsk-Kamchatsky, st. Pogranichnaya, 4, Russia

[2] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 100174, Tashkent, st. Universitetskaya, 4, Uzbekistan

Abstract. In this work, the classical mathematical model of S.V. was investigated. Dubovsky to describe long waves N.D. Kondratiev (K-waves). This model describes the dynamics of free fluctuations in the efficiency of new technologies and the efficiency of capital productivity. From the point of view of mathematics, it is a system of nonlinear ordinary differential equations of the first order. The purpose of the research is to visualize the results of the solution using numerical modeling of a modification of the mathematical model of S.V. Dubovsky, which consists in taking into account the dependence of the accumulation rate on capital productivity and external inflow of investments and new technological models. It was also shown using the Bendixson test that the classical model of S.V. Dubovsky can generate closed phase trajectories, which indicates its use in describing economic crises and cycles. Similarly, it was shown that within the framework of the modified mathematical model S.V. Dubovsky can also have closed phase trajectories. It is shown using computer modeling that the dependence of the accumulation rate on capital productivity can influence the period of cyclical fluctuations, which is important when modeling real economic cycles and crises. Taking into account the external influx of investment and new technologies (managerial decisions) using harmonic functions significantly complicates the appearance of phase trajectories, however, closed phase trajectories are also possible here. These harmonic functions determine forced fluctuations in the efficiency of new technologies and the efficiency of capital productivity, and here resonance effects may occur, which were shown using computer modeling in this article. Computer simulation was carried out in the computer algebra environment Matlab.

Key words: K-waves, oscillogram, phase trajectory, economic cycles and crises, accumulation rate, Bendixson criterion, model, Adams-Bashforth-Moulton method

Received: 19.02.2024; Revised: 04.03.2024; Accepted: 06.03.2024; First online: 07.03.2024

For citation. Makarov D. V. The classical mathematical model of S.V. Dubovsky and some of its modifications for describing K-waves. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **46**: 1, 52-69. EDN: DFSKUX. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-52-69.

Funding. The research was carried out within the framework of the "Priority 2030. Far East program".

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. The author participated in the writing of the article and is fully responsible for submitting the final version of the article to the press.

[*]**Correspondence:** E-mail: danil.makarov.pk@yandex.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Makarov D. V., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)

Введение

Проблема прогнозирования экономических циклов и кризов с помощью математических методов является важной практической задачей. Первые исследования экономических циклов с позиции системного подхода в описании причин их возникновения были отражены в работах английского инженера Хайда Кларка, который в 1847 году указал на наличие экономического цикла с периодом 54 года [1]. Далее развивая работы Х. Кларка, английский математик и экономист Уильям Джевонс с помощью математической статистики установил корреляции экономических циклов перепроизводства и связал их с солнечной активностью [2].

На наш взгляд, существенный вклад в исследование экономических циклов внес российский экономист Н.Д. Кондратьев, который в 20-х годах 20 века с помощью математического моделирования исследовал большие циклы конъектуры, основываясь на анализе большого числа экономических показателей за промежуток времени 100-150 лет. Основные труды Н.Д. Кондратьева можно изучить в монографии [3], а приложения его теории к длинным волнам (К-волнам) различных экономик мира – в монографии [4]. Описание научной школы Н.Д. Кондратьева, ее становления, методологические подходы, а также математические модели достаточно хорошо раскрываются в монографии автора [5].

Мы же в настоящей работе остановимся на математических моделях К-волн. Большой вклад в развитие математических моделей в описание К-волн внесли математики Меньшиков С.М., Клименко Л.А. [6], С.В. Дубовский [7], Хироока М. [8], А.А. Акаев [9], И.П. Гладких [10]. В монографии [5] дается описание различных математических моделей, приводятся их достоинства и недостатки. Основу таких моделей составляют в основном нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, которые решаются с помощью численных методов.

В настоящей работы в качестве объекта исследований выберем классическую математическую модель С.В. Дубовского, которая была предложена в статье [7]. Этот выбор обусловлен следующими соображениями: 1) математическая модель описывает динамику эффективности новых технологий и фондоотдачи, что на наш взгляд является оправданным для математического описания К-волн в рамках инновационных циклов [11]; 2) математическая модель обладает большим потенциалом в практическом применении и до конца не изучена.

Классическая математическая модель С.В. Дубовского представляет собой систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями (задача Коши). В статье мы покажем с помощью критерия Бендиксона, что решение задачи Коши может обладать замкнутыми фазовыми траекториями, что будет указывать на возможность ее для описания экономических циклов. Рассмотрим некоторые модификации модели посредством учета зависимости нормы накопления от фондоотдачи, а также внешнего притока инвестиций и новых технологий. Построим с помощью численного алгоритма, реализованного в системе компьютерной алгебры Matlab, осциллограммы и фазовые траектории. Покажем, что модифицированная модель обладает потенциалом для дальнейших исследований.

Постановка задачи, методика решения и его свойства

В статье С.В. Дубовского [7] была предложена следующая математическая модель длинных волн Н.Д. Кондратьева (К-волн):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\lambda n x(t)(x(t)-1)(y(t)-y^*), \\ \dot{y}(t) = n(1-n)y^2(t)(x(t)-x^*), \\ x(0) = a, y(0) = b. \end{cases} \tag{1}$$

где $x(t), y(t) \in C^1[0,T]$ — функции эффективности новых технологий и фондоотдачи, $t \in [0,T]$ — время процесса, $T > 0$ — время моделирования, $0 < n < 1$ — норма накопления, $\lambda > 0$ — постоянный коэффициент, который определяется из статистики, x^* и y^* — постоянные значения, которые соответствуют точке покоя системы, a и b — заданные постоянные, которые определяют начальные условия, $\dot{x}(t) = dx/dt$, $\dot{y}(t) = dy/dt$.

Определение 1. Систему нелинейных дифференциальных уравнений (1), представляющую собой задачу Коши, мы будем называть классической математической моделью С.В. Дубовского.

Замечание 1. Заметим, что классическая математическая модель С.В. Дубовского (1) описывает свободные нелинейные колебания эффективности новых технологий и фондоотдачи.

Определение 2. Односвязной областью U называется область, в которой все замкнутые пути гомотопны нулю, т.е. их можно непрерывным образом стянуть в точку. Это означает, что область не содержит дырок и самопересечений.

Пусть непрерывные функции $f_1(x,y) = -\lambda n x(t)(x(t)-1)(y(t)-y^*)$ и $f_2(x,y) = n(1-n)y^2(t)(x(t)-x^*)$, а $f = (f_1, f_2)$ — векторное поле, заданное в односвязной области $U \subset R^2$.

Теорема 1. *(Теорема Бендиксона [12]) Если дивергенция векторного поля на плоскости знакопостоянна и отлична от нуля в некоторой односвязной области, то отсутствуют замкнутые фазовые кривые этого поля, целиком лежащие в этой области.*

Замечание 2. В частности, это теорема утверждает, что в области отсутствуют предельные циклы.

Теорема 2. *Автономная система дифференциальных уравнений (1) может обладать замкнутыми фазовыми траекториями.*

Доказательство. Используя критерий Бендиксона [12], мы можем показать, что дивергенция векторного поля f меняет свой знак и не тождественно равна нулю в односвязной области.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = -2\lambda n\left(x - \frac{1}{2}\right)(y - y^*), \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2n(1-n)y(x - x^*),$$

тогда

$$div(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = -2n\left(\lambda\left(x - \frac{1}{2}\right)(y - y^*) - (1-n)y(x - x^*)\right). \tag{2}$$

Из экономического смысла параметров задачи: $x(t) > 0, y(t) > 0, \lambda > 0$, $0 < n < 1$ и мы можем заключить, что может происходить смена знака функции (2) в односвязной области $U \subset R^2$. Действительно из (2), если выбрать

$$\begin{cases} 0.5 < x < x_c = x^*, \\ 0 < y < y_c = \dfrac{\lambda y^*}{\lambda - 1 + n}. \end{cases} \tag{3}$$

тогда дивергенция векторного поля f будет менять свой знак в односвязной области. Построим средствами визуализация среды компьютерной математики Maple пример односвязной области, в которой выполняются смена знака для значение параметров (1): $n = 0.2, \lambda = 2.25, x^* = 1.3, y^* = 0.5$.

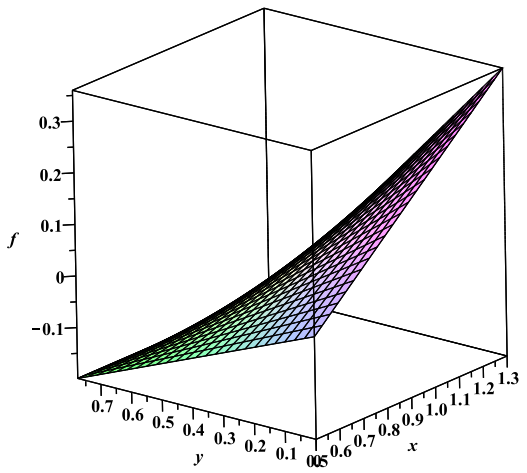


Рис. 1. Пример односвязной области для $x \in [0.5, 1.3]$, $y \in [0, 0.775]$.

[Figure 1. An example of a simply connected region for $x \in [0.5, 1.3]$, $y \in [0, 0.775]$.]

Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод о том, что система (1) может обладать замкнутыми фазовыми траекториями. □

Теорема 2 указывает на, то что классическая математическая модель С.В. Дубовского (1) может быть пригодна для исследования циклических режимов, которые могут возникать в теории экономических циклов и кризисов.

Построим осциллограммы и фазовые траектории для классической модели С.В. Дубовского при различных значениях начальных условий и параметра λ. Для этой цели воспользуемся одношаговым методом Адамса-Башфорта-Мултона 2-го порядка сходимости (правило трапеции) [13], который был реализован в системе компьютерной алгебры Matlab.

Расчетные формулы имеют вид:

$$\begin{cases} x_{k+1}^p = x_0 - \lambda n \tau \sum\limits_{j=0}^{k} x_j^p \left(x_j^p - 1\right)\left(y_j^p - y^*\right), \\ y_{k+1}^p = y_0 + n\left(1-n\right) \sum\limits_{j=0}^{k} \left(y_j^p\right)^2 \left(x_j^p - x^*\right), \\ x_{k+1} = x_0 - \dfrac{\lambda n \tau}{2} \left(x_{k+1}^p \left(x_{k+1}^p - 1\right)\left(y_{k+1}^p - y^*\right) + \sum\limits_{j=0}^{k} \rho x_j \left(x_j - 1\right)\left(y_j - y^*\right) \right), \\ y_{k+1} = y_0 + \dfrac{n\left(1-n\right)\tau}{2} \left(\left(y_{k+1}^p\right)^2 \left(x_{k+1}^p - x^*\right) + \sum\limits_{j=0}^{k} \rho \left(y_j\right)^2 \left(x_j - x^*\right) \right), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь τ — шаг расчетной сетки. Первые две формулы (4) являются предиктором, остальные – корректором. Весовые коэффициенты имеют вид:

$$\rho = \begin{cases} 1, j = 0, \\ 2, 1 \leq j \leq k, \\ 1, j = k+1. \end{cases}$$

Визуализация результатов моделирования приведена на рис.2, а значения параметров модели были взяты из работы С.В. Дубовского [7].

Из рис. 2 мы видим, что увеличение значения параметра λ, а также значений x_0 приводят к увеличению значений эффективности новых технологий (рис.2а) и фондоотдачи (рис.2б). Это в свою очередь приводит увеличению орбиты фазовой траектории, которая является замкнутой (точка равновесия системы (1) (x^*, y^*) является центром). Периоды фазовых траекторий (рис.2с) согласно работе [7]: $T = 50.1, 54.9, 60.6$ лет, а их направление обхода осуществляется против часовой стрелки.

Интерпретация экономического цикла дается по фазовому портрету (рис.2с), по аналогии со статьей [7]. Фазовый портрет можно представить в виде четырех квадрантов с центром в точке $(1.3, 0.5)$. В первом квадранте (северо-восточный координатный угол) из-за повышенной экономической активности истощается запас высокоэффективных новшеств, и система переходит во второй квадрант (движение против часовой стрелки). Во втором квадранте из-за пониженной эффективности новшеств снижается экономическая активность, и система переходит в третий квадрант. В третьем квадранте благодаря низкой экономической активности накапливается запас высокоэффективных новшеств, и система переходит в четвертый квадрант. В четвертом квадранте благодаря высокой эффективности новшеств начинается рост экономической активности, и система переходит в первый квадрант, цикл повторяется.

Замечание 3. Необходимо отметить, что моделируемые циклы на рис.2. также обладают асимметрией. Это свойство циклов связано с разными временами выхода в тот или иной квадрант в силу того, что циклы имеют эллиптические орбиты.

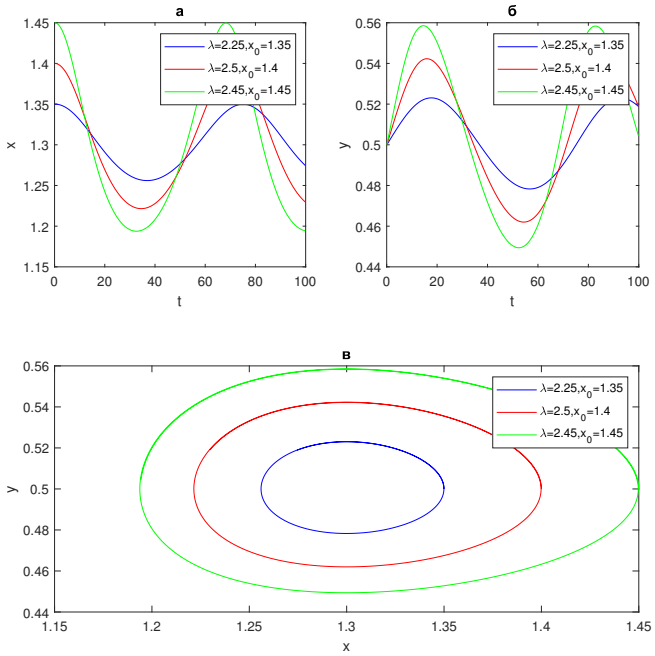


Рис. 2. Осциллограммы и фазовые траектории системы (1), построенные при различных значениях λ и $x_0 = a$.

[Figure 2. Oscillograms and phase trajectories of the system (1), constructed for various values of λ and $x_0 = a$.]

Замечание 4. Отметим, что по мнению А.А. Акаева [9], результаты, полученные С.В. Дубовским в работе [7] были несколько завышены, причем их погрешность достигала 50

Исходя из выше сказанного, возникает необходимость в уточнении классической модели С.В. Дубовского (1). Такое уточнение может быть основано на зависимости нормы накопления от фондоотдачи, введении внешних факторов – притоков инвестиций и новых технологий или управленческих решений, а также наличие эффектов наследственности (памяти).

Норма накопления как функция от фондоотдачи в модели (1)

В работе [7] С.В. Дубовский указывал, на то что норма накопления в системе (1) может быть функцией от фондоотдачи вида:

$$n(y(t)) = \frac{l_1(l_2 - 1)}{y(t)}, \tag{5}$$

где $l_1 > 0, l_2 > 0$ — коэффициенты, которые определяются из статистических данных [15]. Однако зависимость (5) в своей работе [7] С.В. Дубовский не исследовал.

Замечание 5. В статье [7] было проведено исследование зависимости (5), получены осциллограммы и фазовые траектории при различных значениях параметров, но не была дана их экономическая интерпретация.

Замечание 6. Необходимо отметить, что в более поздней работе [14] С.В. Дубовский предложил использовать другую зависимость:

$$n(y(t)) = l_1 - \frac{l_2}{y(t)}, \tag{6}$$

где $l_1 > 0, l_2 > 0$ — константы, которые также определяются из статистики [15].

Однако и в работе [14] не было проведено исследований зависимости (6). Поэтому в этом пункте мы устраним этот недостаток – проведем исследование классической модели С.В. Дубовского (1) с учетом зависимостей (5) и (6), а также дадим их экономическую интерпретацию.

Сделаем ряд замечаний по применению функциональных зависимостей (5) и (6) в классической математической модели Дубовского С.В.

Замечание 7. В силу того, что норма накопления должна быть положительна, то для зависимости (5) выполняется условие $l_2 > 1$, а для зависимости (6) условие $l_1 > \frac{l_2}{y(t)}$.

Замечание 8. Заметим, что согласно зависимости (5) при увеличении фондоотдачи норма накопления уменьшается. Уменьшение нормы накопления в зависимости от фондоотдачи означает, что при увеличении эффективности использования фондоотдачи организация может снизить объем собственных средств, которые необходимо накапливать для обеспечения стабильного функционирования и развития бизнеса. Это позволяет оптимизировать структуру капитала и повысить рентабельность инвестиций. Уменьшение нормы накопления может быть особенно важным для организаций с ограниченными финансовыми ресурсами, поскольку позволяет эффективнее использовать доступные средства.

Замечание 9. Также можно заметить, что зависимость (6) указывает на увеличение нормы накопления от фондоотдачи. Увеличение нормы накопления в зависимости от фондоотдачи означает, что чем выше уровень эффективности использования фондоотдачи, тем больше средств компания может накапливать для будущих инвестиций или финансовых целей. Повышение фондоотдачи может привести к увеличению прибыли, что в свою очередь позволяет организации увеличивать объем накоплений. Это важный аспект финансовой стратегии организации, поскольку показывает, как эффективно используются имеющиеся ресурсы для достижения финансовых целей.

Проведем исследование зависимостей (5) и (6). С учетом зависимости (5) или (6) классическая модель С.В. Дубовского (1) принимает вид ($y(t) \neq 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\lambda n(y(t))\, x(t)\,(x(t)-1)\,(y(t)-y^*), \\ \dot{y}(t) = n(y(t))\,(1-n(y(t)))\, y^2(t)\,(x(t)-x^*), \\ x(0) = a, y(0) = b. \end{cases} \tag{7}$$

Задача Коши (7) также, как и задача (1) может обладать замкнутыми фазовыми траекториями. Это можно показать с помощью критерия Бендиксона (Теорема 1).



а) б)

Рис. 3. Примеры односвязной области: а) для зависимости (5); б) для зависимости (6).

[Figure 3. Examples of a simply connected region: a) for dependence (5); b) for dependence (6).]

На рис.3 приведены примеры односвязных областей, в которых дивергенция векторного поля меняет свой знак: рис.3а — функция нормы накопления (5), а рис.3б — функция норма накопления (6).

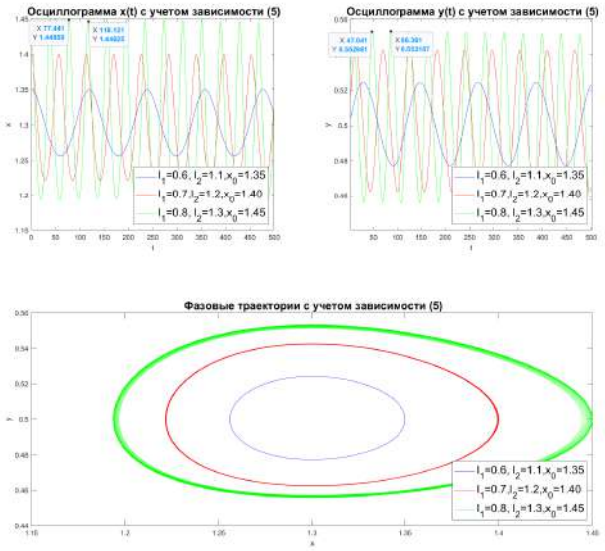


Рис. 4. Примеры осциллограмм и фазовых траекторий для зависимости (5). Точки на осциллограмме – координаты между двумя максимальными пиками.

[Figure 4. Examples of oscillograms and phase trajectories for the dependence (5). The points on the oscillogram are the coordinates between the two maximum peaks.]

Решение задачи (6) будем искать с помощью численного одно шагового метода Адамса-Башфорта-Мултона второго порядка сходимости (метод трапеций). Фазовые траектории, полученные согласно численному методу для модели (7), приведены на рис.4 с учетом зависимостей (5) и (6).

На рис.4 приведен расчет осциллограмм и фазовых траекторий для зависимости (5) нормы накопления от фондоотдачи с учетом различных значений l_1, l_2 и x_0. Можно заметить, что в отличие от рис.2в, норма накопления усиливает асимметричность цикла.

Также можно отметить, что рост значений параметров l_1, l_2 влияет на частоту и следовательно на период колебаний. Пусть временная ось составляет количество лет. Тогда, например, мы видим, что для набора значений: $l_1 = 0.8, l_2 = 1.3, x_0 = 1.45$ период колебаний составляет $T \approx 40$ лет.

Действительно для эффективности новых технологий $x(t)$: $T = 118.121 - 77.441 = 40,68$ лет, а для эффективности фондоотдачи $y(t)$: $T = 86.361 - 47.041 = 39.32$ лет. Данное значение периода соответствует указанному Акаевым А.А. в статье [9], в которой автор утверждает, что продолжительность циклов Н.Д. Кондратьева в XX веке была в среднем 40 лет.

На рис.5 приведен расчет осциллограмм и фазовых траекторий для зависимости (6) при различных значениях l_1, l_2 и x_0.

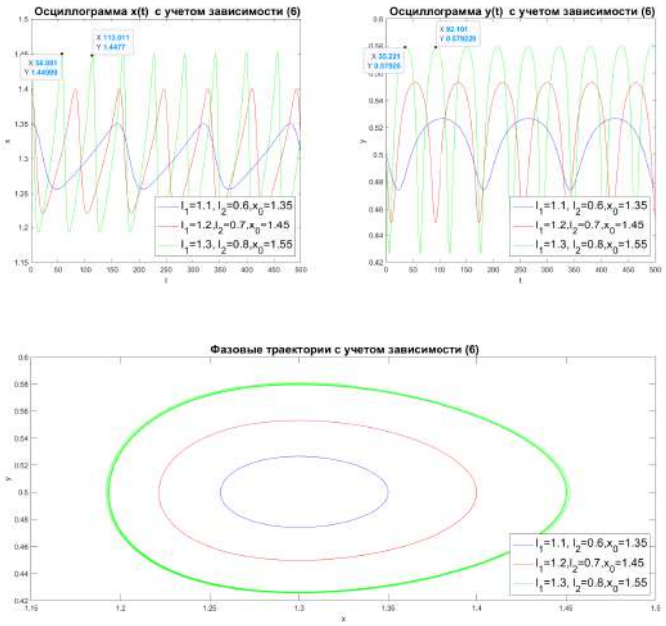


Рис. 5. Примеры осциллограмм и фазовых траекторий для зависимости (6). Точки на осциллограмме – координаты между двумя максимальными пиками.

[Figure 5. Examples of oscillograms and phase trajectories for the dependence (6). Points on the oscillogram are coordinates between two maximum peaks.]

Мы видим, что фазовые траектории являются замкнутыми. Осциллограммы на рис.5 отличаются от осциллограмм рис.4, однако фазовые траектории обладают похожими орбитами. Здесь также увеличение значений l_1, l_2 и x_0 приводит к большей асимметрии — цикла, это также отражается на периоде колебаний. Период колебаний, например, для цикла с параметрами $l_1 = 1.3, l_2 = 0.8, x_0 = 1.45$ составляет $T \approx 56$ лет. Такие значения периодов колебаний получал С.В. Дубовский в своей работе [7], однако эти значения были несколько завышены по сравнению с реальным экономическим циклом.

Однако несмотря на это, все выше сказанное, указывает на то, что период того или иного цикла можно оценивать исходя из зависимостей (5) и (6), т.е. при верном выборе значений параметров l_1 и l_2. Напомним, что значения этих параметров берут из статистики.

В случае, когда выбранные значения параметров дают неверное значение периода цикла, необходимо производить уточнение модели. Например, учитывать какие-то свойства рассматриваемой системы. В качестве таковых может быть учтено внешнее воздействие на систему (1), которое определяет приток внешних инвестиций и новых технологий или управленческих решений.

Приток внешних инвестиций и новых технологий в классической модели С.В. Дубовского (1)

Приток внешних инвестиций и новых технологий можно учесть в математической модели (7) посредством введения в ее правые части функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\lambda n(y(t))\, x(t)\,(x(t)-1)\,(y(t)-y^*) + f_1(t), \\ \dot{y}(t) = n(y(t))\,(1-n(y(t)))\, y^2(t)\,(x(t)-x^*) + f_2(t), \\ x(0) = a, y(0) = b. \end{cases} \tag{8}$$

Замечание 10. Математическая модель (8) описывает вынужденные нелинейные колебания эффективности новых технологий и фондоотдачи.

Замечание 11. В нашей работе мы будем рассматривать гармонические функций $f_1(t) = \delta_1 \cos(\omega_1 t)$ и $f_2(t) = \delta_2 \cos(\omega_2 t)$ в модели (8), где δ_1 и δ_2 — амплитуды, а ω_1 и ω_2 — частоты. Выбор таких зависимостей обусловлен тем, что приток внешних инвестиций и новых технологий имеет периодический характер. Кроме, того такие зависимости приводят к возникновению эффектов резонанса в колебательной системе, что имеет важное прикладное значение. В работе мы покажем эти свойства с помощью компьютерного моделирования.

С помощью численного алгоритма Адамса-Башфорта-Мултона второго порядка сходимости для решения задачи Коши (8) мы можем построить при различных значениях ее параметров с учетом зависимости (5) осциллограммы и фазовые траектории.

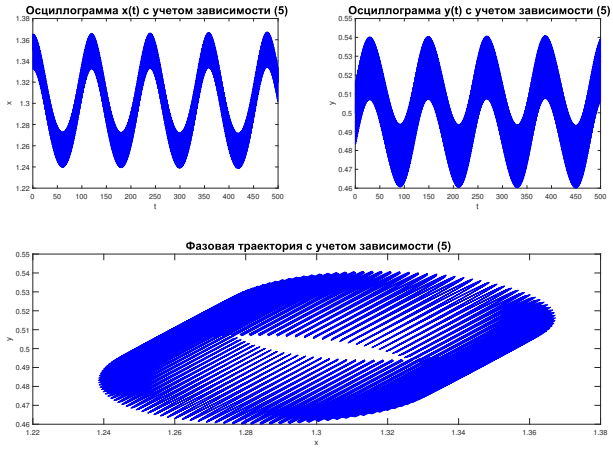


Рис. 6. Осциллограммы и фазовая траектория системы (8) для зависимости (5) с учетом значения параметров: $\delta_1 = \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 6$.

[Figure 6. Oscillograms and phase trajectory of the system (8) for the dependence (5) taking into account the parameter values: $\delta_1 = \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 6$.]

На рис. 6 приведен пример, построения осциллограмм и фазовой траектории, полученной при следующих значениях параметров:$T = 500, \tau = 0.01, \lambda = 2.25, l_1 = 0.6, l_2 = 1.1$, $x_0 = 1.35, y_0 = 0.5$, $\delta_1 = \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 6$.

Отметим, что фазовая траектория является замкнутой, кроме того она испытывает колебания за счет внешних гармонических функций.

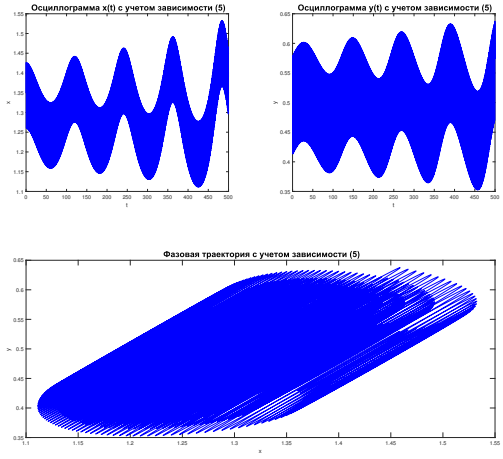


Рис. 7. Осциллограммы и фазовая траектория системы (8) для зависимости (5) с учетом значения параметров: $\delta_1 = \delta_2 = 0.5, \omega_1 = \omega_2 = 6$.

[Figure 7. Oscillograms and phase trajectory of the system (8) for the dependence (5) taking into account the parameter values: $\delta_1 = \delta_2 = 0.5, \omega_1 = \omega_2 = 6$.]

На рис.7 приведен другой пример при значениях амплитуд $\delta_1 = \delta_2 = 0.5$, остальные параметры остались без изменения. Здесь мы видим на осциллограммах, рост амплитуды собственных колебаний. Фазовая траектория является незамкнутой и имеет вид раскручивающейся спирали. Также, как и на рис.7 фазовая траектория испытывает колебания за счет внешних гармонических функций.

Для зависимости (6), также могут возникать как циклические колебания (рис.8), так и эффекты резонанса (рис.9).

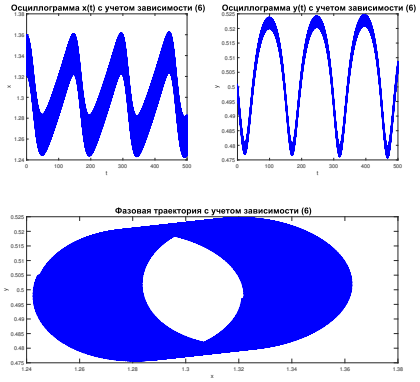


Рис. 8. Осциллограммы и фазовая траектория системы (8) для зависимости (6) с учетом значения параметров: $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 50$.

[Figure 8. Oscillograms and phase trajectory of the system (8) for the dependence (6) taking into account the parameter values: $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 50$.]

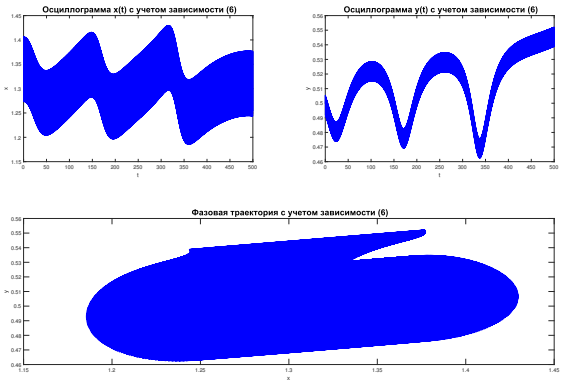


Рис. 9. Осциллограммы и фазовая траектория системы (8) для зависимости (6) с учетом значения параметров: $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 15$.

[Figure 9. Oscillograms and phase trajectory of the system (8) for the dependence (6) taking into account the parameter values: $\delta_1 = 1, \delta_2 = 0.1, \omega_1 = \omega_2 = 15$.]

На рис. 9 мы видим, что фазовая траектория не замкнутая, она раскручивается в силу того, что амплитуда колебаний растет в условиях резонанса. Кроме того, сама траектория испытывает колебания за счет внешнего гармонического воздействия.

На рис. 6-9 создается впечатление, что фазовая траектория представляет собой объемную фигуру. Это связано с тем, что граница фазовой траектории также испытывает колебания и время t здесь становится третьей степенью свободы. Необходимо отметить, что функции $f_1(t) = \delta_1 \cos(\omega_1 t)$ и $f_2(t) = \delta_2 \cos(\omega_2 t)$ могут давать более сложные циклы (рис. 10).

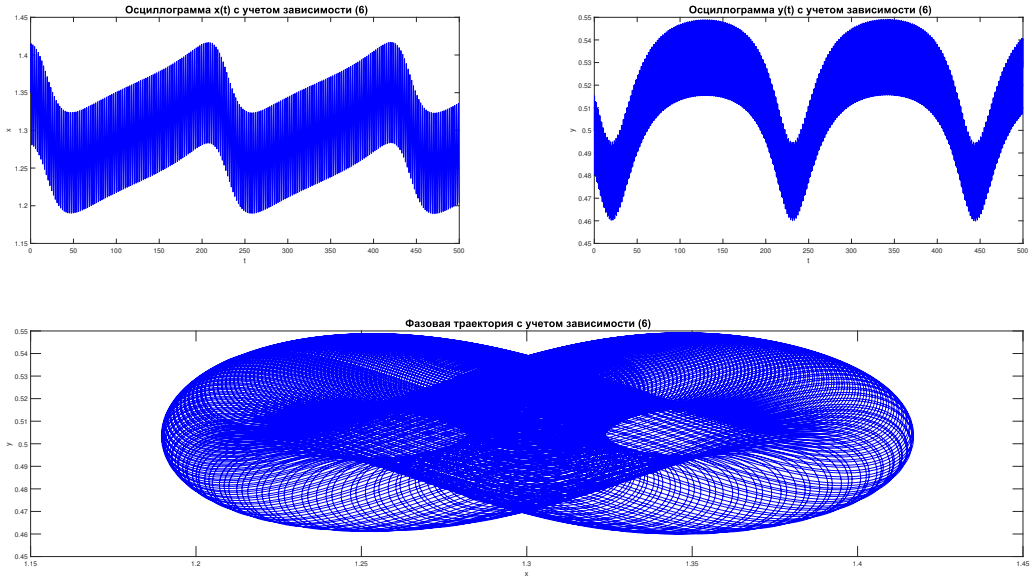


Рис. 10. Осциллограммы и фазовая траектория системы (8) для зависимости (6) с учетом значения параметров: $\delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1, \omega_1 = 3, \omega_2 = 6$.

[Figure 10. Oscillograms and phase trajectory of the system (8) for the dependence (6) taking into account the parameter values: $\delta_1 = 0.2, \delta_2 = 0.1, \omega_1 = 3, \omega_2 = 6$.]

Эти сложные циклы похоже на фигуры Лиссажу, форма которых определяется отношением частот и . Известно, что если отношение частот рациональное число, то траектория будет замкнутой, а если иррациональным, то не будет. В любом случае изучение подобных фигур заслуживает внимание.

В работах автора [16–22] было предложено обобщение классической модели С.В. Дубовского с учетом эффекта наследственности. Это свойство указывает на то, что система помнить оказанное на нее воздействие и с точки зрения математики оно описывается с помощью дробной производной [23–29]. В работе [21] показано, что введение дробных производных в систему (1) приводит к затухающим колебаниями и поэтому для того, чтобы существовали циклические колебания необходимо наличие внешнего источника типа и . Это дает возможность фазовой траектории через некоторое время выходить на предельный цикл.

Автор благодарит за ценные советы и замечания своего руководителя д.ф.-м.н., доцента Паровика Р.И., которые послужили улучшению статьи.

Заключение

В работе была исследована классическая модель С.В. Дубовского с некоторыми модификациями. В частности, норма накопления зависела от фондоотдачи, а также был произведен учет внешний приток инвестиции и новых технологий. Показано с помощью критерия Бендиксона, что классическая модель С.В. Дубовского и ее модификации могут приводить к замкнутым фазовым траекториям, и, следовательно, их можно использовать для изучения экономических циклов. С помощью численного алгоритма Адамса-Башфорта-Мултона были рассчитаны осциллограммы и фазовые траектории. Показано, что норма накопления как функция от фондоотдачи позволяет корректировать период цикла. Внешний приток инвестиций и новых технологий подчинялся гармоническому закону. Здесь помимо замкнутых фазовых траекторий, могут возникать незамкнутые фазовые траектории, которые возникают в результате резонанса. Также отношение частот определяет форму фазовых траекторий, а сами траектории похожи на фигуры Лиссажу. Поэтому исходя из выше сказанного, модификация (8) классической модели С.В. Дубовского (1) обладает более богатыми свойствами, которые заслуживают отдельного изучения.

Список литературы

1. Clarke H. *Physical economy: a preliminary inquiry into the physical laws governing the periods of famines and panics*: Verlag nicht ermittelbar, 1847.
2. Jevons W.S. The solar-commercial cycle, *Nature*, 1882. vol. 26, no. 662, pp. 226-228.
3. Кондратьев Н. Д. *Большие циклы конъюнктуры. Избранные работы.* М.: Издательство Юрайт, 2021. 490 с.
4. Alexander M. A. *The Kondratiev cycle: A generational interpretation.* Bloomington: IUniverse, 2002. 314 pp.
5. Макаров Д.В., Паровик Р.И. *Теория длинных волн Кондратьева: научные школы, методологические подходы, математические модели.* М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2023. 116 с.
6. Меньшиков С. М., Клименко Л. А. *Длинные волны в экономике: когда общество меняет кожу.* М.: Международные отношения, 1989. 226 с.
7. Дубовский С. В. Объект моделирования цикл Кондратьева, *Математическое моделирование*, 1995. Т. 7, № 6, С. 65-74.
8. Hirooka M. *Innovation Dynamism and Economic Growth. A Nonlinear Perspective.* Cheltenham, Northampton: Edward Elgar, 2006.
9. Акаев А. А. Математические основы инновационно-циклической теории экономического развития Шумпетера-Кондратьева / *Кондратьевские волны*, Т. 1, 2012, С. 314-341.
10. Гладких И. П. *Длинные волны в постиндустриальной экономике: Теоретические основы и особенности.* Саарбрюккен: Lambert Academic, 2012.
11. Макаров Д.В. Экономико-математическое моделирование инновационных систем, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2014. № 1(8), С. 66-70.
12. Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, 1901. vol. 24(1), pp. 1–88.

13. Iserles A. *A first course in the numerical analysis of differential equations*, vol. 44: Cambridge university press, 2009. 459 pp.
14. Дубовский С. В. Моделирование циклов Кондратьева и прогнозирование кризисов / *Кондратьевские волны*, Т. 1, 2012, С. 179-188.
15. Столерю Л. *Равновесие и экономический рост.* М.: Статистика, 1974. 472 с.
16. Макаров Д. В. Об одной эредитарной динамической системе, моделирующей экономические циклы, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2016. №2 (13), С. 55-61.
17. Makarov D.V., Parovik R.I. Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus, *Journal of Internet Banking and Commerce*, 2016. vol. 21, no. S21, S6.
18. Макаров Д. В., Паровик Р. И. Обобщенная математическая модель Дубовского для прогнозирования экономических кризисов, *Научно-технический вестник Поволжья*, 2016. №1, С. 74-77.
19. Makarov D., Parovik R. Numerical modeling of Kondratyev's long waves taking into account heredity, *AIP Conference Proceedings*, 2021. vol. 2365, 020007 DOI: 10.1063/5.0056847.
20. Makarov D.V., Parovik R.I. A computer program for the numerical analysis of economic cycles within the framework of the Dubovsky generalized model, *AIP Conference Proceedings*, 2022. vol. 2467, 060015 DOI: 10.1063/5.0092376.
21. Макаров Д. В., Паровик Р. И. Дробная математическая модель С.В. Дубовского и экономические циклы, *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, 2023. №5(52), С. 8-25..
22. Макаров Д.В., Паровик Р.И. Дробная математическая модель С.В. Дубовского с эффектом переменной наследственности, *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, 2023. №6(53), С. 5-22..
23. Tarasov V.E. On history of mathematical economics: Application of fractional calculus, *Mathematics*, 2019. vol. 7 DOI: 10.3390/ math7060509.
24. Oldham K. B., Spanier J. *The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. London: Academic Press, 1974. 240 pp.
25. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
26. Miller K. S., Ross B. *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations.* New York: A Wiley-Interscience publication, 1993. 384 с.
27. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение.* М.: Физматлит, 2003. 272 с.
28. Псху А.В. *Уравнения в частных производных дробного порядка.* М.: Наука, 2005. 199 с.
29. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations.* Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 pp.

Информация об авторе



Макаров Данил Васильевич✉ – младший научный сотрудник международной интегративной научно-исследовательской лаборатории экстремальных явлений Камчатки, г. Петропавловск-Камчатский, Россия, ORCID 0000-0003-1033-7611.

References

[1] Clarke H. Physical economy: a preliminary inquiry into the physical laws governing the periods of famines and panics. Verlag nicht ermittelbar. 1847

[2] Jevons W.S. The solar-commercial cycle. Nature. 1882. vol 26. no. 662. p. 226-228

[3] Kondrat'yev N. D. Bol'shiye tsikly kon"yunktury. Izbrannyye raboty [Large cycles of market conditions. Selected works.] Moscow, Izdatel'stvo Yurayt. 2021. 490 p. (In Russian)

[4] Alexander M. A. The Kondratiev cycle: A generational interpretation. Bloomington. IUniverse. 2002. 314 p.

[5] Makarov D.V., Parovik R.I. Teoriya dlinnykh voln Kondrat'yeva: nauchnyye shkoly, metodologicheskiye podkhody, matematicheskiye modeli [Kondratieff's theory of long waves: scientific schools, methodological approaches, mathematical models]. Moscow. Izdatel'skiy dom Akademii Yestestvoznaniya. 2023. 116 p. (In Russian)

[6] Men'shikov S. M., Klimenko L. A. Dlinnyye volny v ekonomike: kogda obshchestvo menyayet kozhu [Long waves in economics: when society changes its skin]. Moscow. Mezhdunarodnyye otnosheniya, 1989. 226 p.

[7] Dubovsky S. V. Modeling object Kondratieff cycle. Math. modeling. 1995. vol 7. no. 6. p. 65-74 (In Russian)

[8] Hirooka M. Innovation Dynamism and Economic Growth. A Nonlinear Perspective. Cheltenham, Northampton. Edward Elgar. 2006

[9] Akayev A. A. Matematicheskiye osnovy innovatsionno-tsiklicheskoy teorii ekonomicheskogo razvitiya Shumpetera-Kondrat'yeva. Kondrat'yevskiye volny. vol. 1. 2012. p. 314-341 (In Russian)

[10] Gladkikh I. P. Dlinnyye volny v postindustrial'noy ekonomike: Teoreticheskiye osnovy i osobennosti [Long waves in the post-industrial economy: Theoretical foundations and features]. Saarbryukken. Lambert Academic. 2012 (In Russian)

[11] Makarov D.V. Economic and mathematical modeling of innovative systems. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2014. no. 1(8). p. 66-70 (In Russian)

[12] Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math. 1901. vol. 24(1). p. 1–88

[13] Iserles A. A first course in the numerical analysis of differential equations. vol. 44. Cambridge university press. 2009. 459 p.

[14] Dubovskiy S. V. Modelirovaniye tsiklov Kondrat'yeva i prognozirovaniye krizisov. Kondrat'yevskiye volny. vol. 1. 2012. p. 179-188 (In Russian)

[15] Stoleryu L. Ravnovesiye i ekonomicheskiy rost [Equilibrium and economic growth]. Moscow. Statistika. 1974. 472 p. (In Russian)

[16] Makarov D. V. About one hereditary dynamic system modeling economic cycles. Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences. 2016. no. 2 (13). p. 55-61 (In Russian)

[17] Makarov D.V., Parovik R.I. Modeling of the economic cycles using the theory of fractional calculus. Journal of Internet Banking and Commerce. 2016. vol. 21. no. S21, S6.

[18] Makarov D. V., Parovik R. I. Obobshchennaya matematicheskaya model' Dubovskogo dlya prognozirovaniya ekonomicheskikh krizisov. Nauchno-tekhnicheskiy vestnik Povolzh'ya. 2016. no. 1. p. 74-77. (In Russian)

[19] Makarov D., Parovik R. Numerical modeling of Kondratyev's long waves taking into account heredity. AIP Conference Proceedings. 2021. vol. 2365. 020007. DOI: 10.1063/5.0056847

[20] Makarov D.V., Parovik R.I. A computer program for the numerical analysis of economic cycles within the framework of the Dubovsky generalized model. AIP Conference Proceedings. 2022. vol. 2467. 060015. DOI: 10.1063/5.0092376

[21] Makarov D. V., Parovik R. I. Fractional mathematical model S.V. Dubovsky and economic cycles. Problems of computational and applied mathematics. 2023. no. 5(52). pp. 8-25. (In Russian)
[22] Makarov D.V., Parovik R.I. Fractional mathematical model S.V. Dubovsky with the effect of variable heredity. Problems of computational and applied mathematics. 2023. no. 6(53). pp. 5-22. (In Russian)
[23] Tarasov V.E. On history of mathematical economics: Application of fractional calculus. Mathematics. 2019. vol. 7 DOI: 10.3390/ math7060509
[24] Oldham K. B., Spanier J. The fractional calculus. Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. London. Academic Press. 1974. 240 p.
[25] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integraly i proizvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya [Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications]. Minsk. Nauka i tekhnika. 1987. 688 p. (In Russian)
[26] Miller K. S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York. A Wiley-Interscience publication. 1993. 384 p.
[27] Nakhushev A.M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its application]. Moscow. Fizmatlit. 2003. 272 p. (In Russian)
[28] Pskhu A.V. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka [Fractional partial differential equations]. Moscow. Nauka. 2005. 199 p. (In Russian)
[29] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam. Elsevier. 2006. 523 p.

