

УДК 623.094

doi: 10.53816/20753608_2025_1_49

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СПОСОБА КАЛИБРОВКИ
СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ ДРЕЙФА
ДВУХСТЕПЕННОГО ПОПЛАВКОВОГО ГИРОСКОПА**

**MATHEMATICAL MODEL OF A METHOD OF FAST CALIBRATING
SYSTEMATIC COMPONENT OF THE ANGULAR VELOCITY
OF DRIFT SINGLE-DEGREE-OF-FREEDOM GYROSCOPES**

По представлению академика РАРАН В.Ю. Мелешко

И.А. Медеяев, В.А. Макаров, А.О. Дряглев

Военная академия Ракетных войск стратегического назначения им. Петра Великого

I.A. Medelyaev, V.A. Makarov, A.O. Dryaglev

Получена математическая модель нового способа калибровки систематической составляющей угловой скорости дрейфа двухстепенного поплавкового гироскопа, включенного в режим гироскопа, по информации с датчика угла гироскопа. Реализация данного подхода требует только применения предлагаемых алгоритмов в системах управления подвижными объектами.

Ключевые слова: математическая модель, калибровка, дрейф, двухстепенной гироскоп, линеаризация, виброускорения, фильтр Калмана.

A mathematical model of a new method of calibrating systematic component of the angular velocity of drift single-degree-of-freedom gyroscopes, used in gyrocompass mode with the information of gyroscope angle sensor, has been obtained. The implementation of this approach only requires the application of the proposed algorithms in mobile object control systems.

Keywords: mathematical model, calibration, drift, single-degree-of-freedom gyrocompass, linearization, Kalman-Filter.

В навигации наземных и воздушных объектов широко используются инерциальные навигационные системы (ИНС) полуаналитического типа с использованием двухстепенных поплавковых гироскопов. В таких системах ось чувствительности одного из гироскопов всегда направлена примерно на север (юг), а второго, соответственно, на запад (восток). Перед началом использования данных систем по назначению обычно проводится калибровка их гироскопов и акселерометров. В свою оче-

редь качество калибровки гироскопов определяет эффективность эксплуатации автономных навигационных систем, в том числе объектов повышенного риска, время подготовки которых может нести определяющий характер в рамках сложившейся военно-политической обстановки в мире.

Известны различные способы калибровки систематических составляющих угловых скоростей дрейфов гироскопов ИНС, от точности калибровки которых существенно зависит

амплитуда колебаний платформы трехосного ги-
ростабилизатора с периодом М. Шулера [1].

Так, в [2] рассмотрена калибровка систематических составляющих угловых скоростей дрейфов гироскопов ИНС полуаналитического типа по сигналам акселерометров с использованием фильтра Калмана. При этом требуемая точность калибровки северного гироскопа $\sigma_c = 2,10^{-3}$ дуг.с/с достигалась примерно за 17 минут. Вместе с этим при моделировании не учитывались колебания (виброускорения) объекта, на котором установлена инерциальная навигационная система.

Известен также способ калибровки гироскопов на заарретированной платформе трехосного гиросtabilизатора (ТГС) ИНС после включения северного гироскопа в режим датчика угловой скорости (ДУС) [3] (рис. 1).

На рис. 1 обозначено: $Oxyz$ система координат, связанная с основанием (платформой) y входная ось, z выходная ось. Соответственно система координат $O\xi\eta\zeta$ связана с гироскопом (поплавок).

В данном случае выходной информационный сигнал (ток датчика моментов) гироскопа будет содержать как полезную постоянную составляющую $\omega_{гк}$, так и постоянную составляющую ψ , обусловленную проекцией горизонтальной угловой скорости Земли на свою ось чувствительности. Чтобы разделить данные составляющие, платформу ТГС поворачивают на угол, примерно равный $\pm 180^\circ$.

