УДК 519.63
doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-4

Конечно-разностный метод решения первой краевой задачи для нагруженного нестационарного уравнения влагопереноса

М. Х. Бештоков

Институт прикладной математики и автоматизации,
Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук, Нальчик, Россия
beshtokov-murat@yandex.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Одним из важных разделов теории дифференциальных уравнений являются нагруженные уравнения. Они позволяют моделировать процессы, в которых влияние внешних факторов существенно изменяет поведение системы. Особенно это важно в таких областях, как механика, гидрология и материаловедение. Изучение нагруженных уравнений способствует созданию более точных моделей, которые используются для анализа устойчивости и надежности конструкций, а также для прогнозирования различных явлений в природных и инженерных системах. Построены новые разностные схемы повышенного порядка точности для приближенного решения первой краевой задачи для нестационарного нагруженного уравнения влагопереноса в одномерных и многомерных областях. Нагруженные интегральные уравнения позволяют глубже понять распределение нагрузок и взаимодействие элементов в сложных системах. Изученные в данной работе уравнения играют значительную роль в решении актуальных задач экологии, сельского хозяйства, строительства и климатологии. Точное моделирование процессов влагопереноса позволяет эффективно управлять водными ресурсами, прогнозировать уровень грунтовых вод, оптимизировать орошение, обеспечивать устойчивость строительных конструкций и предсказывать последствия климатических изменений. Кроме того, развитие таких моделей способствует прогрессу в гидрологии и смежных науках. *Материалы и методы.* Для приближенного решения поставленных задач используется метод конечных разностей и метод энергетических неравенств для получения априорных оценок решений предложенных разностных схем. *Результаты.* Для каждой задачи построена разностная схема повышенного порядка аппроксимации. Методом энергетических неравенств для решения каждой разностной задачи получена априорная оценка. Из полученных оценок следуют единственность и устойчивость решения по правой части и начальным данным, а также сходимость решения разностной задачи к решению соответствующей исходной дифференциальной задачи со скоростью, равной порядку аппроксимации разностной схемы. *Выводы.* Разработаны новые разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для приближенного решения поставленных задач.

Ключевые слова: первая краевая задача, многомерное уравнение влагопереноса, нагруженное уравнение, априорная оценка, разностная схема, схема повышенного порядка точности, устойчивость и сходимость схемы

Для цитирования: Бештоков М. Х. Конечно-разностный метод решения первой краевой задачи для нагруженного нестационарного уравнения влагопереноса // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 2. С. 44–62. doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-4

Finite-difference method for solving the first boundary value problem for a non-stationary loaded moisture transfer equation

M.Kh. Beshtokov

Institute of Applied Mathematics and Automation KBSC RAS, Nalchik, Russia
beshtokov-murat@yandex.ru

Abstract. *Background*. One of the important sections of the theory of differential equations is loaded equations. They allow us to model processes in which the influence of external factors significantly changes the behavior of the system. This is especially important in fields such as mechanics, hydrology, and materials science. The study of loaded equations contributes to the creation of more accurate models that are used to analyze the stability and reliability of structures, as well as to predict various phenomena in natural and engineering systems. New difference schemes of an increased order of accuracy are constructed for an approximate solution of the first boundary value problem for an unsteady loaded moisture transfer equation in one-dimensional and multidimensional regions. Loaded integral equations allow for a deeper understanding of the distribution of loads and the interaction of elements in complex systems. The equations studied in this paper play a significant role in solving urgent problems of ecology, agriculture, construction and climatology. Accurate modeling of moisture transfer processes makes it possible to effectively manage water resources, predict groundwater levels, optimize irrigation, ensure the stability of building structures, and predict the effects of climate change. In addition, the development of such models contributes to progress in hydrology and related sciences. *Materials and methods*. For an approximate solution of the tasks set, the finite difference method and the energy inequality method are used to obtain a priori estimates of the solutions of the proposed difference schemes. *Results*. A high-order approximation difference scheme is constructed for each problem. An a priori estimate is obtained by the method of energy inequalities for solving each difference problem. The obtained estimates imply the uniqueness and stability of the solution on the right side and the initial data, as well as the convergence of the solution of the difference problem to the solution of the corresponding initial differential problem with a speed equal to the order of approximation of the difference scheme. *Conclusions*. New high-order difference schemes of approximation have been developed for the approximate solution of the tasks set.