Information about author



Makarov Danil Vasilyevich – Junior Researcher at the International Integrative Research Laboratory for Extreme Phenomena in Kamchatka, Petropavlovsk-Kamchatsky, Russia, ORCID 0000-0003-1033-7611.

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 46. №1. С. 70 - 88. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-70-88

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 519.622.2

Математическая модель дробного нелинейного осциллятора Матье

***А. Ж. Отенова*[1], *Р.И. Паровик*[*1,2]**

[1] Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, 100174, г. Ташкент, ул. Университетская, 4, Узбекистан

[2] Институт космофизических иследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Паратунка, ул. Мирная, д. 4, Россия

Аннотация. В работе проводится исследование дробного нелинейного осциллятора Матье методами численного анализа с целью установления его различных колебательных режимов. Дробный нелинейный осциллятор Матье представляет собой обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение с дробными производными в смысле Герасимова-Капуто и локальными начальными условиями (задача Коши). Дробные производные Герасимова-Капуто характеризуют наличие эффекта наследственности в колебательной системе. В такой системе текущее ее состояние зависит от предыстории. Для исследования задачи Коши был применен численный метод из семейства предиктор-корректор — метод Адамса-Башфорта-Мултона, алгоритм которого был реализован в системе компьютерной математики Matlab. С помощью численного алгоритма для различных значений параметров дробного нелинейного осциллятора Матье были построены осциллограммы и фазовые траектории. Показано, что в отсутствии внешнего периодического воздействия в рассматриваемой колебательной системе могут возникать автоколебания, которые на фазовой траектории характеризуется предельными циклами. Проведено исследование предельных циклов с помощью компьютерного моделирования. Показано, что также могут возникать апериодические режимы, т.е. режимы, не относящиеся к колебательным. Поэтому порядки дробных производных могут влиять колебательный режим нелиненого дробного осциллятора Матье: от колебаний с постоянной амплитудой до затухающих и исчезающих совсем.

Ключевые слова: модель, нелинейный осциллятор Матье, производная дробного порядка, численное моделирование, осциллограммы, фазовые траектории

Получение: 15.02.2024; Исправление: 29.02.2024; Принятие: 01.03.2024; Публикация онлайн: 07.03.2024

Для цитирования. Отенова А. Ж., Паровик Р. И. Математическая модель дробного нелинейного осциллятора Матье // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 46. № 1. С. 70-88. EDN: MQEHDX. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-70-88.

Финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. №124012300245 -2)

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: parovik@ikir.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Отенова А. Ж., Паровик Р. И., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2024. vol. 46. no. 1. P. 70 - 88. ISSN 2079-6641

MATHEMATICAL MODELLING

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-70-88

Research Article

Full text in Russian

MSC 34A34

Mathematical Model of a Fractional Nonlinear Mathieu Oscillator

A. Zh. Otenova[1], *R. I. Parovik*∗[1,2]

[1] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 100174, Tashkent, st. Universitetskaya, 4, Uzbekistan

[2] Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Paratunka, st. Mirnaya, 4, Russia

Abstract. The work studies the fractional nonlinear Mathieu oscillator using numerical analysis methods in order to establish its various oscillatory modes. Mathieu's fractional nonlinear oscillator is an ordinary nonlinear differential equation with fractional derivatives in the Gerasimov-Caputo sense and local initial conditions (Cauchy problem). Gerasimov-Caputo fractional derivatives characterize the presence of the heredity effect in an oscillatory system. In such a system, its current state depends on the previous history. To study the Cauchy problem, a numerical method from the predictor-corrector family was used - the Adams-Bashforth-Moulton method, the algorithm of which was implemented in the Matlab computer mathematics system. Using a numerical algorithm, oscillograms and phase trajectories were constructed for various values of the parameters of the Mathieu fractional nonlinear oscillator. It is shown that in the absence of an external periodic influence, self-oscillations can arise in the oscillatory system under consideration, which are characterized by limit cycles on the phase trajectory. A study of limit cycles was carried out using computer simulation. It has been shown that aperiodic regimes can also arise, i.e. modes that are not oscillatory. Therefore, the orders of fractional derivatives can be influenced by the oscillatory mode of a nonlinear fractional Mathieu oscillator: from oscillations with a constant amplitude to damped ones and disappearing completely.

Key words: model, nonlinear Mathieu oscillator, fractional order derivative, numerical modeling, oscillograms, phase trajectories

Received: 15.02.2024; Revised: 29.02.2024; Accepted: 01.03.2024; First online: 07.03.2024

For citation. Otenova A. Zh., Parovik R. I. Mathematical model of a fractional nonlinear Mathieu oscillator. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **46**: 1, 70-88. EDN: MQEHDX. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-70-88.

Funding. The work was supported by IKIR FEB RAS State Task (subject registration No. 124012300245- 2).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

∗**Correspondence:** E-mail: parovik@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Otenova A. Zh., Parovik R. I., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)

Введение

В настоящее время широкий интерес получила теория дробных колебательных систем или осцилляторов [1], которая исследуется в рамках дробной динамики [2]. Повышенный интерес дробных осцилляторов связан с различными прикладными задачами реальных колебательных процессов и систем, в которых возникают эффекты наследственности или памяти. Эти эффекты указывают на то, что текущее состояние рассматриваемой системы может зависеть от предыдущих состояний, т.е. от предыстории. Наследственность может возникать в различных динамических системах в условиях оказания на них воздействия, причем это воздействие может проявляется не мгновенно, а постепенно с некоторой задержкой. Такие эффекты изучаются, например, в рамках наследственной механики при описании вязкоупругих сред [3]. С точки зрения математики описанием наследственных процессов более детально занимался итальянский математик Вито Вольтерра [4]. Он предложил описывать наследственность (эредитарность) с помощью интегро-дифференциальных уравнений с разностными ядрами, которые назвал функциями памяти. Однако можно перейти к хорошо разработанному математическому аппарату дробного исчисления [5, 6], если функции памяти выбрать степенными. Поэтому осциллятор, который можно описать с помощью дробных производных мы будем называть дробным осциллятором. Более полное описание осцилляторов с дробной производной Римана-Лиувилля дается в книге [1], там же исследуются вопросы существования хаотических и регулярных режимов некоторых нелинейных дробных осцилляторов. В одной из глав монографии [7] дается описание осцилляторов с производной Герасимова-Капуто и их примерная классификация, приводятся численные методы исследования, а также качественный анализ некоторых дробных осцилляторов, а в монографии [8] раскрываются вопросы их существования хаотических и регулярных режимов.

В настоящей работе объектом нашего исследования является осциллятор Матье с кубической нелинейностью и некоторые его модификации. Линейный осциллятор Матье впервые был применен в 1868 году французским математиком Э. Матье для описания задачи о колебании эллиптической мембраны [9]. Потом осциллятор Матье применялся для изучения распространения электромагнитных волн в эллиптическом цилиндре [10]. Однако наибольший интерес в осцилляторе Матье представляет эффект параметрического резонанса, который возникает за счет временного возбуждения параметров колебательной системы. Этот эффект используется в различных параметрических генераторах, которые были разработаны как усилители с минимальными тепловыми шумами в радио- и микроволновом диапазоне частот [11], в СВЧ-электронике [12], в преобразователях частоты от аудио к радиочастотам, в лазерной оптике [13]. Осциллятор Матье с кубической нелинейностью, например, исследовался в статьях [14–17], изучались его периодические решения, строились диаграммы Стретта-Айнса областей существования параметрического резонанса. Широко также его применение в инженерных науках. Инженерные приложения включают описание нелинейных

электронных схем, известных как параметрические усилители или исследование динамического отклика микроэлектромеханического датчика. В зависимости от способа подачи сигнала напряжения поведение устройства можно описать с помощью осциллятора Матье с кубической нелинейностью.

В качестве модификации в настоящей работе нелинейный осциллятор Матье рассматривается с дробными производными Герасимова-Капуто. Необходимо отметить, что линейный дробный осциллятор Матье был исследован в статьях одного из автора [18–20]. Рассмотрены вопросы существования и единственности решения задачи Коши, проведен численный анализ решения построены осциллограммы и фазовые траектории, построены диаграммы Стретта-Айнса областей устойчивости и неустойчивости для главного параметрического резонанса. Целью настоящей работы с помощью численных алгоритмов исследовать решения задачи Коши, построить осциллограммы и фазовые траектории. Показать, что фазовые траектории могут быть замкнутыми или существование автоколебаний в системе, а также установить роль порядков дробных производных в модельном уравнении в формировании того или иного колебательного режима.

Постановка задачи и методика решения

В статье [17] было приведено нелинейное осцилляционное уравнение Матье для описания работы микроэлектромеханического датчика:

$$\ddot{x}(t) + \lambda\dot{x}(t) + (\xi + \psi\cos(\varphi t))\,x(t) + (\delta + \varepsilon\cos(\omega t))\,x(t)^3 = 0, \tag{1}$$

где $\lambda, \xi, \psi, \varphi, \varepsilon$ — параметры колебательной системы.

В уравнении (1) кубическая жесткость может быть обусловлена как механическими, так и электрическими эффектами, она сильно влияет на динамический отклик микроэлектромеханического датчика: при изменении амплитуды напряжения приложенного электрического сигнала резко меняется частотная характеристика параметрического резонанса первого порядка [21].

Далее в статье [17] исследуется более простое уравнение при значении параметров $\xi = 0, \psi = 0, \delta = 1$:

$$\ddot{x}(t) + \lambda\dot{x}(t) + (1 + \varepsilon\cos(\omega t))\,x(t)^3 = 0. \tag{2}$$

Далее были исследованы первые резонансы с помощью теории возмущений при малых значениях λ, ε, показано, что все аттракторы отличные от начала координат являются субгармоническими решениями.

Замечание 1. Отметим, что если в уравнении (2) $\lambda = \varepsilon = 0$, то оно описывает автономный осциллятор с кубической восстанавливающей силой $-x(t)^3$ и его решение можно записать с помощью эллиптических функций Якоби. Если $\lambda \neq 0$ и $\varepsilon \neq 0$ осциллятор испытывает воздействие параметрической внешней силой $-\varepsilon\cos(\omega t)\,x(t)^3$ и силы трения $-\lambda\dot{x}(t)$.

Замечание 2. Необходимо также отметить, что в статье [22] уравнение (2) авторы называют классическим нелинейным уравнением Матье. Мы также будем следовать этой терминологией.

Модификация уравнения (2) может быть представлена в виде:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) + \lambda \partial_{0t}^{\beta} x(t) + x^3(t)(1 + \varepsilon \cos(\omega t)) = 0, x(0) = a, \dot{x}(0) = b. \tag{3}$$

где a, b — заданные константы, определяющие начальные условия задачи Коши, производные дробных порядков $1 < \alpha < 2$ и $0 < \beta < 1$ понимаются в смысле Герасимова-Капуто [23, 24]:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) = \frac{1}{\Gamma(2\text{-}\alpha)} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-1}}, \partial_{0t}^{\beta} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1\text{-}\beta)} \int_0^t \frac{\dot{x}(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\beta}}.$$

Здесь $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Замечание 3. Модификация уравнения (3) означает, что осциллятор Матье с кубической нелинейностью обладает эффектами наследственности. В работах [25, 26] показано, что дробный инерциальный член в модельном уравнении осциллятора приводит к диссипации энергии подобно силе трения, а порядки дробных производных связаны с добротностью колебательной системы. Однако, если колебательная система может генерировать автоколебания, то наличие дробного инерциального члена может также приводить к автоколебательным режимам. Покажем это суждение на конкретном примере в настоящей статье.

Замечание 4. Если порядки дробных производных принимают значения $\alpha = 2$ и $\beta = 1$, то мы получаем классический нелинейный осциллятор Матье (2).

Замечание 5. Вопросы существования единственности решения задачи Коши для широкого класса дробных осцилляторов, включая (3) рассмотрено в статье одного из авторов [27].

Замечание 6. Задачу Коши (3) будем называть дробным нелинейным осциллятором Матье.

В силу нелинейности модельного уравнения (3) решение нелинейного дробного осциллятора Матье будем искать численными методами. В работе [28] авторами был предложен численный алгоритм на основе нелокальной явной конечно-разностной схемы. Приведем расчетные формулы. Для этого введем в рассмотрение равномерную сетку на отрезке $[0, T]$, разбив его на N частей с шагом дискретизации $\tau = T/N$. Введем в рассмотрение сеточную функцию решения $x(t_k) = x_k, t_k = k\tau, k = 0, 1, ..., N-1$. Аппроксимации производных дробных порядков в модельном уравнении (3) имеют вид:

$$\partial_{0t}^{\alpha} x(t) \approx \frac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} w_j^{\alpha} \cdot (x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}), w_j^{\alpha} = (j+1)^{2-\alpha} - j^{2-\alpha},$$

$$\partial_{0t}^{\beta} x(t) \approx \frac{\tau^{-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} w_j^{\beta} \cdot (x_{k-j+1} - x_{k-j}), w_j^{\beta} = (j+1)^{1-\beta} - j^{1-\beta}.$$

Применяя данные аппроксимации к задаче Коши (3), мы получаем следующую расчетную формулу дискретного аналога задачи Коши для сеточной функции x_k:

$$\begin{cases} x_0 = a, \\ x_1 = a + b\tau, \\ x_{k+1} = \dfrac{(2A + \lambda B)\, x_k - A x_{k-1} - A \sum\limits_{j=1}^{k-1} w_j^{\alpha} \left(x_{k-j+1} - 2x_{k-j} + x_{k-j-1}\right)}{A + \lambda B} - \\ - \dfrac{\lambda B \sum\limits_{j=1}^{k-1} w_j^{\beta} \left(x_{k-j+1} - x_{k-j}\right) + x_k^3 \left(1 + \varepsilon \cos\left(\omega \tau k\right)\right)}{A + \lambda B}, \\ A = \dfrac{\tau^{-\alpha}}{\Gamma\left(3 - \alpha\right)}, B = \dfrac{\tau^{-\beta}}{\Gamma\left(2 - \beta\right)}, k = 1, ..., N - 1. \end{cases} \tag{4}$$

Замечание 7. Можно показать, используя технику статьи [29], что явная нелокальная конечно-разностная схема условно сходится с первым порядком, т.е. $\max\limits_{1 \le j \le k} |x\left(t_k\right) - x_k| \le C\tau$.

В настоящей статье мы будем использовать численный алгоритм, основанный на семействе методов предиктор-корректор (метод Адамса-Башфорта-Мултона). Более подробно изучить метод АБМ и его свойства можно, например, в следующих работах [30–32].

Для получения расчетных формул по методу АБМ запишем задачу Коши (3) в виде следующей системы:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\beta_1} x\left(t\right) = y\left(t\right), 0 < \beta_1 < 1, \\ \partial_{0t}^{\beta_2} y\left(t\right) = -\lambda y\left(t\right) - x\left(t\right)^3 \left(1 + \varepsilon \cos\left(\omega t\right)\right), 0 < \beta_2 < 1. \end{cases} \tag{5}$$

где $\beta_1 = \beta, \beta_2 = \alpha - \beta$, причем $|\{\alpha\} - \{\beta\}| \le 1$, $\{\}$ — дробная часть числа.

Далее на равномерной расчетной сетке вводим сеточные функции x_{k+1}^p и y_{k+1}^p, которые можно получить по формуле Адамса-Башфорта или предиктора:

$$\begin{cases} x_{k+1}^p = x_0 + \dfrac{\tau^{\beta_1}}{\Gamma\left(\beta_1 + 1\right)} \sum\limits_{j=0}^{k} \theta_{j,k+1}^1 y_j, \\ y_{k+1}^p = y_0 + \dfrac{\tau^{\beta_2}}{\Gamma\left(\beta_2 + 1\right)} \sum\limits_{j=0}^{k} \theta_{j,k+1}^2 \left(-\lambda y_j - x_j^3 \left(1 + \varepsilon \cos\left(\omega j \tau\right)\right)\right), \\ \theta_{j,k+1}^i = \left(k - j + 1\right)^{\alpha_i} - \left(k - j\right)^{\alpha_i}, i = 1, 2. \end{cases} \tag{6}$$

Для корректора (формула Адамса-Моултона) получим:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_0 + K_1 \left(y_{k+1}^p + \sum\limits_{j=0}^{k} \rho_{j,k+1}^1 y_j\right), \\ y_{k+1} = y_0 + K_2 \left(-\lambda y_{k+1}^p - \left(x_{k+1}^p\right)^3 \left(1 + \varepsilon \cos\left(\omega (k+1) \tau\right)\right)\right) + \\ + K_2 \sum\limits_{j=0}^{k} \rho_{j,k+1}^2 \left(-\lambda y_j - x_j^3 \left(1 + \varepsilon \cos\left(\omega j \tau\right)\right)\right). \end{cases} \tag{7}$$

где $K_1 = \dfrac{\tau^{\beta_1}}{\Gamma(\beta_1+2)}, K_2 = \dfrac{\tau^{\beta_2}}{\Gamma(\beta_2+2)}$, а весовые коэффициенты в (7) определяются по формуле:

$$\rho^i_{j,k+1} = \begin{cases} k^{\beta_i+1} - (k-\beta_i)(k+1)^{\beta_i}, j = 0, \\ (k-j+2)^{\beta_i+1} + (k-j)^{\beta_i+1} \text{-} 2(k-j+1)^{\beta_i+1}, 1 \le j \le k, \\ 1, j = k+1, \\ i = 1,2. \end{cases}$$

Для анализа погрешности метода АБМ необходимы следующие леммы.

Лемма 1. *Если функция* $z(t) \in C^1[0,T]$, *тогда справедлива следующая оценка:*

$$\left| \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1}-t)^{\beta-1} z(t)\,dt - \sum_{j=0}^{k} \theta_{j,k+1} z(t_j) \right| \le C\|z'\|_\infty t^\beta_{k+1}\tau, \tag{8}$$

где $\|\|_\infty$ — *чебышевская норма,* $C = 1/\beta$, $0 < \beta < 1$.

Лемма 2. *Если функция* $z(t) \in C^2[0,T]$, *тогда существует константа* $_\beta$, *которая зависит только от* $0 < \beta < 1$ *такая что:*

$$\left| \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1}-t)^{\beta-1} z(t)\,dt - \sum_{j=0}^{k} \rho_{j,k+1} z(t_j) \right| \le C_\beta \|z''\|_\infty t^\beta_{k+1}\tau^2. \tag{9}$$

Теорема. *Если* $\partial^{\beta_i}_{0t} x_i(t) \in C^2[0,T], (x_1 = x(t), x_2 = y(t), i = 1,2)$ *и выполнены оценки*

$$\left| \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1}-t)^{\beta_i-1} \partial^{\beta_i}_{0t} x_i(t)\,dt - \sum_{j=0}^{k} \theta_{j,k+1} \partial^{\beta_i}_{0t} x_i(t_j) \right| \le C_1 t^{\beta_i}_{k+1}\tau, \tag{10}$$

$$\left| \int_0^{t_{k+1}} (t_{k+1}-t)^{\beta_i-1} \partial^{\beta_i}_{0t} x_i(t)\,dt - \sum_{j=0}^{k} \rho_{j,k+1} \partial^{\beta_i}_{0t} x_i(t_j) \right| \le C_2 t^{\beta_i}_{k+1}\tau^2, \tag{11}$$

тогда метод АБМ (6) и (7) сходится с порядком q:

$$\max_{1\le j\le k} |x_i(t_j) - x_{i,j}| = O(\tau^q), q = 1 + \min_i \beta_i. \tag{12}$$

где C_1, C_2 — *константы.*

Доказательство. Доказательство теоремы основано на методе математической индукции с учетом Леммы 1 (8) и Леммы 2 (9). □

Замечание 8. В случае классического нелинейного осциллятора Матье $\beta_1 = \beta_2 = 1$ согласно оценке (12) следует, что метод АБМ имеет второй порядок точности $O(\tau^2)$.

Покажем, что Замечание 8 имеет место быть на примере оценки вычислительной точности по правилу Рунге [33]. Для этих целей введем следующие расчетные формулы:

$$\xi^i_x = \frac{\max_i |x_i - x_{2i}|}{2^q - 1}, \xi^i_y = \frac{\max_i |y_i - y_{2i}|}{2^q - 1}, \tag{13}$$

где $q = 1 + \min(\beta_1, \beta_2)$ теоретический порядок точности метода АБМ согласно оценке (12), ξ_x^i, ξ_y^i — погрешности метода АБМ, x_i, y_i — численное решение на шаге τ_i, x_{2i}, y_{2i} численное решение на шаге $\tau_i/2$. Вычислительная точность p будет определяться по формулам:

$$p_x = \log_2\left(\xi_x^i/\xi_x^{i+1}\right), p_y = \log_2\left(\xi_y^i/\xi_y^{i+1}\right), \tag{14}$$

$\tau_i, \tau_{i+1} = \tau_i/2$ шаги расчетной сетки, ξ_x^{i+1}, ξ_y^{i+1} погрешности решения на шаге τ_{i+1}.

Приведем пример оценки вычислительной точности по правилу Рунге (13), (14) для нелинейного классического осциллятора Матье ($\beta_1 = \beta_2 = 1$) при следующих значений его параметров: $\omega = \varepsilon = 1.5, \lambda = 0.15, a = 0.2, b = 0.3, t \in [0, 1]$. Результаты расчетов приведены в таб.1.

Таблица 1

Оценка вычислительной точности p при $\beta_1 = \beta_2 = 1$.
[Estimation of computational accuracy p at $\beta_1 = \beta_2 = 1$.]

N	τ	ξ_x	ξ_y	p_x	p_y
10	1/10	$13.161 \cdot 10^{-6}$	$44.220 \cdot 10^{-6}$	—	—
20	1/20	$5.834 \cdot 10^{-6}$	$10.985 \cdot 10^{-6}$	1.173	2.009
40	1/40	$1.767 \cdot 10^{-6}$	$2.730 \cdot 10^{-6}$	1.722	2.008
80	1/80	$4.794 \cdot 10^{-7}$	$6.800 \cdot 10^{-7}$	1.882	2.005
160	1/160	$1.243 \cdot 10^{-7}$	$1.697 \cdot 10^{-7}$	1.947	2.002
320	1/320	$3.170 \cdot 10^{-8}$	$4.236 \cdot 10^{-8}$	1.971	2.001
640	1/640	$8.000 \cdot 10^{-9}$	$1.060 \cdot 10^{-8}$	1.986	1.998

Мы видим (таб. 1), что вычислительная точность p достаточно хорошо согласуется с теоретической $q = 2$.

Приведем следующий пример для дробного нелинейного осциллятора Матье при $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0.8$, остальные значения параметров возьмем из предыдущего примера.

Таблица 2

Оценка вычислительной точности p при $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0.8$.
[Estimation of computational accuracy p at $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0.8$.]

N	τ	ξ_x	ξ_y	p_x	p_y
10	1/10	$39.738 \cdot 10^{-6}$	$112.209 \cdot 10^{-6}$	—	—
20	1/20	$15.516 \cdot 10^{-6}$	$31.848 \cdot 10^{-6}$	1.356	1.816
40	1/40	$4.763 \cdot 10^{-6}$	$9.132 \cdot 10^{-6}$	1.703	1.802
80	1/80	$1.370 \cdot 10^{-6}$	$2.641 \cdot 10^{-6}$	1.797	1.789

Заметим, что согласно оценке (12) теоретический порядок точности для этого примера $q = 1.8$ и он хорошо согласуется с табличными данными (таб. 2).

В табл.3 приведен другой пример оценки вычислительной точности p со значениями $\beta_1 = 0.7$ и $\beta_2 = 0.6$.

Таблица 3

Оценка вычислительной точности p при $\beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.6$.
[Estimation of computational accuracy p at $\beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.6$]

N	τ	ξ_x	ξ_y	p_x	p_y
10	1/10	$37.619 \cdot 10^{-5}$	$41.320 \cdot 10^{-5}$	—	—
20	1/20	$11.452 \cdot 10^{-5}$	$12.251 \cdot 10^{-5}$	1.715	1.753
40	1/40	$3.481 \cdot 10^{-5}$	$3.832 \cdot 10^{-5}$	1.717	1.676
80	1/80	$1.168 \cdot 10^{-5}$	$1.233 \cdot 10^{-5}$	1.575	1.635

Отметим, что здесь теоретический порядок точности $q = 1.6$, которому стремиться вычислительный порядок p.

Результаты моделирования

Пример 1. Классический нелинейный осциллятор Матье. Рассмотрим, случай когда в системе (5) $\beta_1 = \beta_2 = 1$, значения параметров: $\lambda = 0.05, \varepsilon = 1, \omega = 0.5, t \in [0, 200], N = 2 \cdot 10^4$. Проведем расчеты по явной конечно-разностной схеме (4), по методу АБМ второго порядка (6) и (7), а также по методу Рунге-Кутта 4 порядка. Результаты расчетов приведены на рис.1.

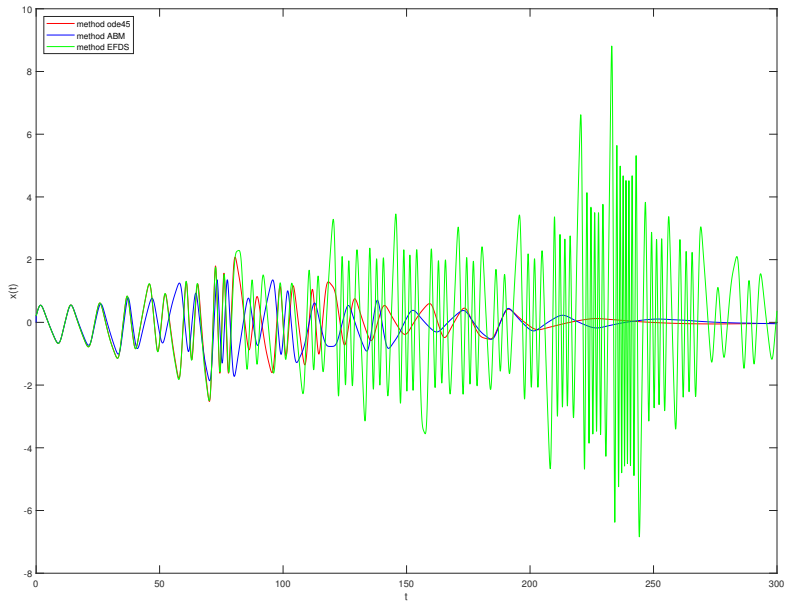


Рис. 1. Осциллограммы
Figure 1. Oscillograms.

На рис.1 мы видим, что явная конечно-разностная схема со временем становится не устойчивой и поэтому необходимо уменьшать шаг дискретизации расчетной сетки. В тоже время метод АБМ дает приемлемый результат. Как было сказано

выше, согласно Замечанию 8, классический метод АБМ обладает вторым порядком точности. Поэтому мы в этой работе будем использовать метод АБМ. Построим с помощью него фазовую траекторию для классического нелинейного осциллятора Матье (рис.2).

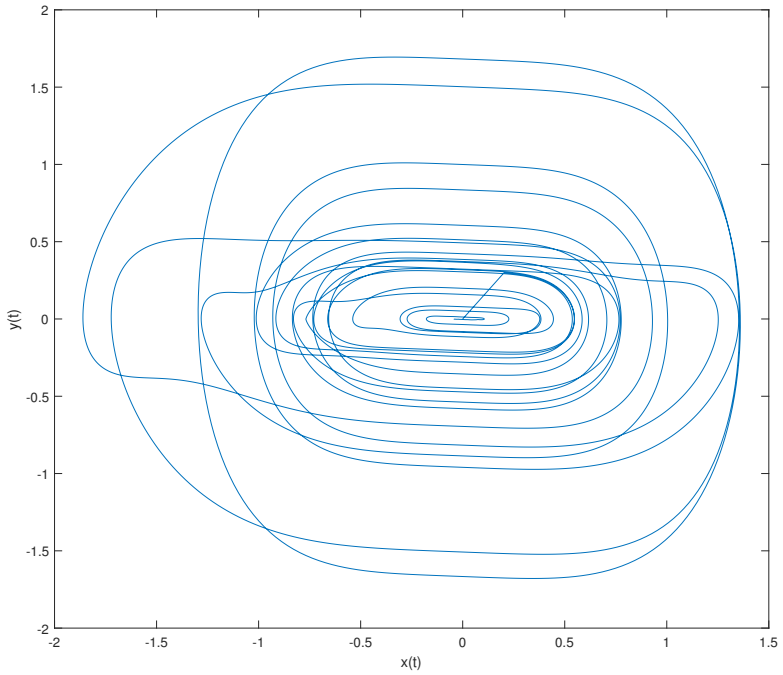


Рис. 2. Фазовая траектория

Figure. 2. Phase trajectory.

Фазовая траектория на рис.2 для нелинейного осциллятора Матье [17]. Напомним, что классический (линейный или нелинейный) осциллятор Матье описывает параметрический резонанс. Параметрический резонанс возникает в результате изменения параметров системы и сопровождается ростом амплитуды колебаний. Здесь мы видим рост амплитуды, а далее происходит с некоторого момента времени ее убывание. В первом случае значения параметров осциллятора Матье попали в область неустойчивости, а во втором — в область устойчивости. Определение областей устойчивости и неустойчивости — отдельная задача, которая заключается в построении диаграмм Стретта-Айнса. В статье [20] для дробного линейного осциллятора Матье были построены диаграммы Стретта-Айнса для главного резонанса. Было показано, что порядки дробных производных деформируют области устойчивости и неустойчивости.

Рассмотрим другие примеры, как изменение значений порядков дробных производных влияет на колебательные режимы.

Пример 2. Дробный нелинейный осциллятор Матье. Пусть значения параметров $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0.9$, а остальные параметры — из предыдущего примера. Результаты расчетов приведены на рис.3.

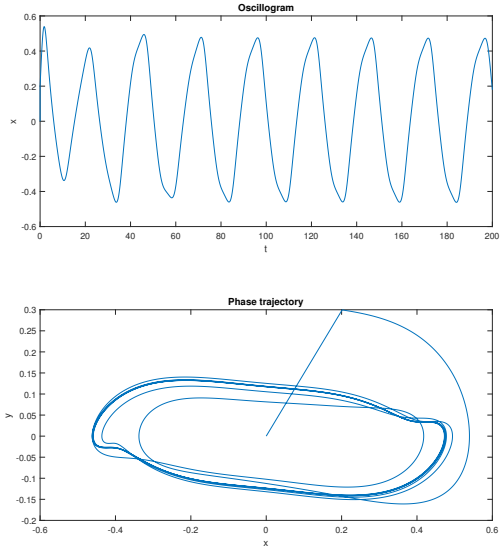


Рис. 3. Осциллограмма и фазовая траектория
Figure 3. Oscillogram and phase trajectory.

Мы видим, что со временем колебания устанавливаются, фазовая траектория выходит на замкнутую орбиту — предельный цикл. Это может означать наличие автоколебательного режима, т.е. режима колебаний, который обеспечивается не внешней периодической силой, а самой системой. Возьмем параметры $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0.8$, а остальные оставим без изменения.

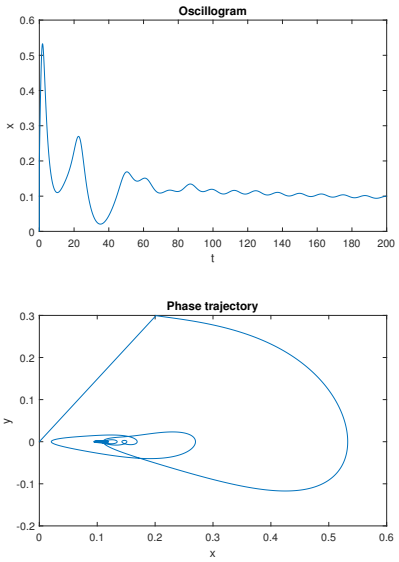


Рис. 4. Осциллограмма и фазовая траектория.
Figure 4. Oscillogram and phase trajectory.

На рис.4 приведена осциллограмма и фазовая траектория, построенные по методу АБМ (6), (7). Здесь мы видим также формирование другого предельного цикла, со временем амплитуда колебаний устанавливается. Возьмем значения параметров $\beta_1 = 1, \beta_2 = 0.1$. Приходим к следующему результату (рис.5).

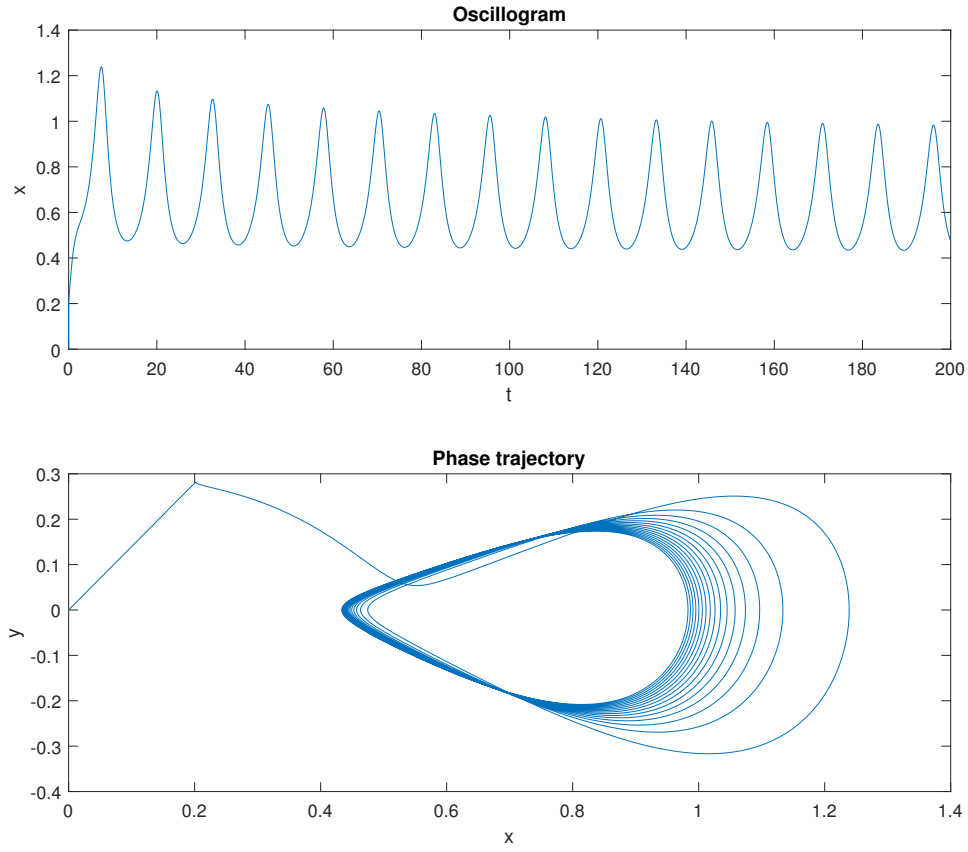


Рис. 5. Осциллограмма и фазовая траектория

Figure 5. Oscillogram and phase trajectory.

На рис.5 мы видим выход фазовой траектории на предельный цикл. Покажем, что такой предельный цикл может быть не устойчивым. Напомним определение устойчивости предельного цикла.

Определение 3. Предельный цикл называется устойчивым, если все фазовые траектории, начинающиеся в ϵ-окрестности, асимптотически приближаются к предельному циклу при $t \to +\infty$.

Определение 4. Предельные циклы, у которых близкие фазовые траектории неограниченно к ним приближаются называются аттракторами. Предельные циклы, у которых близкие фазовые траектории от них отталкиваются называются репеллерами.

На рис.3-5 приведены предельные циклы, которые являются аттракторами.

Проверим является ли предельный цикл на рис.5 устойчивым. Для этой цели построим две фазовые траектории с различными начальными условиями, взятыми

как вне этого цикла $(0.5, 0.5)$ так и внутри него $(1, 0.1)$. Результаты расчетов приведены на рис.6.

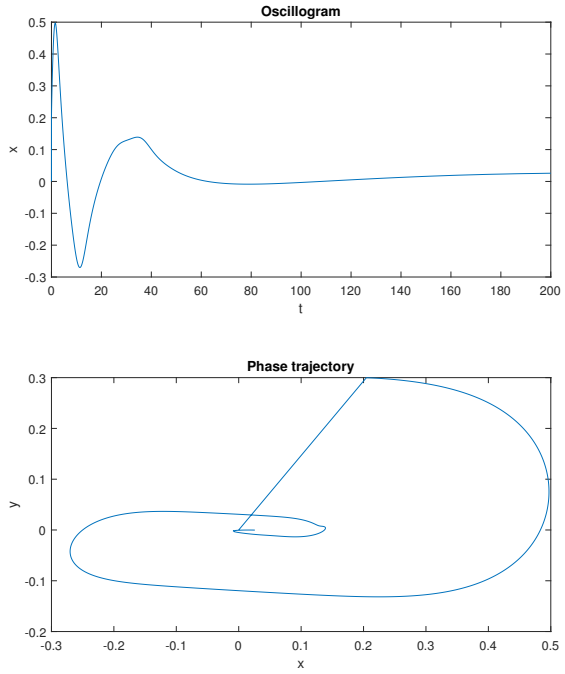


Рис. 6. Осциллограммы и фазовые траектории при различных начальных условиях
Figure 6. Oscillograms and phase trajectories for various initial conditions.

На рис.6 приведены различные фазовые траектории, которые наматываются (притягиваются) к различным аттракторам (предельным циклам). Поэтому предельный цикл согласно Определению 3 здесь не является устойчивым.

Замечание 9. Необходимо отметить, что существование предельного цикла в дробных колебательных системах заслуживает строгого доказательства по аналогии с теоремой Бендиксона [34].

Замечание 10. Необходимо отметить, что, если мы будем уменьшать значения порядка дробной производной β_1 при фиксированном β_2, то колебания перейдут в апериодический режим, т.е. совсем исчезнут (рис.7).

Исходя из анализа полученных результатов, можно сделать вывод о том, что эффекты памяти для нелинейного осциллятора Матье приводят к различным колебательным режимам. Несмотря на то, что дробная производная присутствует в инерциальном члене модельного уравнения нелинейного осциллятора Матье, фазовые траектории выходят на предельный цикл, что в свою очередь указывает на наличие автоколебаний. Порядки дробных производных влияют на время выхода фазовой траектории на предельный цикл.

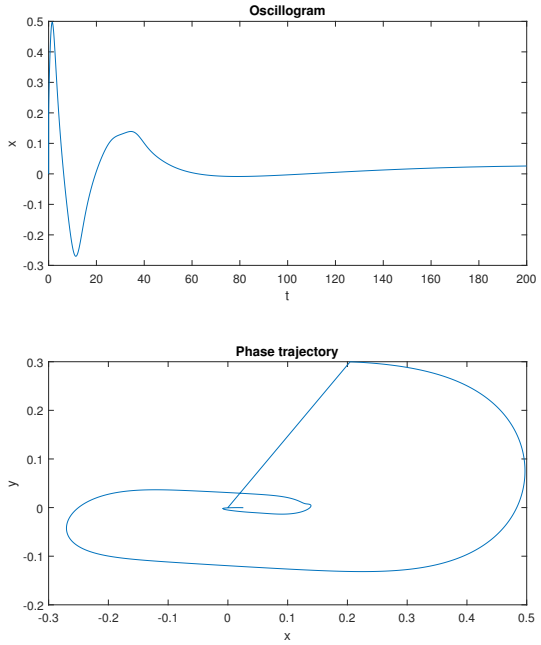


Рис. 7. Осциллограммы и фазовые траектории при значениях $\beta_1 = 0.8, \beta_2 = 1$.
Figure 7. Oscillograms and phase trajectories at values $\beta_1 = 0.8, \beta_2 = 1$.

Заключение

В работе был исследован дробный нелинейный осциллятор Матье с помощью численного метода Адамса-Башфорта-Мултона. Показано, что метод АБМ более точен, чем явная конечно-разностная схема. Было установлено, что, не смотря на отсутствие внешней периодической силы возникают автоколебательные режимы: колебания выходят на установившейся уровень, а фазовая траектория на предельный цикл, который может быть неустойчивым. Было также показано, что порядки дробных производных могут влиять на колебательный режим: от колебаний с постоянной амплитудой до затухающих и исчезающих совсем. Дальнейшее продолжение работы может идти по следующим направлениям:

1) качественный анализ дробного нелинейного осциллятора Матье, исследование параметрического резонанса, предельных циклов и т.д.

2) обобщение модельного уравнения, например, исследование вынужденных колебаний [26] или учет переменной памяти т.е. введение дробных производных переменного порядка [35].

Список литературы

1. Petras I. *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*. Berlin: Springer, 2011. 218 DOI: 10.1007/978-3-642-18101-6 pp.
2. Klafter J., Lim S. C., Metzler R. *Fractional dynamics: recent advances*. Singapore: World Scientific, 2011. 532 DOI: 10.1142/8087 pp.
3. Работнов Ю. Н. *Элементы наследственной механики твёрдых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.

4. Volterra V. *Functional theory, integral and integro-differential equations*. New York: Dover Publications, 2005. 288 pp.

5. Нахушев А.М. *Дробное исчисление и его применение*. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

6. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 pp.

7. Parovik R. I. Mathematical Models of Oscillators with Memory / *Oscillators - Recent Developments*. London, InTech, 2019, pp. 3-21 DOI: 10.5772/intechopen.81858.

8. Паровик Р. И. *Хаотические и регулярные режимы дробных осцилляторов*. Петропавловск-Камчатский: КАМЧАТПРЕСС, 2019. 132 с.

9. Mathieu É. Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 1868. vol. 13, pp. 137-203.

10. Holland R., Cable V. P. Mathieu functions and their applications to scattering by a coated strip, *IEEE transactions on electromagnetic compatibility*, 1992. vol. 34, no. 1, pp. 9-16 DOI: 10.1109/15.121661..

11. Yamamoto T., Koshino K., Nakamura Y. Parametric amplifier and oscillator based on Josephson junction circuitry / *Principles and Methods of Quantum Information Technologies*, Lecture Notes in Physics, vol. 911. Germany, Springer, 2016, pp. 495-513 DOI: 10.1007/978-4-431-55756-2_23.

12. Löcherer K. H., Brandt C. D. *Parametric electronics: an introduction*, vol. 6: Springer, 1982. 342 pp.

13. Vainio M., Halonen L. Mid-infrared optical parametric oscillators and frequency combs for molecular spectroscopy, *Physical Chemistry Chemical Physics*, 2016. vol. 18, no. 6, pp. 4266-4294 DOI: 10.1117/12.308105.

14. Boston J. R. Response of a nonlinear form of the Mathieu equation, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1971. vol. 49, no. 1B, pp. 299-305 DOI: 10.1121/1.1912330.

15. Kidachi H., Onogi H. Note on the stability of the nonlinear Mathieu equation, *Progress of theoretical physics*, 1997. vol. 98, no. 4, pp. 755-773 DOI: 10.1143/PTP.98.755.

16. El-Dib Y. O. Nonlinear Mathieu equation and coupled resonance mechanism, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2001. vol. 12, no. 4, pp. 705-720 DOI: 0.1016/S0960-0779(00)00011-4.

17. Bartuccelli M. V. et al. Selection rules for periodic orbits and scaling laws for a driven damped quartic oscillator, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008. vol. 9, no. 5, pp. 1966-1988 DOI: 10.1016/j.nonrwa.2007.06.007.

18. Паровик Р. И. Задача Коши для нелокального уравнения Матье, *Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук*, 2011. Т. 13, №2, С. 90-98.

19. Паровик Р. И. Диаграммы Стретта-Айнса для обобщенного уравнения Матье, *Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки*, 2012. №1(4), С. 24-30.

20. Parovik R. I. Fractal parametric oscillator as a model of a nonlinear oscillation system in natural mediums, *International Journal of Communications, Network and System Sciences*, 2013. vol. 6, no. 3, pp. 134-138 DOI: 10.4236/ijcns.2013.63016.

21. Zhang W., Baskaran R., Turner K. Tuning the dynamic behavior of parametric resonance in a micromechanical oscillator, *Applied physics letters*, 2003. vol. 82, no. 1, pp. 130-132 DOI: 10.1063/1.1534615.

22. Санин А. Л., Смирновский А. А. Квантовый осциллятор Матьё с кубической силой, трением и шумом, *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*, 2016. Т. 24, №3, С. 54-67 DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-3-54-67.