Таким образом, в данном способе необходимо:

- определенное время измерять ток датчика моментов гироскопа в первом положении ДУСа, чтобы компенсировать влияние собственных случайных шумов гироскопа, усилителя обратной связи и датчика угла;
- осуществить поворот основания ДУСа на $\pm 180^\circ$ с требуемой точностью;
- определенное время после разворота ждать окончания переходного процесса в ДУСе, вызванного указанным разворотом;
- определенное время измерять ток датчика моментов гироскопа во втором положении ДУСа по тем же причинам, что и в первом положении;

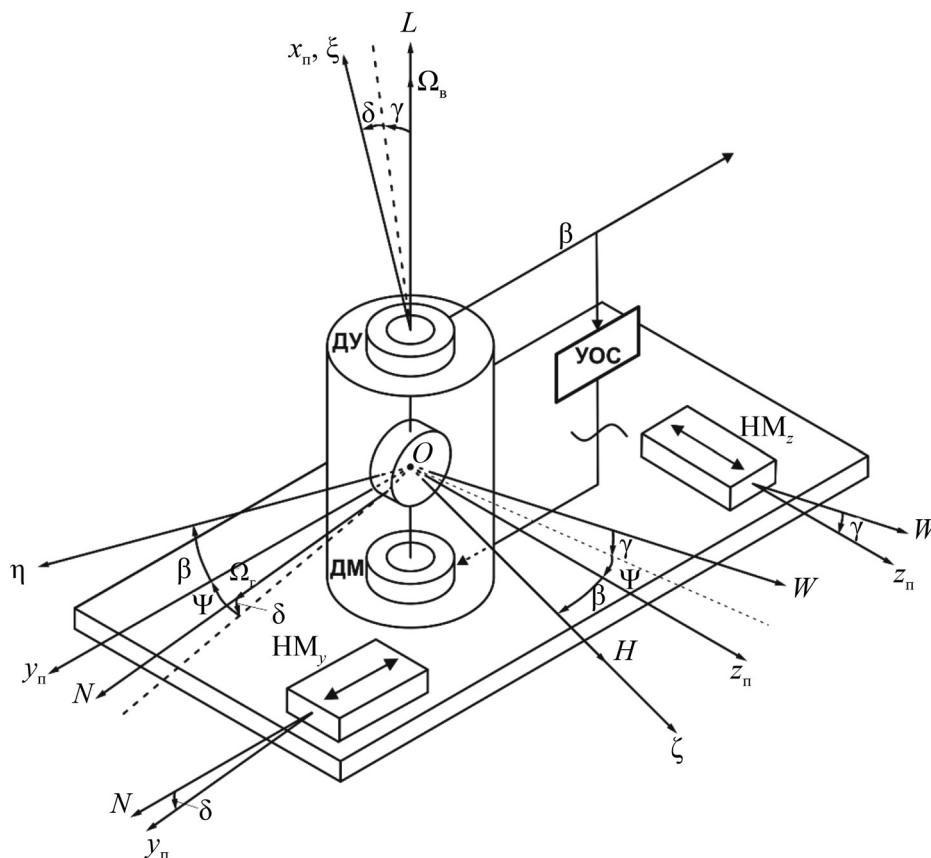


Рис. 1. К способу определения систематической составляющей угловой скорости дрейфа гироскопа

– по измерениям горизонтальных акселерометров (наклономеров) учесть погрешность, вызванную проекцией вертикальной составляющей угловой скорости вращения Земли, на ось чувствительности гироскопа.

Эти операции занимают около 20 минут в зависимости от выбранного времени измерения информационных сигналов гироскопов. В новом способе не требуется осуществление разворота платформы ТГС. Рассмотрим принцип определения систематической составляющей угловой скорости дрейфа гироскопа на заарретированной платформе ТГС СНН.

После арретирования входная ось гироскопа будет отклонена от направления на север на угол ψ , а платформа, на которой установлен гироскоп, отклонена от плоскости горизонта соответственно на углы δ и γ (рис. 1), нормальные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями, значения которых для современных ТГС после арретирования платформы ТГС не превышают нескольких дуговых минут [4].

После отключения обратной связи (рис. 1) гироскоп приобретает свойства гироскопа (ГК) и гироскопа (поплавок) гироскопа начнет поворачиваться под действием гироскопического момента M_r :

$$M_r = -H\Omega_r \cos(\beta - \psi), \quad (1)$$

где H — кинетический момент ГК;

Ω_r — горизонтальная составляющая угловой скорости вращения Земли;

β — угол отклонения оси η гироскопа относительно начального положения;

ψ — угол между Ω_r и осью y (рис. 1).

Кроме того, на ось чувствительности гироскопа дополнительно будет проецироваться вертикальная составляющая угловой скорости Земли Ω_b , соответственно на оси, связанные с основанием гироскопа y и z :

$$\omega_y = -\Omega_b \delta; \quad (2)$$

$$\omega_z = \Omega_b \gamma,$$

которые дадут два дополнительных гироскопических момента.