Keywords: the first boundary value problem, multidimensional moisture transfer equation, loaded equation, a priori estimate, difference scheme, high-order accuracy scheme, stability and convergence of the scheme

For citation: Beshtokov M.Kh. Finite-difference method for solving the first boundary value problem for a non-stationary loaded moisture transfer equation. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(2):44–62. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-4

Введение

Одним из важных разделов теории дифференциальных уравнений являются нагруженные уравнения. Они позволяют моделировать процессы, в которых влияние внешних факторов существенно изменяет поведение системы. Особенно это важно в таких областях науки, как механика, гидрология и материаловедение. Изучение нагруженных уравнений способствует созданию более точных моделей, которые используются для анализа устойчивости и надежности конструкций, а также для прогнозирования различных явлений в природных и инженерных системах.

Работы, посвященные исследованию нагруженных уравнений, можно условно разделить на два типа: исследования, сосредоточенные на нагруженных интегральных уравнениях, и исследования, касающиеся нагруженных дифференциальных уравнений. Исторически первые работы в этой области были ориентированы на нагруженные интегральные уравнения, что связано с их применением в различных задачах, требующих анализа влияния внешних факторов на системы. Нагруженные интегральные уравнения позволяют глубже понять распределение нагрузок и взаимодействие элементов в сложных системах. Этому классу нагруженных уравнений посвящены работы [1–6]. Важность изучения таких уравнений подчеркивали А. Н. Крылов, В. И. Смирнов, А. Н. Тихонов и А. А. Самарский, которые приводили примеры прикладных задач из техники и физики, сводящихся к нагруженным интегральным уравнениям.

С течением времени, по мере развития теории и методов решения, внимание ученых стало смещаться к нагруженным дифференциальным уравнениям, которые обеспечивают более точное описание динамики процессов и позволяют учитывать временные изменения в системах [7–15].

Таким образом, исследование обоих типов уравнений важно для дальнейшего развития теории и практических приложений в различных областях науки и техники.

В данной работе рассматривается первая начально-краевая задача для одномерного и многомерного нагруженного нестационарного уравнения влагопереноса. Уравнения такого вида играют значительную роль в решении актуальных задач экологии, сельского хозяйства, строительства и климатологии. Точное моделирование процессов влагопереноса позволяет эффективно управлять водными ресурсами, прогнозировать уровень грунтовых вод, оптимизировать орошение, обеспечивать устойчивость строительных конструкций и предсказывать последствия климатических изменений [16, 17]. Кроме того, развитие таких моделей способствует прогрессу в гидрологии и смежных науках.

Для исследования поставленных задач используется метод энергетических неравенств, который позволяет получить априорные оценки в разностной интерпретации задачи. В результате получены априорные оценки в разностной форме, позволяющие установить ряд важных свойств решений рассматриваемых задач. В частности, из полученных оценок следует, что решение соответствующей задачи является единственным и устойчивым относительно правой части уравнения и начальных данных. Это означает, что небольшие изменения в исходных условиях или в правой части уравнения не приводят к значительным изменениям в решении.

Также доказана сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи, подтверждающая, что при переходе от разностной модели к непрерывной (дифференциальной) решения будут близкими, что важно для понимания поведения системы в предельном случае и при численном решении. Проведены численные расчеты тестового примера для одномерной задачи.

Таким образом, работа предоставляет теоретическую основу для численного анализа нагруженного нестационарного уравнения влагопереноса в одномерных и многомерных областях и подтверждает надежность методов, используемых для их решения.

Численные методы играют ключевую роль в исследовании нагруженных уравнений как интегральных, так и дифференциальных. Поскольку аналитические решения таких уравнений часто либо отсутствуют, либо крайне сложны для получения, численные методы позволяют эффективно приближенно решать задачи, моделирующие реальные процессы [18–23].

1. Постановка одномерной задачи

В прямоугольнике $\bar{D}=\{(x,t): 0\le x\le l,\ 0\le t\le T\}$ рассмотрим первую краевую задачу для одномерного нестационарного нагруженного уравнения влагопереноса:

$$u_t = k(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} - \sum_{s=1}^{m} q_s(x,t)u(\xi_s,t) + f(x,t),\ 0<x<l,\ 0<t\le T, \quad (1)$$

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\ 0\le t\le T, \quad (2)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le l, \quad (3)$$

где

$$u(x,t)\in C^{6,3}(\bar{D}),\quad k(t)\in C^1[0,T],\quad q_s(x,t), f(x,t)\in C^{4,1}(\bar{D}), \quad (4)$$

$$0\langle c_0\le k(t)\le c_1,\quad |q_s(x,t)|,|q_{s,xx}(x,t)|\le c_2,\quad A\rangle 0,\quad s=1,2,\ldots,m,$$

$\xi_s, (s=1,2,...,m)$ – произвольные точки интервала $(0,l)$: $0<\xi_1<...<\xi_m<l$.