23. Герасимов А.Н. Обобщение законов линейного деформирования и их применение к задачам внутреннего трения, *АН СССР. Прикладная математика и механика*, 1948. Т. 44, №6, С. 62-78.

24. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent - II, *Geophysical Journal International*, 1967. vol. 13, pp. 529-539.

25. Псху А. В. Рехвиашвили С.Ш. Анализ вынужденных колебаний дробного осциллятора, *Письма в Журнал технической физики*, 2019. Т. 45, №1, С. 34-37 DOI: 10.21883/PJTF.2019.01.47154.17540.

26. Паровик Р. И. Амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики вынужденных колебаний нелинейного дробного осциллятора, *Письма в Журнал технической физики*, 2019. Т. 45, №13, С. 25-28 DOI:10.21883/PJTF.2019.13.47953.17811.

27. Parovik R.I. Existence and uniqueness of the Cauchy problem for a fractal nonlinear oscillator equation, *Uz. Math. J.*, 2017. no. 4, pp. 110-118.
28. Otenova A. Zh., Parovik R. I. Mathematical modeling of the non-linear fractional oscillator Mathieu / *Actual Problems of Applied Mathematics and Information Technologies-Al-Khwarizmi*, Abstracts of VIII International scientific conference. Samarkand, Samarkand state university named after Sharof Rashidov, 2023, pp. 81.
29. Parovik R. I. On a Finite-Difference Scheme for an Hereditary Oscillatory Equation. Journal of Mathematical Sciences, *2021.* vol. 253, no. 4, pp. 547-557 DOI: 10.1007/s10958-021-05252-2.
30. Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations, *Nonlinear Dynamics*, 2002. vol. 29, no. 1-4, pp. 3-22 DOI: 10.1023/A:1016592219341.
31. Yang C., Liu F. A computationally effective predictor-corrector method for simulating fractional order dynamical control system, *ANZIAM Journal*, 2005. vol. 47, pp. 168-184 DOI: 10.21914/anziamj.v47i0.1037.
32. Garrappa R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial, *Mathematics*, 2018. vol. 6, no. 2, 016 DOI: 10.3390/math6020016.
33. Gavrilyuk I. et al. Exact and truncated difference schemes for boundary value ODEs, 2011. 247 DOI: 10.1007/978-3-0348-0107-2. pp.
34. Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, 1901. vol. 24(1), pp. 1–88.
35. Kim V., Parovik R. Mathematical model of fractional duffing oscillator with variable memory, *Mathematics*, 2020. vol. 8, no. 11, pp. 1-14 DOI:10.3390/math8112063.

Информация об авторах



Отенова Айсанем Жебегеновна✉ – магистрант 2 курса "Прикладная математика", Национальный университет имени Мирзо Улугбека, г. Ташкент, Узбекистан, ORCID 0009-0004-1225-1832.



Паровик Роман Иванович✉ – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия, ORCID 0000-0002-1576-1860.

References

[1] Petras I Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation. Berlin: Springer, 2011. 218. DOI: 10.1007/978-3-642-18101-6.

[2] Klafter J., Lim S. C., Metzler R. Fractional dynamics: recent advances. Singapore. World Scientific. 2012. 532 p. DOI: 10.1142/8087.

[3] Rabotnov Yu. N. Elements of hereditary mechanics of solids. Moscow. MIR Publishers. 1980. 387 p.

[4] Volterra V. Functional theory, integral and integro-differential equations. New York. Dover Publications. 2005. 288 p.

[5] Nakhushev A.M. Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye [Fractional calculus and its application]. Moscow. Fizmatlit. 2003. 272 p.(In Russian).

[6] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam. Elsevier, 2006. 523 p.

[7] Parovik R. I. Mathematical Models of Oscillators with Memory. Oscillators - Recent Developments. London : InTech, 2019. pp. 3-21. DOI 10.5772/intechopen.81858.

[8] Parovik R. I. Khaoticheskiye i regulyarnyye rezhimy drobnykh ostsillyatorov [Chaotic and regular modes of fractional oscillators]. Petropavlovsk-Kamchatskiy. KAMCHATPRESS. 2019. 132 p.(In Russian).

[9] Mathieu É. Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique. Journal de mathématiques pures et appliquées. 1868. vol. 13. pp. 137-203.

[10] Holland R., Cable V. P. Mathieu functions and their applications to scattering by a coated strip. IEEE transactions on electromagnetic compatibility. 1992. vol. 34. no. 1. pp. 9-16. DOI: 10.1109/15.121661.

[11] Yamamoto T., Koshino K., Nakamura Y. Parametric amplifier and oscillator based on Josephson junction circuitry. Principles and Methods of Quantum Information Technologies. Lecture Notes in Physics. vol. 911. Germany. Springer. 2016. pp. 495-513 DOI: 10.1007/978-4-431-55756-2_23

[12] Löcherer K. H., Brandt C. D. Parametric electronics: an introduction. vol 6. Springer. 1982. 342 p.

[13] Vainio M., Halonen L. Mid-infrared optical parametric oscillators and frequency combs for molecular spectroscopy. Physical Chemistry Chemical Physics. 2016. vol. 18. no. 6. pp. 4266-4294. DOI: 10.1117/12.308105

[14] Boston J. R. Response of a nonlinear form of the Mathieu equation. The Journal of the Acoustical Society of America. 1971. vol. 49. no. 1B. pp. 299-305. DOI: 10.1121/1.1912330

[15] Kidachi H., Onogi H. Note on the stability of the nonlinear Mathieu equation. Progress of theoretical physics. 1997. vol. 98. no. 4. pp. 755-773. DOI: 10.1143/PTP.98.755

[16] El-Dib Y. O. Nonlinear Mathieu equation and coupled resonance mechanism. Chaos, Solitons & Fractals. 2001. vol. 12. no. 4. pp. 705-720. DOI: 0.1016/S0960-0779(00)00011-4

[17] Bartuccelli M. V. et al. Selection rules for periodic orbits and scaling laws for a driven damped quartic oscillator. Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2008. vol. 9. no. 5. pp. 1966-1988. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2007.06.007

[18] Parovik R. I. Cauchy problem for the nonlocal Mathieu equation. Reports of the Adyghe (Circassian) International Academy of Sciences. 2011. vol. 13, no. 2. p. 90-98.(In Russian).

[19] Parovik R. I.. Charts Strutt-Ince for generalized mathieu equation. Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki. 2012. no. 1(4). pp. 24-30.(In Russian).

[20] Parovik R. I. Fractal parametric oscillator as a model of a nonlinear oscillation system in natural mediums. International Journal of Communications, Network and System Sciences. 2013. vol. 6. no. 3. pp. 134-138. DOI: 10.4236/ijcns.2013.63016

[21] Zhang W., Baskaran R., Turner K. Tuning the dynamic behavior of parametric resonance in a micromechanical oscillator. Applied physics letters. 2003. vol. 82. no. 1. pp. 130-132. DOI: 10.1063/1.1534615

[22] Sanin A. L., Smirnovsky A. A. Mathieu quantum oscillator with cubic force,friction and noise. Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics. 2016. vol. 24. no. 3. pp. 54-67. DOI: 10.18500/0869-6632-2016-24-3-54-67

[23] Gerasimov A. N. Generalization of the laws of linear deformation and their application to problems of internal friction. AN SSR. Prikladnaya matematika i mekhanika. 1948. vol. 44. no. 6. pp. 62-78.(In Russian).

[24] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent - II. Geophysical Journal International. 1967. vol. 13. pp. 529-539.

[25] Pskhu A. V., Rekhviashvili S. Sh. Analysis of Forced Oscillations of a Fractional Oscillator. Technical Physics Letters. 2018. vol. 44, no. 12. pp. 1218-1221. DOI: 10.1134/S1063785019010164.

[26] Parovik R. I. Amplitude-Frequency and Phase-Frequency Performances of Forced Oscillations of a Nonlinear Fractional Oscillator. Technical Physics Letters. 2019. vol. 45. no. 7. pp. 660-663. DOI: 10.1134/S1063785019070095.

[27] Parovik R.I. Existence and uniqueness of the Cauchy problem for a fractal nonlinear oscillator equation. Uz. Math. J. 2017. no. 4. pp. 110-118.(In Russian).

[28] Otenova A. Zh., Parovik R. I. Mathematical modeling of the non-linear fractional oscillator Mathieu. Actual Problems of Applied Mathematics and Information Technologies-Al-Khwarizmi. Abstracts of VIII International scientific conference. Samarkand. Samarkand state university named after Sharof Rashidov. 2023. pp. 81.

[29] Parovik R. I. On a Finite-Difference Scheme for an Hereditary Oscillatory Equation. Journal of Mathematical Sciences. 2021. vol. 253, no. 4. pp. 547-557. DOI: 10.1007/s10958-021-05252-2.

[30] Diethelm K., Ford N. J., Freed A. D. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations // Nonlinear Dynamics, 2002. vol. 29. no. 1-4. pp 3-22. DOI: 10.1023/A:1016592219341.

[31] Yang C., Liu F. A computationally effective predictor-corrector method for simulating fractional order dynamical control system // ANZIAM Journal. 2005. vol. 47. pp. 168-184. DOI: 10.21914/anziamj.v47i0.1037.

[32] Garrappa R. Numerical solution of fractional differential equations: A survey and a software tutorial // Mathematics, 2018. vol. 6. no. 2. 016. DOI: 10.3390/math6020016.

[33] Gavrilyuk I. et al. Exact and truncated difference schemes for boundary value ODEs. Basel AG. Springer Science & Business Media, vol. 159. 2011. 247 p. DOI: 10.1007/978-3-0348-0107-2.

[34] Bendixson I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. Acta Math. 1901. vol. 24(1). p. 1–88

[35] Kim V., Parovik R. Mathematical model of fractional duffing oscillator with variable memory. Mathematics. 2020. vol. 8, no. 11. pp. 1-14. DOI:10.3390/math8112063.

Information about authors



Otenova Aysanem Zhebegen qizi✉ – 2nd year master's student "Applied Mathematics", National University named after Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0009-0004-1225-1832.



Parovik Roman Ivanovich✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Leading researcher, laboratory of modeling physical processes Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Russia, ORCID 0000-0002-1576-1860.

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 46. №1. С. 89 - 102. ISSN 2079-6641

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-89-101

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 519.254, 519.21, 519.651, 519.654

Приложение эредитарной модели критичности к исследованию характеристик сейсмического процесса в зоне субдукции Курило-Камчатской островной дуги

*О. В. Шереметьева**, *Б. М. Шевцов**

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7, Россия

Аннотация. В статье представлены результаты статистической обработки данных каталога землетрясений КФ ФИЦ ЕГС РАН за период 01.01.1962 — 31.12.2002 гг. для зоны субдукции Курило-Камчатской островной дуги в рамках ранее представленной авторами эредитарной модели критичности. В качестве модели рассматривается составной степенной процесс Пуассона в дробном представлении по времени. Использование данной модели предполагает квазиоднородность и квазистационарность сейсмического процесса, усреднённого по времени и пространству при длительном наблюдении. Исследование неустойчивости этого процесса во времени осуществляется с помощью критических индексов, которые определяются числовым характеристикам процесса и зависят от параметра b закона Гутенберга-Рихтера. На основании данных каталога методом линейной и нелинейной регрессий найдены параметры сейсмического процесса: коэффициент b и показатель дробной производной ν, посредством усреднения по тому интервалу магнитуд, в котором выполняется степенное распределение частот повторяемости сейсмических событий. Проведена оценка значимости полученного значения параметра b закона Гутенберга-Рихтера. Вычислены критические индексы, по значениям которых и в сравнении с параметром эредитарности ν определяется состояние сейсмического процесса в рассматриваемый период.

Ключевые слова: дробный процесс Пуассона, квазистационарный режим, квазиоднородный режим, сейсмический процесс, закон Гутенберга-Рихтера, время ожидания первого события, функция Миттаг-Леффлёра, аппроксимация, статистическая модель, дробная модель.

Получение: 03.02.2024; Исправление: 05.03.2024; Принятие: 06.03.2024; Публикация онлайн: 07.03.2024

Для цитирования. Шереметьева О. В., Шевцов Б. М. Приложение эредитарной модели критичности к исследованию характеристик сейсмического процесса в зоне субдукции Курило-Камчатской островной дуги // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 46. № 1. С. 89-101. EDN: GYGBQZ. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-89-101.

Финансирование. Работа выполнена за счёт Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № темы 124012300245-2).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: sheremeteva@ikir.ru, bshev@ikir.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Шереметьева О. В., Шевцов Б. М., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2024. vol. 46. no. 1. P. 89 - 102. ISSN 2079-6641

MATHEMATICAL MODELLING

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-89-101

Research Article

Full text in Russian

MSC 60G22, 37M10, 33E12

Application of the Hereditarian Criticality Model to the Study of the Characteristics of the Seismic Process of the Kuril-Kamchatka Island Arc Subduction Zone

*O. V. Sheremetyeva**, *B. M. Shevtsov**

Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, FEB RAS,
684034 Kamchatka region, Elizovskiy district, Paratunka, Mirnaya str., 7, Russia

Abstract. The article presents the results of statistical processing of data from the earthquake catalog of the KBGSRAS for the period from 1 January 1962 to 31 December 2002 for the Kuril-Kamchatka island arc subduction zone (area 46°–62° N, 158°–174° E) within the framework of the earlier presented by the authors hereditarian criticality model. The compound power-law Poisson process in fractional time representation is considered as a model. The use of this model assumes quasi-stationary and quasi-homogeneous regime of the seismic process averaged over time and space during long-term observation. The study of the instability of this process over time is carried out using critical indices, which are determined by the numerical characteristics of the process and depend on the parameter b of the Gutenberg-Richter law.Based on the catalog data, the parameters of the seismic process were found by linear and nonlinear regression: the coefficient b and the exponent of the Caputo fractional derivative ν, by averaging over the magnitude interval in which the power law distribution of recurrence frequencies of events is performed. The significance of the obtained value of the Gutenberg-Richter law parameter b is estimated. Critical indices have been calculated, according to the values of which, and in comparison with the hereditarity parameter ν, the state of the seismic process in the period under consideration is determined.

Key words: fractional Poisson process, quasi-stationary regime, quasi-homogeneous regime, seismic process, Gutenberg-Rihter law, first-passage time, Mittag-Leffler's function, approximation, statistical model, fractional model.

Received: 03.02.2024; Revised: 05.03.2024; Accepted: 06.03.2024; First online: 07.03.2024

For citation. Sheremetyeva O. V., Shevtsov B. M. Application of the hereditarian criticality model to the study of the characteristics of the seismic process of the Kuril-Kamchatka Island arc subduction zone. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **46**: 1, 89-101. EDN: GYGBQZ. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-89-101.

Funding. The work was supported by IKIR FEB RAS State Task (subject registration No. 124012300245-2).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: sheremeteva@ikir.ru, bshev@ikir.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Sheremetyeva O. V., Shevtsov B. M., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)

Введение

В статье рассматривается приложение разработанной авторами модели критического явления [1, 2] к сейсмическому процессу. Исходя из общих свойств критических явлений: масштабной инвариантности потоков событий (скейлинг), наличия степенной расходимости характеристик вблизи критических точек и замедления динамики процесса перед взрывной активацией, в качестве статистической модели использован дробный по времени степенной составной процесс Пуассона [3]- [10]. Составной процесс Пуассона задаётся набором потоков событий различной амплитуды, а в степенном случае эти амплитуды распределены по степенному закону. Представление сейсмического процесса степенным составным процессом Пуассона хорошо известно. Наделение процесса дробными свойствами является нововведением в теории критичности, что позволяет рассмотреть влияние сочетания скейлинга и дробности на свойства процесса. Критичность этого процесса Пуассона порождается масштабной инвариантностью и усиливается эредитарностью. Скейлинг порождает расходимости в критических точках, а эредитарность процесса определяет особенности его динамики.

Нулевой, первый и второй моменты степенного распределения амплитуд потоков событий составного процесса Пуассона выражаются через частичные суммы обобщённого гармонического ряда [1]

$$S_{k,p} = \sum_{r=1}^{k} r^{-(2b+1)\nu+p}, \ p = 0, 1, 2. \tag{1}$$

и зависят от показателя дробной производной ν и параметра b. Нулевой момент степенного распределения определяет скорость распада состояний процесса Пуассона, первый – среднее, а второй – дисперсию процесса. Типы расходимостей этих статистических характеристик при $k \to \infty$ определяются критическим соотношением для значения показателя

$$(2b + 1)\nu - p = 1,$$

исходя из которого могут быть найдены критические индексы

$$\nu_p = \frac{1 + p}{(2b + 1)}, \ p = 0, 1, 2. \tag{2}$$

Таким образом, при заданном степенном распределении амплитуд потоков событий статистические характеристики процесса Пуассона расходятся в случае выполнения условия $\nu < \nu_p$.

Использование эредитарной модели критических явлений для описания сейсмического процесса предполагает квазистационарность и квазиоднородность распределения потоков дислокационных изменений в определенной пространственно-временной области, которые флуктуируют относительно средних значений. Эти средние значения можно рассматривать как характеристики квазистационарного и квазиоднородного сейсмического процесса. Мы исследуем

неустойчивость такого процесса, рассматривая отклонения его параметров от средних характеристик. В приложении модели к сейсмическому процессу амплитуда потока событий равна отношению размера дислокации к минимальному её размеру и соотносится с частотой повторяемости сейсмических событий определённой энергии, скейлинг потоков событий определяется законом Гутенберга-Рихтера [1, 2, 9], нулевой момент степенного распределения характеризует интенсивность сейсмического процесса, первый момент определяет среднюю деформацию, а второй – среднюю энергию (мощность) процесса [1]. Предложенная модель позволяет по особенностям в соотношениях параметров скейлинга b и эредитарности ν определить критические индексы ν_p аномальных режимов геодеформационного процесса и исследовать свойства памяти сейсмического процесса, которые влияют на критичность этого процесса.

В рамках данной работы мы детально остановимся на изложении методов обработки данных сейсмического каталога и вычисления параметров степенного составного дробного процесса Пуассона, которые позволяют сделать выводы о критических режимах сейсмического процесса в рассматриваемом регионе.

Параметр скейлинга b

Для исследования был использован каталог землетрясений Камчатского филиала единой геофизической службы ФИЦ РАН за период с 1 января 1962 г. по 31 декабря 2002 г. для зоны субдукции Курило-Камчатской островной дуги (область $46^\circ - 62^\circ$ с.ш., $158^\circ - 174^\circ$ в.д.) [11]. Объём выборки составляет $n = 79282$, в каталоге представлены события энергетических классов $4.1 - 16.1$.

Распределение частот повторяемости событий подчиняется закону Гутенберга-Рихтера с параметрами a и b

$$N = 10^{a-bM}, \tag{3}$$

где $N = N(m \geq M)$ – количество (частота) событий с магнитудами $m \geq M$, M – фиксированная магнитуда, m – магнитуды событий. В прологарифмированном виде уравнение (3) имеет линейную форму

$$\lg N = a - bM. \tag{4}$$

На основании данных каталога [11] было получено распределение частот событий по энергиям и составлен эмпирический закон распределения (рис. 1а), который в прологарифмированном виде представлен на рисунке 1б. Для вычисления значений параметров закона Гутенберга-Рихтера необходимо рассматривать только линейную часть прологарифмированного эмпирического закона (рис. 1б), исходя из линейности теоретического закона (4). На основании полученных результатов можно сделать грубую оценку расположения линейной части на промежутке значений магнитуд $M \in [3, 5]$ (на графиках выделено красными точками). На интервале $M < 3$ появляется нелинейность и в окрестности значения $M = 5$ излом линейной части. Для более точного определения линейного промежутка первоначально использовали линейную

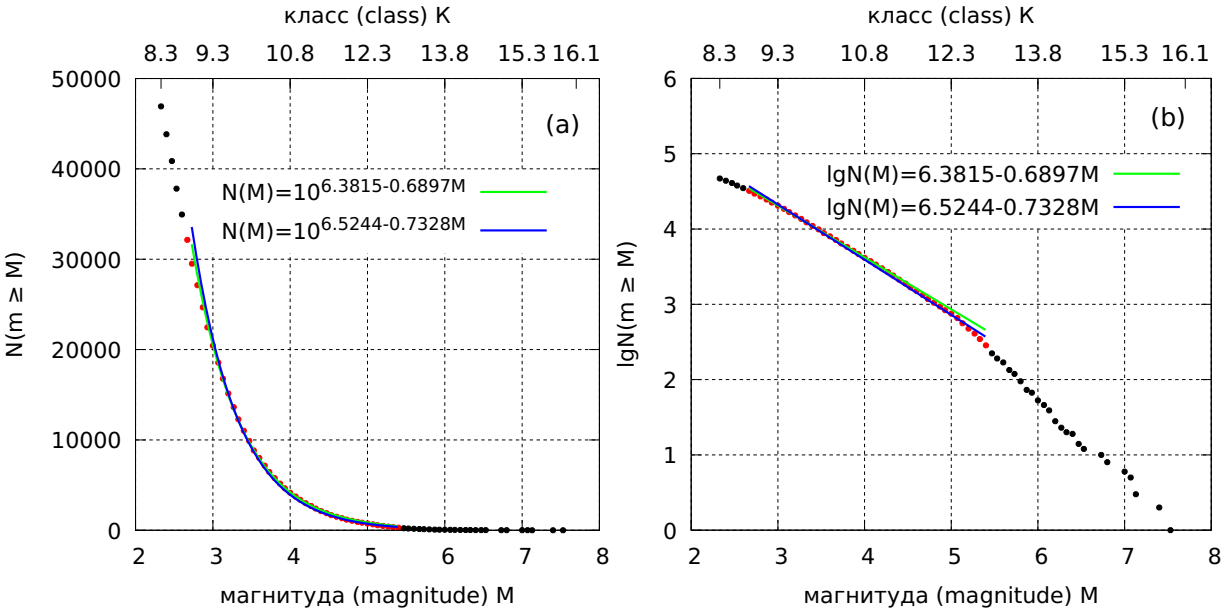


Рис. 1. а) Распределение частот повторяемости событий, б) распределение логарифма частот повторяемости событий. Синий график – линейная регрессия, зелёный график – нелинейная регрессия.

[Figure 1. a) Distribution of recurrence frequencies of events, b) distribution of the logarithm of recurrence frequencies of events. The blue graph is linear regression, the green graph is nonlinear regression.]

аппроксимацию. Аппроксимация линейной части графика проводилась методом наименьших квадратов, исходя из минимизации ошибки аппроксимации ε в результате последовательного исключения событий из начала и конца промежутка $M \in [2.33,\ 7.53]$ ($K \in [8.3,\ 16.1]$), где значению $M = 2.33$ ($K = 8.3$) соответствует максимальное количество событий, а $M = 7.53$ ($K = 16.1$) – это максимальное значение магнитуды для рассматриваемого каталога. Для ошибки аппроксимации ε приняты следующие ограничения $1\% < \varepsilon < 10\%$, при которых получены значения параметров линейной регрессии a и b, представленные в Таблице 1 (столбец 2). Теснота связи линейной регрессии оценивается с помощью значения коэффициента корреляции $R = 0.9985$, близость которого к единице указывает на тесную линейную (практически функциональную) связь на промежутке аппроксимации $M \in [2.67,\ 5.40]$ ($K \in [8.8,\ 12.9]$) [12, 13]. Статистическая значимость уравнения регрессии (в целом) оценивается с помощью F-критерия Фишера на уровне значимости $\alpha = 0.05$ со степенями свободы $k_1 = m - 1 = 1$ и $k_2 = k - m = k - 2$, где k – количество рассматриваемых классов на промежутке аппроксимации, m – количество параметров регрессии [12, 13]. Эмпирическое значение статистики F превышает критическое значение $\tilde{F} = F(0.05, 1, 42) = 4.08$, следовательно на заданном уровне α уравнение линейной регрессии статистически значимо. Оценка статистической значимости параметров линейной регрессии a и b и коэффициента корреляции R проводится с помощью t-критерия Стьюдента, где критическое

значение $\tilde{t} = t(\alpha, k-m) = t(0.05, k-2)$, и вычисления доверительных интервалов каждого из показателей. Выполнение условий $t_a > \tilde{t}$, $t_b > \tilde{t}$, $t_R > \tilde{t}$ подтверждает статистическую значимость параметров уравнения линейной регрессии и коэффициента корреляции на уровне значимости $\alpha = 0.05$. Все найденные параметры и статистические показатели представлены в Таблице 1 (столбец 2).

Таблица 1

Параметры закона Гутенберга-Рихтера и статистические показатели аппроксимирующих функций [Parameters of the Gutenberg-Richter law and statistical indices of approximating functions]

Вид аппроксимации	Линейная регрессия		Нелинейная регрессия	
	$\lg Y = a - bX$	$Y = 10^{a-bX}$	$Y = 10^{a-bX}$	$\lg Y = a - bX$
1	2	3	4	5
$[K_1,\ K_2]$[1]	[8.8, 12.9]		[9.2, 12.9]	
$[M_1,\ M_2]$[1]	[2.67, 5.40]		[2.93, 5.40]	
Количество классов k	42		38	
a	6.525 ± 0.027	6.525	6.3815	
t_a	246.75	-	-	-
b	0.733 ± 0.006	0.733	0.6897	
t_b	113.99	-	-	-
R	0.9985 ± 0.0088	1.209	0.9857	0.8567
t_R	113.99	-	-	-
$\tilde{t}$ [3]	2.02	-	-	-
F	12995	-126	1233	99
$\tilde{F}$ [4]	4.08			
ε, %	0.908	9.305	1.658	1.687

[1] Промежуток аппроксимации, [2] R – коэффициент/индекс корреляции,
[3] t-критерий Стьюдента: критическое значение $\tilde{t} = t(\alpha, \tilde{k}) = t(0.05, k-m)$,
[4] F-критерий Фишера: критическое значение $\tilde{F} = F(\alpha, k_1, k_2) = F(0.05, m-1, k-m)$,
где k – объём выборки, m – количество параметров регрессии ($m = 2$).

Однако, если подставить в закон Гутенберга-Рихтера (3) значения параметров a и b, полученные в результате линейной аппроксимации (4), то статистические показатели, а именно, индекс корреляции $R > 1$ и статистика Фишера $F < 0$, не позволяют сделать вывод о статистической значимости данного уравнения и хорошем приближении эмпирических данных показательной функцией.

В связи с этим использовался иной подход: рассматривалась аппроксимация эмпирического закона распределения показательной функцией (3) (нелинейная регрессия) методом наименьших квадратов. Ориентируясь на полученные в

уравнении линейной регрессии значения a и b, были определены подходящие промежутки изменения этих параметров. Значения a и b для показательной аппроксимирующей функции определялись перебором значений из этих промежутков с шагом 0.001 на основании минимизации ошибки аппроксимации ε с принятым ограничением $1\% < \varepsilon < 10\%$ при последовательном исключении классов из начала и конца промежутка $M \in [2.33,\ 7.53]$ ($K \in [8.3,\ 16.1]$) и наибольшем индексе корреляции. На каждом полученном с помощью нелинейной регрессии промежутке аппроксимации также вычислялись статистические показатели для прологарифмированного эмпирического закона. Если ошибка аппроксимации ε линейной функцией на рассматриваемом промежутке магнитуд удовлетворяла условиям минимизации и ограничениям $1\% \leq \varepsilon \leq 2\%$, то этот промежуток выбирался в качестве промежутка аппроксимации.

По результатам расчётов всем сформулированным выше условиям удовлетворяет промежуток $M \in [2.93,\ 5.40]$ ($K \in [9.2,\ 12.9]$). Объём выборки составил 22230 событий. На выбранном промежутке аппроксимации нелинейная корреляционная связь между магнитудой M (классом K) и частотой N весьма тесная, т. к. близко к единице значение индекса корреляции $R = 0.9857$. На основании F-критерия Фишера на уровне значимости $\alpha = 0.05$ признаём статистическую значимость нелинейного уравнения регрессии в целом, т. к. эмпирическое значение статистики F значительно превышает критическое значение $\tilde{F}$. Значения статистических показателей приведены в Таблице 1 (столбец 4). Отметим, что статистические показатели аппроксимации законом (4) позволяют сделать вывод о статистической значимости линейного уравнения ($F > \tilde{F}$) в целом (Таблица 1, столбец 5).

Распределение времени ожидания первого события

Распределение вероятности времени ожидания первого события для каждого масштаба r задаётся выражением [5]:

$$P(t) = \lambda_r t^{\nu} E_{\nu,\nu+1}(-\lambda_r t^{\nu}),\ \lambda_r = (\omega_r)^{\nu},\ t \geq 0,\ r = 1,\ 2, \ldots,\ k, \qquad (5)$$

где $E_{\nu,\nu+1}(x)$ – функция Миттаг-Леффлёра, λ_r – дробная относительная частота повторяемости событий, $\omega_r = \frac{N(m=M)}{n}$ – относительная частота повторяемости событий, n – объём каталога.

Для каждого из классов, которые попали в промежуток аппроксимации $M \in [2.93,\ 5.40]$ ($K \in [9.2,\ 12.9]$), находим эмпирический закон распределения времени ожидания первого события. Для этого из каталога выбираем события класса K_r. В полученной последовательности вычисляем длины τ промежутков времени между соседними событиями, находим длину наибольшего из полученных промежутков и обозначаем T_{max}. Промежуток $(0,\ T_{max}]$ разбиваем на $n_r = [T_{max}] + 1$ промежутков $(t_i,\ t_{i+1}]$ длиной 1 день, где $i = (0, \ldots, (n_r - 1))$, $t_{i+1} = t_i + h$, шаг $h = 1$ день, $t_0 = 0$, $[T_{max}]$ – целая часть значения T_{max}. Подсчитываем количество промежутков времени между соседними событиями, длины τ которых

попадают на промежуток разбиения $(t_i, t_{i+1}]$. Таким образом получаем ряд распределения времени ожидания первого события и вычисляем эмпирическую функцию распределения.

Эмпирическую функцию полученного распределения времени ожидания первого события аппроксимируем функцией (5). Использовали два способа аппроксимации. В первом случае относительная частота ω_r повторяемости событий класса K_r вычислялась на основании данных каталога, а параметр ν находили методом наименьших квадратов, исходя из минимизации ошибки аппроксимации ε. Во втором случае использовалась двухпараметрическая аппроксимация, где методом наименьших квадратов вычисляли оба параметра ω_r и ν, исходя из минимизации ошибки аппроксимации ε (Таблица 2). При обработке сейсмических данных параметр ν приобретает определенные значения для каждого r и обозначено в Таблице 2 как ν_r. Параметр эредитарности ν вычисляется как среднее арифметическое полученных значений ν_r.

Отметим, что точность аппроксимации при использовании двухпараметрического приближения выше. Ошибка ε для классов из промежутка аппроксимации в этом случае не превышает 7 %, тогда как использование эмпирического значения относительной частоты ω_r приводит к ошибкам превышающим 10 % для классов $K \geq 11.7$. Поэтому для дальнейших вычислений предпочтительней использовать результаты двухпараметрической аппроксимации, хотя полученные обоими способами значения параметра эредитарности ν отличаются незначительно.

Таблица 2. Параметры распределений времени ожидания первого события [Parameters of the first-passage time distributions]

r	K_r	M_r	n_r	Однопараметрическая аппроксимация				Двухпараметрическая аппроксимация			
				s_{min}	ω_r	ν_r	ε, %	s_{min}	ω_r	ν_r	ε, %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	9.2	2.93	57	0.102	0.135	0.961	4.71	0.025	0.182	0.891	2.33
2	9.3	3.0	57	0.067	0.125	0.974	3.93	0.031	0.152	0.925	2.59
3	9.4	3.07	57	0.085	0.119	0.962	4.36	0.034	0.149	0.905	2.76
4	9.5	3.13	58	0.099	0.109	0.958	4.71	0.039	0.139	0.897	2.97
5	9.6	3.2	62	0.105	0.101	0.959	4.71	0.033	0.129	0.895	2.64
6	9.7	3.27	67	0.109	0.09	0.962	4.62	0.036	0.114	0.901	2.65
7	9.8	3.33	67	0.102	0.084	0.954	4.55	0.032	0.105	0.895	2.53
8	9.9	3.4	77	0.095	0.075	0.961	4.08	0.043	0.09	0.914	2.76
9	10.0	3.47	71	0.108	0.071	0.955	4.65	0.063	0.083	0.907	3.54
10	10.1	3.53	83	0.077	0.056	0.960	3.70	0.036	0.064	0.92	2.51
11	10.2	3.6	84	0.074	0.057	0.968	3.57	0.029	0.065	0.928	2.24
12	10.3	3.67	91	0.112	0.048	0.960	4.29	0.035	0.056	0.91	2.38
13	10.4	3.73	93	0.245	0.045	0.932	6.31	0.045	0.06	0.849	2.7

Таблица 2. Параметры распределений времени ожидания первого события [Parameters of the first-passage time distributions]

r	K_r	M_r	n_r	Однопараметрическая аппроксимация				Двухпараметрическая аппроксимация			
				s_{min}	ω_r	ν_r	ε, %	s_{min}	ω_r	ν_r	ε, %
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
14	10.5	3.8	95	0.133	0.041	0.969	4.64	0.043	0.049	0.918	2.64
15	10.6	3.87	103	0.214	0.034	0.942	5.79	0.051	0.042	0.88	2.83
16	10.7	3.93	103	0.163	0.033	0.959	5.12	0.081	0.039	0.91	3.61
17	10.8	4.0	107	0.257	0.027	0.922	6.53	0.089	0.034	0.858	3.83
18	10.9	4.07	109	0.28	0.025	0.947	6.75	0.041	0.031	0.888	2.6
19	11.0	4.13	113	0.331	0.025	0.922	7.19	0.041	0.033	0.865	3.76
20	11.1	4.2	115	0.395	0.021	0.880	8.01	0.079	0.028	0.817	3.59
21	11.2	4.27	112	0.357	0.018	0.907	7.97	0.059	0.023	0.852	3.25
22	11.3	4.33	113	0.301	0.019	0.926	7.17	0.103	0.024	0.873	4.19
23	11.4	4.4	112	0.144	0.016	0.898	5.38	0.044	0.018	0.886	4.05
24	11.5	4.47	104	0.405	0.015	0.845	9.15	0.101	0.019	0.797	4.57
25	11.6	4.53	100	0.225	0.012	0.936	7.27	0.141	0.013	0.91	5.75
26	11.7	4.6	95	0.505	0.011	0.825	11.18	0.023	0.021	0.784	4.07
27	11.8	4.67	89	0.451	0.01	0.861	10.74	0.112	0.014	0.822	5.35
28	11.9	4.73	79	0.353	0.009	0.835	10.21	0.036	0.012	0.85	5.4
29	12.0	4.8	76	0.529	0.008	0.803	13.1	0.055	0.012	0.818	4.22
30	12.1	4.87	73	0.576	0.007	0.772	14.03	0.08	0.01	0.775	5.21
31	12.2	4.93	61	0.21	0.006	0.915	9.31	0.113	0.007	0.886	6.83
32	12.3	5.0	68	0.133	0.006	0.920	7.06	0.089	0.007	0.909	5.76
33	12.4	5.07	65	0.666	0.006	0.751	15.45	0.04	0.01	0.766	5.95
34	12.5	5.13	55	0.644	0.006	0.755	16.42	0.033	0.011	0.749	4.92
35	12.6	5.2	49	0.273	0.005	0.787	12.2	0.043	0.007	0.791	6.04
36	12.7	5.27	51	0.217	0.004	0.896	10.55	0.075	0.005	0.882	6.21
37	12.8	5.33	47	0.108	0.004	0.880	7.92	0.051	0.005	0.858	5.46
38	12.9	5.4	50	0.428	0.004	0.868	14.85	0.032	0.006	0.883	5.32
$\sum_{r=1}^{k} \nu_r$						34.386				32.964	
$\nu = \frac{1}{k} \sum_{r=1}^{k} \nu_r$						0.9049				0.8675	

Результаты и обсуждение

По результатам обработки экспериментальных данных и их закономерностей на выбранном промежутке аппроксимации $M \in [2.93, 5.40]$ ($K \in [9.2, 12.9]$) вычислены параметр скейлинга b и параметр эредитарности ν, характеризующие

дробный по времени составной степенной процесс Пуассона [1, 5, 8] с целочисленными случайными изменениями состояний на величину $r = 1, \ldots, k$.

Среднее арифметическое значение эредитарного параметра ν – показателя дробной производной по Капуто [5, 8], составило $\nu = 0.8675$, что меньше единицы. Следовательно можно сделать вывод, что рассматриваемый сейсмический процесс обладает «памятью», поэтому сейсмические события нельзя считать независимыми, а распределения времени ожидания первого события (5) определяют замедленную релаксацию деформаций, что связано с упрочнением деформируемой среды и накоплением упругой энергии и может быть причиной активации сейсмического процесса.

Исходя из полученного значения параметра скейлинга $b = 0.6897$, вычислены значения критических индексов (2) $\nu_0 \approx 0.42$, $\nu_1 \approx 0.84$, $\nu_2 \approx 1.26$. Значение параметра эредитарности ν превышает значения ν_0 и ν_1 и меньше ν_2. Полученные результаты сравнения означают, что дробная скорость затухания Λ сейсмического процесса и средние деформации конечны [1]. Близость значения параметра ν к критическому значению ν_1 и расходимость дисперсии говорит о том, что в накопленных деформациях и энергии могут возникать неустойчивости, которые будут проявляться в сильных флуктуациях и приводить к нестабильности сейсмического процесса и его переходу в нестационарный режим, рассмотренный в работах [14, 15]. Природу этих флуктуаций можно объяснить с помощью энергетической характеристики процесса (дисперсии), где второе слагаемое пропорционально квадрату среднего [5], а это указывает на наличие когерентных эффектов в деформациях, возникающих благодаря нелокальности процесса по времени. Иначе говоря, память процесса способствует консолидации дислокационных изменений, вследствие чего складываются не энергии, а амплитуды дислокаций. Когерентность в аномальных явлениях – это самоорганизованная критичность, обусловленная эредитарностью процесса, т. е. нелокальностью его во времени.

Дробная скорость затухания Λ [день$^{-\nu}$] сейсмического процесса конечна, т. к. $\nu > \nu_0$, и определяется следующим образом [1, 5, 8]

$$\Lambda = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r = \sum_{r=1}^{n} (\omega_r)^{\nu}.$$

Значение параметра Λ на основании результатов двухпараметрической аппроксимации распределений времени ожидания первого движения (Таблица 2, столбец 10) составляет $\Lambda = 2.6401$ день$^{-0.8675} = (3.0622/\text{день})^{0.8675}$. Тогда скорость затухания исходного и всех последующих состояний процесса равна $\Lambda^{1/\nu} = 3.0622$ [день$^{-1}$].

Заключение

Специфика критичности определяется масштабной инвариантностью и эредитарностью. Первое свойство при рассмотрении сейсмического процесса

отвечает за консолидацию масштабов дислокаций, а второе – за корреляцию событий на временных интервалах. Из выражения (1) следует зависимость критических показателей от произведения параметров b и ν, что говорит о проявлении мультипликативного эффекта масштабирования и наследственности в критических явлениях. Замедление релаксаций и накопление энергии являются причиной катастрофического характера критических явлений. Запаздывающие релаксации и аномальный рост флуктуаций можно рассматривать как предвестник катастрофы, сценарий которой определяется нестационарным режимом пуассоновского процесса [14, 15].

Сейсмический процесс многообразен и может иметь множество представлений. В рамках эредитарной модели критичности рассматривается квазистационарный и квазиоднородный режим сейсмического процесса. Анализ данных каталога землетрясений для зоны субдукции Курило-Камчатской островной дуги на основе используемой модели критичности показал неустойчивость данного режима сейсмического процесса.

Обработка данных каталога показала зависимость эредитарного параметра ν от масштаба $r = 1, 2, ..., k$, т. е. эредитарные свойства потоков сейсмических событий зависят от масштаба (энергии), что не учитывается используемой эредитарной моделью критичности. Полученная эмпирическая зависимость определяет пути дальнейшего обобщения модели.

Список литературы

1. Shevtsov B., Sheremetyeva O. Fractional Criticality Theory and Its Application in Seismology, *Fractal Fract.*, 2023. vol. 7, no. 890, pp. 1–12 DOI: 10.3390/fractalfract7120890.
2. Shevtsov B., Sheremetyeva O. Power-Law Compound and Fractional Poisson Process in the Theory of Anomalous Phenomena / *Solar-Terrestrial Relations and Physics of Earthquake Precursors. STRPEP 2023*, Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. Cham, Springer, 2023, pp. 266–275 DOI: 10.1007/978-3-031-50248-4_27.
3. Janossy L., Renyi A., Aczel J. On composed Poisson distributions, *I. Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 1950. no. 1, pp. 209–224.
4. Adelson R. M. Compound Poisson distributions, *Oper. Res. Quart.*, 1966. vol. 17, pp. 73–75.
5. Antonio Di Crescenzo, Barbara Martinucci, Alessandra Meoli A fractional counting process and its connection with the Poisson process, *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 2016. no. 13, pp. 291–307 DOI: 10.30757/ALEA.v13-12.
6. Beghin L., Macci C. Multivariate fractional Poisson processes and compound sums, *Adv. in Appl. Probab.*, 2016. vol. 48, no. 3 DOI: 10.1017/apr.2016.23 author.
7. Kataria K. K., Khandakar M. Convoluted Fractional Poisson Process, *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 2021. no. 18, pp. 1241–1265 DOI: 10.30757/ALEA.v18-46.
8. Khandakar M., Kataria K. K. Some Compound Fractional Poisson Processes, *Fractal Fract.*, 2023. vol. 7, no. 15 DOI: 10.3390/fractalfract7010015.
9. Gutenberg B., Richter C. F. Frequency of Earthquakes in California, *Bulletin of the Seismological Society of America*, 1944. vol. 34, pp. 185–188.
10. Kanamori Hiroo The Energy Release in Great Earthquakes, *J. of Geophysical Research*, 1977. vol. 82, no. 20, pp. 2981–2987.
11. *The Geophysical Service of the Russian Academy of Sciences. Available online: http://www.gsras.ru/new/eng/catalog/.*
12. Гмурман Н. Ш. *Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов. – 9-е изд., стер.* М.: Высш. шк., 2003. 479 с.

13. Кремер Н. Ш. *Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп.*. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. 573 с.

14. Shevtsov B., Sheremetyeva O. Fractional models of seismoacoustic and electromagnetic activity, *E3S Web Conf.*, 2017. vol. 20, no. 02013, pp. 1–8 DOI: 10.1051/e3sconf/20172002013.

15. Sheremetyeva O., Shevtsov B. Fractional Model of the Deformation Process, *Fractal Fract.*, 2022. vol. 6, no. 372, pp. 1–12 DOI: 10.3390/fractalfract6070372.

Информация об авторах



Шереметьева Ольга Владимировна✉ – кандидат технических наук, научный сотрудник лаборатории моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия, ORCID 0000-0001-9417-9731.



Шевцов Борис Михайлович✉ – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории электромагнитных излучений, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, Паратунка, Россия, ORCID 0000-0003-0625-0361.

References

[1] Shevtsov B., Sheremetyeva O. Fractional Criticality Theory and Its Application in Seismology, Fractal Fract., 2023, vol. 7, no. 890, pp. 1–12. DOI: 10.3390/fractalfract7120890

[2] Shevtsov B., Sheremetyeva O. Power-Law Compound and Fractional Poisson Process in the Theory of Anomalous Phenomena. In: Dmitriev A., Lichtenberger J., Mandrikova O., Nahayo E. (eds) Solar-Terrestrial Relations and Physics of Earthquake Precursors. STRPEP 2023. Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. Springer, Cham, 2023, pp. 266–275. DOI: 10.1007/978-3-031-50248-4_27

[3] Janossy L., Renyi A., Aczel J. On composed Poisson distributions, I. Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1950, no. 1, pp. 209–224.

[4] Adelson R. M. Compound Poisson distributions, Oper. Res. Quart., 1966, vol. 17, pp. 73–75.

[5] Antonio Di Crescenzo, Barbara Martinucci, Alessandra Meoli A fractional counting process and its connection with the Poisson process, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., 2016, no. 13, pp. 291–307. DOI: 10.30757/ALEA.v13-12

[6] Beghin L., Macci C. Multivariate fractional Poisson processes and compound sums, Adv. in Appl. Probab., 2016, vol. 48, no. 3. DOI: 10.1017/apr.2016.23 author

[7] Kataria K. K., Khandakar M. Convoluted Fractional Poisson Process, ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat., 2021, no. 18, pp. 1241–1265. DOI: 10.30757/ALEA.v18-46

[8] Khandakar M., Kataria K. K. Some Compound Fractional Poisson Processes, Fractal Fract., 2023, vol. 7, no. 15. http://doi.org/10.3390/fractalfract7010015.