С учетом выражений (1) и (2) нелинейное дифференциальное уравнение гироскопа можно представить в следующем виде:

$$I\beta'' + f\beta' = H\Omega_r \cos(\beta - \psi) + H\Omega_b \gamma \cos\beta - H\Omega_b \delta \sin\beta + H\omega_{гк} + H\omega_{сл}, \quad (3)$$

где I, f — соответственно момент инерции и удельный момент сил вязкого трения среды гироскопа;

$\omega_{гк}$ — постоянная (систематическая) составляющая угловой скорости дрейфа гироскопа в данном запуске гироскопа с нулевым математическим ожиданием, меняющаяся по нормальному закону от запуска к запуску;

$\omega_{сл}$ — нормальная случайная составляющая угловой скорости дрейфа гироскопа с нулевым математическим ожиданием.

Запишем уравнение номинального движения гироскопа, то есть в предположении, что ось чувствительности гироскопа направлена точно на север, отсутствуют все возмущающие моменты относительно выходной оси гироскопа (кроме гироскопического), а также платформа ТГС находится в горизонте:

$$I\beta'' + f\beta' = H\Omega_r \cos\beta. \quad (4)$$

Данное уравнение не имеет аналитического решения и может быть решено относительно угла $\beta(t)$ одним из численных методов и сохранено в долговременном запоминающем устройстве цифровой вычислительной машины (ЦВМ).

Необходимо также отметить, что в правую часть уравнения (3) не входит возмущающее воздействие, обусловленное приборами, обеспечивающими обратную связь в гироскопе, вследствие отсутствия такового в данном способе.

Линеаризуем уравнение (3) относительно номинальных значений выражения (4):

$$\begin{aligned} I\Delta\beta'' + f\Delta\beta' + (H\Omega_r \sin\beta_n)\Delta\beta = \\ = (H\Omega_r \sin\beta_n)\psi + (H\Omega_b \cos\beta_n)\gamma - \\ - (H\Omega_b \sin\beta_n)\delta + H\omega_{гк} + H\omega_{сл}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\Delta\beta = \beta - \beta_n$ — приращение измеряемого угла поворота поплавка ГК относительно его номинального значения, обусловленное влиянием $\psi, \delta, \gamma, \omega_{гк}, \omega_{сл}$, а также колебаниями основания;

β_n — номинальное значение угла поворота поплавка относительно корпуса, рассчитанное в соответствии с выражением (4).

Уравнение (5) является линейным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. В правой части уравнения имеется переменная составляющая, зависящая от угла ψ , и постоянная составляющая угловой скорости дрейфа гироскопа $\omega_{гк}$, следовательно, их можно разделить в фильтре Калмана на фоне случайного шума.

Оценим точность калибровки систематической составляющей угловой скорости гироскопа в условиях виброускорения основания. С этой целью воспользуемся экспериментальными данными вибрации самолета НФВ 320. Формирующий фильтр для данных вибраций имеет соответственно вид [5]:

$$\begin{aligned} N'_1 &= N_2 + w_{B1}; \\ N'_2 &= -\alpha_1^2 N_1 - 2\xi_1 \alpha_1 N_2 + (\alpha_1 - 2\xi_1 \alpha_1) w_{B1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где N_1 — виброускорение самолета;

N_2 — компонента формирующего фильтра;

α_1 — собственная частота;

ξ_1 — коэффициент демпфирования;

w_{B1} — белый шум.

Параметры формирующего фильтра виброускорений $\alpha_1 = 1,33 \cdot 10^{-2}$ рад/с, $\xi_1 = 0,7$ определяют интенсивность белого шума:

$$Q_1 = 2\xi_1 \alpha_1 \sigma_{B1}^2,$$

где σ_{B1}^2 — дисперсия виброускорений, равная $1,86 \cdot 10^{-6}$ м²с⁻⁴.

Виброускорения N_1 будут воздействовать на гироскоп через дебаланс:

$$M_B = \left(\frac{H \omega_{0дб}}{g} \right) N_1,$$

где $\omega_{0дб} = 4,84 \cdot 10^{-8}$ рад/с — расчетное значение статического дебаланса гироскопа при действии ускорения в 1 g (значение ускорения силы тяжести Земли) [6].

Кроме того, данные виброускорения будут воздействовать на акселерометры платформы ТГС (наклонометры НМ_y и НМ_z).