[9] Gutenberg B., Richter C. F. Frequency of Earthquakes in California, Bulletin of the Seismological Society of America, 1944, vol. 34, pp. 185–188.

[10] Kanamori Hiroo The Energy Release in Great Earthquakes, J. of Geophysical Research, 1977, vol. 82, no. 20, pp. 2981–2987.

[11] The Geophysical Service of the Russian Academy of Sciences. Available online: http://www.gsras.ru/new/eng/catalog/

[12] Gmurman N. Sh. Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika: Ucheb. posobie dlya vuzov. – 9-e izd., ster [Probability theory and mathematical statistics: Textbook for universities]. M.: Vy'ssh. shk., 2003, 479pp. (In Russian).

[13] Kremer N. SH. Teoriya veroyatnostej i matematicheskaya statistika: Uchebnik dlya vuzov [Probability theory and mathematical statistics: Textbook for universities]. M.: YUNITI-DANA, 2004, 573pp. (In Russian).

[14] Shevtsov B., Sheremetyeva O. Fractional models of seismoacoustic and electromagnetic activity, E3S Web Conf., 2017, vol. 20, no. 02013, pp. 1–8. DOI: 10.1051/e3sconf/20172002013

[15] Sheremetyeva O., Shevtsov B. Fractional Model of the Deformation Process, Fractal Fract., 2022, vol. 6, no. 372, pp. 1–12. DOI: 10.3390/fractalfract6070372

Information about authors



Sheremetyeva Olga Vladimirovna – PhD (Tech.), Research Scientist, Laboratory of Physical Process Modeling, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Kamchatka, Russia, ORCID 0000-0001-9417-9731.



Shevtsov Boris Mikhaylovich – D. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Chief Scientific Officer, Laboratory of Electromagnetic Radiation, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, Paratunka, Kamchatka, Russia, ORCID 0000-0003-0625-0361.

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 46. №1. С. 103 - 117. ISSN 2079-6641

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-103-117

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 519.642.2, 519.687.1

Применение высокопроизводительных вычислений для решения задачи Коши с дробным уравнением Риккати по нелокальной неявной конечно-разностной схеме

Д. А. Твёрдый, Р. И. Паровик*

Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, с. Паратунка, ул. Мирная, д. 7., Россия

Аннотация. В статье представлено исследование вычислительной эффективности параллельной версии численного алгоритма для решения уравнения Риккати с производной дробного перменного порядка типа Герасимова-Капуто. Численный алгоритм представляет собой нелокальную неявную конечно-разностную схему, которая сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений и решается с помощью модифицированного метода Ньютона. Нелокальность численной схемы создает высокую вычислительную нагрузку на вычислительные ресурсы, из-за чего возникает необходимость в реализации эффективных параллельных алгоритмов их решения. Исследуемый на эффективность численный алгоритм реализован на языке C из-за его универсальности при работе с памятью. Распараллеливание проводилось с помощью технологии OpenMP. Проводится серия вычислительных экспериментов на вычислительном сервере NVIDIA DGX STATION (Институт математики имени В.И. Романовского, г. Ташкент, Узбекистан) и ноутбуке HP Pavilion Gaming Laptop Z270X, где решалась задача Коши для дробного уравнения Риккати с непостоянными коэффициентами. На основе среднего времени вычисления вычисляются: ускорение, эффективность и стоимость алгоритма. Из анализа данных видно, что OpenMP параллельная программная реализация нелокальной неявной конечно-разностной схемы показывает ускорение работы от 9-12 раз в зависимости от количества задействованных ядер CPU.

Ключевые слова: параллельные вычисления, OpenMP, неявные конечно-разностные схемы, метод Ньютона, дробные производные, эффект памяти, нелокальность, нелинейность

Получение: 18.01.2024; Исправление: 18.02.2024; Принятие: 07.03.2024; Публикация онлайн: 07.03.2024

Для цитирования. Твёрдый Д. А., Паровик Р. И. Применение высокопроизводительных вычислений для решения задачи Коши с дробным уравнением Риккати по нелокальной неявной конечно-разностной схеме // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 46. № 1. С. 103-117. EDN: GNJWJM. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-103-117.

Финансирование. Исследования выполнены в рамках гранта РНФ № 22-11-00064 по теме «Моделирование динамических процессов в геосферах с учетом наследственности»(https://rscf.ru/project/22-11-00064/).

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: romanparovik@gmail.com

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Твёрдый Д. А., Паровик Р. И., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2024. vol. 46. no. 1. P. 103 - 117. ISSN 2079-6641

INFORMATION AND COMPUTATION TECHNOLOGIES

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-103-117

Research Article

Full text in Russian

MSC 34A08, 65Y05, 65M06

Application of High-Performance Computing to Solve the Cauchy problem with the Fractional Riccati Equation Using an Nonlocal Implicit Finite-Difference Scheme

D. A. Tverdyi, R. I. Parovik*

Institute for Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS, 684034, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

Abstract. The article presents a study of the computational efficiency of a parallel version of a numerical algorithm for solving the Riccati equation with a fractional variable order derivative of the Gerasimov-Caputo type. The numerical algorithm is a nonlocal implicit finite-difference scheme, which reduces to a system of nonlinear algebraic equations and is solved using a modified Newton method. The nonlocality of the numerical scheme creates a high computational load on computing resources, which creates the need to implement efficient parallel algorithms for solving them. The numerical algorithm studied for efficiency is implemented in the C language due to its versatility when working with memory. Parallelization was carried out using OpenMP technology. A series of computational experiments are being carried out on the NVIDIA DGX STATION computing server (Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky, Tashkent, Uzbekistan) and the HP Pavilion Gaming Laptop Z270X, where the Cauchy problem for the fractional Riccati equation with non-constant coefficients was solved. Based on the average computation time, the speedup, efficiency and cost of the algorithm are calculated. From the data analysis it is clear that the OpenMP parallel software implementation of the non-local implicit finite-difference scheme shows an acceleration of 9-12 times, depending on the number of CPU cores involved.

Keywords: parallel computing, OpenMP, implicit finite difference schemes, Newton's method, fractional derivatives, memory effect, non-locality, non-linearity

Received: 18.01.2024; Revised: 18.02.2024; Accepted: 07.03.2024; First online: 07.03.2024

For citation. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Application of high-performance computing to solve the Cauchy problem with the fractional Riccati equation using an nonlocal implicit finite-difference scheme. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **46**: 1, 103-117. EDN: GNJWJM. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-103-117.

Funding. The research was carried out within the framework of the RSF grant № 22-11-00064 on the topic "Modelling of dynamic processes in geospheres taking into account heredity"(https://rscf.ru/project/22-11-00064/).

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: romanparovik@gmail.com

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Tverdyi D. A., Parovik R. I., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)

Введение

Численное решение уравнений при математическом моделировании динамических процессов может создавать высокую вычислительную нагрузку на узлы ЭВМ. В частности при решении задач возникающих в дробной динамике может возникать нелокальность и даже переменная нелокальность т.е. зависимостью текущего значения решения от конечного числа предыдущих на временном отрезке. Данное явление называют эффектом памяти [1–3]. Что будет серьезно замедлять вычисления, так как для его корректного обсчета в алгоритме могут возникать строго последовательные участки, которые нельзя распараллелить. Определение и математическое описание эффекта памяти, также эквиваленитное понятиям: эредитарности, запаздывания, наследственности, было дано В. Вольтерра в 1912 г. [4]. Память с точки зрения математики, может описываться с помощью дробной производной. На сегодняшний день существуют самые разные определения понятия оператора дробного дифференцирования: Лиувилля, Римана-Лиувилля, Вейля, Грюнвальда-Летникова и многие другие. Причём для некоторых из них существуют ещё большие обобщения на случай VO (variable order) порядка [5, 6], что в свою очередь приводит к переменной нелокальности. Обобщение известных и разработка новых математических моделей с учетом эредитарности позволяет заметно уточнить известные результаты [7, 8]. На сегодняшний день уже во многих областях науки и техники успешно применяются производные и интегралы нецелых порядков [9, 10].

Так например, в данном исследовании рассматривается прямая задача Коши для нелинейного дробного уравнения Риккати с непостоянными коэффициентами, которая разрешается численно с помощью методов конечно-разностных схем [11]. Память описывается с помощью оператора дробной производной типа Герасимова-Капуто переменного порядка по времени. Такие модели еще называют нелокальными по времени [12]. Одним из способов решения является нелокальная явная конечно-разностная схема (EFDS). И с помощью технологий OpenMP удалось уменьшить в 3-5 раз время вычисления по EFDS [13]. Другой способ заключается в использовании неявных конечно-разностно схем (IFDS) и методов их решения [11].

В данной работе представлен анализ эффективности параллельной программной реализации решения IFDS методом Ньютона, с использованием программно-аппаратной архитектуры OpenMP – открытого стандарта программного интерфейса для параллельных систем с общей памятью [15]. OpenMP является набором директив для компиляторов, библиотек функций и переменных окружения, и реализует параллельные вычисления с помощью идеи многопоточности – нескольких параллельно выполняемых задач CPU потоках. В качестве основного языка программирования использован язык высокого уровня C, из-за его универсальности, широкими возможностями по работе с памятью и официальной поддержке работы с OpenMP [16]. Анализ проводится на основе данных полученных в результате серии вычислительных экспериментов с использованием разработанного программного кода. Вычисления проводились

на вычислительном сервере NVIDIA DGX STATION, расположенном в институте математики имени В.И. Романовского АН РУз, а также персональном ноутбуке.

План исследования статьи следующий: Сначала представляется математическое описание задачи. Дается определение дробной производной типа Герасимова-Капуто переменного порядка и приводится задача Коши для дробного уравнения Риккати; Далее описывается нелокальная неявная конечно-разностная схема (IFDS), на примере дробного уравнения Риккати. Приводится метод Ньютона для решения IFDS и критерий сходимости метода; Даются определения понятий необходимых для анализа. Приводятся в графиках и таблицах результаты анализа эффективности параллельной OpenMP реализации IFDS на основе данных серии вычислений, в сравнении с лучшей последовательной реализацией IFDS.

Постановка задачи

Вопросами о возможности обобщения операций интегрирования и взятия производной нецелого порядка задавались ещё Г. Лейбниц, Г. Лопиталь и Я. Бернули в конце 17 века. В частности, их интересовал вопрос о смысле и значении теоремы о дифференцировании произведения двух функций $d^p f(x)/dx^p$, при нецелом p значении. Тема активно развивается, с тех пор и по наши дни. К настоящему моменту, существует не один десяток определений дробного дифференцирования, имеющих тот или иной смысл, и находящих свое примирение. Например, Лиувилля, Римана-Лиувилля, Вейля, Грюнвальда-Летникова и многие другие. Причем для некоторых из них существуют обобщения на случай VO (переменного) порядка [5, 6]. Можно отметить труд Самко С., Килбаса А., Маричева О. от 1987 года «Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения» [17], который подводит итоги исследования данного направления математики за последние 300 лет, и позволяет ознакомится с историей возникновения дробно-дифференциального исчисления.

В этом разделе мы рассмотрим постановку задачи Коши, численные способы решения которой, были ранее подробно изучены автором в работах [11, 18, 19]. Отметим, что дробное исчисление тесно взаимосвязано с понятием наследственности или памяти, рассматриваемой системы, когда текущее ее состояние зависит от конечного числа предыдущих состояний.

Определение 1. Дробной производной типа Герасимова-Капуто [11] где $0 < \alpha(t) < 1$ – переменный порядок дробной производной, а функция $u(t) \in C[0,T]$ будем называть дробную производную вида:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\sigma) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_0^t \frac{\dot{u}(\sigma)}{(t-\sigma)^{\alpha(t)}} d\sigma, \tag{1}$$

где производная $\dot{u}(t) = \frac{du}{dt}$, а $t \in [0,T]$ – текущее время моделирования, $T > 0$ – общее время моделирования, а $\Gamma(.)$ – гамма-функция Эйлера.

Данное обобщение (1) на случай $\alpha(t)$ известной дробной производной Герасимова-Капуто [21, 22] проведено авторами в работе [11]. Согласно [3] можно обобщить (1) на случай $n < \alpha(t) < n + 1$.

Рассмотрим задачу Коши [11] для квадратично нелинейного уравнения Риккати с дробной производной переменного порядка [23]:

$$\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\sigma) - b(t)u(t) = -a(t)u(t)^2 + c(t), \qquad u(0) = u_0, \tag{2}$$

где $\partial_{0t}^{\alpha(t)} u(\sigma)$ – оператор VO вида (1); $T > 0$ – время моделирования; $t \in [0, T]$ – текущее время моделирования; $u(t) \in C^2[0, T]$ – неизвестная функция решения; $a(t)$, $b(t)$, $c(t) \in C[0, T]$ – заданные функции, определяющие значения коэффициентов в каждый момент времени.

Замечание 1. В работе [11] рассмотрено уравнение (2) с более общей правой частью $-a(t)u(t)^2 + c(t) = f(u(t), t)$. Такая задача уже не обязательно представляет уравнение Риккати, и может описывать широкий класс динамических процессов с переменной памятью в насыщенных средах [3]. Это результат использовался нами в работах [19, 24, 25] при математическом моделировании процессов объёмной активности радона (RVA), где каждый член (2) будет иметь конкретный физический смысл.

Схема численного решения

Решение задачи (2) будет будет даваться с помощью теории конечно-разностных схем [11, 18, 20]. Самое сложное в переходе от дробного уравнения в (2) к его дискретному представлению. В работе [11, p.7] нами предложен несколько вариантов такого перехода для VO Герасимова-Капуто (1) при $t \in [t_i, t_{i+1}]$, в том числе для случая, когда в (1) подразумевается, что интегрирование производится слева.

Определение 2. Нелокальная неявная конечно-разностная схема (IFDS) (от англ. Implicite Finite-Difference Sheme) примет вид:

$$\begin{gathered} A_i \sum_{j=0}^{i-1} w_j^i \left(u_{i-j} - u_{i-j-1}\right) + a_i u_i^2 - b_i u_i - c_i = 0, \\ A_i = \frac{h^{-\alpha_i}}{\Gamma(2-\alpha_i)}, \qquad w_j^i = (j+1)^{1-\alpha_i} - j^{1-\alpha_i}, \\ i = 1, ..., N, \qquad u_0 = C, \end{gathered} \tag{3}$$

где $u_0 = C$ – начальное условие задачи Коши (2); C – известная константа; $h = T/N$ – шаг дискретизации равномерной сетки; N – число узлов сетки; $i = 2, ..., N - 1$ – номер узла вычислительной сетки; a_i, b_i, c_i – сеточные аналоги функций коэффициентов задачи Коши.

Достоверность вычислений с применением (3) обоснована использованием теории дробного исчисления, методов вычислительной математики, функционального анализа, а также строгостью математических рассуждений.

Отметим, что в работе (см. [11, p.7-10]) сформулированы и доказаны ряд ключевые теоремы о сходимости и устойчивости численной схемы IFDS, но в более общем случае при $-a(t)u(t)^2 + c(t) = f(u(t), t)$.

IFDS (3) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений, которую будем решать модифицированным методом Ньютона (MNM) (от англ. Modification Newton Method). Метод начинается с представления схемы (3) как итерационной функции:

$$F(u_i) = A_i \sum_{j=0}^{i-1} w_j^i \left(u_{i-j} - u_{i-j-1}\right) + a_i u_i^2 - b_i u_i - c_i, \tag{4}$$

для которой составляется итерационный процесс:

$$U^{m+1} = U^m - \frac{F\left(U^m\right)}{J\left(U^m\right)}, \tag{5}$$

где

- m – номер (или шаг) итерационного процесса;
- $U^m = (u_1^m, ..., u_N^m)^T$ – вектор значений функции решения во всех узлах сетки $i = 1..N$ известного на итерационном m (текущем) шаге;
- $F\left(U^m\right) = \left(f_1\left(u_1^m\right), ..., f_N\left(u_N^m\right)\right)$ – значения вычисляемые по (4) с учетом значений U^m решения на m шаге;
- U^0 – начальное приближение на самом первом шаге $m = 0$, вектор необходимый для старта (5) процесса. Некое предполагаемое решение (3) на первом шаге;
- $J\left(U^m\right) = \left(J_{ij}\right), i = 1, ..., N, j = 1, ..., N$ – якобиан представляет собой нижнетреугольную матрицу вида:

$$J_{ij} = \begin{cases} 0, j \geq i + 1, \\ A_i - b_i + 2a_i u_i, j = i, \\ A_i\left(\omega_{i-j}^i - \omega_{i-j-1}^i\right), j \leq i - 1. \end{cases} \tag{6}$$

  на каждой m итерации цикла.

Замечание 2. Итерационный процесс (5) не сработает, если будет иметь место сингулярность в нуле (точка, где функция не определёна или нестабильна) для итерационной функции (4).

Что касается сходимости, то стоит отметить что:

$$\left|J\left(U^0\right)\right| = \prod_{i=1}^{N}\left(A_i\omega_1^i - b_i + 2a_i u_i^0\right) \neq 0.$$

т.е. определитель у матрицы Якоби (6) должен быть отличен от нуля, потому что только тогда для якобиана $J\left(U^0\right)$ существует обратная матрица $J\left(U^0\right)^{-1}$, т.е.

матрица Якоби (6) – невырожденная. И только в таком случае итерационный процесс (5) будет локально сходится порядком $O(h)$.

В качестве начального приближения U^0, в самом простом случае, можно взять вектор составленный из значений u_0 – начального условия задачи Коши (3). Однако лучше будет использовать последнее значение u_{N-1} вычисленное, например, другим методом (схемой EFDS) [13, 14], как на рисунке 1, при условии её сходимости [11]. Это немного ускорит сходимость MNM, а также решит вопрос с сингулярностью, т.к. функция в точке u_{N-1} будет определена, и сама по себе является некоторым возмущением.

Определение 3. Итерационный процесс (5) продолжается до тех пор пока не будет достигнута заданная точность решения, характеризуемая ε. Критерием выхода из цикла будет G наименьшая ошибка, полученного решения, такая что $G \leq \varepsilon$.

Анализ вычислительной эффективности

Отметим, что в рамках анализа вычислительной эффективноси использовались следующие вычислительные системы. Вычислительный сервер NVIDIA DGX STATION с характеристиками: CPU: Intel(R) Xeon(R) CPU E5-2698 v4 @ 2.20GHz(~1.20GHz) (20 CPUs, 40 Threads); RAM: 263855 Mb. Вычислительный сервер находится в Институте математики имени В.И. Романовского АН Уз, (г. Ташкент, Узбекистан). Также в экспериментах использовался ноутбук HP Pavilion Gaming Laptop Z270X 15-dk0xxx с характеристиками: CPU: Intel(R) Core(TM) i5-9300H CPU @ 2.40GHz (4 CPUs, 8 Threads); RAM: 8192 Mb.

Анализ вычислительной эффективности будем проводить на основе данных по замерам времени вычисления, полученным при множестве запусков исследуемых на эффективность алгоритмов. Из леммы Брента [15, 26, 27] следует что любой алгоритм реализованный для выполнения в системах типа PRAM можно модифицировать таким образом, что его можно выполнить в системах PRAM с меньшим числом потоков. Здесь PRAM – параллельная машина с произвольным доступом к памяти, объединяющая c потоков (ядер или CPU), общую память и устройство управления. Это одна из самых распространенных моделей вычислительных систем [15]. Из данной леммы следует, что мы можем сравнивать время вычисления (5) на системах с: одним ядром CPU (последовательный алгоритм) и разным количеством ядер (параллельный алгоритм).

Для замеров времени вычисления рассмотрим тестовый пример, на основе модели (2) со следующими параметрами: $\alpha(t) = 0.9 - \frac{0.1t}{T}$; $a(t) = \frac{\cos^2(t)}{T}$; $b(t) = 1 - \frac{0.1t}{T}$; $c(t) = \frac{\sin^2(t)}{T}$; $N = 2000$; $T = 20$. Результат вычисления по которому представлен на рисунке 1 ниже:

Исследуем, насколько быстрее выполняются алгоритмы реализующие итерационный процесс (5), для чего обратимся к таким понятиям как среднее время работы, ускорение, эффективность и стоимость алгоритма.

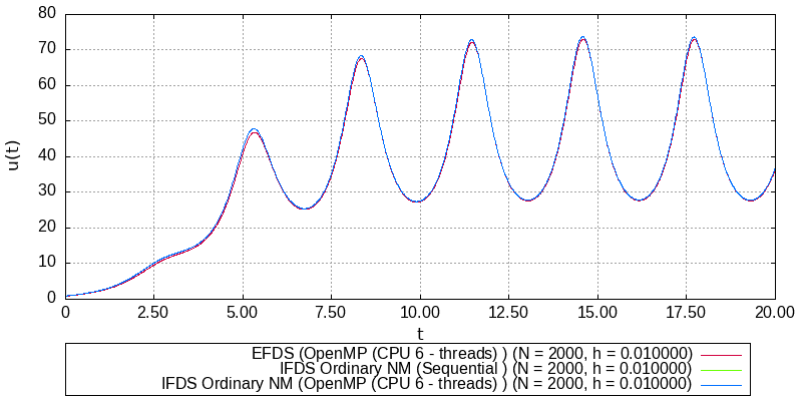


Рис. 1. Результат вычисления итерационной процедуры MNM (5) для IFDS различными алгоритмами

[Figure 1. Calculation result of iterative procedure MNM (5) for IFDS by different algorithms]

В силу того, что мы будем получать немного различные T_c при каждом новом численном эксперименте, а количество экспериментов конечно, то T_c можно считать случайной величиной с некоторой функцией распределения. Тогда для вычисления $T_1(N)$ и $T_c(N)$ прибегнем к понятию математического ожидания (среднее значение) [28] для дискретной случайной величины:

$$\mathbb{E}(T_c(N)) = \sum_{i=1}^{L} \frac{T_c^i(N)}{L}, \tag{7}$$

где i – индекс эксперимента; L – объем выборки.

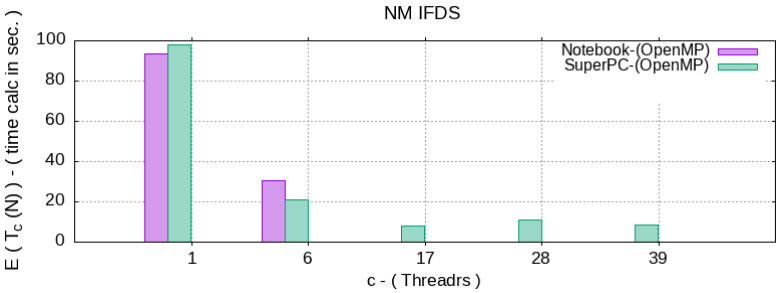


Рис. 2. Среднее $\mathbb{E}(\cdot)$ время расчёта в секундах, при разном c – числе потоков CPU

[Figure 2. Average $\mathbb{E}(\cdot)$ calculation time in seconds for different c – number of CPU threads]

Далее в таблице представим данные по $\mathbb{E}(\cdot)$ среднее (7) из выборки в $L = 10$ значений при разном количестве задействованных c потоков CPU, где:

- пусть $N = 2000$ – число узлов расчётной сетки для (3), характеризует сложность алгоритма;

- $T_1(N)$ – время вычислений по задаче сложностью N последовательным (Sequential) алгоритмом;
- $T_c(N)$ – время вычислений по задаче сложностью N параллельным OpenMP алгоритмом, на машине $c > 1$ потоками CPU;

Таблица 1

Затраченные время T (сек.) и память RAM (Mb) для расчёта итерационной процедуры MNM (5) для IFDS (3) алгоритмом на основе OpenMP [Time spent T (sec.) and RAM memory (Mb) for calculating the iterative procedure MNM (5) for IFDS (3) by an algorithm based on OpenMP.]

IFDS	Notebook		Super PC				
i	$T_1(N)$	$T_6(N)$	$T_1(N)$	$T_6(N)$	$T_{17}(N)$	$T_{28}(N)$	$T_{39}(N)$
1	96.74	30.06	98.2	21.32	7,86	11.06	8.3
2	88.58	30.28	97.24	21.26	8.0	10.86	8.3
3	94.07	29.09	98.02	21.37	7.86	10.78	7.46
4	97.04	30.67	97.71	21.2	7.9	11.02	8.37
5	91.13	30.25	97.38	20.86	8.19	10.93	8.35
6	95.19	30.74	99.20	20.94	7.96	10.86	8.49
7	93.50	30.74	96.96	21.0	7.99	10.91	8.5
8	93.73	30.91	97.1	21.04	7.87	10.78	8.39
9	92.35	29.89	97.5	21.84	8.05	10.88	8.3
10	93.00	30.71	98.54	20.81	7.93	10.83	8.4
$\mathbb{E}(T)$	93.53	30.34	97.78	21.16	7.961	10.89	8.286
RAM	24.08						

Теперь с использованием данных о времени потраченного на выполнение кода мы можем исследовать эффективность параллельного алгоритма. Под эффективностью понимается оптимальное соотношение в координатах: ускорение вычислений – объём занимаемой RAM памяти, по сравнению с последовательной версией алгоритма. Ускорение определяется формулой:

$$A_c(N) = \frac{\mathbb{E}\left(T_1(N)\right)}{\mathbb{E}\left(T_c(N)\right)}, \tag{8}$$

На основе которой можно определить эффективность от распараллеливания:

$$V_c(N) = \frac{\mathbb{E}\left(T_1(N)\right)}{c \cdot \mathbb{E}\left(T_c(N)\right)} = \frac{A_c(N)}{c}. \tag{9}$$

Результаты вычисления по формулам (8) и (9) представлены на рис. 3 и рис. 4 соответственно:

Стоимостно–оптимальный показатель $CO_c(N)$ на рис. 5, можно определить как произведение количества используемых потоков и $T_c(N)$ времени

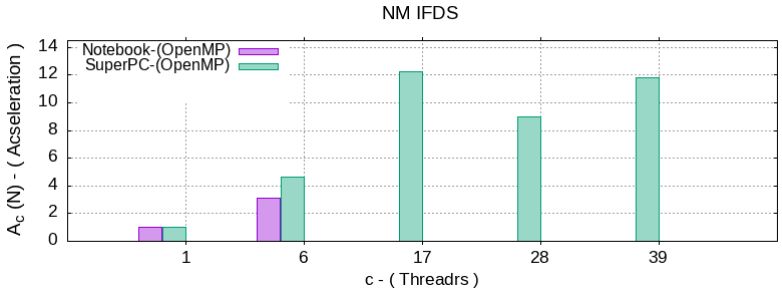


Рис. 3. Ускорение $A_c(N)$ при разном c – числе потоков CPU
[Figure 3. Acceleration $A_c(N)$ at different c – number of CPU threads]

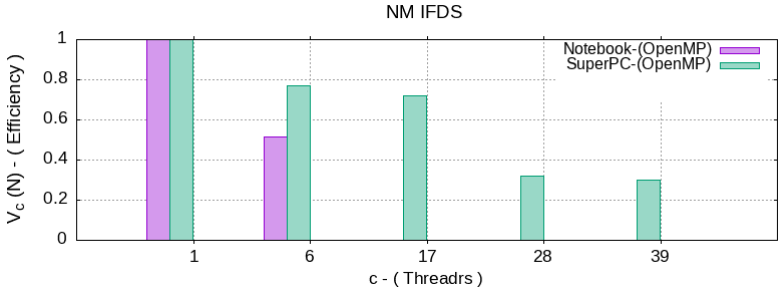


Рис. 4. Эффективность $V_c(N)$ при разном c – числе потоков CPU
[Figure 4. Efficiency $V_c(N)$ at different c – number of CPU threads]

решения параллельном алгоритмом, пропорциональной сложности наилучшего последовательного алгоритма. Данный показатель определяется формулой:

$$CO_c(N) = \frac{\mathbb{E}(T_c(N)) \cdot c}{\mathbb{E}(T_1(N))}.$$

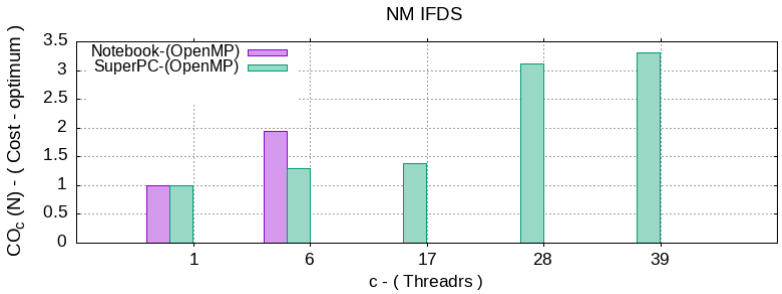


Рис. 5. Стоимостно–оптимальный показатель $CO_c(N)$ при разном c – числе потоков CPU
[Figure 5. Cost-optimal $CO_c(N)$ for different c – number of CPU threads]

Заключение

Из результатов анализа эффективности параллельного OpenMP алгоритма IFDS видно, что имеет место существенный прирост скорости вычисления, но при увеличении числа потоков для параллельной обработки, их эффективность заметно снижается. При одинаковых параметрах численного эксперимента обе вычислительные системы выдают искомый результат за приблизительно равное время вычисления. Однако наибольшая эффективность достигается при использовании 10-15 потоков. Из анализа данных видно, что OpenMP параллельная программная реализация IFDS показывает ускорение работы от 9 - 12 раз в зависимости от количества задействованных ядер CPU.

Благодарности

Авторы выражают особую благодарность д.ф.-м.н., проф., *Хайтову Абдулло Рахмоновичу* за оказанную помощь при организации стажировки в Институте математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан.

Авторы выражают особую благодарность к.ф.-м.н., *Болтаеву Азизу Кузиевичу* за оказанную помощь при организации работ на вычислительном сервере NVIDIA DGX STATION в Институте математики им. В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан.

Аббревиатуры

CPU	Central Processing Unit
OpenMP	Open Multi-Processing
GPU	Graphics Processing Unit
CUDA	Compute Unified Device Architecture
EFDS	Explicit Finite-difference Method
IFDS	Implicit Finite-difference Method
RVA	Radon Volumetric Activity
NM	Newton Method
RAM	Random Access Memory
PC	Personal Computer
PRAM	Parallel Random Access Machine

Список литературы

1. Uchaikin V. V. *Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. I. Background and Theory*. Berlin: Springer, 2013. 373 pp. ISBN 978-3-642-33911-0 DOI: 10.1007/978-3-642-33911-0.
2. Нахушев А. М. *Дробное исчисление и его применение*. Москва: Физматлит, 2003. 272 с. ISBN 5-9221-0440-3.
3. Parovik R. I. Mathematical models of oscillators with memory, *Oscillators-Recent Developments*, 2019, pp. 3–21 DOI: 10.5772/intechopen.81858.
4. Volterra V. Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications, *Acta Mathematica*, 1912. vol. 35, no. 1, pp. 295–356 DOI: 10.1007/BF02418820.

5. Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: a review, *Proceedings of the Royal Society A*, 2020. vol. 476, no. 2234, pp. 20190498 DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.
6. Ortigueira M. D., Valerio D., Machado J. T. Variable order fractional systems, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2019. vol. 71, pp. 231–243 DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.12.003.
7. Petras I. *Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation*. Berlin, Germany: Beijing and Springer-Verlag, 2011. 218 pp. ISBN 9783642181009.
8. Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W. A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2019. vol. 22, no. 1, pp. 27–59 DOI: 10.1515/fca-2019-0003.
9. Rossikhin Y. A., Shitikova M. V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results, *Applied Mechanics Reviews*, 2010. vol. 63, no. 1, pp. 1–5 DOI: 10.1115/1.4000563.
10. Mainardi F. *Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelastisity: An Introduction to Mathematical Models. 2nd edition*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2022. 625 pp. ISBN 1783263989 DOI: 10.1142/p926.
11. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation, *Fractal and Fractional*, 2022. vol. 6, no. 1:23, pp. 1–27 DOI: 10.3390/fractalfract6010023.
12. Volterra V. *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. New York: Dover publications, 1959. 226 pp.
13. Tverdyi D. A., Parovik R. I., Hayotov A. R., Boltaev A. K. Parallelization of a Numerical Algorithm for Solving the Cauchy Problem for a Nonlinear Differential Equation of Fractional Variable Order Using OpenMP Technology, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, 2023. vol. 43, no. 2, pp. 87–110 DOI: 10.26117/2079-6641-2023-43-2-87-11.
14. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Hybrid GPU-CPU efficient implementation of a parallel numerical algorithm for solving the Cauchy problem for a nonlinear differential Riccati equation of fractional variable order, *Mathematics*, 2023. vol. 11, no. 15:3358, pp. 1–21 DOI: 10.3390/math11153358.
15. Борзунов С. В., Кургалин С. Д., Флегель А. В. *Практикум по параллельному программированию: учебное пособие*. Санкт-Петербург: БХВ, 2017. 236 с. ISBN 978-5-9909805-0-1.
16. Калиткин Н. Н. *Численные методы. 2-е изд.*. Санкт–Петербург: БХВ, 2011. 592 с. ISBN 978-5-9775-0500-0.
17. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
18. Parovik R. I. Tverdyi D. A. Some Aspects of Numerical Analysis for a Model Nonlinear Fractional Variable Order Equation, *Mathematical and Computational Applications*, 2021. vol. 26, no. 3, pp. 55 DOI: 10.3390/mca26030055.
19. Tverdyi D. A., Parovik R. I. Application of the Fractional Riccati Equation for Mathematical Modeling of Dynamic Processes with Saturation and Memory Effect, *Fractal and Fractional*, 2022. vol. 6, no. 3:163, pp. 1–35 DOI: 10.3390/fractalfract6030163.
20. Parovik, R. I. On a Finite-Difference Scheme for an Hereditary Oscillatory Equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2021. vol. 253, no. 4, pp. 547-557 DOI: 10.1007/s10958-021-05252-2.
21. Gerasimov A. N. Generalization of linear deformation laws and their application to internal friction problems, *Applied Mathematics and Mechanics*, 1948. vol. 12, pp. 529–539.
22. Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II, *Geophysical Journal International*, 1967. vol. 13, no. 5, pp. 529–539 DOI: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x.
23. Jeng S., Kilicman A. Fractional Riccati Equation and Its Applications to Rough Heston Model Using Numerical Methods, *Symmetry*, 2020. vol. 12, pp. 1–20 DOI: 10.3390/sym12060959.
24. Tverdyi D. A., Parovik R. I., Makarov E. O., Firstov P. P. Research of the process of radon accumulation in the accumulating chamber taking into account the nonlinearity of its entrance, *E3S Web Conference*, 2020. vol. 196, no. 02027, pp. 1–6 DOI: 10.1051/e3sconf/202019602027.
25. Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber, *Mathematics*, 2023. vol. 11, no. 4:850, pp. 1–20 DOI: 10.3390/math11040850.

26. Brent R. P. The parallel evaluation of general arithmetic expressions, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 1974. vol. 21, no. 2, pp. 201–206 DOI: 10.1145/321812.321815.

27. Corman T. H., Leiserson C. E., Rivet R. L., Stein C. *Introduction to Algorithms, 3rd Edition.* Cambridge: The MIT Press, 2009. 1292 pp. ISBN 978-0262033848.

28. Shao J. *Mathematical Statistics. 2-ed.* New York: Springer, 2003. 592 pp. ISBN 978-0-387-95382-3.

Информация об авторах



Твёрдый Дмитрий Александрович – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории элетромагнитных излучений, Институт космофизических исследований ираспространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия, ORCID 0000-0001-6983-5258.



Паровик Роман Иванович – доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории моделировании физических процессов, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, с. Паратунка, Россия, ORCID 0000-0002-1576-1860.

References

[1] Uchaikin V. V. Fractional Derivatives for Physicists and Engineers. Vol. I. Background and Theory. Berlin, Springer, 2013, 373 pp., isbn: 978-3-642-33911-0. DOI: 10.1007/978-3-642-33911-0.

[2] Nahushev A. M. Drobnoe ischislenie i ego primenenie [Fractional calculus and its application]. Moscow, Fizmatlit, 2003, 272 pp., isbn: 5-9221-0440-3 (In Russian)

[3] Parovik R. I. Mathematical models of oscillators with memory, Oscillators-Recent Developments, 2019, pp. 3–21. DOI: 10.5772/intechopen.81858.

[4] Volterra V. Sur les équations intégro-différentielles et leurs applications, Acta Mathematica, 1912, vol. 35, no. 1, pp. 295–356. DOI: 10.1007/BF02418820.

[5] Patnaik S., Hollkamp J. P., Semperlotti F. Applications of variable-order fractional operators: a review, Proceedings of the Royal Society A, 2020, vol. 476, no. 2234, pp. 20190498. DOI: 10.1098/rspa.2019.0498.

[6] Ortigueira M. D., Valerio D., Machado J. T. Variable order fractional systems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019, vol. 71, pp. 231–243. DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.12.003.

[7] Petras I. Fractional-order nonlinear systems: modeling, analysis and simulation. Berlin, Germany, Beijing and Springer-Verlag, 2011, 218 pp., isbn: 9783642181009.

[8] Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W. A review on variable-order fractional differential equations: mathematical foundations, physical models, numerical methods and applications, Fractional Calculus and Applied Analysis, 2019, vol. 22, no. 1, pp. 27–59. DOI: 10.1515/fca-2019-0003.

[9] Rossikhin Y. A., Shitikova M. V., Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results, Applied Mechanics Reviews, 2010, vol. 63, no. 1, pp. 1–5. DOI: 10.1115/1.4000563.

[10] Mainardi F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelastisity: An Introduction to Mathematical Models. 2nd edition. Singapore, World Scientific Publishing Company, 2022, 625 pp., isbn: 1783263989. DOI: 10.1142/p926.

[11] Tverdyi D. A., Parovik R. I. Investigation of Finite-Difference Schemes for the Numerical Solution of a Fractional Nonlinear Equation, Fractal and Fractional, 2022, vol. 6, no. 1:23, pp. 1–27. DOI: 10.3390/fractalfract6010023.

[12] Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations: [Unabridged republication of the first English translation]. New York, Dover publications, 1959, 226 pp.

[13] Tverdyi D. A., Parovik R. I., Hayotov A. R., Boltaev A. K. Parallelization of a Numerical Algorithm for Solving the Cauchy Problem for a Nonlinear Differential Equation of Fractional Variable Order Using OpenMP Technology, Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences, 2023, vol. 43, no. 2, pp. 87–110. DOI: 10.26117/2079-6641-2023-43-2-87-11.

[14] Tverdyi D. A., Parovik R. I. Hybrid GPU-CPU efficient implementation of a parallel numerical algorithm for solving the Cauchy problem for a nonlinear differential Riccati equation of fractional variable order, Mathematics, 2023, vol. 11, no. 15:3358, pp. 1–21. DOI: 10.3390/math11153358.

[15] Borzunov S. V., Kurgalin S. D., Flegel A. V. Praktikum po parallel'nomu programmirovaniyu: uchebnoe posobie [Workshop on Parallel Programming: A Study Guide]. Saint Petersburg: BVH, 2017, 236 pp., isbn: 978-5-9909805-0-1 (In Russian)

[16] Kalitkin N. N. Chislennye metody. 2-e izd. [Numerical methods. 2nd ed.]. Saint Petersburg: BVH, 2011, 592 pp., isbn: 978-5-9775-0500-0 (In Russian)

[17] Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya [Fractional integrals and derivatives and some of their applications]. Science and tech: Minsk, 1987, 688 pp.,(In Russian)
[18] Parovik R. I. Tverdyi D. A. Some Aspects of Numerical Analysis for a Model Nonlinear Fractional Variable Order Equation, Mathematical and Computational Applications, 2021, vol. 26, no. 3, pp. 55. DOI: 10.3390/mca26030055.
[19] Tverdyi D. A., Parovik R. I. Application of the Fractional Riccati Equation for Mathematical Modeling of Dynamic Processes with Saturation and Memory Effect, Fractal and Fractional, 2022, vol. 6, no. 3:163, pp. 1–35. DOI: 10.3390/fractalfract6030163.
[20] Parovik R. I. On a Finite-Difference Scheme for an Hereditary Oscillatory Equation. Journal of Mathematical Sciences. 2021. vol. 253. no. 4. p. 547-557 https://doi.org/10.1007/s10958-021-05252-2DOI:10.1007/s10958-021-05252-2.
[21] Gerasimov A. N. Generalization of linear deformation laws and their application to internal friction problems. Applied Mathematics and Mechanics. 1948. vol 12. pp. 529–539(In Russian)
[22] Caputo M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent – II, Geophysical Journal International, 1946, vol. 13, no. 5, pp. 529–539. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1967.tb02303.x3.
[23] Jeng S., Kilicman A. Fractional Riccati Equation and Its Applications to Rough Heston Model Using Numerical Methods, Symmetry, 2020, vol. 12, pp. 1–20. DOI: 10.3390/sym12060959.
[24] Tverdyi D. A., Parovik R. I., Makarov E. O., Firstov P. P. Research of the process of radon accumulation in the accumulating chamber taking into account the nonlinearity of its entrance, E3S Web Conference, 2020, vol. 196, no. 02027, pp. 1–6. DOI: 10.1051/e3sconf/2020196020278.
[25] Tverdyi D. A., Makarov E. O., Parovik R. I. Hereditary Mathematical Model of the Dynamics of Radon Accumulation in the Accumulation Chamber, Mathematics, 2023, vol. 11, no. 4:850, pp. 1–20. DOI: 10.3390/math11040850.
[26] Brent R. P. The parallel evaluation of general arithmetic expressions, Journal of the Association for Computing Machinery, 1974, vol. 21, no. 2, pp. 201–206. DOI: 10.1145/321812.321815.
[27] Corman T. H., Leiserson C. E., Rivet R. L., Stein C. Introduction to Algorithms, 3rd Edition. Cambridge, The MIT Press, 2009, 1292 pp., isbn: 978-0262033848.
[28] Shao J. Mathematical Statistics. 2-ed. New York, Springer, 2003, 592 pp., isbn: 978-0-387-95382-3.

Information about authors



Tverdyi Dmitrii Alexsandrovich – Ph. D. (Phys. & Math.), Researcher, Laboratory of Electromagnetic Radiation, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, FEB RAS, Paratunka, Russia, ORCID 0000-0001-6983-5258.



Parovik Roman Ivanovich – D. Sci. (Phys. & Math.), Associate Professor, Leading Researcher at the Laboratory for Modeling Physical Processes, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, FEB RAS, Paratunka, Russia, ORCID 0000-0002-1576-1860.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2024. vol. 46. no. 1. P. 118 - 133. ISSN 2079-6641

INFORMATION AND COMPUTATION TECHNOLOGIES

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-118-133

Research Article

Full text in English

MSC 65D05, 65L60

Construction of Basis Functions for Finite Element Methods in a Hilbert Space

A. R. Hayotov [*1, 2, 3], ***N. N. Doniyorov*** [*1, 4, 5]

[1] V. I. Romanovskiy Institute of Mathematics, 9, University str., Tashkent, 100174, Uzbekistan
[2] Tashkent State Transport University, Temiryo'lchilar str., Tashkent, 100167, Uzbekistan
[3] Central Asian University, 264, Milliy bog str., Tashkent, 111221, Uzbekistan
[4] National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, 4, University str., Tashkent, 100174, Uzbekistan
[5] Bukhara State University, 11, Muhammad Ikbol str., Bukhara, 200114, Uzbekistan

Abstract. The present work is devoted to construction of the optimal interpolation formula exact for trigonometric functions $\sin(\omega x)$ and $\cos(\omega x)$. Here the analytical representations of the coefficients of the optimal interpolation formula in a certain Hilbert space are obtained using the discrete analogue of the differential operator. Taking the coefficients of the optimal interpolation formula as basis functions, in the finite element methods the boundary value problems for ordinary differential equations of the second order are approximately solved. In particular, it is shown that the coefficients of the optimal interpolation formula can serve as a set of effective basis functions. Approximate solutions of the differential equations are compared using the constructed basis functions and known basis functions. In particular, we have obtained numerical results for the cases when the numbers of basis functions are 6 and 11. In both cases, we have got that the accuracy of the approximate solution to the boundary value problems for second-order ordinary differential equations found using our basis functions is higher than the accuracy of the approximate solution found using known basis functions. It is proven that the accuracy of the approximate solution increases with increasing the number of basis functions.

Key words: basis functions, ordinary differential equation, boundary value problem, finite element method, interpolation.

Received: 03.01.2024; Revised: 25.02.2024; Accepted: 29.02.2024; First online: 07.03.2024

For citation. Hayotov A. R., Doniyorov N. N. Construction of basis functions for finite element methods in a Hilbert space. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **46**: 1, 118-133. EDN: EUIRSM. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-118-133.

Funding. The work was not carried out within the framework of funds

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

*__Correspondence:__ E-mail: hayotov@mail.ru, doniyorovnn@mail.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Hayotov A. R., Doniyorov N. N., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 46. №1. С. 118 - 133. ISSN 2079-6641

ИНФОРМАЦИОННЫЕ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-118-133

Научная статья

Полный текст на английском языке

УДК 519.65

Построение базисных функции в методе конечных элементов в гильбертовом пространстве

***А. Р. Хайотов*[*1,2,3], *Н. Н. Донийоров*[*1,4,5]**

[1] Институт Математики имени В. И. Романовского Академии наук Узбекистана, 100170, г. Ташкент, ул. Мирзо Улугбека 85, Республика Узбекистан

[2] Ташкентский государственный университет путей сообщения, ул. Темирелчилар, г. Ташкент, 100167, Узбекистан

[3] Центрально-Азиатский университет, ул. Миллий бог, 264, г. Ташкент, 111221, Республика Узбекистан

[4] Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека, ул. Университетская, 4., г. Ташкент, 100174, Республика Узбекистан

[5] Бухарский государственный университет, ул. Мухаммада Икбола, 11, г. Бухара, 200114, Республика Узбекистан

Аннотация. Настоящая работа посвящена построению оптимальной интерполяционной формулы, точной для тригонометрических функций $\sin(\omega x)$ и $\cos(\omega x)$. Здесь аналитические представления коэффициентов оптимальной интерполяционной формулы в некотором гильбертовом пространстве получены с использованием дискретного аналога дифференциального оператора. Принимая в качестве базисных функций коэффициенты оптимальной интерполяционной формулы, в методах конечных элементов приближенно решаются краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В частности, показано, что коэффициенты оптимальной интерполяционной формулы могут служить набором эффективных базисных функций. Приближенные решения дифференциальных уравнений сравниваются с использованием построенных базисных функций и известных базисных функций. В частности, мы получили численные результаты для случаев, когда количество базисных функций равно 6 и 11. В обоих случаях мы получили, что точность приближенного решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, найденного с помощью наших базисных функций, выше точности приближенного решения, найденного с использованием известных базисных функций. Доказано, что точность приближенного решения возрастает с увеличением числа базисных функций.

Ключевые слова: базисные функции, обыкновенное дифференциальное уравнение, краевая задача, конечный элемент, интерполяция.

Получение: 03.01.2024; Исправление: 25.02.2024; Принятие: 29.02.2024; Публикация онлайн: 07.03.2024

Для цитирования. Hayotov A. R., Doniyorov N. N. Construction of basis functions for finite element methods in a Hilbert space // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 46. № 1. С. 118-133. EDN: EUIRSM. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-118-133.

Финансирование. Работа не выполнялась в рамках фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

[*]**Корреспонденция:** E-mail: hayotov@mail.ru, doniyorovnn@mail.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Hayotov A. R., Doniyorov N. N., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)

1 Introduction

The finite element method is one of the effective methods in numerical solving many differential equations encountered in science and technology. The emergence of this method is related to the solution of problems arising in the course of space research (1950). The finite element method was first studied by M.J.Turner, R.W.Clough, N.S.Martin, and L.J.Topp (1956) (see [1]). After that, in 1963, R.J.Melosh [2] theoretically developed this method and showed that it is possible to consider the finite element method as one of the variants of the well-known Rayleigh-Ritz method. In subsequent works, the field of application of the finite element method was further expanded. In particular, it was argued in [3] and [4] that the finite element methods can be easily obtained in solving structural mechanics and hydromechanics problems using options such as the Galerkin method or the least squares method. The establishment of this fact played an important role in the theoretical foundation of the finite element method, as it allowed to use it in solving any differential equations. The scope of application of the finite element methods has expanded from tension analysis in aircraft and automobile structures to the calculation of complex systems in nuclear power plants. It should be noted that the theoretical and practical development of the finite element methods eliminated the need to solve many problems of physics by the variational method. This can be seen as an achievement of the finite element methods. For more information about the finite element methods, one can refer to [5], [6], [7] or other interesting books.

In this work, we construct basis functions using the coefficients of the optimal interpolation formula obtained in a certain Hilbert space and apply these basis functions in finite element methods to approximately solve ordinary differential equations of the second order. At the same time, we compare the accuracy of the approximate solution found using our constructed basis functions with the accuracy of the approximate solution found using known hat basis functions.

The rest of the paper is organized as follows. In the second section, we consider the problem of approximate solution of the boundary value problem for the second-order ordinary differential equation using the finite element method. In the third section, we present the optimal interpolation formula and analytical forms of the coefficients of the optimal interpolation formula in a certain Hilbert space. In the fourth section, we deal with the construction of basis functions using the coefficients of the optimal interpolation formula. In the fifth section, we apply the constructed basis functions in finite element methods and we present numerical results.

2 The finite element method for the second order linear differential equations

The concept of a boundary value problem for ordinary differential equations of the second order can be stated in general as follows (see, for instance, [9]). We consider the

second order differential equation

$$Lu \equiv -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu = f(x),\ \ a \le x \le b \tag{1}$$

with the boundary conditions

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = \gamma_1,\ \ \alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = \gamma_2. \tag{2}$$

The differential equation (1) with the boundary conditions (2) is called a boundary value problem. Here $p \in C^1[a,b]$ and $q, f \in C[a,b]$ and $p(x) \ge k > 0, q(x) \ge 0$ for $x \in [a,b], k = const, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i = 1,2)$ are given numbers.

Now we deal with the approximate solution of the boundary value problem (1)-(2) using the finite element method. We integrate (1) over the interval $[a,b]$ multiplying by an arbitrary function $v \in C^1[a,b]$ satisfying the boundary conditions (2) and equalities $v'(a) = 0$, $v'(b) = 0$. Then using the formula of integration by parts, we get

$$\int_a^b (pu'v' + quv)\,dx = \int_a^b fv dx. \tag{3}$$

It should be noted that equality (3) is in some sense equivalent to the boundary value problem (1)-(2) (see, for example, [9] page 169).

We use equation (3) for approximately solution of the boundary value problem (1)-(2). Let us consider the Galerkin method. Given linear independent functions $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n \in C^1[a,b]$ satisfying the boundary conditions (2). In that case, the approximate solution of the boundary value problem (1)-(2) is sought in the following form:

$$u_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \xi_j(x). \tag{4}$$

Since the linear independent functions $\xi_i(x), i = 0,1,...,n$ are also elements of the space $C^1[a,b]$ then putting $u_n(x)$ in place of $u(x)$ in equation (3) and taking $\xi_i(x), i = 0,1,...,n$ as $v(x)$ from equation (3) we get the following system of linear equations

$$\int_a^b (pu_n'\xi_i' + qu_n\xi_i)\,dx = \int_a^b f\xi_i dx,\ \ i = 0,1,...,n. \tag{5}$$

Taking into account (4), the system of linear equations (5) can be written in the following form:

$$\sum_{j=0}^{n} a_{ij} c_j = b_i,\ \ i = 0,1,...,n$$

or it can be written in the following matrix form

$$Ac = b,$$

where

$$A = (a_{ij})_{i,j=0}^{n},\quad c = (c_0,...,c_n)^T,\quad b = (b_0,...,b_n)^T$$

with

$$a_{ij} = \int_a^b \left(p\xi_i'\xi_j' + q\xi_i\xi_j\right) dx \text{ and } b_i = \int_a^b f\xi_i dx.$$

Solving the system of linear equations (5), we find the coefficients $c_j, j = \overline{0,n}$ and get the approximate solution $u_n(x)$. Since the functions $\xi_0, \xi_1, ..., \xi_n \in C^1[a,b]$ are linear independent, it follows that the symmetric bilinear form $a_{ij}(i,j = \overline{0,n})$ is positive definite. This, in turn, means that the main matrix A of the system of linear equations is positive. Therefore, the solution of the system of linear equations (5) exists and is unique. If a basis functions are conveniently chosen, then the accuracy of the approximation method improves as n increases. More detailed information about this theory of finite element methods can be found, for example, in [7] and [9].

In the next section, we consider the issue of constructing an optimal interpolation formula in a Hilbert space. In particular, we present analytical expressions of the coefficients for the optimal interpolation formula constructed in the Hilbert space $K_{2,\omega}^{(2)}$.

3 The Optimal interpolation formula in the Hilbert space

First, let's focus on the issue of construction of an optimal interpolation formula. The problem of constructing an optimal interpolation formula was first posed and studied by S.L. Sobolev in the space $W_2^{(m)}$ (see [12]). The problem of construction of optimal interpolation formulas in different Hilbert spaces was considered in the works [13]- [16].

Let the values $\varphi(x_0), \varphi(x_1), ..., \varphi(x_N)$ of the function $\varphi(x)$ at the points $x_0, x_1, ..., x_N$ of the mesh $0 \le x_0 < x_1 < ... < x_N \le 1$ be given. Here we consider the problem of approximating the function $\varphi(x)$ in a certain Hilbert space H as follows:

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) \text{ for } x \in [0,1], \tag{6}$$

where

$$P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(x)\,\varphi(x_\beta)$$

and it is the approximating function, $C_\beta(x), \beta = \overline{0,N}$ are its coefficients.

If the approximate equality (6) satisfies the conditions

$$\varphi(x_\beta) = P_\varphi(x_\beta), \beta = \overline{0,N}$$

then the function $P_\varphi(x)$ is called the interpolation function.

The difference

$$(\ell, \varphi) = \varphi(z) - P_\varphi(z)$$

at the fixed point $x = z$ $(z \in [0,1])$ is called the error of the approximating formula (6) at the point z. Here ℓ is the error functional of the interpolation formula (6), which is defined as follows

$$\ell(x,z) = \delta(x-z) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\delta(x-x_\beta), \tag{7}$$

where $\delta(x)$ is the Dirac delta-function.

One of the main problems of the approximation theory is to obtain an upper estimate of the error for the interpolation formula. According to the Cauchy-Schwarz inequality

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\ell\|_{H^*} \|\varphi\|_H$$

the error of the approximating formula (6) is estimated using the norm of the error functional ℓ in the conjugate space H^*.

In addition, the error functional (7) depends on the coefficients $C_\beta(z)$ of the approximation formula (6). If

$$\left\| \overset{\circ}{\ell} \right\|_{H^*} := \inf_{C_\beta(z)} \|\ell\|_{H^*}$$

the least value is achieve at some $C_\beta(z) = \overset{\circ}{C}_\beta(z)$ then the corresponding formula is called the optimal approximation formula. The coefficients of the optimal approximation formula are called optimal coefficients.

We suppose that functions $\varphi(x)$ belong to the following Hilbert space

$$K_{2,\omega}^{(2)} = \left\{ \varphi : [0,1] \to \mathbb{R} | \varphi' \text{ is absolutely continuous and } \varphi'' \in L_2(0,1) \right\},$$

equipped with the norm

$$\|\varphi\|_{K_{2,\omega}^{(2)}} = \left(\int_0^1 \left(\varphi''(x) + \omega^2 \varphi(x) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

where $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (see, for instance, [11]).

The optimal interpolation formula of the form (6) in the Hilbert space $K_{2,\omega}^{(2)}$ was constructed in the work [27]

The following rusult was obtained.

Theorem 1. *In the Hilbert space* $K_{2,\omega}^{(2)}$ *the coefficients of the optimal interpolation formula*

$$\varphi(x) \cong P_\varphi(x) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(x) \varphi(h\beta)$$

are represented as follows

$$C_0(x) = p \left(\frac{A_1}{\lambda_1} \sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_1^\gamma G_2(x - h\gamma) + C G_2(x) + G_2(x - h) \right)$$
$$+ p \left(-\sin(\omega h)\, d_1^- + \cos(\omega h)\, d_2^- - \frac{h}{4\omega^2} \cos(\omega h + \omega x) \right) + p A_1 \left(M_1 + \lambda_1^N N_1 \right), \quad (8)$$

$$C_\beta(x) = p \left(\frac{A_1}{\lambda_1} \sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_1^{|\beta-\gamma|} G_2(x - h\gamma) + G_2(x - h(\beta-1)) + C G_2(x - h\beta) \right.$$
$$\left. + G_2(x - h(\beta+1)) \right) + p A_1 \left(\lambda_1^\beta M_1 + \lambda_1^{N-\beta} N_1 \right), \quad \beta = 1, 2, ..., N-1, \quad (9)$$

$$C_N(x) = p\left(\frac{A_1}{\lambda_1}\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_1^{N-\gamma}G_2(x-h\gamma) + CG_2(x-1) + G_2(x-1+h)\right)$$
$$+ p\left(\sin(\omega h+\omega)\,d_1^+ + \cos(\omega h+\omega)\,d_2^+ - \frac{1+h}{4\omega^2}\cos(\omega h+\omega-\omega x)\right)$$
$$+ pA_1\left(\lambda_1^N M_1 + N_1\right), \quad (10)$$

where

$$d_1^- = \frac{k_2t_1-k_1t_2}{a_1k_2-a_2k_1},\ d_1^+ = \frac{a_1t_2-a_2t_1}{a_1k_2-a_2k_1},\ d_2^- = G_2(x),\ d_2^+ = F-\tan(\omega)d_1^+,$$

here

$$F = \frac{G_2(x-1)}{\cos(\omega)} + \frac{\cos(\omega-\omega x)}{4\omega^2\cos(\omega)},\quad G_2(x) = \frac{\operatorname{sign}(x)}{4\omega^3}\Big(\sin(\omega x) - \omega x\cos(\omega x)\Big),$$

$$p = \frac{2\omega^3}{\sin(\omega h)-\omega h\cos(\omega h)},\quad A_1 = \frac{(2\omega h)^2\sin^4(\omega h)\lambda_1^2}{(\sin(\omega h)-\omega h\cos(\omega h))^2(\lambda_1^2-1)},$$

$$\lambda_1 = \frac{2\omega h-\sin(2\omega h)-2\sin(\omega h)\sqrt{(\omega h)^2-\sin^2(\omega h)}}{2(\omega h\cos(\omega h)-\sin(\omega h))},\ C = \frac{2\omega h\cos(2\omega h)-\sin(2\omega h)}{\sin(\omega h)-\omega h\cos(\omega h)},$$

$$a_1 = -C\sin(\omega h) - \sin(2\omega h) - \frac{A_1\sin(\omega h)}{\lambda_1(1+\lambda_1^2-2\lambda_1\cos(\omega h))},\ a_2 = -\frac{A_1\lambda_1^{N+1}\sin(\omega h)}{1+\lambda_1^2-2\lambda_1\cos(\omega h)},$$

$$k_1 = \frac{A_1\lambda_1^{N+1}\sin(\omega h)}{\cos(\omega)(1+\lambda_1^2-2\lambda_1\cos(\omega h))},$$

$$k_2 = \frac{C\sin(\omega h)+\sin(2\omega h)}{\cos(\omega)} + \frac{A_1\sin(\omega h)}{\lambda_1\cos(\omega)(1+\lambda_1^2-2\lambda_1\cos(\omega h))},$$

$$t_1 = \frac{h}{4\omega^2}\Bigg(C\cos(\omega x+\omega h) + 2\cos(\omega x+2\omega h)$$
$$+ \frac{A_1}{\lambda_1}\frac{\cos(\omega x+\omega h) - 2\lambda_1\cos(\omega x) + \lambda_1^2\cos(\omega x-\omega h)}{(1+\lambda_1^2-2\lambda_1\cos(\omega h))^2}\Bigg)$$
$$- G_2(x)\left(1 + C\cos(\omega h) + \cos(2\omega h) + \frac{A_1}{\lambda_1}\frac{\cos(\omega h)-\lambda_1}{1+\lambda_1^2-2\lambda_1\cos(\omega h)}\right)$$
$$- A_1\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_1^{\gamma}G_2(x-h\gamma) - A_1\lambda_1^{N+1}F\frac{\cos(\omega h+\omega)-\lambda_1\cos(\omega)}{1+\lambda_1^2-2\lambda_1\cos(\omega h)} + \frac{h}{4\omega^2}A_1\lambda_1^{N+1}Q,$$

$$t_2 = \frac{h}{4\omega^2} A_1 \lambda_1^{N+1} \frac{\cos(\omega x + \omega h) - 2\lambda_1 \cos(\omega x) + \lambda_1^2 \cos(\omega x - \omega h)}{(1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos(\omega h))^2}$$
$$- A_1 \lambda_1^{N+1} G_2(x) \frac{\cos(\omega h) - \lambda_1}{1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos(\omega h)} - G_2(x-1) - A_1 \lambda_1^N \sum_{\gamma=0}^{N} \lambda_1^{-\gamma} G_2(x - h\gamma)$$
$$- F\left(C\cos(\omega h + \omega) + \cos(2\omega h + \omega) + \frac{A_1}{\lambda_1} \frac{\cos(\omega h + \omega) - \lambda_1 \cos(\omega)}{1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos(\omega h)} \right)$$
$$+ \frac{h}{4\omega^2} \left(C(1+N)\cos(\omega h + \omega - \omega x) + (2+N)\cos(2\omega h + \omega - \omega x) + \frac{A_1}{\lambda_1} Q \right),$$

$$Q = \frac{\cos(\omega - \omega x + \omega h) - 2\lambda_1 \cos(\omega - \omega x) + \lambda_1^2 \cos(\omega - \omega x - \omega h)}{(1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos(\omega h))^2}$$
$$+ \frac{\cos(\omega - \omega x + \omega h) - \lambda_1 \cos(\omega - \omega x)}{h(1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos(\omega h))},$$

$$M_1 = -\frac{\sin(\omega h)}{1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos(\omega h)} d_1^- + \frac{\cos(\omega h) - \lambda_1}{1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos(\omega h)} d_2^-$$
$$- \frac{h}{4\omega^2} \frac{\cos(\omega x + \omega h) - 2\lambda_1 \cos(\omega x) + \lambda_1^2 \cos(\omega x - \omega h)}{(1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos(\omega h))^2},$$

$$N_1 = \frac{\sin(\omega h + \omega) - \lambda_1 \sin(\omega)}{1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos(\omega h)} d_1^+ + \frac{\cos(\omega h + \omega) - \lambda_1 \cos(\omega)}{1 + \lambda_1^2 - 2\lambda_1 \cos(\omega h)} d_2^+ - \frac{h}{4\omega^2} Q.$$

In the next section we give three sets of basis functions.

4 Basis functions

In this section, we present a set of known hat basis functions, and we also construct basis functions using the coefficients of the optimal interpolation formula presented in Theorem 1. At the same time, we describe the properties of these basis functions, draw their graphs, and provide the necessary information to apply these basis functions to finite element methods.

It is known that the interval $[0, 1]$ can be translated by linear transformation into any interval $[a, b]$. To simplify calculations, we consider the interval $[0, 1]$ to be the interval $[a, b]$.

4.1 The hat basis functions

It is known that in linear spaces there is always a system of linear independent elements. This system of linear independent elements is considered as the basis of the space. The elements that make up the basis, depending on the linear space, are called basis functions or basis vectors.

Clearly, the hat basis functions corresponding to the partition $0 = z_0 < z_1 < ... < z_n = 1$, $z_i = i\tau, \tau = \frac{1}{n}, i = 0, 1, ..., n$ of the interval $[0, 1]$ have the following form (see, for example, [10], pp. 714-715):

$$\lambda_0(x) = \begin{cases} \frac{x-z_1}{z_0-z_1}, & z_0 \le x \le z_1, \\ 0, & z_1 < x \le 1, \end{cases} \tag{11}$$

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 0, & x < z_{i-1}, \\ \frac{x-z_{i-1}}{z_i-z_{i-1}}, & z_{i-1} \le x \le z_i, \\ \frac{x-z_{i+1}}{z_i-z_{i+1}}, & z_i \le x \le z_{i+1}, \\ 0, & z_{i+1} \le x, \end{cases} \quad (i = 1, 2, ..., n-1), \tag{12}$$

$$\lambda_n(x) = \begin{cases} 0, & z_0 \le x < z_{n-1}, \\ \frac{x-z_{n-1}}{z_n-z_{n-1}}, & z_{n-1} \le x \le z_n. \end{cases} \tag{13}$$

The graphs of the hat basis functions $\lambda_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$ are shown in figure 1.

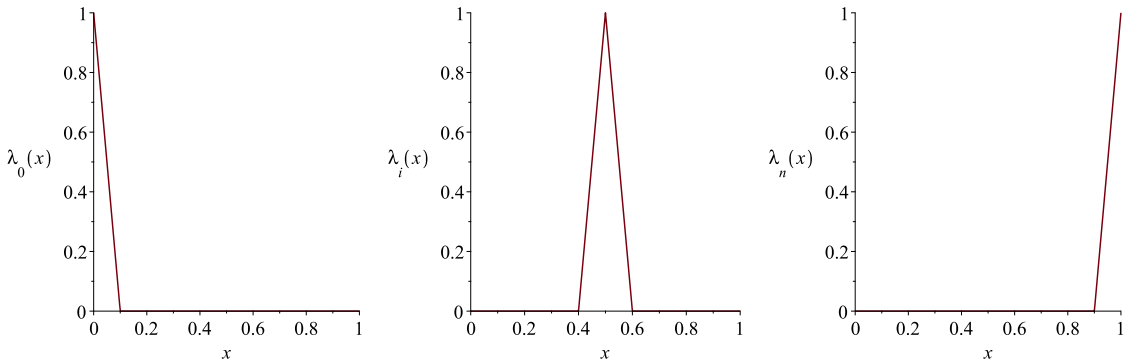


Fig. 1. The graphs of the hat functions $\lambda_0(x)$, $\lambda_i(x), i = 1, 2, ..., n-1$ and $\lambda_n(x)$ (from the left to the right).

Here are the first-order derivatives of the hat basis functions $\lambda_i(x)(i = 1, ..., n-1)$ above is determined by the equation

$$\lambda_i'(x) = \begin{cases} 0, & x < z_{i-1}, \\ \frac{1}{z_i-z_{i-1}}, & z_{i-1} \le x \le z_i, \\ \frac{1}{z_i-z_{i+1}}, & z_i \le x \le z_{i+1}, \\ 0, & z_{i+1} \le x. \end{cases} \tag{14}$$

It can be seen that the hat basis functions $\lambda_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$ are continuous in the interval $[0, 1]$, and its first-order derivatives $\lambda_i'(x)(i = 0, 1, ..., n)$ have a first-order discontinuity in the interval $[0, 1]$.

When we approximately solve the above boundary value problem $(1)-(2)$ using the hat basis functions $\lambda_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$, we take approximate solution as follows

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \lambda_i(x). \tag{15}$$

4.2 Construction of basis functions using optimal coefficients

At this stage, based on equations (8)−(10) we present an analytical representation of the coefficients for $N = 1$. Then we construct a set of basis functions using the analytical representation of the coefficients.

For $N = 1 (x_0 = 0, x_1 = 1)$, from equations (8)-(10) we have the following:

$$C_0(x) = \frac{\sin(\omega x - \omega x_1)}{\sin(\omega x_0 - \omega x_1)}, \; C_1(x) = \frac{\sin(\omega x - \omega x_0)}{\sin(\omega x_1 - \omega x_0)}, \; x \in [0, 1]. \tag{16}$$

The graphs of the coefficients $C_0(x)$ and $C_1(x)$ are presented in figure 2.

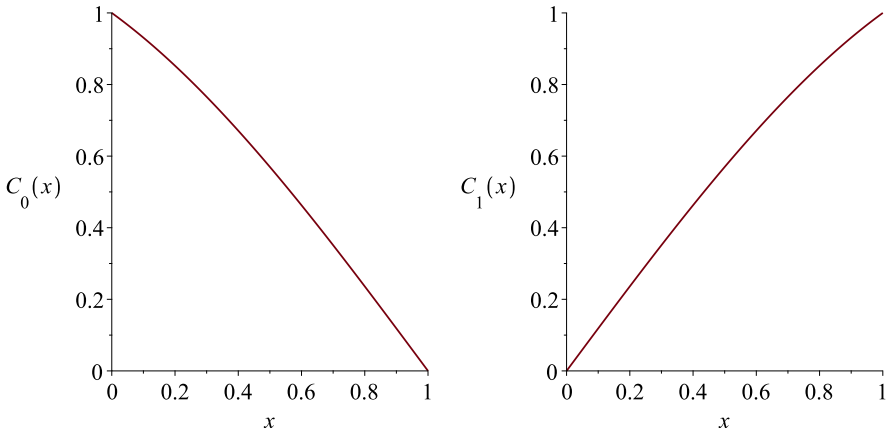


Fig. 2. The graphs of coefficients $C_0(x)$ and $C_1(x)$ defined by (16)(from the left to the right).

Now, using the coefficients $C_0(x)$ and $C_1(x)$ as the shape functions on the interval $[0, 1]$, we construct a set of basis functions $\mu_i(x)$ $(i = 0, 1, ..., n)$. Here we consider the interval $[0, 1]$ to be divided by $0 = z_0 < z_1 < ... < z_n = 1$, where $z_i = i\tau$, $\tau = \frac{1}{n}$, $i = 0, 1, ..., n$.

The first function $\mu_0(x)$ has the following form

$$\mu_0(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega x - \omega z_1)}{\sin(\omega z_0 - \omega z_1)}, \; z_0 \le x \le z_1, \\ 0, \; z_1 \le x \le 1, \end{cases} \tag{17}$$

Then using the shape functions (11) for the intervals (z_{i-1}, z_i) and (z_i, z_{i+1}) we describe the functions $\mu_i(x), i = 1, 2, ..., n-1$ as follows

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 0, \; z_0 \le x \le z_{i-1}, \\ \frac{\sin(\omega x - \omega z_{i-1})}{\sin(\omega z_i - \omega z_{i-1})}, \; z_{i-1} \le x \le z_i, \\ \frac{\sin(\omega x - \omega z_{i+1})}{\sin(\omega z_i - \omega z_{i+1})}, \; z_i \le x \le z_{i+1}, \\ 0, \; z_{i+1} \le x \le 1. \end{cases} \tag{18}$$

Finally, we express $\mu_n(x)$ by the following equality

$$\mu_n(x) = \begin{cases} 0, \; z_0 \le x \le z_{n-1}, \\ \frac{\sin(\omega x - \omega z_{n-1})}{\sin(\omega z_n - \omega z_{n-1})}, \; z_{n-1} \le x \le z_n. \end{cases} \tag{19}$$

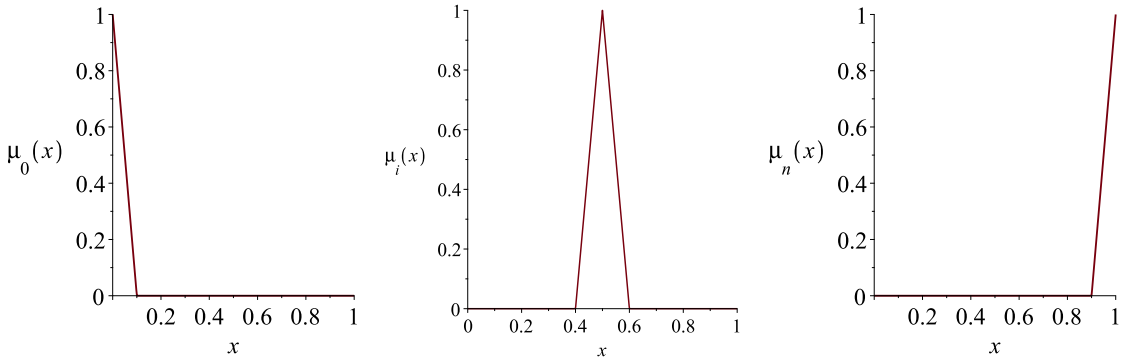


Fig. 3. The graphs of the functions $\mu_0(x)$, $\mu_i(x), i = 1, 2, ..., n-1$ and $\mu_n(x)$ (from the left to the right).

The graphs of the basis functions $\mu_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$ are shown in figure 3.

It is easy to check that the functions $\mu_i(x), i = 0, 1, ..., n$ are independent on the interval $[0, 1]$.

The first-order derivatives of the basis functions $\mu_i(x), i = 1, ..., n-1$ are determined by the equation

$$\mu_i'(x) = \begin{cases} 0, & z_0 \le x \le z_{i-1}, \\ \frac{\omega \cos(\omega x - \omega z_{i-1})}{\sin(\omega z_i - \omega z_{i-1})}, & z_{i-1} \le x \le z_i, \\ \frac{\omega \cos(\omega x - \omega z_{i+1})}{\sin(\omega z_i - \omega z_{i+1})}, & z_i \le x \le z_{i+1}, \\ 0, & z_{i+1} \le x \le 1. \end{cases} \tag{20}$$

It can be seen that the basis functions $\mu_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$ are continuous in the interval $[0, 1]$, and its first-order derivatives $\mu_i'(x)(i = 0, 1, ..., n)$ have a first-order discontinuity in the interval $[0, 1]$.

When we approximately solve the above boundary value problem (1)-(2) using the basis functions $\mu_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$, the approximate solution we get as follows

$$\vartheta_n(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i \mu_i(x). \tag{21}$$

4.3 The optimal coefficients as basis functions

At this stage, using Theorem 1, we get the coefficients of the interpolation formula constructed above as basis functions. From Theorem 1 for $N = n$ we get

$$\nu_i(x) = C_i(x), \ i = 0, 1, ..., n, \tag{22}$$

where $C_0(x), C_i(x), i = \overline{1, n-1}$ and $C_n(x)$ are defined by equations (8), (9) and (10), respectively.

The graphs of the basis functions $\nu_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$ are shown in figure 4.

When we approximately solve the above boundary value problem (1)-(2) using the basis functions $\nu_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$, we get the approximate solution as follows

$$\omega_n(x) = \sum_{i=0}^{n} e_i \nu_i(x). \tag{23}$$

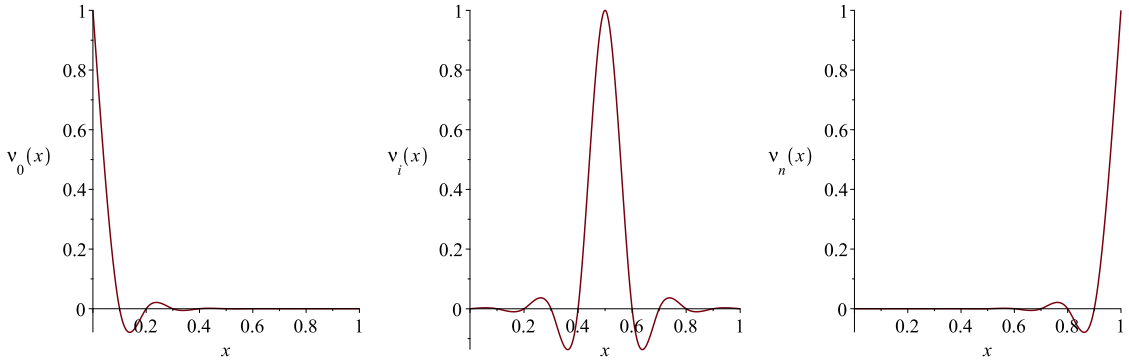


Fig. 4. The graphs of the functions $\nu_0(x)$, $\nu_i(x), i = 1, 2, ..., n-1$ and $\nu_n(x)$ given by formula (22)(from the left to the right).

It should be noted that various geometric curves and surfaces, as well as Bezier curves [17], [18], [19], trigonometric B-splines [18], [20], [21] can be generated using the basis functions $\mu_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$ and $\nu_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$.

In the next section, we consider the application of these basis functions to the solution of the boundary value problems for second-order ordinary differential equations using finite element methods.

5 Numerical Results

In this section, we approximately solve the boundary value problems for ordinary differential equations of the second order using the Galerkin method, applying the basis functions constructed above.

Example 1. (Example 3 a), 726 p., [10]) Solve the following boundary value problem using the Galerkin method:

$$-x^2u'' - 2xu' + 2u = -4x^2, \ u(0) = u(1) = 0. \tag{24}$$

It is known that this boundary value problem has an exact solution $u(x) = x^2 - x$.

Case 1. In this case, we approximately solve the boundary value problem (24) using basis functions $\lambda_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$. Since the boundary conditions in the boundary value problem (24) are homogeneous, the approximate solution has the form

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i\lambda_i(x).$$

The absolute value of the error for the approximate solution $u_n(x)$ is presented in figure 5.

Case 2. In this case, we approximately solve the boundary value problem (24) using basis functions $\mu_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$. Since the boundary conditions in the boundary value problem (24) are homogeneous, the approximate solution has the form

$$\vartheta_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} d_i\mu_i(x).$$

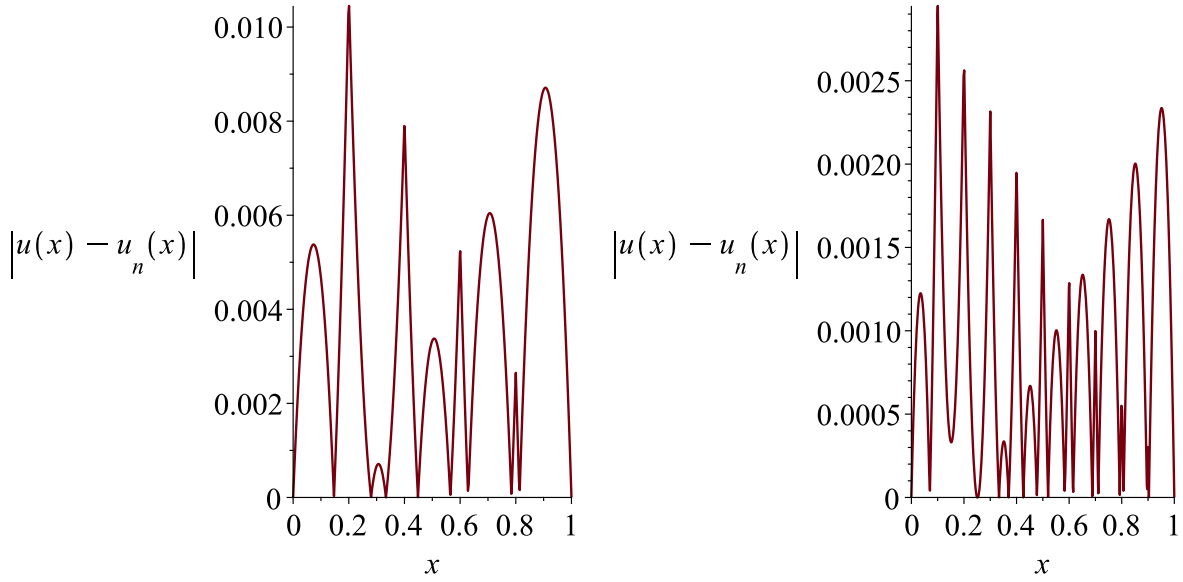


Fig. 5. The graphs of the error $|u(x) - u_n(x)|$ for $n = 5$ (on the left) and $n = 10$ (on the right), respectively (for the boundary value problem (24)).

The absolute value of the error for the approximate solution $\vartheta_n(x)$ is presented in figure 6.

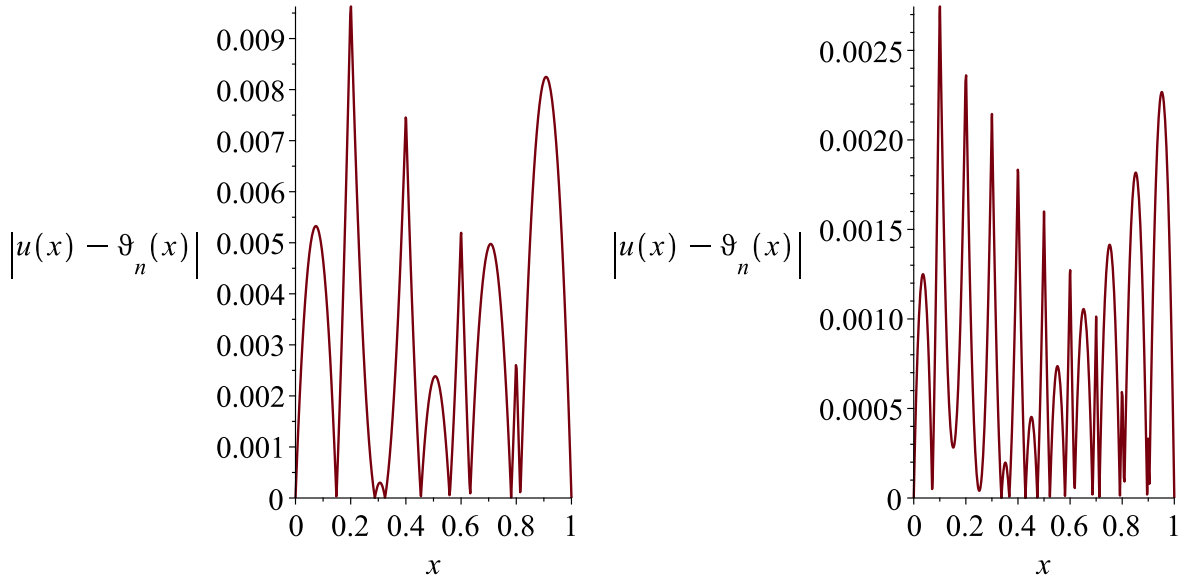


Fig. 6. The graphs of the error $|u(x) - \vartheta_n(x)|$ for $n = 5$ (on the left) and $n = 10$ (on the right), respectively (for the boundary value problem (24)).

Case 3. Finally, we approximately solve the boundary value problem (24) using basis functions $\nu_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$. If we take into account that the boundary conditions here are also homogeneous, the approximate solution of the boundary problem has the form

$$\omega_n(x) = \sum_{i=1}^{n-1} e_i \nu_i(x).$$

The absolute value of this approximate solution error $\omega_n(x)$ is presented in figure 7.

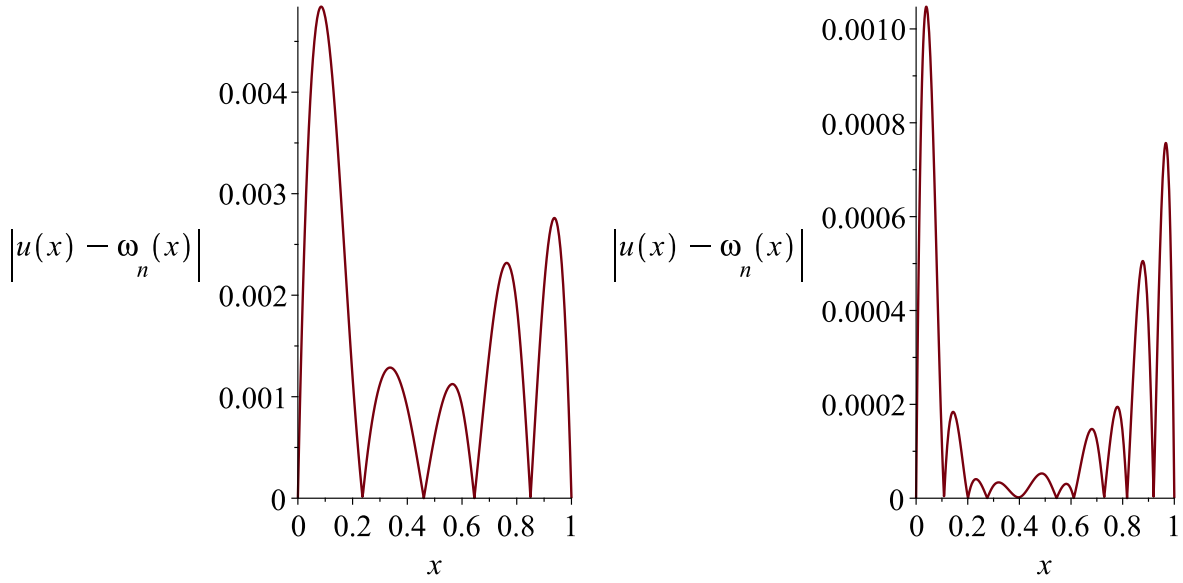


Fig. 7. The graphs of the error $|u(x) - \omega_n(x)|$ for $n = 5$ (on the left) and $n = 10$ (on the right), respectively (for the boundary value problem (24)).

The following conclusions can be done from these numerical results:

i) In the first two cases, the order of approximation of the approximate solution is the same.

ii) Effective basis functions can be formed even when $N = 1$ in equations (8)-(10).

iii) Accuracy of the approximate solution found using basis functions $\nu_i(x)(i = 0, 1, ..., n)$ is better than the accuracy of the approximate solution found using basis functions $\lambda_i(x)$ $(i = 0, 1, ..., n)$ and $\mu_i(x)$ $(i = 0, 1, ..., n)$.

It should be noted that using the above basis function one can approximately calculate definite integrals and construct B— splines as well as they can be applied for construct various geometric curves.

6 Conclusion

This paper briefly reviews the history of the emergence and development of finite element methods. At the same time, the essence of the finite element method was clarified and the objects of study were mentioned. As the main result of the work, we can say that the set of basis functions is constructed from the coefficients of the optimal interpolation formula constructed in the Hilbert space $K_{2,\omega}^{(2)}$ with $N = 1$ and arbitrary $N \in \mathbb{N}$, and these basis functions are applied to boundary value problems of the finite element method for ordinary differential equations of the second order, approximately solved and numerical results obtained. In addition, it was shown that the accuracy of the approximate solution for arbitrary $N \in \mathbb{N}$ is better than the accuracy of the approximate solution for $N = 1$ and it was proven that the order of approximation of

the approximate solution found using the basis functions we constructed is the same as the order of approximation of the approximate solution found using the hat basis functions.

References

1. Turner M. J., Clough R. W., Martin N. S., Topp L. J. Sliffness and Deflection Analysis of Complex Structures, *Aeronaut. Sci.*, 1956. vol. 23, pp. 805—824.
2. Melosh R. J. Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method, *Am. Inst. for Aeronautics and Astronautics. J.*, 1965, pp. 1631—1637.
3. Szabo B. A., Lee G. C. Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method, *Intern. J. of Numerical Methods in Engineering*, 1969. no. 1, pp. 301-310.
4. Zienkiewicz O. C. *Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method.* London: McGraw-Hill, 1971. 521 pp.
5. Mitchell E., Waite R. *Finite element method for partial differential equation.* Moscow: Mir, 1981. 216 pp. (In Russian)
6. Segerlind L. *Application of the finite element method.* Moscow: Mir, 1979. 392 pp. (In Russian)
7. Dautov R. Z., Karchevsky M. M. *Introduction to the theory of the finite element method.* Kazan: Kazan Federal University, 2011. 239 pp. (In Russian)
8. Khayotov A. R. Discrete analogues of some differential operators, *Uzbek mathematical journal*, 2012. no. 1, pp. 151-155 (In Russian).
9. Zhilin Li, Zhonghua Qiao, Tao Tang. *Numerical Solution of Differential Equations.* United Kingdom: Cambridge University Press, 2018. 293 pp.
10. Burden R. L, Douglas F. J. *Numerical Analysis.* United States of America: Cengage Learning, 2016. 900 pp.
11. Hayotov A. R., Milovanović G. V., Shadimetov Kh. M. Optimal quadratures in the sense of Sard in a Hilbert space, *Applied Mathematics and Computation*, 2015. no. 259, pp. 637-653.
12. Sobolev S. L. On Interpolation of Functions of n Variables, Selected works of S.L. Sobolev, *Mathematical Physics, Computational Mathematics, and Cubature Formulas*, 2006. vol. 1, pp. 451-456.
13. Babaev S. S., Hayotov A. R. Optimal interpolation formulas in $W_2^{(m,m-1)}$ space, *Calcolo*, 2019. vol. 56, no. 23, pp. 1-25.
14. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R., Nuraliev F. A. Construction of optimal interpolation formulas in the Sobolev space, *Journal of Mathematical Sciences*, 2022. vol. 264, no. 6, pp. 768-781.
15. Boltaev A. K. On the optimal interpolation formula on classes of differentiable functions, *Problems of Computational and Applied Mathematics*, 2021. no. 4(34), pp. 96-105.
16. Shadimetov Kh. M., Boltaev A. K., Parovik R. I. Construction of optimal interpolation formula exact for trigonometric functions by Sobolev's method, *Vestnik KRAUNC. Fiz-Mat. nauki.*, 2022. vol. 38, no. 1, pp. 131-146.
17. Yong-Wei W., Guo-Zhao W. An orthogonal basis for non-uniform algebraic-trigonometric spline space., *Applied Mathematics Journal of Chinese University*, 2014. vol. 29, no. 3, pp. 273-282.
18. Majed A. et al. Geometric Modeling Using New Cubic Trigonometric B-Spline Functions with Shape Parametr, *Mathematics*, 2020. vol. 2102, no. 8, pp. 1-25.
19. Lanlan Yan Cubic Trigonometric Nonuniform Spline Curves and Surfaces, *Mathematical Problems in Engineering*, 2016. vol. Article ID 7067408., pp. 9.
20. Duan Xiao-Juan, Wang Guo-Zhao. NUAT T-splines of odd bi-degree and local refinement., *Applied Mathematics Journal of Chinese University*, 2014. vol. 29, no. 4, pp. 410-421.
21. Emre Kirli A novel B-spline collocation method for Hyperbolic Telegraph equation., *AIMS Mathematics*, 2023. vol. 8, no. 5, pp. 11015-11036.
22. Shadimetov Kh. M., Hayotov A. R. *Optimal approximation of error functionals of quadrature and interpolation formulas in spaces of differentiable functions.* Tashkent: Muhr press, 2022.. 246 pp. (In Russian)

23. Hayotov A. R. Construction of interpolation splines minimizing the semi-norm in the space $K_2(P_m)$., *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics*, 2018. no. 11, pp. 383–396.