Представим формирующий фильтр случайной составляющей угловой скорости дрейфа гироскопа в следующем виде (колебательное звено):

$$\begin{aligned} N'_3 &= N_4 + w_{B2}; \\ N'_4 &= -\alpha_2^2 N_3 - 2\xi_2 \alpha_2 N_4 + w_{B2}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $N_3 = \omega_{сл}$ — случайная составляющая угловой скорости дрейфа гироскопа;

N_4 — компонента формирующего фильтра.

Параметры формирующего фильтра случайного дрейфа $\alpha_2 = 6,28$ рад/с, $\xi_2 = 0,4$ определяют интенсивность белого шума:

$$Q_2 = 4\xi_2 \alpha_2^3 \sigma_{B2}^2,$$

где σ_{B2}^2 — дисперсия случайного дрейфа, равная $2,35 \cdot 10^{-15}$ рад²/с².

На рис. 2 представлены спектральные плотности мощности виброускорений самолета N_1 и случайного дрейфа гироскопа N_3 . Площади под данными графиками равны соответственно дисперсиям σ_{B1}^2 и σ_{B2}^2 .

Шумы датчика угла и наклономеров выберем в виде белых шумов с интенсивностями $C_{\text{дy}} = 2,10^{-13}$ рад², $C_{\text{НМy}} = C_{\text{НМz}} = 5,10^{-15}$ м²с⁻³.

Представляя уравнения (5) в форме Коши и добавляя два формирующих фильтра уравнения (6) и (7) с соответствующими параметрами, представим уравнение для способа определения систематической составляющей угловой скорости гироскопа на заарретированной платформе ТГС в стандартном виде [7]:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{X}} &= \mathbf{F}(t) \Delta \mathbf{X} + \mathbf{G} w_{\text{б.ш.}}; \\ \mathbf{Z} &= \mathbf{D} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{v}_{\text{б.ш.}}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Delta \mathbf{X}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{D}$ — соответственно вектор состояния (10×1), матрица возмущений (10×2) и матрица измерений (3×10) непрерывной системы;

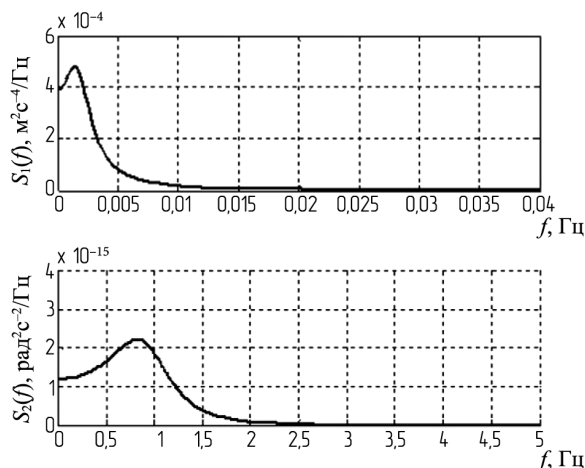


Рис. 2. Спектральные плотности мощности случайных процессов N_1 и N_3

$\mathbf{F}(t)$ — матрица состояния системы размерностью (10×10) ;

$\mathbf{w}_{б.ш.}$, $\mathbf{v}_{б.ш.}$ — векторы белых шумов возмущений и измерений размерностью (2×1) и (3×1) с диагональными матрицами интенсивностей соответственно $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ размерностями (2×2) и (3×3) .

Вектор состояния, системы (8) представим в следующем виде:

$$\Delta \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Delta X_1, \Delta X_2, \Delta X_3, \Delta X_4, \Delta X_5, \\ \Delta X_6, \Delta X_7, \Delta X_8, \Delta X_9, \Delta X_{10} \end{bmatrix}^T,$$

где $\Delta X_1 = \Delta \beta'$, $\Delta X_2 = \Delta \beta$, $\Delta X_3 = \psi$, $\Delta X_4 = \omega_{гк}$, $\Delta X_5 = \delta$, $\Delta X_6 = \gamma$, $\Delta X_7 = N_1$, $\Delta X_8 = N_2$, $\Delta X_9 = N_3$, $\Delta X_{10} = N_4$.