24. Babaev S. On an optimal interpolation formula in $K_2(P_2)$ space, *Uzbek Mathematical Journal*, 2019. no. 1, pp. 27-41.

25. Babaev S., Davronov J., Abdullaev A., and Polvonov S. Optimal interpolation formulas exact for trigonometric functions., *AIP Conference Proceedings*, 2023. no. 2781.

26. Sobolev S. L. *Introduction to the theory of cubature formulas.* Nauka: Moscow, 1974.. 805 pp. (In Russian)

27. Hayotov A., Doniyorov N. Basis functions for finite element methods., *Bull. Inst. Math.*, 2023. vol. 6, no. 5, pp. 31-44.

Information about authors



Hayotov Abdullo Rahmonovich✉ – D. Sci. (Phys. & Math.), Professor, Head of the Computational Mathematics Laboratory, V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0000-0002-2756-9542.



Doniyorov Negmurod Normurodovich – (PhD) student, the Computational Mathematics Laboratory, V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences, Tashkent, Uzbekistan, ORCID 0009-0001-3889-1641.

Информация об авторах



Хайотов Абдулло Рахмонович✉ – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией вычислительной математики, Институт математики имени В. И. Романовского, Академии наук Узбекистана, г. Ташкент, Республика Узбекистан, ORCID 0000-0002-2756-9542.



Донийоров Негмурод Нормуродович – докторант, лаборатория вычислительной математки, Институт математики имени В.И. Романовского, Академии наук Узбекистана, г. Ташкент, Республика Узбекистан Tashkent, ORCID 0009-0001-3889-1641.

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 46. №1. С. 134 - 164. ISSN 2079-6641

ФИЗИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-134-164

Научная статья

Полный текст на русском языке

УДК 550.377

Кратковременные вариации электротеллурического поля вблизи очага землетрясения на о. Сахалин

А. С. Закупин**, И. П. Дудченко, Л. М. Богомолов, С. А. Гуляков, А. И. Казаков, Н. С. Стовбун

Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, 693022, г. Южно-Сахалинск, ул. Науки 1Б, Россия

Аннотация. В работе представлены результаты анализа данных электротеллурических потенциалов, полученных в пункте измерений, развернутом в июне 2023 года на территории ИМГиГ ДВО РАН в г. Южно-Сахалинск. Уже в первые месяцы работы были обнаружены серии квазипериодических всплесков (импульсов) в ночное время. Сигналы длительностью 4-5 секунд и с периодом следования 130-150 секунд имеют разную форму, которая является производной от некоего оригинального синусоподобного сигнала. Серии отмечались с 20 июля по 11 сентября 2023 г., а их средняя длительность колеблется в районе 8-9 часов. С 12 сентября 2023 года по 10 февраля 2024 года серии не обнаружены. Максимальная интенсивность сигналов и серий в целом наблюдается в период с 5 по 10 августа. В этот же период (9 августа 2023 года) рядом с точкой измерений (в круге с радиусом 0,25 градуса с центром на полигоне) произошло землетрясение умеренной силы с $M = 3{,}8$, причём за весь период наблюдений оно было самым сильным из 2 событий с $M > 3$, произошедших в данном районе. Перед вторым, более слабым землетрясением, подобных серий совсем не было обнаружено. Появление обнаруженных серий квазипериодических импульсов может быть связано с подготовкой очага землетрясения, однако для подтверждения этой гипотезы потребуются дополнительные наблюдения.

Ключевые слова: серия электрических сигналов, предвестник, теллурическое поле, землетрясение, искаженный сигнал.

Получение: 15.02.2024; Исправление: 26.02.2024; Принятие: 27.02.2024; Публикация онлайн: 07.03.2024

Для цитирования. Закупин А. С., Дудченко И. П., Богомолов Л. М. и др. Кратковременные вариации электротеллурического поля вблизи очага землетрясения на о. Сахалин // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 46. № 1. С. 134-164. EDN: FIGWJO. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-134-164.

Финансирование. Работа не выполнялась в рамках фондов.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: dikii79@mail.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Закупин А. С., Дудченко И. П., Богомолов Л. М. и др., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2024. vol. 46. no. 1. P. 134 - 164. ISSN 2079-6641

PHYSICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-134-164

Research Article

Full text in Russian

MSC 86A25

Short Temporal Variations of Electrotelluric Field in the Vicinity of the Earthquake Source-Site in the Sakhalin Island

A. S. Zakupin, I. P. Dudchenko, L. M. Bogomolov, S. A. Gulyakov, A. I. Kazakov, N. S. Stovbun***

Institute of Marine Geology and Geophysics, FEB RAS, 693022, Yuzhno-Sakhalinsk, Nauki str., 1B, Russia

Abstract. The work represents the results of analysis of electro-telluric potentials data obtained at the Yuzhno-Sakhalinsk test site (deployed in June 2023on the territory of the IMGG FEB RAS). Unexpectedly, a new kind of signals – series of quasiperiodic spikes (pulses) in night times were found in first few months after start of recording. Signals of 4-5 s length and of 130-150 s repetition period have a various waveform, which is derived from some primary quasi-sinusoidal signal. Such series were recorded from July 20 to September 11, 2023, and their average duration was nearly 8-9 hours. No episodes were found after September 12, up to December 20. The maximal intensity of the signals and the series as a whole was revealed in the period from 5 to 10 August. During this period the moderate earthquake M=3.8 occurred on 9 August, 2003 in the vicinity of measurement point (within a circular zone of 0.25 degrees radius around the test site) It was the strongest event from pair of that occurred in the given zone, the magnitudes were being M = 3.8 (08/09/2023) and M = 3.1 (09/19/2023). No similar series were observed before the second earthquake, being the weaker. Origination of quasiperiodic pulses series could be related to the preparedness of earthquake source – site. However extra surveys are required to proof this hypothesis.

Key words: series of electrical signals, precursor, telluric field, earthquake, distorted signal.

Received: 15.02.2023; Revised: 26.02.2024; Accepted: 27.02.2024; First online: 07.03.2024

For citation. Zakupin A. S., Dudchenko I. P., Bogomolov L. M. et al. Short temporal variations of electrotelluric field in the vicinity of the earthquake source-site in the Sakhalin island. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **46**: 1, 134-164. EDN: FIGWJO. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-134-164.

Funding. The work was not carried out within the framework of funds.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

***Correspondence:** E-mail: dikii79@mail.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Zakupin A. S., Dudchenko I. P., Bogomolov L. M. et al., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)

Введение

За долгую историю исследований естественного электромагнитного (ЭМ) поля Земли, начиная с работы [1] в XIX в., вплоть до 20-х годов нашего века [2, 3] получено огромное множество результатов о вариациях электротеллурического (ЭТП) и геомагнитного поля (компонент ЭМ поля) перед землетрясениями. Такие вариации, выделяющиеся относительно поведения сигналов в предыстории (ранее называемые аномалиями), анализировались как возможные предвестники сильного землетрясения (ЗЛТ) [4–6]. Вариации параметров ЭМ полей регистрировались на фоне шума, сопровождающего геодеформационный процесс [5, 7]. Из-за этого во многих случаях и в асейсмичные периоды также регистрировались аналогичные вариации тех же параметров, играющие роль ложных тревог.

Для анализа, действительно ли вариации параметров ЭМ поля являются достоверными (или статистически значимыми) предвестниками землетрясения, необходимы данные по разным сейсмически активным регионам и за разные периоды наблюдений. В последние десятилетия география исследований естественного ЭМ поля и, в частности, поисков предвестников значительно расширилась, что способствовало накоплению данных. Перечислим далее некоторые электромагнитные эффекты, зафиксированные перед ЗЛТ.

На о. Сахалин наблюдаются однополярные импульсы либо увеличение амплитуды напряжения по всем 6 приемным линиям крестообразной установки по методу VAN, резкие возмущения электротеллурического поля (ЭТП) - до 20 мВ и геомагнитного поля - до 5 мкТл [8, 9]. В Южной Якутии полный вектор геомагнитного поля увеличился на 200 нТл, меридиональная и широтная магнитные составляющие электромагнитного излучения (ЭМИ) увеличились на 20-25 тыс. имп/час [10]. В Восточной Сибири проведены измерения ЭМ поля с помощью ферритовой антенны и емкостных дифференциальных датчиков: наблюдается увеличение амплитуды напряженности ЭМИ от 40 до 100 мВ при фоновом уровне 10-20 мВ, количество импульсов ЭМИ возрастает на 5-15 тыс. имп/час, среднее количество импульсов электрической составляющей ЭМИ возрастает с 5-10 до 25 имп/час [11].

За пределами России также отмечены многие электромагнитные эффекты перед ЗЛТ. В Японии, Китае, Румынии и ряде других сейсмоактивных регионов в рядах меридиональной и широтной компонент магнитных вариаций зарегистрированы единичные либо парные импульсы на частотах 0-5 Гц амплитудой не более 10 пТл [12]. В Японии разница вертикальной составляющей геомагнитного поля в сейсмоактивной зоне и вне ее достигает 400 % при пороговых значениях 20-80 % [13], электрический потенциал на глубине в несколько сотен метров меняется в виде импульса определенной формы амплитудой до 100 мВ, что на порядок выше фоновой [6]. В Калифорнии (США) количество импульсов широтной магнитной составляющей возрастает до 50-250 при фоновых значениях 5-25 [3, 14, 15].

Опубликовано также множество работ, посвященных связи свойств электропроводности среды с напряженно-деформированным состоянием среды [16–20].

Среди всего многообразия работ по электромагнитным предвестникам землетрясений привлекают особое внимание наблюдения вариаций ЭТП в период от нескольких минут до нескольких суток до главного события, который соответствует временам краткосрочного прогноза [15, 21–29].

Вариации ЭТП обычно обнаруживались при измерениях разности потенциалов на полюсах диполя (двух разнесенных электродах, заглубленных в грунт), причем обычно используется несколько диполей разной ориентации и длины. В работах [27,29], где детально исследовались закономерности вариаций ЭТП, было показано, что, с одной стороны, вариации приурочены к гипоцентру землетрясения, и их амплитуда убывает обратно пропорционально эпицентральному расстоянию, но, с другой стороны, имеет место избирательность появления таких возмущений: наблюдались не перед всеми главными событиями [27]. Этот подход, получивший название «метод VAN» по именам разработчиков Varotsos P., Alexopoulos K., Nomicos K., применялся для прогнозирования землетрясений в Греции [30]. Однако в ряде работ содержится критика как самого метода VAN [31, 32], так и достоверности прогнозов, сделанных на его основе [33]. Это указывает на актуальность продолжения исследований вариаций ЭТП, в том числе на Сахалине, где уже отмечен прецедент нескольких заблаговременных среднесрочных прогнозов землетрясений [34, 35].

В ряде работ отмечено, что краткосрочные предвестники землетрясений могут проявляться (помимо ЭТП) также в электрическом поле в приповерхностном слое атмосферы [36, 37], в сигналах электромагнитного излучения Земли [10, 12, 38, 39], геомагнитных возмущениях на очень низких частотах (ОНЧ) [3, 10, 12–14, 39–41], в параметрах распространения радиоволн ОНЧ диапазона [11, 42, 43].

Физический механизм возмущений ЭТП перед землетрясением связан, скорее всего, с эффектом поляризации среды перед возникновением макроразрыва, в частности, с изменением плотности двойных электрических слоев на поверхностях трещин, границах блоков или зерен и т.п. [44–47]. Определенный вклад в эти возмущения может вносить электромагнитное излучение нагруженных горных пород, генерируемое при образовании разрывов в самых разных диапазонах частот [48–55]. Конечно, эти эффекты, установленные в лабораторном эксперименте, при масштабировании на породные массивы могут дать лишь качественное объяснение вариаций ЭТП.

С учетом изложенного представляет интерес регистрация и анализ вариаций ЭТП вблизи очага землетрясения, которое произошло 09.08.2023 ($M = 3{,}8$) на Сахалине с эпицентром, лежащим на одной из ветвей Центрально-Сахалинского разлома [56] в непосредственной близости к пункту измерений ЭТП (рис. 1).

На рис. 1 также показаны все землетрясения с $M > 3$ (их всего 2) в круге радиусом 0,25° с центром в ИМГиГ ДВО РАН. Задача настоящей работы состоит в проверке гипотезы об изменениях каких-либо параметров ЭТП в течение 10 суток в

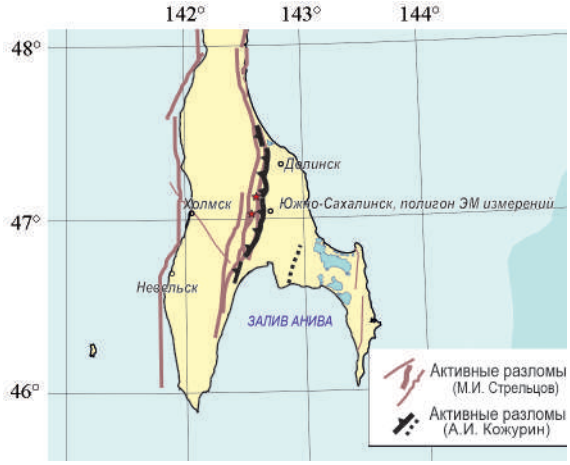


Рис. 1. Расположение основных региональных разломов в южной части о. Сахалин (согласно [56]), измерительного полигона ИМГиГ ДВО РАН и эпицентров двух землетрясений, произошедших 09.08.2023 (M = 3,8, звездочка южнее) и 19.09.2023 (M = 3,1, звездочка севернее). В период с 20 июля по 10 февраля в круге радиусом 0,25° с центром в ИМГиГ ДВО РАН не было других событий с M > 3.

[Figure 1. Location of the main regional faults in the southern part of the Sakhalin Island (according to [56]), the measuring area of the IMGG FEB RAS and the epicenters of two earthquakes that occurred on 08/09/2023 (M = 3.8, asterisk to the south) and 09/19/2023 (M = 3.1, asterisk to the north). In the period from July 20 to February 10, there were no other events with M > 3 in a circle with a radius of 0.25° centered at the IMGG FEB RAS]

ближней зоне перед землетрясением. Стоит отметить, что если для подтверждения методики краткосрочного прогноза по параметрам ЭТП (необязательно по методу VAN) необходима большая статистика наблюдений, то для ее опровержения может быть высоко значим даже один пример (в силу соображений о приуроченности предвестника к месту будущего очага).

Методика измерений и аппаратурное обеспечение

Измерения электротеллурического поля проводятся на площадке ИМГиГ ДВО РАН (г. Южно-Сахалинск, планировочный район Ново-Александровск, 47,0293° с.ш., 142,7166° в.д.) с июня 2023 года, но на начальном этапе в режиме различных тестов. Выбор места расположения системы измерений определялся необходимостью обеспечения бесперебойного электропитания для непрерывных круглогодичных измерений. Опыт полевых работ с наблюдением ЭТП на Сахалине в период 2003-2021 гг. [9] выявил, что зимой непрерывные измерения ЭТП вне населенных пунктов практически нереализуемы из-за снежных заносов.

После завершения тестирования с 20 июля 2023 г. система работает в стабильном режиме. Электротеллурическое поле регистрировалось при помощи

трех измерительных диполей длиной 100 м с заземленными полюсами – электродами. Схема ориентации диполей показана рис. 2.

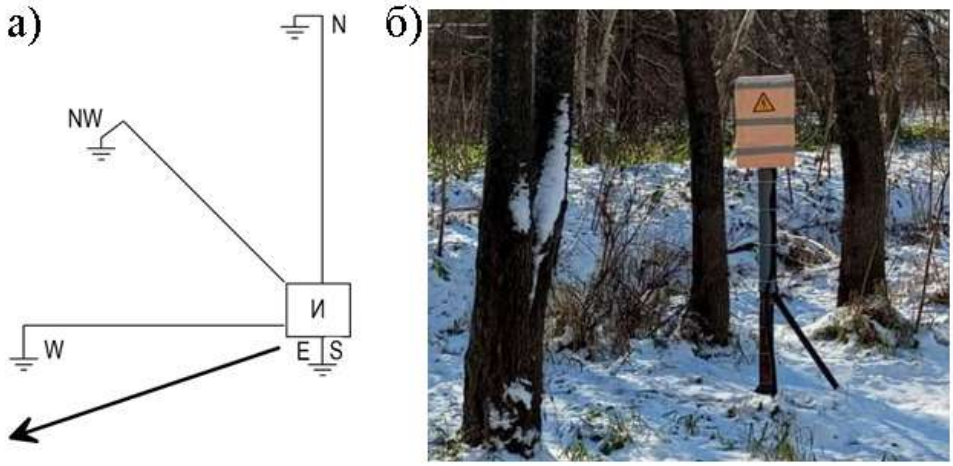


Рис. 2. Схема взаимной ориентации трех измерительных диполей на площадке ИМГиГ ДВО РАН (а) и внешний вид электроизмерительного модуля «ИМПульс» (б), (фото И.П. Дудченко). Обозначения диполей: N-S – направлен на север относительно общей точки, W-E – на запад, NW-SE – на северо-запад. Стрелка – направление на эпицентр землетрясения 09.08.2023, находящийся на расстоянии 7,6 км от пункта измерений. Длина диполей N-S, W-E и NW-SE – 100 м.

[Figure 2. Diagram of the mutual orientation of three measuring dipoles at the site of the INGG FEB RAS (a) and the appearance of the electrical measuring module "IMPulse" (b), photo by I.P. Dudchenko). Dipole designations: N-S – directed north relative to the common point, W-E – west, NW-SE – northwest. The arrow is the direction to the epicenter of the earthquake of 08/09/2023, located at a distance of 7.6 km from the measurement point. The length of dipoles N-S, W-E and NW-SE is 100 m.]

Каждый электрод представляет собой стальную трубу диаметром 50 мм с толщиной стенки 2 мм, забитую в грунт на 1,8 метра. Электросопротивление проводов самих диполей и линии до входа в каналы регистратора составило менее 10 Ом, что значительно меньше полного кажущегося сопротивления диполей, которое, согласно измерениям составляет 56 $\pm$ 2 Ом. Для получения данных измерений ЭТП в реальном времени, первичной обработки (фильтрации) аналогового сигнала, его преобразования в цифровые ряды и передачи на обработку и хранение применен измерительный узел, разработанный в Центре коллективного пользования ИМГиГ ДВО РАН, названный «Измерительный Модуль-Прототип», кратко «ИМПульс». Внешний вид модуля «ИМПульс» представлен на рис. 2б. Ядро модуля составляет аналого-цифровой преобразователь (АЦП) типа L-780M производства российской компании L-Card. Сигналы ЭТП с трех диполей (N-S, W-E и NW-SE), поступающие на вход АЦП, образовали три канала измерения относительно одной общей точки. Измерение

синфазного сигнала несколько увеличивало уровень помех, что учитывалось при обработке и интерпретации (если влияние помех не было скомпенсировано).

В качестве компьютера, управляющего работой АЦП, используется материнская плата TIGD-CI13 форм-фактора Mini-ITX с интегрированным процессором, имеющим пассивное охлаждение. Данные измерений сохраняются на жесткий диск в составе модуля «ИМПульс» и по внешнему запросу передаются по беспроводной сети Wi-Fi. Частота дискретизации по каждому каналу была 300 отсчетов в секунду. Это своего рода компромисс между требованием минимизации объема передаваемых данных и необходимостью очистки оцифрованного сигнала от всех помех с частотами ниже 150 Гц, в частности, помех на частоте 50 Гц. Кроме того, мы получаем хорошее разрешение для низкочастотного диапазона, который и интересует геофизиков.

Потребляемая модулем «ИМПульс» мощность составляет 20 Вт без обогрева и 35 Вт с обогревом (включением лампы накаливания). Диапазон рабочих температур указан исходя из технических характеристик платы L-Card и при условии подогрева и термостатирования в зимний период. Тепловая мощность, выделяемая процессором материнской платы, составляет 20 Вт, что обеспечивает в термоизолирующем кожухе превышение над окружающей температурой 18 ºС. Дополнительный подогрев позволяет использовать мощность до 35 Вт, что гарантированно обеспечивает работоспособность модуля даже в самый сильный мороз, возможный на юге Сахалина. Контроль температуры осуществляется с помощью термодатчика бытовой метеостанции по радиоканалу.

Электропитание модуля осуществляется по подземной линии через трансформаторную развязку, напряжение на выходе – 220 В. Возможности измерительного ядра (плата L-Card L-780), на базе которого был разработан модуль «ИМПульс», значительно превышают необходимые требования, и главным достоинством явилась его универсальность. Поэтому приведенные в табл. 1 технические параметры модуля «ИМПульс» говорят лишь о том, как именно было использовано измерительное ядро, безотносительно к фактическим возможностям платы L-780.

Таблица 1

Характеристики измерительного модуля «ИМПульс» [Characteristics of the measuring module "IMPulse"]

Характеристика	Значение
Количество каналов	3
Частота дискретизации	300 Гц
Разрядность	14 бит
Диапазон входных напряжений	±1,25 В
Диапазон рабочих температур с подогревом	-40. . . +35 ºС
Диапазон рабочих температур без подогрева	-13. . . +35 ºС
Габаритные размеры (ДхШхВ)	40х40х60 см
Масса	5 кг

Разброс уровней измеряемого сигнала находится в пределах 0-600 мВ. Кроме того, сигнал может менять полярность. При близком ударе молнии (менее 600 м) был зафиксирован быстрый переходный процесс, похожий на отклик линейного осциллятора с затуханием на ступенчатое возмущение. На рис. 3 показаны зависимости от времени разности потенциалов на всех трех диполях при этом процессе.

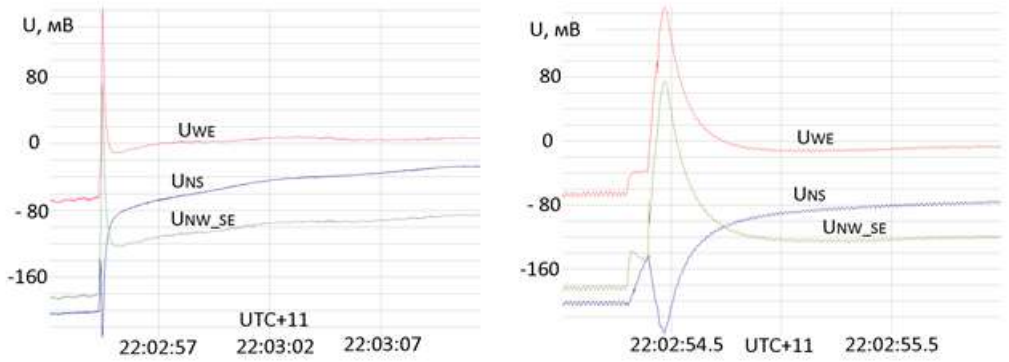


Рис. 3. Быстрый процесс, зафиксированный во время грозы 19 сентября 2023 г.
[Figure 3. A rapid process recorded during a thunderstorm on September 19, 2023]

В модуле «ИМПульс» для ограничения ширины спектра входного сигнала применен RC-фильтр третьего порядка, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) которого приведена на рис. 4а.

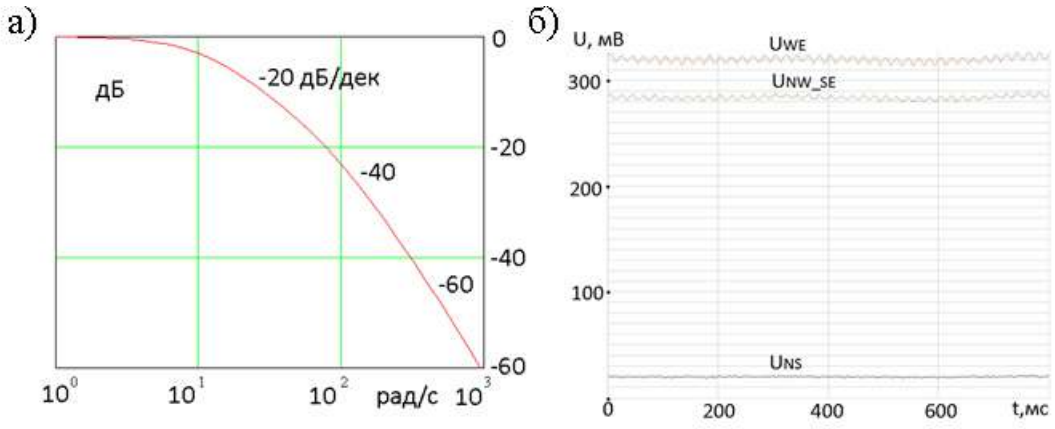


Рис. 4. АЧХ аналогового фильтра и примеры записей разницы потенциалов на электродах по трем каналам
[Figure 4. Frequency response of the analog filter and examples of recording potential differences on the electrodes on three channels]

Из данного графика видно, что на частоте 150 Гц (это 942.5 рад/с, $\lg(942/5) = 2.97$ декады) подавление сигнала составляет 60 дБ. Это означает, что гипотетическая помеха на данной частоте будет иметь амплитуду не более

0.1 % исходной. Это означает, что для гипотетической возможности искажения сигнала в НЧ-области в результате алиасинга, ВЧ-помеха должна иметь на частоте порядка 150 Гц амплитуду не менее 100 вольт на 100 миливольт искажения в НЧ-области в результате наложения спектров. Регистрируемый уровень сигнала никогда не превышал 600 мВ, что на два порядка меньше гипотетической помехи. Поэтому можно предположить, что дискретизация сигнала с частотой 300 Гц при использовании НЧ-фильтра с АЧХ, приведенной на рис. 4а, достаточна (и избыточна) для динамического измерения сигнала с верхней границей спектра, равной 1 Гц. Пример записи отфильтрованных сигналов, сделанной в период тестирования аппаратуры, показан на рис. 4б.

Также оценивалось динамическое воздействие: удары кувалдой на расстоянии около 150 м от общей точки давали отклик в силу хорошо известного сейсмоэлектрического эффекта [57, 58]. В другом эксперименте было отмечено изменение амплитуды сигнала при добавке в грунт у электродов малых объемов раствора электролита (хлорида натрия).

По сравнению с типовой аппаратурой, к примеру, измерительным модулем «ЭРА», модуль «ИМПульс» имеет расширенный климатический диапазон, беспроводную передачу данных, а также возможность первичной обработки сигнала. Модуль также имеет возможность расширения спектра и количества принимаемых сигналов.

При запуске непрерывных измерений ЭТП с 20.07.2023 первоначально ставилась задача настроить систему и произвести накопление данных в течение года или более для последующего анализа. Иногда исследователи отмечают, что для подобных измерений вообще необходимы многолетние наблюдения в части решения проблемы прогноза землетрясений. В основном это связано с относительно медленным накоплением данных по сейсмическим событиям. Но с этим связан, в первую очередь, и другой вопрос – а на каких расстояниях и какой силы сейсмические события (а точнее подготовка к их реализации) могут отражаться в рядах электромагнитных наблюдений? Точный ответ на этот вопрос невозможен (несмотря на выводы [26] о чувствительности в зоне 20 км, ведь Греция – весьма удаленный от нас регион). Естественно считать, что если признаки близкого землетрясения не “прослеживаются” в данных на пункте измерений ЭТП, то и удаленные события, скорее всего, результат не дадут. Именно поэтому, когда в 8 километрах от нашего пункта измерений в городе Южно-Сахалинск произошло землетрясение весьма приличной (для сейсмичности Центрально-Сахалинского разлома) магнитуды ($M = 3{,}8$), стало очевидно, что это реальный шанс для пионерского исследования. Сейсмическое событие произошло в 5 часов 14 минут 9 августа 2023 г. ($ML = 3{,}8$) сахалинского времени (UTC+11). Гипоцентр ЗЛТ находился в пригороде г. Южно-Сахалинска (47,02° с.ш., 142,56° в.д.) на глубине 6 км. В ближайшем населенном пункте (пос. Синегорск) сотрясения ощущались на уровне интенсивности 4 баллов, т.е. это довольно сильное землетрясение около пункта измерений.

Результаты исследования

В начале исследования рассматривались часовые записи ЭТП, но потом остановились на сутках как оптимальных для производительности компьютеров, на которых выполнялись расчёты по фильтрации в пакете Origin Pro 2021. В высокочастотной части спектра в городских условиях уровень шума может содержать помехи от различного рода источников, поэтому анализ был сфокусирован на низкочастотной области спектра (до 1 Гц).

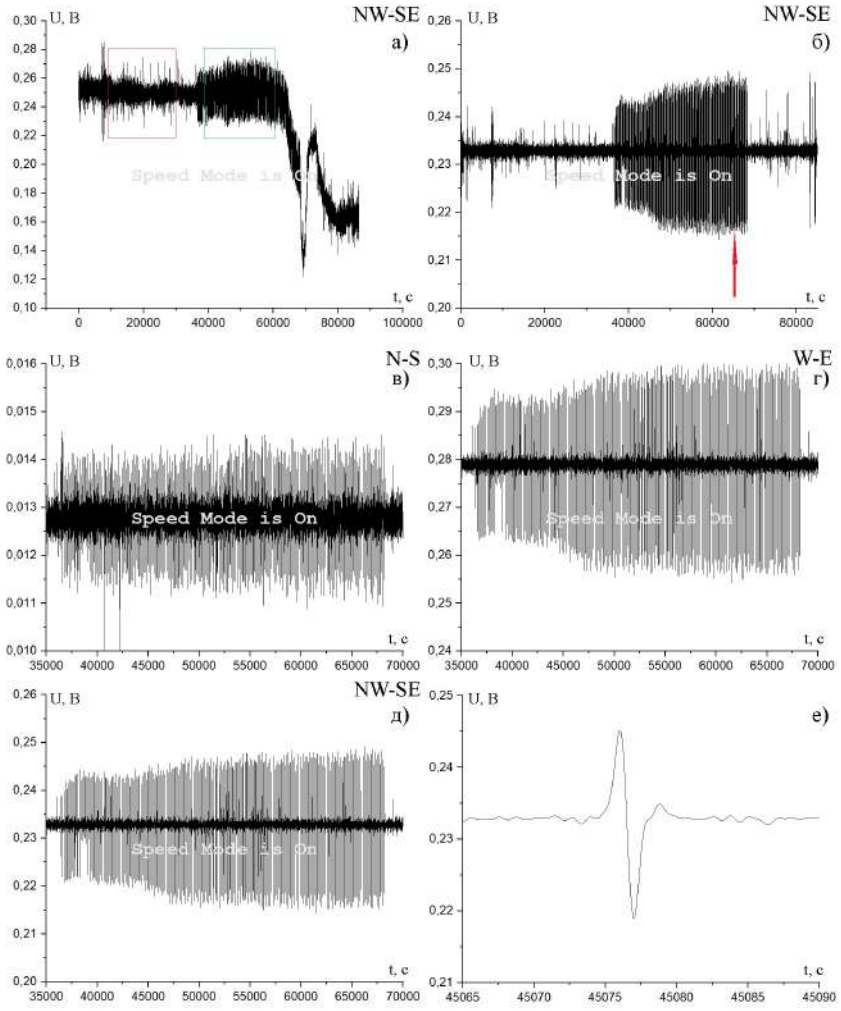


Рис. 5. а) Запись сигнала на канале NW-SE с 11 часов 8 августа по 11 часов 9 августа 2023 года, б) запись сигнала (а) после полосового фильтра 0,01-1 Гц, в) - д) Записи с каналов N-S, W-E, NW-SE с 20 часов 45 минут 8 августа до 6 часов 25 минут 9 августа, е) одиночный сигнал из серий в) - д).

[Figure 5. a) Recording a signal on the NW-SE channel from 11 a.m. on August 8 to 11 a.m. on August 9, 2023, b) recording a signal (a) after a bandpass filter of 0.01-1 Hz, c) - e) Recordings from channels N-S, W-E , NW-SE from 20 hours 45 minutes on August 8 to 6 hours 25 minutes on August 9, f) a single signal from series c) - e).]

На рис. 5а показана запись сигнала на канале NW-SE с 11 часов 8 августа до 11 часов 9 августа (запись без применения фильтров). В этот период произошло рассматриваемое нами землетрясение. На записи видно, что есть усиление сигнала в ночной период времени, но также видно, что фильтрация необходима ещё на сверхнизких частотах для удаления трендов. После применения полосового фильтра 0,01-1 Гц (рис. 5б) стало видно, что перед землетрясением в ночное время суток наблюдается серия импульсов. Также было определено, что эта серия идёт по всем каналам, но с разной амплитудой (рис. 5в-д). При внимательном рассмотрении выяснилось, что это серии двуполярных сигналов длительностью 4-5 секунд с периодом следования 132-133 секунды (рис. 5е). Серия наблюдалась приблизительно с 21 часа 8 августа до 5 часов 55 минут 9 августа. Интересно наличие зависимости амплитуды сигналов от ориентации диполей. Наибольшая амплитуда у сигналов на диполе W-E, который почти параллелен азимуту на землетрясение 9 августа. Наименьшая же амплитуда на диполе N-S, который тому же азимуту почти перпендикулярен (рис. 2, рис. 5).

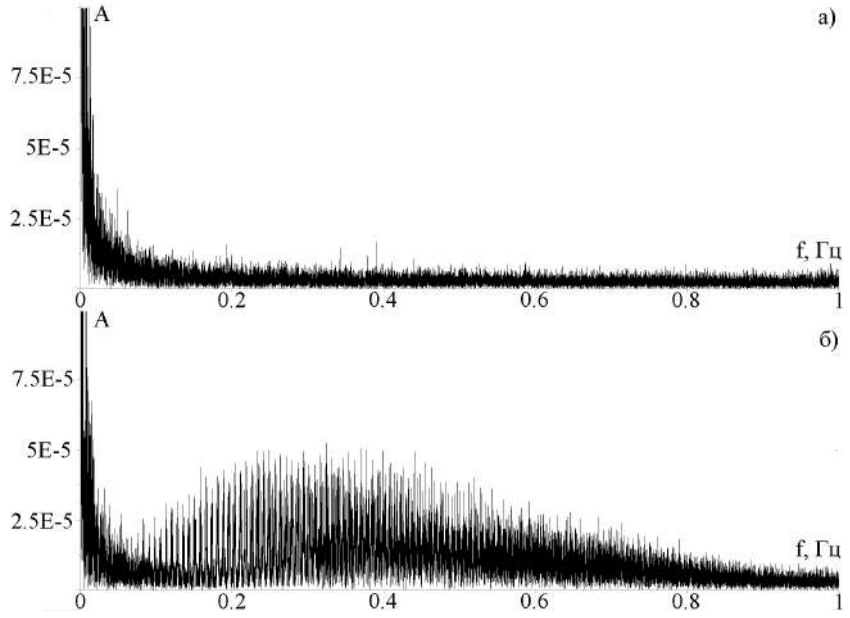


Рис. 6. Спектр записи (без программной фильтрации) NW-SE для периода, когда серии импульсов отсутствуют (а) и для периода, в котором они присутствуют (б)

[Figure 6. Recording spectrum (without software filtering) NW-SE for the period when there are no pulse trains (a) and for the period in which they are present (b)]

Общий вид и регулярность следования сигнала на записи проявляли признаки техногенной наводки, поэтому для проверки был построен также спектр записи (рис. 6). Для такой проверки были рассмотрены амплитудно-частотные спектры в периоды, когда импульсов нет и наоборот. На рис. 5а показаны участки, для которых строились спектры. Спектральный состав в рабочем диапазоне выше 1 Гц оказался идентичным для обоих случаев и в нём выделяются максимумы на

частоте 50 Гц и её гармоники. На рис. 6 показаны спектры для диапазона частот от 0 до 1 Гц.

При рассмотрении спектрального состава записи в низкочастотной области заметных максимумов на периодах 130-135 секунд обнаружено не было, что означает отсутствие четкого периода следования обнаруженного сигнала. Более того, в период регистрации серии импульсов (рис. 6б) наблюдается серия максимумов на частотах от 0,1 до 0,5 Гц и это, вероятно, означает, что при обработке сигналы воспринимаются одиночными и размываются в спектре (рис. 6б).

Дальнейшая обработка записей ЭТП в течение всего периода регистрации проводилась, чтобы исключить случайное совпадение серии сигналов неизвестной формы со временем землетрясения. Для этого важно было получить данные в периоды, когда землетрясений рядом с пунктом регистрации нет или когда там произошли другие землетрясения. В данной работе анализировались суточные записи с 20 июля 2023 года по 10 февраля 2024 года (также были обработаны несколько суток июня, когда аппаратура не работала в постоянном режиме). Для определенности мы взяли территорию вокруг полигона с радиусом 0,25 градуса (примерно 20-30 км по широте и долготе, координаты полигона 46,95° с.ш., 142,72° в.д.). Такой выбор мы сделали по аналогии с работами греческих коллег, чья методика измерений нам наиболее близка, и которые наблюдали SES (серии электромагнитных сигналов Земли) в 20-километровой области [26]. Землетрясения с $M > 3$ представлены в табл. 2, и фактически их всего два. Сейсмические данные были получены из еженедельных каталогов землетрясений Сахалина и Курильских островов СФ ФИЦ ЕГС РАН.

Таблица 2

Землетрясения с $M > 3$ в радиусе 0,25° от пункта измерений в период исследования [Earthquakes with $M > 3$ within a radius of 0.25° from the measurement point during the study period]

№	Дата	Время	Координаты	Глубина, км	Магнитуда ML
1	09.08.2023	05:14:34	47,02° с.ш., 142,56° в.д.	6	3,8
2	19.09.2023	02:49:33	47,12° с.ш., 142,61° в.д.	9	3,1

В пределах Южно-Сахалинска землетрясения умеренной магнитуды редкость, а такое же, как 9 августа, вероятно, вообще произойдёт через несколько лет. Но удачно совпало, что в 2 часа 49 минут 19 сентября произошло землетрясение почти на таком же удалении, что и первое, хоть и значительно слабее с $M = 3{,}1$. Итого для анализа есть всего два землетрясения и оба рядом с Южно-Сахалинском (много ближе установленной нами границы в 0,25 градусов). При этом землетрясение 9 августа 2023 г. значительно сильнее второго, которое произошло 19 сентября 2023 г. В целом, этих данных достаточно, чтобы посмотреть пустые периоды (без землетрясений) и оценить обстановку вокруг гипоцентра второго, но более слабого.

Результаты исследований показали, что серии сигналов наблюдались каждую ночь вплоть до 11 сентября, при этом днём серий гарантированно не было. Начало

следования серии и конец серии совпадают с “гражданскими сумерками”, то есть зависят от захода и восхода солнца. К сожалению, непрерывных данных до 20 июля нет, а потому точно сказать, когда такие серии появились впервые, мы не можем. В то же время несколько суток из июня месяца мы всё же включили, там серии также присутствуют, но есть детали, о которых позже расскажем.

Получается, что такие серии наблюдались почти 2 месяца, но что это за сигналы, откуда они появились и почему наблюдаются в ночное время? Это могут быть сигналы техногенной природы. Например возможна ситуация высокочастотной помехи, которая наводится на длинную измерительную линию (например от мощной радиостанции). Известно, что в ночное время прохождение радиосигналов улучшается, по сравнению с дневным временем, а интенсивность таких сигналов в точке приема возрастает. Однако такого рода наводки не могут терять или набирать интенсивность от суток к суткам, они устойчивы. Даже если аппаратура их пропускает (наложение спектров), то их амплитуда будет стабильной во времени. Но допустим, алиасинг все же имеет место. Очевидно, что с удалением от частоты 150 Гц в сторону НЧ амплитуда алиасинга должна, по крайней мере, не возрастать (на самом деле она ещё и убывает). Допустим, у нас реализовался наихудший сценарий, т.е. амплитуда не возрастает. Полезный сигнал, частота которого лежит в области менее 1 Гц, имеет амплитуду около 30 мВ. Это означает, что на двух пассивных электродах, расположенных в 100 м друг от друга в пригородной лесопарковой зоне, существует потенциал, равный 30 В на частоте 150 Гц. Если предположить гипотетический электротранспорт, то ближайшая станция метро находится в 4000 км от места измерений (г. Новосибирск), а ближайшая линия трамвая – на удалении 700 км (г. Хабаровск). Промышленных производств поблизости нет, а завод СПГ находится в 60 км, причем использует собственную генерацию, пять газотурбинных генераторов суммарной мощностью 135 МВт. Остальная сеть Сахалинской области это исключительно бытовые потребители, о чем говорит общий коэффициент мощности сети, превышающий 0,9, что абсолютно нехарактерно для промышленных потребителей. Институт находится более чем в 5 км от официальной городской черты Южно-Сахалинска, в планировочном районе Ново-Александровск, в той его части, где располагается преимущественно частный сектор. Принимая во внимание вышеизложенное, частота дискретизации 300 Гц является многократно избыточной (в 300 раз превышает верхнюю границу исследуемой области частот). Также нет никаких зацепок по поводу работы регистрирующей системы (например, неисправный блок питания компьютера или что-то иное) ибо система работает в неизменной конфигурации уже 9 месяцев, однако сигналы наблюдались только 2 из них, причём в ночное время и не имели постоянных параметров. Хотелось бы попробовать увязать появление таких сигналов с метеоусловиями, однако они слишком долго шли, а в очевидный день, когда шли грозовые разряды (19 сентября 2023 года) не наблюдались вовсе.

Теперь о взаимосвязи с землетрясением, которое попало в период, когда серии сигналов были зарегистрированы.