Ненулевые значения элементов матрицы возмущений:

$$\mathbf{G}(7,1) = 1, \mathbf{G}(8,1) = \alpha_1 - 2\xi_1\alpha_1, \mathbf{G}(10,2) = 1.$$

Ненулевые значения элементов матрицы измерений:

$$\mathbf{D}(1,1) = 1, \mathbf{D}(2,5) = g, \mathbf{D}(2,7) = 1,$$

$$\mathbf{D}(3,6) = g, \mathbf{D}(3,7) = 1.$$

Ненулевые значения элементов матрицы состояния $\mathbf{F}$, не зависящие от времени:

$$\mathbf{F}(1,2) = 1; \mathbf{F}(2,2) = -F/I; \mathbf{F}(2,4) = H/I;$$

$$\mathbf{F}(2,7) = H_{\omega_0} \delta \delta / (I g); \mathbf{F}(2,9) = H/I; \mathbf{F}(7,8) = 1;$$

$$\mathbf{F}(8,7) = \alpha_2^1; \mathbf{F}(8,8) = -2\xi_1\alpha_1; \mathbf{F}(9,10) = 1;$$

$$\mathbf{F}(10,9) = -\alpha_2^2; \mathbf{F}(10,10) = -2\xi_2\alpha_2.$$

Зависящие от времени значения элементов матрицы состояния $\mathbf{F}$ соответственно:

$$\mathbf{F}(2,1) = -(H\Omega_r/I)\sin\beta_n; \mathbf{F}(2,3) = (H\Omega_r/I)\sin\beta_n;$$

$$\mathbf{F}(2,5) = -(H\Omega_b/I)\cos\beta_n; \mathbf{F}(2,6) = (H\Omega_b/I)\sin\beta_n.$$

После дискретизации системы (8) с интервалом дискретности $\Delta t = 0,001$ с для оценки систематической составляющей угловой скорости дрейфа $\omega_{гк}$ по измеряемым значениям

датчика угла гироскопаса и наклономеров был использован дискретный оптимальный фильтр Калмана [8, 9].

При моделировании были приняты следующие значения входящих в систему (8), параметров:

$$I = 0,00004 \text{ Нмс}^2; H = 0,05 \text{ Нмс};$$

$$F = 0,025 \text{ Нмс}; \omega_b = 5,9 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с};$$

$$\omega_r = 4,3 \cdot 10^{-5} \text{ рад/с};$$

$$P_{\Delta X}(3,3) = (180 \cdot 0,485 \cdot 10^{-5})^2 \text{ рад}^2;$$

$$P_{\Delta X}(4,4) = (0,15 \cdot 0,485 \cdot 10^{-5})^2 \text{ рад}^2 \text{с}^{-2};$$

$$P_{\Delta X}(5,5) = P_{\Delta X}(6,6) = (120 \cdot 0,485 \cdot 10^{-5})^2 \text{ рад}^2.$$

При этом численные значения $P_{\Delta X}(4,4)$ и σ_{B2}^2 выбраны такими же, как в [2].

На рис. 3 представлен график среднеквадратического значения ошибки оценки данным способом систематической составляющей угловой скорости дрейфа гироскопа в условиях воздействия колебаний самолета, случайной составляющей угловой скорости дрейфа и шумов датчика угла гироскопа и наклономеров.

Среднеквадратическое значение оценки $\omega_{гк}$ резко уменьшается в первые 2 с, а затем плавно уменьшается и через 100 с достигает значения $\sigma_{гк} = 0,0011$ дуг.с/с.

При этом поплавков повернется относительно корпуса гироскопа на угол $0,5^\circ$.

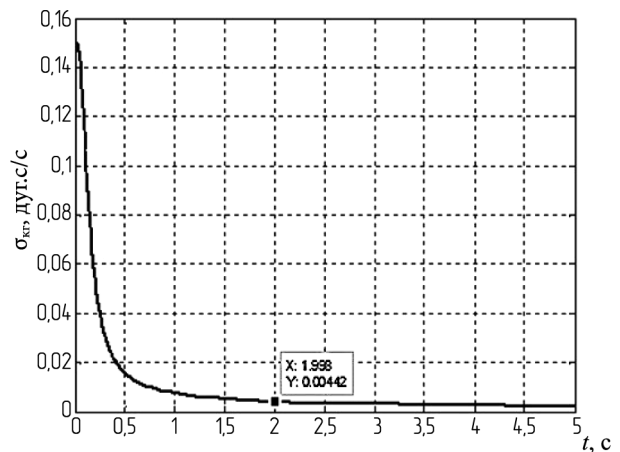


Рис. 3. Среднеквадратическое значение оценки $\omega_{гк}$

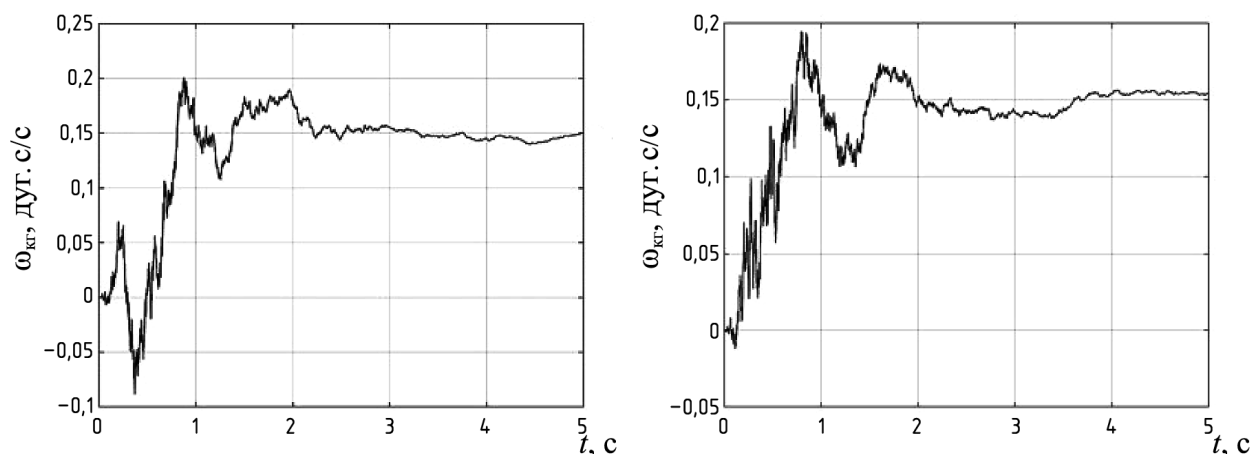


Рис. 4. Оценка $\omega_{гк}$ в первом и втором запусках фильтра

Такая тенденция уменьшения оценки наблюдается и при значительном варьировании параметров формирующих фильтров уравнения (6) и (7) [10].

На рис. 4 представлена соответственно оценка $\omega_{гк}$ в двух запусках фильтра Калмана.

Таким образом, данный способ оценки систематической составляющей угловой скорости дрейфа гироскопа позволяет после арретирования платформы ТГС системы навигации полуаналитического типа определять систематическую составляющую дрейфа соответствующего гироскопа ТГС быстрее более чем на 50% по сравнению с рассмотренными способами калибровки гироскопов.

Список источников

1. У. Ригли, У. Холлистер, У. Денхард. Теория, проектирование и испытания гироскопов; пер. с англ.; под ред. С.А. Харламова. М.: Мир, 1972. 416 с.
2. Теркайро Дж., Битнер Х. Выбор субоптимального фильтра минимального порядка для автономной калибровки и выставления систем инерциальной навигации // Сборник статей «Управление в пространстве». Т. 2. М.: Наука, 1976. 658 с.
3. Командно-измерительные приборы; под ред. Б.И. Назарова. М.: МО СССР, 1987. 638 с.

4. Никитин Е.А., Шестов С.А., Матвеев В.А. Гироскопические системы. 2-е изд., перераб. и доп.; под ред. Пельпора Д.С. М.: Высшая школа, 1988. 432 с.

5. S. Vathsal Design and Simulation of Closed-Loop Ground Alignment of Inertial Platforms with Sway Motion // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. 1986. V. 9, No. 3. Pp. 332–338.

6. Калихман Д.М. Прецизионные управляемые стенды для динамических испытаний гироскопических приборов / Под общ. ред. акад. В.Г. Пешехонова СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2008. 296 с.

7. Справочник по теории автоматического управления; под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.

8. Брамер К., Зифлинг Г. Фильтр Калмана Бьюси; пер. с нем. М.: Наука, 1982. 200 с.

9. Сейдж Э., Мелс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении; пер. с англ.; под ред. проф. Б.Р. Левина. М.: Связь, 1976. 496 с.

10. Дряглев А.О. Способ калибровки систематической составляющей угловой скорости дрейфа двухстепенного поплавкового гироскопа // Труды АО «НПЦАП». Научно-теоретический журнал РКТ Системы и приборы управления. 2024. Вып. № 1. 8 с.