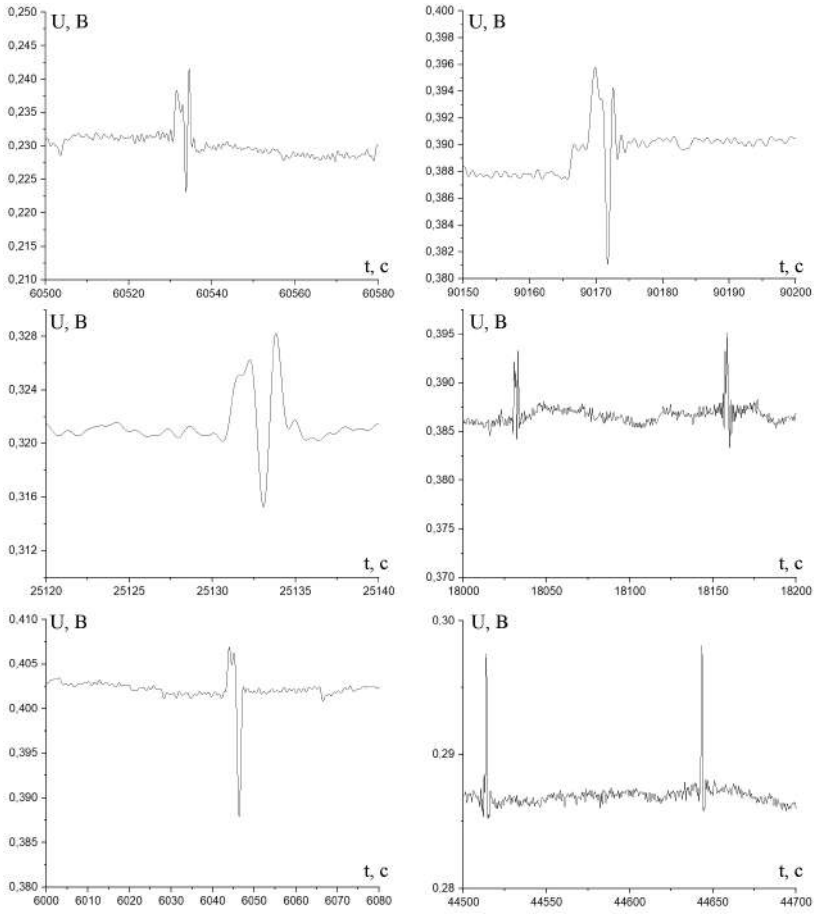


Рис. 7. Формы сигналов, составляющих серии
[Figure 7. Waveforms that make up the series]

Период следования сигналов варьируется от 130 до 150 секунд, а форма сигналов от серии к серии (да и внутри самой серии) может отличаться. Так, в сериях отмечены разные “паразитные” формы сигнала (рис. 7), обнаруженного в ночь перед землетрясением (рис. 5). Амплитуда и длительность сигнала также варьируется: к примеру, амплитуда на канале NW-SE от 10 до 30 мВ. На первой проанализированной записи (рис. 5) мы увидели характерный высокоамплитудный сигнал, идущий почти непрерывной серией, и это как-то не билось с тем, что пришлось наблюдать в других суточных записях. Анализ серий показал, что в качестве и поведении сигнала перед землетрясением есть определенная система. Обычная серия, а это с 20 июля по 3 августа и с 12 августа по 11 сентября, наполнена сигналами, которые имеют широкий разброс периодов следования (от 130 до 150 секунд), и ту форму, которая показана на рис. 5 практически не повторяют (примеры на рис. 7). Амплитуда сигналов в это время небольшая, и, например, на канале N-S эти серии немного превышают шум, а на двух других каналах хорошо различимы. Однако в период с 4 по 10 августа наблюдается существенная трансформация, как в самих сигналах, так и в сериях из них.

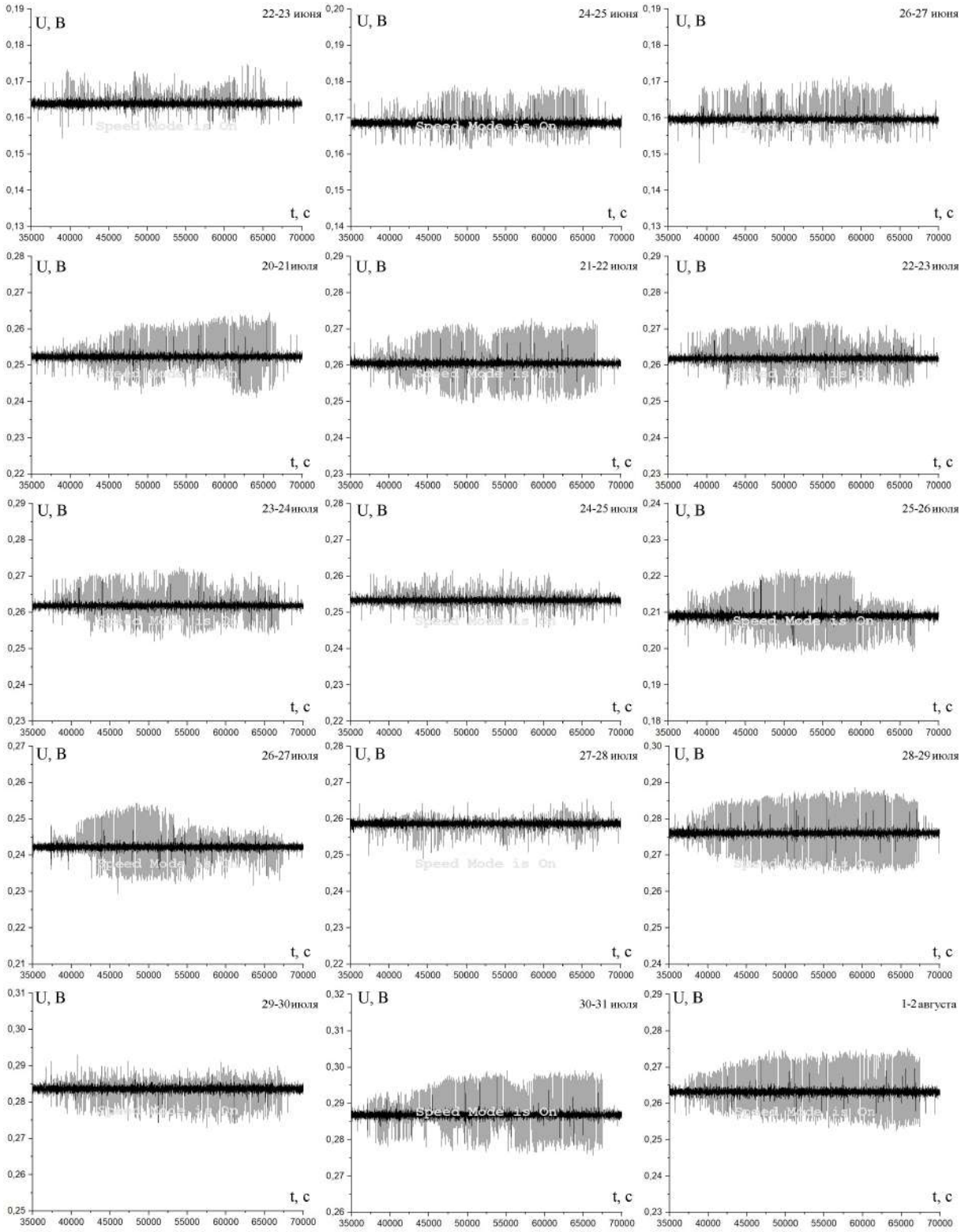


Рис. 8. Записи 22-23, 24-25, 26-27 июня и с 20 июля по 2 августа 2023 г. на канале NW-SE, период с 20 часов 45 минут до 6 часов 25 минут

[Figure 8. Recordings 22-23, 24-25, 26-27 of June and from July 20 to August 2, 2023 on the NW-SE channel, period from 20 hours 45 minutes to 6 hours 25 minutes]

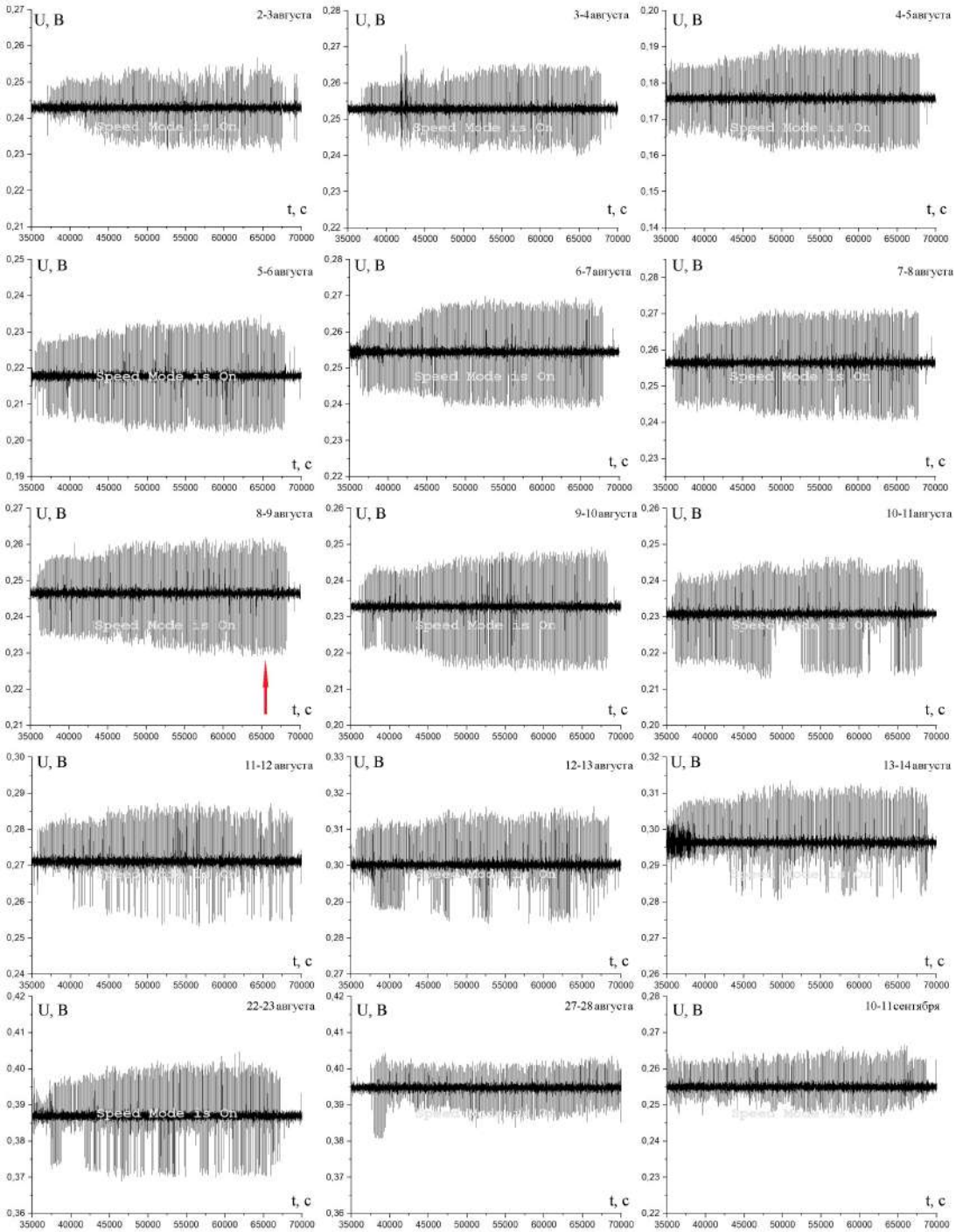


Рис. 9. Записи со 2 по 14 августа, а также 22-23, 27-28 августа и 10-11 сентября 2023 г. на канале NW-SE, период с 20 часов 45 минут до 6 часов 25 минут. Красной стрелкой показано землетрясение 9 августа 2023 г.

[Figure 9. Recordings from August 2 to 14, as well as August 22-23, 27-28 and September 10-11, 2023 on the NW-SE channel, period from 20 hours 45 minutes to 6 hours 25 minutes. The red arrow shows the earthquake on August 9, 2023.]

Для наглядности на рис. 8 и рис. 9 (продолжение рис. 8) мы покажем записи с канала NW-SE в “ночное“ время с 20 часов 45 минут до 6 часов 25 минут посуточно. На рис. 8 первые три записи из июня месяца, когда проводилась настройка аппаратуры, и данных для анализа практически нет. Однако на них видно, что в 20х числах июня сигнал очень слабый и нестабильный. Все графики сделаны в одном масштабе времени и напряжений для того чтобы было легче сравнивать (вся ось Y – 0,06 В).

Амплитуда сигнала от суток к суткам постепенно увеличивается, пропуски пропадают, форма становится такой же, как и на рис. 5 по всей серии, особенно это хорошо видно уже к 5 августа. Сигнал идёт к этому времени с периодом 132-133 секунды (разброс много меньше, чем в другие дни), формы не меняет, и это происходит на всех каналах. А вот с 10 августа серии начинают сбиваться. Появляются однополярные и несимметричные варианты сигнала, растёт период между сигналами, амплитуда падает до обычных значений, то есть, в два-три раза. Уже в конце августа и в первой половине сентября серии полностью состоят из слабых искаженных сигналов. Вечером 11 сентября была замечена последняя короткая серия (рис. 10), а с 12 сентября серии сигналов уже отсутствовали на всех каналах (вплоть до последних обработанных суток 10 февраля 2024 года).

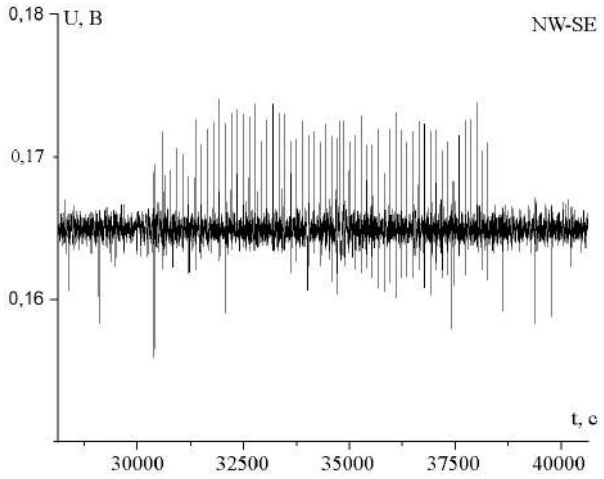


Рис. 10. Последняя (неполная) серия квазипериодических сигналов, запись с канала NW-SE. Серия продолжалась с 19:53 до 22:05 11 сентября 2023 года

[Figure 10. The last (incomplete) series of quasi-periodic signals, recording from the NW-SE channel. The episode lasted from 19:53 to 22:05 on September 11, 2023]

Мы видим характерные изменения серий сигналов ЭТП, которые происходят в течение 5-6 дней на периоде наблюдений больше 200 дней. Примечательно, что отмеченные выше изменения произошли на пункте, который находился в ближней зоне очага землетрясения, что, несомненно, вызывает интерес. В будущем хотелось бы увидеть в ближней зоне ещё одно землетрясение сопоставимой магнитуды, но предвидим, что это может произойти через несколько лет.

Если же предположить что начало серий приходится на первую половину июня, когда они очень слабые, то выходит, что “раскачка” сигналов заняла около двух месяцев, а затухание один месяц. Также отмечаем отсутствие корреляций в период, когда произошло второе землетрясение 19 сентября, во время которого серий не обнаружено вовсе (рис. 11).

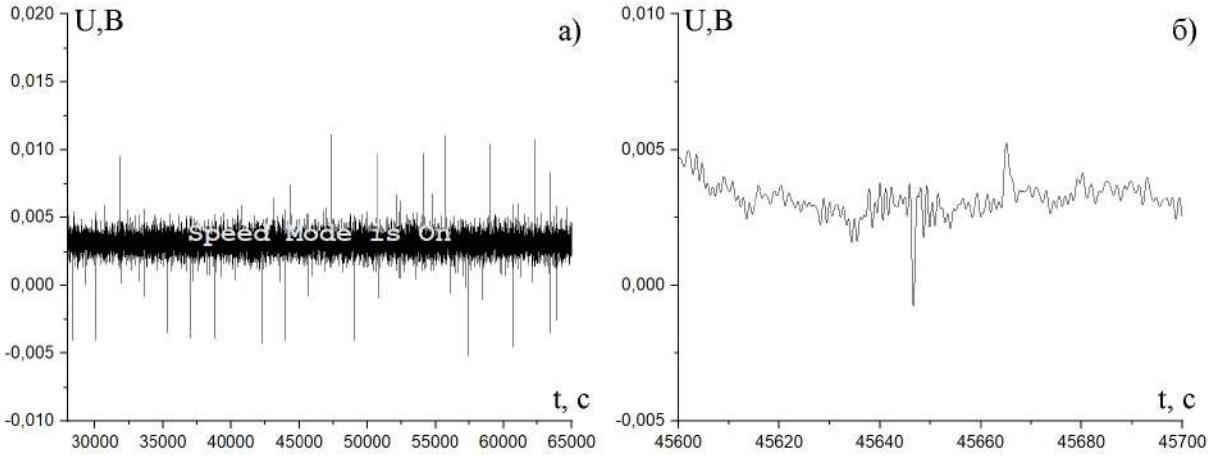


Рис. 11. а) Запись с канала NW-SE в ночь на 18-19 сентября 2023 г., б) увеличенный фрагмент записи а)

[Figure 11. a) Recording from the NW-SE channel on the night of September 18-19, 2023, b) enlarged fragment of recording a)]

Обсуждение

При обсуждении соответствия полученных результатов с другими работами приходится оговорить, что непосредственное сопоставление затруднено из-за объективных факторов. Во-первых, много работ по измерению магнитного поля, а вот по измерению электрических потенциалов совсем немного. Во-вторых, большинство работ не раскрывают техники измерений [9, 11, 26], а в тех, где это делают, возникает очевидный барьер – они не могут быть объектом для сопоставления чисто технически. В ранних исследованиях при отсутствии современных систем регистрации и накопления данных, при желании проводить наблюдения удаленно от населённых пунктов, возможности были сильно ограничены. Ожидая полезный сигнал перед сейсмическими событиями в низкочастотной области, исследователи устанавливали удобную и, как им казалось, достаточную частоту наблюдений (дискретность измерений), которая не превышала 10 Гц [8, 27, 28, 37, 46], а, в основном, была ниже 1 Гц. Не нужно быть большим специалистом, чтобы понять, что прописать сигналы длительностью 4-5 секунд с такой дискретностью невозможно (мы же это проверили процедурой децимации, сигналы пропадали). Учитывая, что они наблюдались ночью, которая и так по среднему уровню шума намного спокойней

чем день, можно предположить, что интегрально если они и видели обнаруженный нами эффект, то в совершенно другой форме. Наиболее близкие по методике инструментальных наблюдений (не регистрации или обработке) работы были проведены греческими учеными в далеком 1984 году [26]. В 2013 году они выпустили, вероятно, финальный обзор работ [59], особенно с учётом того, что желаемая эффективность метода так и не была достигнута [60]. В данной работе весьма детально рассказывается практически обо всём, за исключением техники регистрации, которая и определяет возможность сопоставления с нашими результатами. Однако некоторые сравнения всё же можно провести.

Во-первых, они пишут, что для реализации метода VAN необходимо минимум два перпендикулярных диполя, N-S и W-E (мы, в общем-то, так и сделали, но есть ещё один дополнительно). В наших же результатах серии сигналов-предвестников хорошо регистрируются на всех трёх диполях (даже на том, который не направлен по азимуту на эпицентр). Причём они говорят, что чем больше диполей, тем лучше, и дают этому обоснование – это помогает отличать сигналы из Земли от прочих сигналов. Во-вторых, в работе [59] упоминается следующее: “Поскольку предсейсмический сигнал может длиться некоторое время, например, 10 минут, а затем не появляться снова до начала землетрясения, записи должны быть непрерывными, то есть 24 часа в сутки”, что уже однозначно никак не соотносится с нашим результатом. Нет в их работах и никаких свидетельств об избирательности SES ко времени суток. Ну и в-третьих, это вопрос по выбору пункта для наблюдений. Они пишут: “Регион-кандидат должен иметь очень низкий уровень “электрического” шума, что означает, что он должен находиться на значительном расстоянии от “искусственных” источников электроэнергии (например, электрических установок в домах, на фабриках и т. д.)”. Это категорически к нам не относится, ибо мы определили для полигона самый “шумный” вариант размещения и при этом выделили полезный сигнал. Впрочем, какие могли бы быть помехи, если подавляющее большинство техногенных электромагнитных наводок регистрируются в высокочастотной области, которую мы убираем фильтром. Ну и наконец, самое главное, в работах П. Варотсоса (да и не только у него) мы не видели сигналов, не видели информации по технике регистрации, включая важную для нас частоту дискретизации, и методы обработки временных рядов. Зато есть работы, где сигналы можно посмотреть [6], но там нет уже проблемы прогноза в целом. Догадаться о деталях измерений зачастую можно лишь по косвенным признакам, таким как, например, в работах П. Варотсоса и др., передаче данных с пункта наблюдений в датацентр посредством телефонной связи. Понятно, что большие объёмы в 1984 году передавать таким способом было просто невозможно. Самое интересное, что с 1984 года, когда впервые прозвучал VAN, прошло достаточно много времени и средства регистрации значительно усовершенствовались, однако в относительно свежих работах мы не увидели попыток “тяжелых” измерений с высокой частотой дискретизации. Если кто-то и пользовался большой дискретностью, то только для того, чтобы смотреть высокочастотные сигналы. Так, в обзорной работе [6],

где японские исследователи подводят итог своих работ с 1989 года, упоминается, что до 2011 года у них не было технической возможности регистрировать высокочастотные сигналы. Но как только возможность появилась, они сделали на входе сигнала с подземной антенны полосовые фильтры, в частности 0-0,7 Гц и 1000-9000 Гц. То есть дискретность устанавливалась в соответствии с потребностью фильтра, в первом случае не более 2 Гц, а во втором кратного порядка 9000 Гц. Получается, что для низкочастотных измерений дискретность маленькая (с нашей позиции по волновой форме ночных сигналов), а там, где дискретность большая, низкие частоты уже вырезаны. Несмотря на разные методики (у них подземная антенна, а у нас диполь) справедливости ради кое-где мы с ними всё-таки "пересеклись".

Мы зарегистрировали сигнал, похожий на японский GUV [6], который у них начинался по длительности от 20 секунд. С той разницей, что наши "гувоподобные" сигналы были короче, появлялись преимущественно в дневное время, шли небольшими сериями (максимум в несколько часов), имели смену полярности, а кроме того, регистрировались без какой-либо привязки к нашим сериям и землетрясениям (пример на рис. 12).

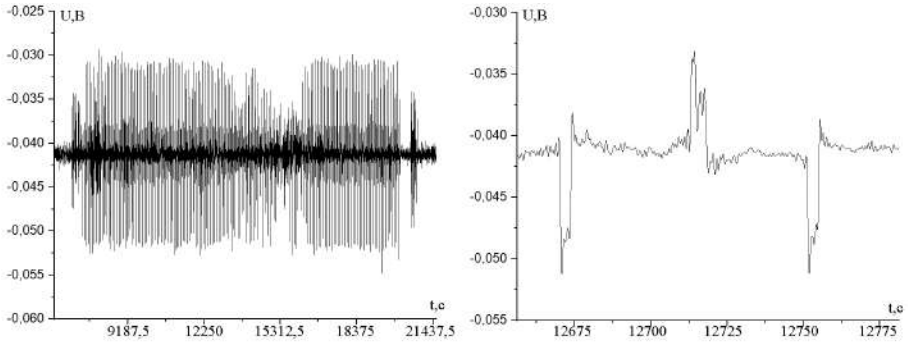


Рис. 12. а) Серия GUV на канале NW-SE с 12:29 по 16:00 2 октября 2023 г., б) увеличенный фрагмент записи а)

[Figure 12. a) GUV series on NW-SE channel from 12:29 to 16:00 October 2, 2023, b) enlarged fragment of recording a)]

Кажется очевидным, что регистрация широкополосного сигнала с хорошей полосой пропускания и последующей программной фильтрацией выглядит более предпочтительно чем то, что делает подавляющее большинство исследователей. Почему же так происходит? Вероятно, потому что это шло в разрез с устоявшейся привычкой экономии ИТ ресурсов при геофизическом мониторинге, что не соответствует современному состоянию дел в этой области. Действительно, в настоящее время стало критически мало исследователей, а не ИТ ресурсов. К тому же накопилась психологическая усталость от заглохших исследований VAN и прочих дискуссионных подходов к наблюдениям и интерпретации ЭТП, а отсюда сомнения в перспективах этого направления.

В целом, нужно отметить, что наши работы нисколько не противоречат духу исследования «VAN», а скорее развивают его в новых подходах к регистрации и

обработке данных. Мы понимаем, что сравнение результатов работы нескольких месяцев, да ещё и на одном лишь пункте измерений, не выдерживает никакой критики, однако есть одно обстоятельство. Позволим себе напомнить, что пилотные работы в любой области науки всегда обладают иммунитетом к избыточной требовательности специалистов и достойны своей ниши до той поры, когда их результаты будут полностью подтверждены или опровергнуты.

Обсуждая перспективы для дальнейшего исследования ЭТП, полагаем, что основной упор будет делаться на пополнение базы данных, а для этого нужны новые землетрясения. Для оценок сроков накопления данных можно рассмотреть частоту появления сейсмических событий в нашей зоне на большем периоде времени. Ниже приведена таблица землетрясений с 1997 по 10 февраля 2024 года (табл. 3).

Таблица 3

Землетрясения в радиусе 0,25° от пункта измерений (с M > 3,8) за 1997-2024 гг. по данным СФ ФИЦ ЕГС РАН [Earthquakes within a radius of 0.25° from the measurement point (with M > 3.8) for 1997-2024 according to the data of the SF Federal Research Center EGS RAS]

№	Дата	Время	Координаты	Глубина, км	Магнитуда ML
1	08.08.2023	18:14:37	47,01° с.ш., 142,62° в.д.	10	3,8
2	07.04.2017	12:11:11	47,03° с.ш., 142,6° в.д.	13	4,2
3	08.06.2017	19:08:06	46,97° с.ш., 142,28° в.д.	10	4,5
4	25.07.2015	14:45:15	47,02° с.ш., 142,89° в.д.	2	3,8
5	25.05.2013	06:19:21	47° с.ш., 142,5° в.д.	10	4
6	05.09.2013	09:53:51	46,97° с.ш., 142,5° в.д.	10	3,8
7	24.10.2012	00:53:46	47,11° с.ш., 142,65° в.д.	10	4,2
8	03.02.2011	01:08:02	46,85° с.ш., 142,54° в.д.	10	4,7
9	22.08.2011	01:36:26	47,18° с.ш., 142,73° в.д.	10	3,7
10	05.09.2011	06:25:23	46,82° с.ш., 142,9° в.д.	5	4,3
11	17.10.2011	06:56:41	46,85° с.ш., 142,8° в.д.	10	4,6
12	19.12.2011	07:37:48	46,86° с.ш., 142,93° в.д.	10	4,2
13	04.10.2008	09:20:05	47,16° с.ш., 142,65° в.д.	10	4,1
14	20.03.2007	13:25:01	46,9° с.ш., 142,54° в.д.	10	3,9
15	27.12.2006	13:38:40	47,1° с.ш., 142,6° в.д.	10	3,8

Судя по табл. 3, землетрясения с такой магнитудой (M > 3,8) – не частые события в нашей зоне ответственности. Основное количество ЗЛТ (8 из 15) приходится на период с 2011 по 2013 год и, в целом, имеет отношение к процессам за пределами Сахалина. Все они, по большому счёту, вызваны глобальным перераспределением нагрузки на общих для нас с Японией региональных разломах после землетрясения Тохоку в марте 2011 года. Сейчас в данном районе с 2017 по 2023 год наблюдается дефицит землетрясений среднего класса, подобный тому, что наблюдался здесь с 1997 по 2006 гг. То землетрясение, которое мы увидели, произошедшее в августе 2023 года (M = 3,8), - фактически первое спустя 6 лет

после 2017 года. В настоящее время рассматривается возможность развертывания пунктов регистрации в других сейсмически активных районах о. Сахалин.

Заключение

Первые результаты регистрации электротеллурических потенциалов в ближней зоне очага землетрясения в южной части о. Сахалин выявили следующее:

- Серии квазипериодических сигналов электротеллурического поля присутствуют каждую ночь на протяжении от 20 июля до 11 сентября 2023 г., длительность серий колеблется в районе 8-9 часов.
- Сигналы ЭТП идут с периодом следования от 130 до 150 секунд, имеют разную форму, которая является производной от некоего оригинального синусоподобного сигнала.
- Амплитуда сигналов в большинстве суток небольшая, на канале N-S немного выше шума (порой на уровне шума, около 1 мВ), а на каналах NW-SE и W-E хорошо различимы на уровне около 10 мВ.
- В период с 5 по 10 августа в волновых формах сигналов, составляющих серии, отмечен рост амплитуды (которая к этому времени в три раза превышает обычный уровень), уменьшается разброс в периоде следования сигнала до 132-133 секунд (рис. 5), состав серий становится однородным, искаженных сигналов практически нет, следует синусоидальный сигнал правильной формы.
- С 11 августа и в течение нескольких недель серии состоят из сигналов разнообразных волновых форм (рис. 7) небольшой амплитуды, а после 11 сентября серии исчезают (их нет по 10 февраля 2024 года, к моменту подачи статьи).
- Появление серий квазипериодических сигналов может быть связано с подготовкой землетрясения 9 августа 2023 года, однако для доказательства нужно больше эпизодов, поскольку перед землетрясением 19 сентября 2023 г. (M = 3,1) серий сигналов не обнаружено.

Список литературы

1. Milne J. Earthquakes in connection with electric and magnetic phenomena, *Trans. Seismol. Soc. Japan*, 1890. vol. 15, pp. 135-163.
2. Довбня Б. В. О результатах дистанционного наблюдения импульсных ультранизкочастотных электромагнитных сигналов, обнаруживаемых за минуты до землетрясения, *Жизнь Земли*, 2021. Т. 43, № 3, С. 304-313 DOI: 10.29003/m2435.0514-7468.2020_43_3/304-313.
3. Wang C., Christman L., Klemperer S., Glen J., McPhee D., Chen B. Assessment of a claimed ultra-low frequency electromagnetic (ULFEM) earthquake precursor, *Geophys. J. Int.*, 2022. vol. 229, no. 3, pp. 2081-2095 DOI: 10.1093/gji/ggab530.
4. Садовский М. А. *Электромагнитные предвестники землетрясений.* М.: Наука, 1982. 88 с.

5. Зубков С. И. *Предвестники землетрясений.* М.: ИФЗ РАН, 2002. 140 с.

6. Fujinawa Y., Noda Y. Progress of Applied Seismo-Electromagnetism, *Open J. Earthq. Res.*, 2020. vol. 9, no. 1, pp. 1-18 DOI: 10.4236/ojer.2020.91001.

7. Кособоков В. Г. *Прогноз землетрясений: основы, реализация, перспективы.* М.: ГЕОС, 2005. 179 с.

8. Паровышный В. А., Сохатюк Ю. В., Паровышный Д. В., Веселов О. В., Кочергин Е. В. О подходах к решению некоторых проблем оперативного прогноза сейсмических событий, *Геосистемы переходных зон*, 2019. Т. 3, № 1, С. 5-18 DOI: 10.30730/2541-8912.2019.3.1.005-018.

9. Паровышный В. А., Богомолов Л. М., Сохатюк Ю. В., Паровышный Д. В. Проблемы оперативного прогноза сейсмических событий. Предлагаемые пути решения, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2021. Т. 35, № 2, С. 120-132 DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-120-132.

10. Гриб Н. Н., Гриб Г. В., Колодезников И. И. О краткосрочном прогнозе землетрясений по геофизическим предвестникам в Южной Якутии, *Международный научно-исследовательский журнал*, 2021. № 9-1 (111), С. 121-127 DOI: 10.23670/IRJ.2021.9.111.020.

11. Гриб Н. Н., Трофименко С. В. Регистрация электромагнитного излучения (ЭМИ) в период землетрясений, *Горный информационно-аналитический бюллетень*, 2006. № S10, С. 197-207.

12. Довбня Б. В., Пашинин А. Ю., Рахматулин Р. А Краткосрочные электромагнитные предвестники землетрясений, *Геодинамика и тектонофизика*, 2019. Т. 10, № 3, С. 731-740 DOI: 10.5800/GT-2019-10-3-0438.

13. Han P., Hattori K., Zhuang J., Chen C.-H., Liu J.-Y., Yoshida S. Evaluation of ULF seismo-magnetic phenomena in Kakioka, Japan by using Molchan's error diagram, *Geophys. J. Int.*, 2017. vol. 208, no. 1, pp. 482–490 DOI: 10.1093/gji/ggw404.

14. Bleier T., Dunson C., Maniscalco M., Bryant N., Bambery R., Freund F. Investigation of ULF magnetic pulsations, air conductivity changes, and infra red signatures associated with the 30 October Alum Rock M5.4 earthquake, *Nat. Hazards Earth Syst.*, 2009. vol. 9, no. 2, pp. 585–603 DOI: 10.5194/nhess-9-585-2009.

15. Bleier T., Dunson C., Alvarez C., Freund F., Dahlgren R. Correlation of pre-earthquake electromagnetic signals with laboratory and field rock experiments, *Nat. Hazards Earth Syst.*, 2010. vol. 10, no. 9, pp. 1965–1975 DOI: 10.5194/nhess-10-1965-2010.

16. Жамалетдинов А. А., Митрофанов Ф. П., Токарев А. Д., Шевцов А. Н. Влияние лунно-суточных приливных деформаций на электропроводность и флюидный режим земной коры, *Докл. Акад. Наук*, 2000. Т. 37, № 2, С. 235–239.

17. Авагимов А. А., Зейгарник В. А., Файнберг Э. Б. О пространственно-временной структуре сейсмичности, вызванной электромагнитным воздействием, *Физ. Земли*, 2005. № 6, С. 55–65.

18. Александров П. Н., Модин И. Н. О системном подходе к анализу данных электрометрического мониторинга, *Инженерные изыскания*, 2015. № 3, С. 42-50.

19. Мороз Ю. Ф., Гонтовая Л. И. О глубинном строении Южной Камчатки по геофизическим данным, *Геодинамика и тектонофизика*, 2018. Т. 9, № 4, С. 1147-1161 DOI: 10.5800/GT-2018-9-4-0387.

20. Неведрова Н. Н., Пономарев П. В. Результаты многолетнего мониторинга электрофизических параметров в сейсмоактивной зоне горного Алтая методами постоянного тока, *Интерэкспо Гео-Сибирь*, 2018. Т. 3, С. 281-287 DOI: 10.18303/2618-981X-2018-3-281-287.

21. Соболев Г. А., Морозов В. Н., Мигунов Н. И. Электротеллурическое поле и сильное землетрясение на Камчатке, *Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли*, 1972. № 2, С. 67-73.

22. Воробьев А. А., Самохвалов М. А., Горелкин А. Ф., Ибрагимов Р. Н., Усманова М. Т., Ходжаев А. Н. Аномальные изменения интенсивности естественного электромагнитного поля в районе Ташкента перед землетрясениями, *Узбек. геол. журнал*, 1976. № 2, С. 9-11.

23. Мороз Ю. Ф., Бахтиаров В. Ф., Воропаев В. Ф., Гаврилов В. А., Левин В. Е., Попруженко С. В. О мониторинге электротеллурического поля для прогноза сильных землетрясений на Камчатке, *Вулканология и сейсмология*, 1995. № 4-5, С. 139-149.

24. Sobolev G. Application of electric method to the tentative short-term forecast of Kamchatka earthquakes, *Pure Appl. Geophys.*, 1975. vol. 113, no. 1, pp. 229-235 DOI: 10.1007/BF01592913.

25. Noritomi K. Geoelectric and geomagnetic observations and phenomena associated with earthquake in China / *Chinese earthquake prediction by the 1977 delegation of the Seismological Society of Japan.* Tokyo (Japan), Seismological Society of Japan, 1978, pp. 57–87.

26. Varotsos P., Alexopoulos K. Physical properties of the variations of the electric field of the earth preceding earthquakes, I, *Tectonophysics*, 1984. vol. 110, no. 1-2, pp. 73-98 DOI: 10.1016/0040-1951(84)90059-3.

27. Varotsos P., Alexopoulos K., Lazaridou M. Short term earthquake prediction from measurements of the electric field of the earth / *Risque, nature et société: Actes du séminaire «Delphes I» [en ligne]*. Paris (France), Éditions de la Sorbonne, 1996, pp. 139–154 DOI: 10.4000/books.psorbonne.32076.

28. Nagao T., Orihara Y., Yamaguchi T., Takahashi I., Hattori K., Noda Y., Sayanagi K., Uyeda S. Co-seismic geoelectric potential changes observed in Japan, *Geophys. Res. Lett.*, 2000. vol. 27, no. 10, pp. 1535-1538 DOI: 10.1029/1999GL005440.

29. Sarlis N., Skordas E. *Natural Time Analysis: The New View of Time. Precursory Seismic Electric Signals, Earthquakes and other Complex Time-Series*. Heidelberg (Germany): Springer Berlin, 2011. 484 DOI: 10.1007/978-3-642-16449-1 pp.

30. Uyeda S., Kamogawa M. The Prediction of Two Large Earthquakes in Greece, *Eos*, 2008. vol. 89, no. 39, pp. 363 DOI: 10.1029/2008EO390002.

31. Geller R. Debate on evaluation of the VAN Method: Editor's introduction, *Geophys. Res. Lett.*, 1996. vol. 23, no. 11, pp. 1291-1293 DOI: 10.1029/96gl00742.

32. Geller R. Earthquake prediction: critical review, *Geophys. J. Int.*, 1997. vol. 131, no. 3, pp. 425-450 DOI: 10.1111/j.1365-246x.1997.tb06588.x.

33. Papadopoulos G. Comment on "The Prediction of Two Large Earthquakes in Greece", *Eos*, 2010. vol. 91, no. 18, pp. 162 DOI: 10.1029/2010EO180003.

34. Закупин А. С., Левин Ю. Н., Богинская Н. В., Жердева О. А. Развитие методов среднесрочного прогноза на примере Онорского землетрясения на Сахалине (Mw = 5.8, 14 августа 2016 года), *Геология и геофизика*, 2018. №11, С. 1904-1911 DOI: 10.15372/GiG20181112.

35. Закупин А. С., Богомолов Л. М., Богинская Н. В. Применение методов анализа сейсмических последовательностей LURR и СРП для прогноза землетрясений на Сахалине, *Геофизические процессы и биосфера*, 2020. Т. 19, №1, С. 66-78 DOI: 10.21455/GPB2020.1-4.

36. Руленко О. П. Оперативные предвестники землетрясений в электричестве приземной атмосферы, *Вулканология и сейсмология*, 2000. №4, С. 57-68.

37. Марапулец Ю. В., Руленко О. П., Ларионов И. А., Мищенко М. А. Одновременный отклик высокочастотной геоакустической эмиссии и атмосферного электрического поля на деформирование приповерхностных осадочных пород, *Докл. Акад. Наук*, 2011. Т. 440, №3, С. 403–406.

38. Моргунов В. А., Матвеев И. В. Электрические и электромагнитные эффекты в эпицентральной зоне афтершоков Спитакского землетрясения, *Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли*, 1991. №11, С. 124.

39. Белослюдцев О. М., Узбеков Н. Б. О системном подходе к анализу данных электрометрического мониторинга, *Уральский геофизический вестник*, 2006. №1 (9), С. 5-8.

40. Гульельми А. В., Левшенко В. Т. Электромагнитный импульс из очага землетрясения, *Докл. Акад. Наук*, 1996. Т. 349, №5, С. 676-678.

41. Sobisevich L., Kanonidi K., Sobisevich A. Observations of ultra-low-frequency geomagnetic disturbances reflecting the processes of the preparation and development of tsunamigenic earthquakes, *Dokl. Earth Sci.*, 2010. vol. 435, no. 2, pp. 1627-1632.

42. Rozhnoi A., Solovieva M., Molchanov O., Chebrov V., Voropaev V., Hayakawa M., Maekawa S., Biagi P.-F. Preseismic anomaly of LF signal on the wave path Japan-Kamchatka during November–December 2004, *Phys. Chem. Earth*, 2006. vol. 31, no. 4-9, pp. 422-427 DOI: 10.1016/j.pce.2006.02.033.

43. Rozhnoi A., Solovieva M., Molchanov O., Schwingenschuh K., Boudjada M., Biagi P.-F., Maggipinto T., Castellana L., Ermini A., Hayakawa M. Anomalies in VLF radio signals prior to the Abruzzo earthquake (M = 6.3) on 6 April 2009, *Nat. Hazards Earth Syst.*, 2009. vol. 9, no. 5, pp. 1727-1732 DOI: 10.5194/nhess-9-1727-2009.

44. Гохберг М. Б., Гуфельд И. Л., Гершензон Н. И., Пилипенко В. А. Электромагнитные эффекты при разрушении земной коры, *Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли*, 1985. №1, С. 72-87.

45. Гохберг М. Б., Моргунов В. А., Похотелов О. А. *Сейсмоэлектромагнитные явления*. М.: Наука, 1988. 174 с.

46. Molchanov O. Generation of ULF electromagnetic emissions by microfracturing, *Geophys. Res. Lett.*, 1995. vol. 22, no. 22, pp. 3091-3094 DOI: 10.1029/95GL00781.

47. Сурков В. В. *Электромагнитные эффекты при землетрясениях и взрывах: Научное издание*. М.: МИФИ, 2000. 448 с.

48. Nitsan U. Electromagnetic emission accompanying fracture of quartz-bearing rocks, *Geophys. Res. Lett.*, 1977. vol. 4, no. 8, pp. 333-336 DOI: 10.1029/GL004i008p00333.

49. Мирошниченко М. И., Куксенко В. С. Излучение импульсов при зарождении трещин в твердых диэлектриках, *ФТТ*, 1980. Т. 22, №5, С. 1531-1533.

50. Воробьев А. А., Защинский Л. А., Надежкин С. Г., Ширяев В. Ф. Импульсное электромагнитное поле, возникающее при деформациях грунтов в лабораторных условиях, *ФТПРПИ*, 1981. №5, С. 119-120.

51. Курленя М. В., Вострецов А. Г., Кулаков Г. И., Яковицкая Г. Е. *Регистрация и обработка сигналов электромагнитного излучения горных пород*. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2000. 232 с.

52. Frid V., Rabinovitch A., Bahat D. Fracture induced electromagnetic radiation, *J. Phys. D-Appl. Phys.*, 2003. vol. 36, no. 13, pp. 1620-1628 DOI: 10.1088/0022-3727/36/13/330.

53. Беспалько А. А., Кузьминых Р. А., Люкшин Б. А., Уцын Г. Е., Яворович Л. В. Экспериментальное и теоретическое исследование электромагнитной эмиссии в неоднородных диэлектрических материалах, *Изв. ВУЗов. Физика*, 2007. №2, С. 16-22.

54. Яковицкая Г. Е. *Методы и технические средства диагностики критических состояний горных пород на основе электромагнитной эмиссии*. Новосибирск: Параллель, 2008. 314 с.

55. Mori Y., Obata Y., Sikula J. Acoustic and electromagnetic emission from crack created in rock samples under deformation, *Journal of Acoustic Emission*, 2009. vol. 27, pp. 157-166 URL: https://www.researchgate.net/publication/266606255_Acoustic_and_electromagnetic....

56. Булгаков Р. Ф., Иващенко А. И., Ким Ч. У., Сергеев К. Ф., Стрельцов М. И., Кожурин А. И., Бесстрашное В. М., Стром А. Л., Сузуки Я., Цуцуми Х., Ватанабе М., Уеки Т., Шимамото Т., Окумура К., Гото Х., Кария Я. Активные разломы Северо-Восточного Сахалина, *Геотектоника*, 2002. №2, С. 66-86 URL: http://neotec.ginras.ru/comset/_bulgakov-r-f-i-dr-2002-aktivnye-razlomy-severo-vostochnogo-sahalina.pdf.

57. Иванов А. Г. Сейсмоэлектрический эффект второго рода, *Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика*, 1940. №5, С. 699–727.

58. Светов Б. С. К теоретическому обоснованию сейсмоэлектрического метода геофизической разведки, *Геофизика*, 2000. №1, С. 28-39.

59. Lazaridou-Varotsos M. *Earthquake Prediction by Seismic Electric Signals*. Heidelberg (Germany): Springer Berlin, 2013. 254 DOI: 10.1007/978-3-642-24406-3 pp.

60. Sarlis N. V. Statistical significance of earth's electric and magnetic field variations preceding earthquakes in Greece and Japan revisited, *Entropy*, 2018. vol. 20, no. 8, pp. 561–578 DOI: 10.3390/e20080561.

Информация об авторах



Закупин Александр Сергеевич – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории сейсмологии, Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, Россия, ORCID 0000-0003-0593-6417.



Дудченко Илья Павлович – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, руководитель отдела исследования геофизических полей и физических свойств геоматериалов ЦКП, Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, Россия, ORCID 0000-0002-4967-7405.



Богомолов Леонид Михайлович✉ – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, директор, Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, Россия, ORCID 0000-0002-9124-9797.



Гуляков Сергей Александрович – младший научный сотрудник отдела исследования геофизических полей и физических свойств геоматериалов ЦКП, Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, Россия, ORCID 0009-0001-7924-6972.



Казаков Артем Иванович✉ – ведущий инженер отдела исследования геофизических полей и физических свойств геоматериалов ЦКП, Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, Россия, ORCID 0000-0002-1378-185X.



Стовбун Николай Сергеевич – младший научный сотрудник отдела исследования геофизических полей и физических свойств геоматериалов ЦКП, Институт морской геологии и геофизики ДВО РАН, Россия, ORCID 0009-0004-1927-798X.

References

[1] Milne J. Earthquakes in connection with electric and magnetic phenomena, Trans. Seismol. Soc. Japan, 1890, vol. 15, pp. 135-163.

[2] Dovbnya B. V. On the results of remote monitoring of pulsed ultra-low-frequency electromagnetic signals detected minutes before an earthquake, Zhizn' Zemli, 2021, vol. 43, no. 3, pp. 304–313. DOI: 10.29003/m2435.0514-7468.2020_43_3/304-313 (In Russian).

[3] Wang C., Christman L., Klemperer S., Glen J., McPhee D., Chen B. Assessment of a claimed ultra-low frequency electromagnetic (ULFEM) earthquake precursor, Geophys. J. Int., 2022, vol. 229, no 3, pp. 2081-2095. DOI: 10.1093/gji/ggab530.

[4] Sadovsky M. A. Elektromagnitnyye predvestniki zemletryaseniy [Electromagnetic precursors of earthquakes]. Moscow, Nauka, 1982, 88 pp. (In Russian).

[5] Zubkov S.I. Predvestniki zemletryaseniy [Precursors of earthquakes]. Moscow, IFZ RAN, 2002, 140 pp. (In Russian).

[6] Fujinawa Y., Noda Y. Progress of Applied Seismo-Electromagnetism, Open J. Earthq. Res., 2020, vol. 9, no. 1, pp. 1-18. DOI: 10.4236/ojer.2020.91001.

[7] Kosobokov V. G. Prognoz zemletryaseniy: osnovy, realizatsiya, perspektivy [Earthquake forecast: fundamentals, implementation, prospects]. Moscow, GEOS, 2005, 179 pp. (In Russian).

[8] Parovyshny V. A., Sokhatyuk Yu. V., Parovyshny D. V., Veselov O. V., Kochergin E. V. About approaches to solving some problems of operational forecast of seismic events, Geosistemy perekhodnykh zon, 2019, vol. 3, no. 1, pp. 5-18. DOI: 10.30730/2541-8912.2019.3.1.005-018 (In Russian).

[9] Parovyshny V. A., Bogomolov L. M., Sokhatyuk Yu. V., Parovyshny D. V. Problems of operational forecast of seismic events. Proposed solutions, Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. Nauki, 2021, vol. 35, no. 2, pp. 120-132. DOI: 10.26117/2079-6641-2021-35-2-120-132 (In Russian).

[10] Grib N. N., Grib G. V., Kolodeznikov I. I. On the short-term forecast of earthquakes using geophysical precursors in South Yakutia, Mezhdunarodnyy nauchno-issledovatel'skiy zhurnal, 2021, no. 9-1 (111), pp. 121-127.DOI: 10.23670/IRJ.2021.9.111.020 (In Russian).

[11] Grib N. N., Trofimenko S. V. Registration of electromagnetic radiation (EMR) during earthquakes, Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten', 2006, no. S10, pp. 197-207. (In Russian).

[12] Dovbnya B. V., Pashinin A. Yu., Rakhmatulin R. A. Short-term electromagnetic precursors nicks of earthquakes, Geodinamika i tektonofizika, 2019, vol. 10, no. 3, pp. 731-740. DOI: 10.5800/GT-2019-10-3-0438 (In Russian).

[13] Han P., Hattori K., Zhuang J., Chen C.-H., Liu J.-Y., Yoshida S. Evaluation of ULF seismomagnetic phenomena in Kakioka, Japan by using Molchan's error diagram, Geophys. J. Int., 2017, vol. 208, no. 1, pp. 482–490. DOI: 10.1093/gji/ggw404.

[14] Bleier T., Dunson C., Maniscalco M., Bryant N., Bambery R., Freund F. Investigation of ULF magnetic pulsations, air conductivity changes, and infra red signatures associated with the 30 October Alum Rock M5.4 earthquake, Nat. Hazards Earth Syst., 2009, vol. 9, no. 2, pp. 585–603. DOI: 10.5194/nhess-9-585-2009.

[15] Bleier T., Dunson C., Alvarez C., Freund F., Dahlgren R. Correlation of pre-earthquake electromagnetic signals with laboratory and field rock experiments, Nat. Hazards Earth Syst., 2010, vol. 10, no. 9, pp. 1965–1975. DOI: 10.5194/nhess-10-1965-2010.

[16] Zhamaletdinov A. A., Mitrofanov F. P., Tokarev A. D., Shevtsov A. N. Influence of lunar-diurnal tidal deformations on electrical conductivity and fluid regime of the earth's crust, Dokl. Akad. Nauk, 2000, vol. 37, no. 2, pp. 235–239. (In Russian).

[17] Avagimov A. A., Zeigarnik V. A., Fainberg E. B. On the spatiotemporal structure of seismicity caused by electromagnetic influence, Fiz. Zemli, 2005, no. 6, pp. 55–65. (In Russian).
[18] Aleksandrov P. N., Modin I. N. On a systematic approach to the analysis of electrometric data monitoring, Inzhenernyye izyskaniya, 2015, no. 3, pp. 42-50. (In Russian).
[19] Moroz Yu. F., Gontovaya L. I. On the deep structure of Southern Kamchatka according to geophysical data, Geodinamika i tektonofizika, 2018, vol. 9, no. 4, pp. 1147-1161. DOI: 10.5800/GT-2018-9-4-0387 (In Russian).
[20] Nevedrova N. N., Ponomarev P. V. Results of long-term monitoring of electrophysical parameters in the seismically active zone of the Altai Mountains using direct current methods, Interekspo Geo-Sibir', 2018, vol. 3, pp. 281-287. DOI: 10.18303/2618-981X-2018-3-281-287 (In Russian).
[21] Sobolev G. A., Morozov V. N., Migunov N. I. Electrotelluric field and strong earthquake in Kamchatka, Izv. AN SSSR. Ser. Fizika Zemli, 1972, no. 2, pp. 67-73. (In Russian).
[22] Vorobyov A. A., Samokhvalov M. A., Gorelkin A. F., Ibragimov R. N., Usmanova M. T., Khodzhaev A. N. Anomalous changes in the intensity of the natural electromagnetic field in the area Tashkent before earthquakes, Uzbek. geol. zhurnal, 1976, no. 2, pp. 9-11. (In Russian).
[23] Moroz Yu. F., Bakhtiarov V. F., Voropaev V. F., Gavrilov V. A., Levin V. E., Popruzhenko S. V. On monitoring the electrotelluric field for forecasting strong earthquakes in Kamchatka, Vulkanologiya i seysmologiya, 1995, no. 4-5, pp. 139-149. (In Russian).
[24] Sobolev G. Application of electric method to the tentative short-term forecast of Kamchatka earthquakes, Pure Appl. Geophys., 1975, vol. 113, no. 1, pp. 229-235. DOI: 10.1007/BF01592913.
[25] Noritomi K. Geoelectric and geomagnetic observations and phenomena associated with earthquake in China. In: Chinese earthquake prediction by the 1977 delegation of the Seismological Society of Japan. Tokyo (Japan), Seismological Society of Japan, 1978, pp. 57–87.
[26] Varotsos P., Alexopoulos K. Physical properties of the variations of the electric field of the earth preceding earthquakes, I, Tectonophysics, 1984, vol. 110, no. 1-2, pp. 73-98. DOI: 10.1016/0040-1951(84)90059-3.
[27] Varotsos P., Alexopoulos K., Lazaridou M. Short term earthquake prediction from measurements of the electric field of the earth. In: Risque, nature et societe: Actes du seminaire «Delphes I» [en ligne]. Paris (France),Editions de la Sorbonne, 1996, pp. 139–154. DOI: 10.4000/books.psorbonne.32076.
[28] Nagao T., Orihara Y., Yamaguchi T., Takahashi I., Hattori K., Noda Y., Sayanagi K., Uyeda S. Co-seismic geoelectric potential changes observed in Japan, Geophys. Res. Lett., 2000, vol. 27, no. 10, pp. 1535-1538. DOI: 10.1029/1999GL005440.
[29] Sarlis N., Skordas E. Natural Time Analysis: The New View of Time. Precursory Seismic Electric Signals, Earthquakes and other Complex Time-Series. Heidelberg (Germany), Springer Berlin, 2011, 484 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-16449-1.
[30] Uyeda S., Kamogawa M. The Prediction of Two Large Earthquakes in Greece, Eos, 2008, vol. 89, no. 39, pp. 363. DOI: 10.1029/2008EO390002.
[31] Geller R. Debate on evaluation of the VAN Method: Editor's introduction, Geophys. Res. Lett., 1996, vol. 23, no. 11, pp. 1291-1293. DOI: 10.1029/96gl00742.
[32] Geller R. Earthquake prediction: critical review, Geophys. J. Int., 1997, vol. 131, no. 3, pp. 425-450. DOI: 10.1111/j.1365-246x.1997.tb06588.x.
[33] Papadopoulos G. Comment on "The Prediction of Two Large Earthquakes in Greece", Eos, 2010, vol. 91, no. 18, pp. 162. DOI: 10.1029/2010EO180003.

[34] Zakupin A. S., Levin Yu. N., Boginskaya N. V., Zherdeva O. A. Development of medium-term methods forecast using the example of the Onor earthquake on Sakhalin (Mw = 5.8, August 14, 2016 year), Geologiya i geofizika, 2018, no. 11, pp. 1904-1911. DOI: 10.15372/GiG20181112. (In Russian).

[35] Zakupin A. S., Bogomolov L. M., Boginskaya N. V. Application of seismic analysis methods LURR and SRP sequences for predicting earthquakes on Sakhalin, Geofizicheskiye protsessy i biosfera, 2020, vol. 19, no. 1, pp. 66-78. DOI: 10.21455/GPB2020.1-4. (In Russian).

[36] Rulenko O.P. Operational precursors of earthquakes in the electricity of the surface atmosphere, Vulkanologiya i seysmologiya, 2000, no. 4, pp. 57-68. (In Russian).

[37] Marapulets Yu. V., Rulenko O. P., Larionov I. A., Mishchenko M. A. Simultaneous response of high-frequency geoacoustic emission and atmospheric electric field to deformation of near-surface sedimentary rocks, Dokl. Akad. Nauk, 2011, vol. 440, no. 3, pp. 403–406. (In Russian).

[38] Morgunov V. A., Matveev I. V. Electrical and electromagnetic effects in the epicentral aftershock zone of the Spitak earthquake, Izv. AN SSSR. Ser. Fizika Zemli, 1991, no. 11, pp. 124. (In Russian).

[39] Beloslyudtsev O. M., Uzbekov N. B. On a systematic approach to the analysis of electrometric data monitoring, Ural'skiy geofizicheskiy vestnik, 2006, no. 1 (9), pp. 5-8 (In Russian).

[40] Guglielmi A. V., Levshenko V. T. Electromagnetic pulse from the earthquake source, Dokl. Akad. Nauk, 1996, vol. 349, no. 5, pp. 676-678. (In Russian).

[41] Sobisevich L., Kanonidi K., Sobisevich A. Observations of ultra-low-frequency geomagnetic disturbances reflecting the processes of the preparation and development of tsunamigenic earthquakes, Dokl. Earth Sci., 2010, vol. 435, no. 2, pp. 1627-1632.

[42] Rozhnoi A., Solovieva M., Molchanov O., Chebrov V., Voropaev V., Hayakawa M., Maekawa S., Biagi P.-F. Preseismic anomaly of LF signal on the wave path Japan-Kamchatka during November–December 2004, Phys. Chem. Earth, 2006, vol. 31, no. 4-9, pp. 422-427. DOI: 10.1016/j.pce.2006.02.033.

[43] Rozhnoi A., Solovieva M., Molchanov O., Schwingenschuh K., Boudjada M., Biagi P.-F., Maggipinto T., Castellana L., Ermini A., Hayakawa M. Anomalies in VLF radio signals prior to the Abruzzo earthquake (M = 6.3) on 6 April 2009, Nat. Hazards Earth Syst., 2009, vol. 9, no. 5, pp. 1727-1732. DOI: 10.5194/nhess-9-1727-2009.

[44] Gokhberg M. B., Gufeld I. L., Gershenzon N. I., Pilipenko V. A. Electromagnetic effects during the destruction of the earth's crust, Izv. AN SSSR. Ser. Fizika Zemli, 1985, no. 1, pp. 72-87. (In Russian).

[45] Gokhberg M. B., Morgunov V. A., Pokhotelov O. A. Seysmoelektromagnitnyye yavleniya [Seismoelectromagnetic phenomena]. Moscow, Nauka, 1988, 174 pp. (In Russian).

[46] Molchanov O. Generation of ULF electromagnetic emissions by microfracturing, Geophys. Res. Lett., 1995, vol. 22, no. 22, pp. 3091-3094. DOI: 10.1029/95GL00781.

[47] Surkov V. V. Elektromagnitnyye effekty pri zemletryaseniyakh i vzryvakh: Nauchnoye izdaniye [Electromagnetic effects during earthquakes and explosions: Scientific publication]. Moscow, MIFI, 2000, 448 pp. (In Russian).

[48] Nitsan U. Electromagnetic emission accompanying fracture of quartz-bearing rocks, Geophys. Res. Lett., 1977, vol. 4, no. 8, pp. 333-336. DOI: 10.1029/GL004i008p00333.

[49] Miroshnichenko M. I., Kuksenko V. S. Radiation of pulses during the initiation of cracks in solids dielectrics, FTT, 1980, vol. 22, no. 5, pp. 1531-1533. (In Russian).

[50] Vorobyov A. A., Zashchinsky L. A., Nadezhkin S. G., Shiryaev V. F. Pulse electromagnetic field that arises during soil deformation in laboratory conditions, FTPRPI, 1981, no. 5, pp. 119-120. (In Russian).

[51] Kurlenya M. V., Vostretsov A. G., Kulakov G. I., Yakovitskaya G. E. Registratsiya i obrabotka signalov elektromagnitnogo izlucheniya gornykh porod [Registration and processing signals of electromagnetic radiation from rocks]. Novosibirsk, Izdatel'stvo SO RAN, 2000, 232 pp. (In Russian).
[52] Frid V., Rabinovitch A., Bahat D. Fracture induced electromagnetic radiation, J. Phys. D-Appl. Phys., 2003, vol. 36, no. 13, pp. 1620-1628. DOI: 10.1088/0022-3727/36/13/330.
[53] Bespalko A. A., Kuzminykh R. A., Lyukshin B. A., Utsyn G. E., Yavorovich L. V. Experimental and theoretical study of electromagnetic emission in inhomogeneous dielectric materials, Izv. VUZov. Fizika, 2007, no. 2, pp. 16-22. (In Russian).
[54] Yakovitskaya G. E. Metody i tekhnicheskiye sredstva diagnostiki kriticheskikh sostoyaniy gornykh porod na osnove elektromagnitnoy emissii [Methods and technical means for diagnosing critical conditions rocks based on electromagnetic emission]. Novosibirsk, Parallel', 2008, 314 pp. (In Russian).
[55] Mori Y., Obata Y., Sikula J. Acoustic and electromagnetic emission from crack created in rock samples under deformation, Journal of Acoustic Emission, 2009, vol. 27, pp. 157-166. URL: https://www.researchgate.net/publication/266606255_Acoustic_and_electromagnetic...
[56] Bulgakov R. F., Ivashchenko A. I., Kim C. U., Sergeev K. F., Streltsov M. I., Kozhurin A. I., Besstrashnoye V. M., Strom A. L., Suzuki Ya ., Tsutsumi H., Watanabe M., Ueki T., Shimamoto T., Okumura K., Goto H., Kariya Y. Active faults of North-Eastern Sakhalin, Geotektonika, 2002, no. 2, pp. 66-86. URL: http://neotec.ginras.ru/comset/_bulgakov-r-f-i-dr-2002-aktivnye-razlomy-severo-vostochnogo-sahalina.pdf (In Russian).
[57] Ivanov A. G. Seismoelectric effect of the second kind, Izv. AN SSSR. Ser. geografiya i geofizika, 1940, no. 5, pp. 699–727. (In Russian).
[58] Svetov B. S. Towards a theoretical justification of the seismoelectric method of geophysical exploration, Geofizika, 2000, no. 1, pp. 28-39. (In Russian).
[59] Lazaridou-Varotsos M. Earthquake Prediction by Seismic Electric Signals. Heidelberg (Germany), Springer Berlin, 2013, 254 pp. DOI: 10.1007/978-3-642-24406-3.
[60] Sarlis N. V. Statistical significance of earth's electric and magnetic field variations preceding earthquakes in Greece and Japan revisited, Entropy, 2018, vol. 20, no. 8, pp. 561–578. DOI: 10.3390/e20080561.

Information about authors



Zakupin Alexander Sergeevich✉ – Ph. D. (Phys. & Math.), Leading Researcher at the Seismology Laboratory, Institute of Marine Geology and Geophysics FEB RAS, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia, ORCID 0000-0003-0593-6417.



Dudchenko Ilya Pavlovich – Ph. D. (Tech.), Head of the Department for Research of Geophysical Fields and Physical Properties of Geomaterials at the Center for Collective Use, Institute of Marine Geology and Geophysics FEB RAS, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia, ORCID 0000-0002-4967-7405.



Bogomolov Leonid Mikhailovich✉ – Dr. Sci. (Phys. & Math.), Chief Researcher, Director, Institute of Marine Geology and Geophysics FEB RAS, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia, ORCID 0000-0002-9124-9797.



Gulyakov Sergey Aleksandrovich – Junior Researcher at the Department for Research of Geophysical Fields and Physical Properties of Geomaterials at the Center for Collective Use, Institute of Marine Geology and Geophysics FEB RAS, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia, ORCID 0009-0001-7924-6972.



Kazakov Artem Ivanovich – Leading Engineer at the Department for Research of Geophysical Fields and Physical Properties of Geomaterials at the Center for Collective Use, Institute of Marine Geology and Geophysics FEB RAS, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia, ORCID 0000-0002-1378-185X.



Stovbun Nikolay Sergeevich – Junior Researcher at the Department for Research of Geophysical Fields and Physical Properties of Geomaterials at the Center for Collective Use, Institute of Marine Geology and Geophysics FEB RAS, Yuzhno-Sakhalinsk, Russia, ORCID 0009-0004-1927-798X.

Vestnik KRAUNC. Fiz.-Mat. nauki. 2024. vol. 46. no. 1. P. 165 - 172. ISSN 2079-6641

PHYSICS

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-165-172

Research Article

Full text in English

MSC 86A10

Results of an Experiment on Joint Lidar and Balloon Sounding of the Troposphere and Stratosphere

***V. N. Marichev*[*1], V. A. Yushkov[2], N. V. Balugin[2], D. A. Bochkovsky*[*1]**

[1] V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS (IAO SB RAS), 634055, Tomsk, 1, Academician Zuev square, Russia

[2] Federal State Budgetary Institution Central Aerological Observatory of Roshydromet, 141701, Moscow region, Dolgoprudny, st. Pervomaiskaya, 3, Russia

Abstract. The current problem of climate change requires studying changes in the composition and properties of the atmosphere, affecting its radiation balance. Obtaining knowledge in this direction is possible through regular measurements of climate-forming components and atmospheric characteristics and their subsequent analysis. There are contact and remote methods and means of sensing the atmosphere at its different altitude levels, including aerological, aircraft, satellite, lidar and rocket. This paper proposes a technology for monitoring the aerosol component based on remote (lidar) and contact (aerological) optical sounding. The results of simultaneous remote (lidar) and direct (sonde) measurements of the vertical distribution of aerosol loading in the troposphere and stratosphere, carried out on January 27-30, 2022 and March 15-16, 2023 in Tomsk, are presented. The purpose of the experiment was to conduct joint lidar-balloon measurements and validate aerosol backscatter profiles in the upper troposphere and stratosphere to create an all-weather lidar-balloon monitoring system of spatiotemporal and microphysical characteristics of aerosol. Good agreement is demonstrated in the obtained vertical profiles of the value of the backscatter ratio R(H) for close wavelengths (528 and 532 nm for the aerosol backscatter sonde and lidar, respectively). To restore the microphysical parameters of an aerosol during joint lidar-balloon experiments, the possibility of expanding 2-wave (355 and 532 nm) lidar measurements with an additional set of wavelengths (470, 850, 940 nm) using an optical balloon aerosol sonde was shown.

Key words: stratospheric aerosol, atmospheric temperature, lidar, aerosol sonde, multi-wavelength sounding.

Received: 29.12.2023; Revised: 27.02.2024; Accepted: 28.02.2024; First online: 07.03.2024

For citation. Marichev V. N., Yushkov V. A., Balugin N. V., Bochkovsky D. A. Results of an experiment on joint lidar and balloon sounding of the troposphere and stratosphere. *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2024, **46**: 1, 165-172. EDN: GLHXST. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-165-172.

Funding. The modernization of research instruments — the lidar complex was carried out with the support of a state task project from the IAO SB RAS, and experimental research and data acquisition were supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 23-27-00057, https://rscf.ru/project/23- 27-00057.

Competing interests. There are no conflicts of interest regarding authorship and publication.

Contribution and Responsibility. All authors contributed to this article. Authors are solely responsible for providing the final version of the article in print. The final version of the manuscript was approved by all authors.

[*]**Correspondence:** E-mail: marichev@iao.ru, moto@iao.ru

The content is published under the terms of the Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Marichev V. N., Yushkov V. A., Balugin N. V., Bochkovsky D. A., 2024

© Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation, 2024 (original layout, design, compilation)

Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2024. Т. 46. №1. С. 165 - 172. ISSN 2079-6641

ФИЗИКА

https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-165-172

Научная статья

Полный текст на английском языке

УДК 551.524.7

Результаты эксперимента по совместному лидарному и шар-баллонному зондированию тропосферы и стратосферы

В. Н. Маричев*[1], В. А. Юшков[2], Н. В. Балугин[2], Д. А. Бочковский*[1]

[1] Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, 634055, г. Томск, площадь Академика Зуева, 1, Россия

[2] ФГБУ Центральная аэрологическая обсерватория Росгидромета, 141701, Московская область, г. Долгопрудный, ул. Первомайская, д. 3, Россия

Аннотация. Актуальная проблема климатических изменений требует изучения изменения состава и свойств атмосферы, влияющих на ее радиационный баланс. Получение знаний в данном направлении возможно на основе проведения регулярных измерений климатообразующих компонент и характеристик атмосферы и их последующего анализа. Существуют контактные и дистанционные методы и средства зондирования атмосферы на ее разных высотных уровнях, включая аэрологические, самолетные, спутниковые, лидарные и ракетные. В настоящей работе предложена технология мониторинга аэрозольной компоненты на основе дистанционного (лидарного) и контактного (аэрологического) оптического зондирования. Приводятся результаты одновременных дистанционных (лидарных) и прямых (зондовых) измерений вертикального распределения аэрозольного наполнения тропосферы и стратосферы, осуществленных 27-30 января 2022 и 15-16 марта 2023 в Томске. Целью эксперимента было проведения совместных лидарно-балонных измерений и валидация аэрозольных профилей обратного рассеяния в верхней тропосфере и стратосфере для создания всепогодной системы лидарно-баллонного мониторинга пространственно-временных и микрофизических характеристик аэрозоля. Продемонстрировано хорошее согласие в полученных вертикальных профилях значения отношения обратного рассеяния $R(H)$ для близких длин волн (528 и 532 нм для аэрозольного зонда обратного рассеяния и лидара, соответственно). Для восстановления микрофизических параметров аэрозоля при проведении совместных лидарно-баллонных экспериментов показана возможность расширения 2-х волновых (355 и 532 нм) лидарных измерений дополнительным набором длин волн(470, 850, 940 нм) с помощью оптического баллонного аэрозольного зонда.

Ключевые слова: стратосферный аэрозоль, температура атмосферы, лидар, аэрозольный зонд, многоволновое зондирование

Получение: 29.12.2023; Исправление: 27.02.2024; Принятие: 28.02.2024; Публикация онлайн: 07.03.2024

Для цитирования. Marichev V. N., Yushkov V. A., Balugin N. V., Bochkovsky D. A. Results of an experiment on joint lidar and balloon sounding of the troposphere and stratosphere // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2024. Т. 46. № 1. С. 165-172. EDN: GLHXST. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2024-46-1-165-172.

Финансирование. Модернизация инструментария исследований — лидарного комплекса была проведена при поддержке проектом госзадания ИОА СО РАН, а проведение экспериментальных исследований и получение данных за счет гранта Российского научного фонда No 23-27-00057, https://rscf.ru/project/23-27-00057.

Конкурирующие интересы. Конфликтов интересов в отношении авторства и публикации нет.

Авторский вклад и ответственность. Авторы участвовали в написании статьи и полностью несут ответственность за предоставление окончательной версии статьи в печать.

***Корреспонденция:** E-mail: marichev@iao.ru, moto@iao.ru

Контент публикуется на условиях Creative Commons Attribution 4.0 International License

© Marichev V. N., Yushkov V. A., Balugin N. V., Bochkovsky D. A., 2024

© ИКИР ДВО РАН, 2024 (оригинал-макет, дизайн, составление)

Introduction

In the context of global changes associated with the greenhouse effect, stratospheric aerosol, due to its ability to reflect part of solar radiation into space, reducing its influx to the surface of the planet, plays an important role. Academicians Golitsyn G.S. and Israel Y.A. [1] in 2011 even proposed the release of artificial aerosol into the stratosphere as a means of climate control. However, in the stratosphere there is a naturally occurring aerosol that already performs the functions mentioned above [1]. There are a number of monitoring programs, in particular Aeronet, AEROSIBNET, etc. [2], NDSC [3], from whose data it is possible to obtain certain information about stratospheric aerosol. But the information necessary for quantitative assessments, namely, spatiotemporal and microphysical characteristics, is still insufficient [4–7]. Gaining knowledge in this direction is possible through regular measurements of climate-forming components and atmospheric characteristics and their subsequent analysis.

Stratospheric lidars offer certain opportunities, especially for studying the altitude and temporal behavior of stratospheric aerosol [8]. However, lidars, as a rule, implement 2 - 3 emitter wavelengths, which is not enough to restore the microphysical parameters of an aerosol. An increase in the number of wavelengths in a lidar is associated with a significant complication of both the transmitting and receiving parts.

The fundamental solution to the problem is the use of additional multi-wavelength measurements of light backscattering, combined with lidar sounding. The Central Aerological Observatoty of Roshydromet has developed an aerosol light backscatter sonde (AZOR), which has 4 wavelengths to determine the optical parameters of light scattering from atmospheric aerosol [9, 10]. The measured backscattering parameters at different wavelengths make it possible to obtain information about the spectrum of aerosol particle sizes and the vertical distribution of aerosol loading in the troposphere and stratosphere, and to more effectively restore the microphysical characteristics of stratospheric aerosol.

Lidar complex IOA SB RAS

The transmitter of the lidar complex is an LS-2137U-UV3 YAG:Nd3+ laser with radiation at wavelengths of 532 and 355 nm, pulse energy of 400 and 200 mJ with a generation frequency of 10 Hz, complete with a 1:10 beam expander. Backscattered radiation is fed to a Newtonian system telescope with a receiving mirror with a diameter of 1 m and a focal length of 2 m. Light signals were received in two channels at each wavelength with a separation in the ratio of 10% and 90% in order to reduce the dynamic range (near and far reception zone). The separated optical signals are sent to photosensor modules (Hamamatsu), where they are converted into electrical signals in photon counting mode. Next, they are registered in a photon counter with further data transfer to a computer for collection and accumulation. A more detailed description of the complex, including its block diagram, can be found in [11].

Aerosol backscatter sonde (AZOR)

Like a lidar, the operating principle of an optical aerosol sonde is based on recording radiation scattered in the free atmosphere from a sequence of light probe pulses from onboard sources. A line of LEDs at wavelengths of 470, 528, 850 and 940 nm with a bandwidth of 40 - 50 nm is used as radiation sources. Simultaneously with successive probing pulses, echo signals are synchronously accumulated by a broadband photodetector for each channel for 1 second. The basic design of the probe [9] uses 2 channels from the presented line of LEDs. Unlike a lidar, the recorded signal is formed from a nearby (at a distance of 0.2-5 m) light-scattering volume (0.1 m3). In order to increase the signal-to-noise ratio (SNR), the optical axes of the photodetector and emitters are located at an angle of 5°, which allows, when using synchronous signal detection, to obtain an SNR value at an altitude of 30 km no worse than 50. The scattered radiation entering the photodetector is recorded in angular range 170° - 180°. The sonde is easily integrated with all types of standard upper-air radiosondes, equipped with its own temperature and pressure sensors (optional), navigation module and telemetry system, which allows its use in autonomous launches. A natural limitation in the use of AZOR is the condition of night measurements.

Results

Joint lidar-aerological experiments were carried out on January 27-30, 2022 and March 15-16, 2023 in Tomsk (560 N 850 E) at the Institute of Atmospheric Optics SB RAS. At the IAO SB RAS lidar complex, measurements were carried out in the altitude range from 7 to 50 km, and with a sonde - from 0 to 30 km.

For different dates of the experiment, vertical profiles of the dimensionless quantity $R(\lambda, H)$ were obtained at wavelengths of 355 and 532 nm (lidar) and 470, 528, 850, 940 nm (sonde). The physical meaning of the quantity $R(\lambda, H)$ is described by the formula:

$$R(\lambda, H) = \frac{\beta(\lambda, H)}{\beta_M(\lambda, H)} = \frac{\beta_M(\lambda, H) + \beta_A(\lambda, H)}{\beta_M(\lambda, H)} = 1 + \frac{\beta_A(\lambda, H)}{\beta_M(\lambda, H)}.$$

where $\beta_M(\lambda, H), \beta_A(\lambda,), \beta(\lambda, H)$, are the coefficients of molecular, aerosol and total backscattering of light at wavelength λ at height . Fulfillment of conditions $R(\lambda, H) = 1$ means the absence of aerosol at these altitudes, and, conversely, the value $R(\lambda, H) > 1$ indicates the presence of aerosol. Thus, the value of $R(\lambda, H)$ determines the magnitude of aerosol scattering in relation to molecular.

An important condition for conducting the experiment was the choice of the time period of the year with maximum aerosol loading of the stratosphere, against which the individual vertical profiles $R(H)$ at different wavelengths will be more pronounced. Based on many years of experience in lidar monitoring of the stratosphere over Tomsk, it was established that these are winter months. Fig. 1 shows vertical profiles of the backscattering ratio for January compared to June, demonstrating a significant difference between them in the aerosol loading of the lower stratosphere.

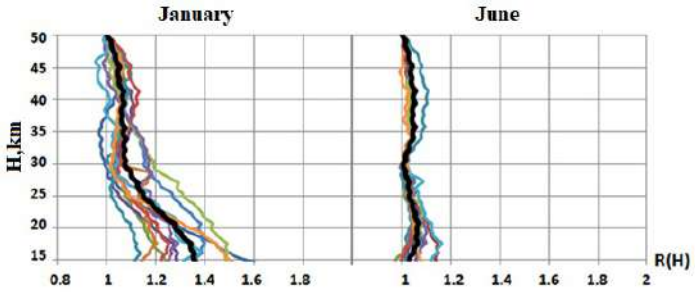


Fig. 1. Multi-colored curves - January and June backscattering ratio profiles averaged over the years at a wavelength of 532 nm for each year of the period 2010-2021 [12]. The black curve is the average January and June profile, constructed using the annual average for the entire observation period.

In Fig.2 vertical profiles $R(\lambda, H)$ obtained sequentially on the nights of January 27-30 are presented [13, 14]. The relief structure of the sonde profiles compared to the smoother lidar profile is explained by the difference in spatial resolution. For sonde measurements, signal processing was carried out with smoothing at 10 points (resolution 9-15 m depending on the balloon lifting speed). For the smoothing procedure, the formula $I_i = I_{i-1} + (T_i - I_{i-1})/K$ is used (where T is the smoothed parameter, I is the smoothing result, K is the smoothing coefficient (in our case $K = 10$). For lidar observations, the vertical resolution is ($\sim$ 500 m) was achieved by smoothing over 3 strobes. Since in the AZOR launches the height of only 21-23 km was reached, the coefficient of molecular backscattering of light $\beta_M(\lambda,)$ was used as a priori information, the same as in lidar calculations) according to the molecular model of the atmosphere [15].

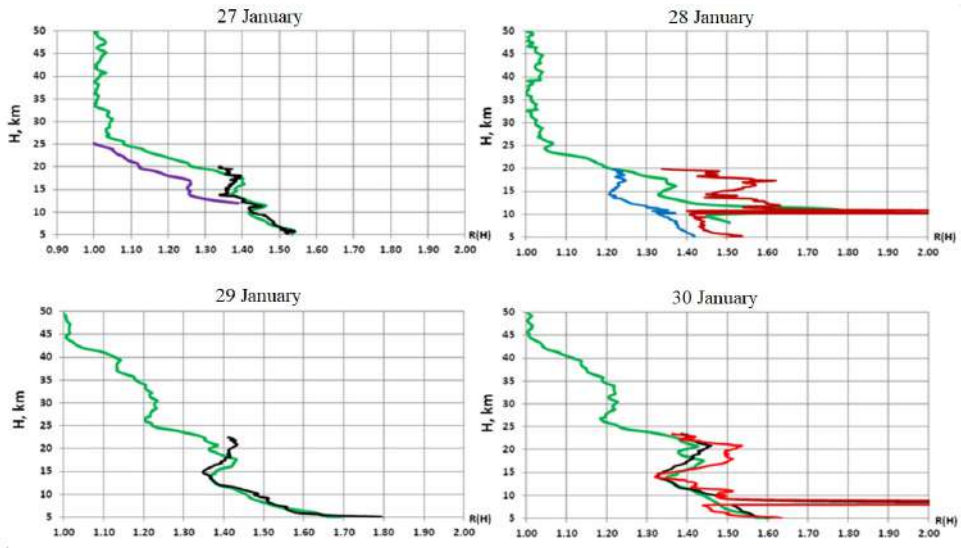


Fig. 2. Vertical backscattering ratio profiles. Green and violet curves are lidar at wavelengths of 532 and 355 nm, blue, black, red and dark red are sondes curves at wavelengths 470, 528, 850 and 940 nm.

Fig. 3 shows the values of $R(\lambda, H)$ for the AZOR and lidar on March 15-16, 2023. As can be seen from the measurement results in the experiments of January 2022 and March 2023, there is agreement in the obtained $R(H)$ profiles for close wavelengths (528 and 532 nm). Differences in data at altitudes below 12 km in the March 2023 experiment can be explained by the presence of variable cloudiness. The totality of all lidar data shown for 355 and 532 nm and balloon data for 470, 528 and 940 nm demonstrates the wide variability of $R(\lambda, H)$ profiles depending on wavelength and atmospheric conditions. Such a set of measurement data at different wavelengths can be useful in analyzing the variability of atmospheric aerosol composition.

The resulting vertical profiles $R(\lambda, H)$ show moderate aerosol loading, characteristic of the selected period of measurements in the absence of volcanic activity. These results are most clearly visible in Fig. 2 based on sonde data at a wavelength of 940 nm, where molecular scattering is relatively small compared to scattering at shorter wavelengths.

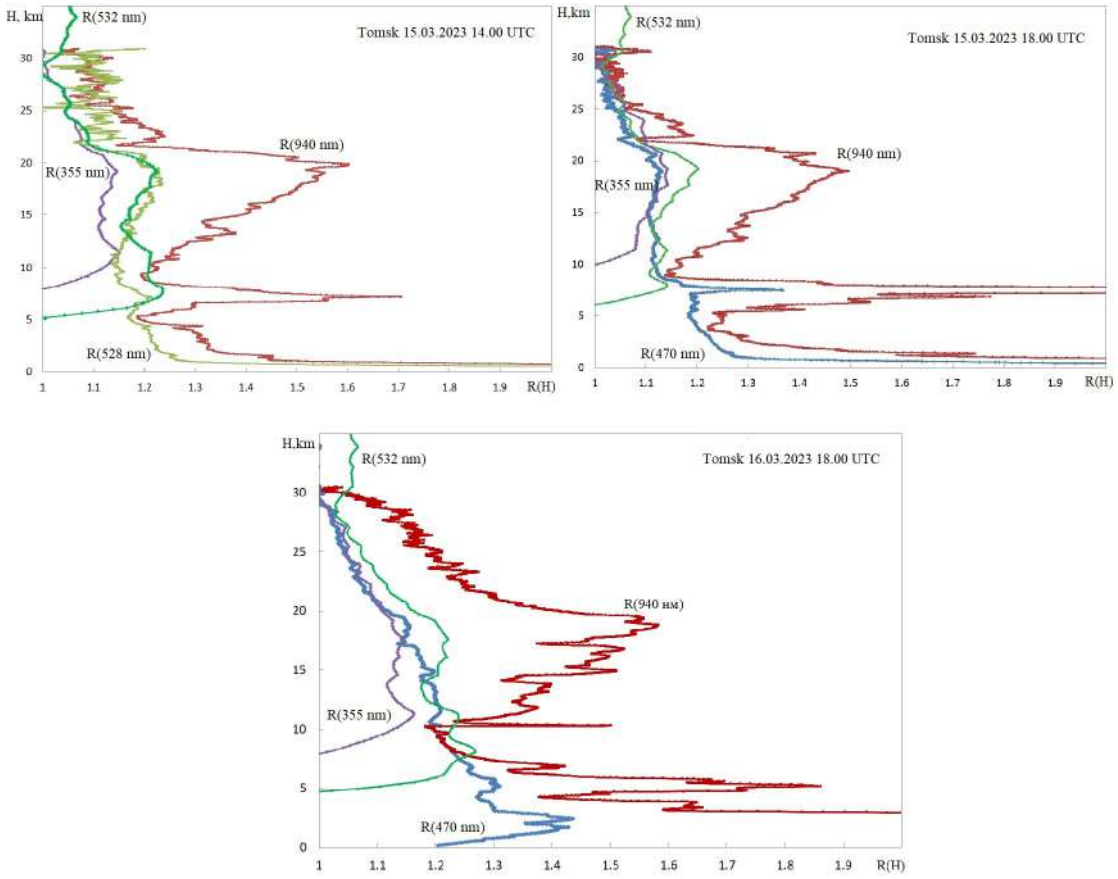


Fig. 3. Vertical profiles of the quantity $R(\lambda, H)$ (see text) for the wavelengths indicated in the figure, obtained by the lidar and sonde. Lidar data in violet (355 nm) and dark green (532 nm). AZOR data are marked in blue (470 nm), light green (528 nm), red (850 nm) and dark red (940 nm).

Conclusion

Aerosol sounding of the troposphere and stratosphere using lidar and aerological technologies complement each other, ensuring all-weather observations and continuity of their series. Good agreement is shown in the vertical profiles of the value of the backscattering ratio R(H) for close wavelengths (528 and 532 nm) for AZOR and lidar, respectively, in simultaneous measurements when using the same a priori information for processing the results. To restore the microphysical parameters of an aerosol during joint lidar-balloon experiments, the possibility of expanding 2-wave (353 and 532 nm) lidar observations with an additional set of wavelengths (470, 850, 940 nm) using measurements with an optical balloon aerosol sonde was shown. The resulting consistency between lidar and balloon measurements indicates the possibility of using AZOR as a mobile tool to complement lidar observations carried out at various geographical locations. Of particular note is the cost-effectiveness of aerological technology and the possibility of its application in all regions of Russia, including the Arctic.

References

1. Israel Yu. A. Climate management is not such a wasteful idea, *Profile*, 2011. vol. 31 (In Russian).
2. Baltensperger U., Barrie L., Wehrli C. WMO/GAW Expert Workshop on a Global Surface-based Network for Long Term Observations of Column Aerosol Optical Properties, *WMO TD*, 2005. vol. 1287, no. 162, pp. 144.
3. *Network for the detection of stratospheric change (NDSC)*, Informational brochure, 1992.
4. Yueg K., McCormickm P., Chuw P. Retrieval of composition and size distribution of stratospheric aerosols with the SAGE II satellite experiment, *J. Atmos. Ocean. Technol.*, 1986. vol. 3, pp. 371-380.
5. Naats I. E. Theory of multi-frequency lidar sounding of the atmosphere, 1980 (In Russian).
6. Kondratyev K. Ya., Moskalenko N. I., Pozdnyakov D. V. Atmospheric aerosol, 1983. 152 pp. (In Russian)
7. Pueschel R. F. Stratospheric aerosols: formation, properties, effects, *Aerosol Sci.*, 1996. vol. 27, no. 3, pp. 383–402.
8. Matvienko G. G. *Lidar monitoring of cloud and aerosol fields, trace gas components and atmospheric meteorological parameters*. IOA SB RAS: Tomsk, 2015. 450 pp. (In Russian)
9. Balugin N. V., Fomin B. A., Yushkov V. A. Optical backscatter probe for balloon aerological measurements, *News of the Russian Academy of Sciences. Physics of the atmosphere and ocean.*, 2022. vol. 58, no. 3, pp. 365-372.
10. Rosen J. M., Kjome N. T. Backscattersonde: a new instrument for atmospheric aerosol research, *Applied optics*, 1991. vol. 30, no. 12, pp. 1552-1561.
11. Marichev V. N., Bochkovsky D. A. Lidar complex of a small station for high-altitude atmospheric sounding of the IAO SB RAS, *Optics of the atmosphere and ocean*, 2020. vol. 33, no. 05, pp. 399–406.
12. Marichev V. N., Bochkovsky D. A., Elizarov A. I. Optical characteristics of stratospheric aerosol in Western Siberia based on the results of lidar monitoring in 2010–2021, *Atmosphere and Ocean Optics*, 2022. vol. 35, no. 09, pp. 717–721.
13. Marichev V. N., Matvienko G. N., Yushkov V. A. Balugin N. V., Bochkovsky D. A. Lidar-balloon experiment to study stratospheric aerosol for climate observations and diagnostic tasks, *Meteorology and Hydrology*, 2022. vol. 11, pp. 41-45.
14. Balugin N. V., Fomin B. A., Lykov A. D., Yushkov V. A. Assessment of the impact of stratospheric aerosol on the radiation balance of the stratosphere using optical backscatter balloon sounder data and radiation modeling, *Meteorology and Hydrology*, 2022. vol. 10, pp. 121-128.
15. Ippolitov I. I., Komarov V. S., Mycelium A. A. Optical-meteorological model of the atmosphere for simulating lidar measurements and calculating radiation propagation. Sat. Spectroscopic methods of atmospheric sounding, 1985, pp. 144 (In Russian).

Information about authors



Marichev Valeriy Nikolaevich – D. Sci. (Phys & Math.), Profeesor, Main Staff Scientist, V.E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS (IAO SB RAS), Tomsk, Russia, ORCID 0000-0002-7367-6605.



Yushkov Vladimir Alexandrovich – Ph. D. (Phys & Math.), Leading Researcher, Head of Depart. Phys. of High Atmosph. Layers, Federal State Budgetary Institution Central Aerological Observatory of Roshydromet, Dolgoprudny, Russia, ORCID 0009-0004-7251-8367.



Balugin Nikolay Vladimirovich – Chief specialist, Federal State Budgetary Institution Central Aerological Observatory of Roshydromet, Dolgoprudny, Russia, ORCID 0009-0001-8029-8331.



Bochkovskiy Dmitriy Andreevich – Ph. D. (Tech.), Staff Scientist, V. E. Zuev Institute of Atmospheric Optics SB RAS (IAO SB RAS), Tomsk, Russia, ORCID 0000-0002-9127-2065.

Сведения об авторах



Маричев Валерий Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, г. Томск, Россия, ORCID 0000-0002-7367-6605.



Юшков Владимир Александрович – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, начальник отдела Физики высших слоев атмосферы, ФГБУ Центральная аэрологическая обсерватория Росгидромета, г. Долгопрудный, Россия, ORCID 0009-0004-7251-8367.



Балугин Николай Владимирович – главный специалист, ФГБУ Центральная аэрологическая обсерватория Росгидромета, г. Долгопрудный, Россия, ORCID 0009-0001-8029-8331.



Бочковский Дмитрий Андреевич – кандидат технических наук, научный сотрудник, Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, г. Томск, Россия,, ORCID 0000-0002-9127-2065.