В дальнейшем предполагаем, что решение дифференциальной задачи (1)–(3) существует и единственно.

2. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1)–(3) применим метод конечных разностей. Для этого на равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau}=\bar{\omega}_h\times\bar{\omega}_\tau$, где $\bar{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=\overline{0,N}, h=l/N\}$, $\bar{\omega}_\tau=\{t_j=j\tau,\ j=0,1,...,j_0, \tau=T/j_0\}$, дифференциальной задаче (1)–(3) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O(h^4+\tau^2)$:

$$\mathcal{H}_h y_t = \frac{1}{2}aY_{\bar{x}x} + Ay_{\bar{x}xt} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}\mathcal{H}_h d_s Y(\xi_s,t_j) + \mathcal{H}_h\varphi, \quad (5)$$

$$y_0=y_N=0,\quad y(x_i,0)=u_0(x_i), \quad (6)$$

$$y_t=\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau},\quad \mathcal{H}_h y_i^j=\frac{1}{12}\left(y_{i+1}^j+10y_i^j+y_{i-1}^j\right)=y_i^j+\frac{h^2}{12}y_{\bar{x}x,i}^j,\quad i=1,\ldots,N-1,$$

$$Y^{j+1}=y^{j+1}+y^j,\ a^j=k\left(t_{j+\frac{1}{2}}\right),$$

$$d_{s,i}^{j}=q_s\left(x_i,t_{j+\frac{1}{2}}\right),\ \varphi_i^j=f\left(x_i,t_{j+\frac{1}{2}}\right),\ x_{i_s}\le\xi_s\le x_{i_{s+1}},$$

$$\eta_s^j=\frac{\left(\xi_s-x_{i_s}\right)\left(\xi_s-x_{i_s+1}\right)\left(\xi_s-x_{i_s+2}\right)}{-6h^3}y_{i_s-1}^j+$$

$$+\frac{\left(\xi_s-x_{i_s-1}\right)\left(\xi_s-x_{i_s+1}\right)\left(\xi_s-x_{i_s+2}\right)}{2h^3}y_{i_s}^j+$$

$$+\frac{\left(\xi_s-x_{i_s-1}\right)\left(\xi_s-x_{i_s}\right)\left(\xi_s-x_{i_s+2}\right)}{-2h^3}y_{i_s+1}^j+\frac{\left(\xi_s-x_{i_s-1}\right)\left(\xi_s-x_{i_s}\right)\left(\xi_s-x_{i_s+1}\right)}{6h^3}y_{i_s+2}^j,$$

где $\eta_s^j=y\left(\xi_s,t_j\right)$, $Y\left(\xi_s,t_j\right)=\eta_s^{j+1}+\eta_s^j$.

В дальнейшем будем считать, что $h<\min\left\{\xi_1,l-\xi_m\right\}$, j_0- количество узлов сетки на $\left[0,T\right]$, $N-$ количество узлов сетки на $\left[0,l\right]$.

Найдем априорную оценку решения (5), (6) методом энергетических неравенств, в связи с чем введем скалярные произведения и норму в виде

$$\left(u,v\right)=\sum_{i=1}^{N-1}u_iv_ih,\ \left(u,v\right]=\sum_{i=1}^{N}u_iv_ih,\ \left(u,u\right)=\left(1,u^2\right)=\|u\left(\cdot,t\right)\|^2=\|u\|^2.$$

Чтобы найти априорную оценку решения задачи (5), (6), умножим уравнение (5) скалярно на $Y=y^j+y^{j+1}$:

$$\left(Y,\mathcal{H}_hy_t\right)=\frac{1}{2}\left(aY_{\bar{x}x},Y\right)+A\left(y_{\bar{x}xt},Y\right)-\left(\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}\mathcal{H}_hd_sY\left(\xi_s,t_j\right),Y\right)+\left(\mathcal{H}_h\varphi,Y\right).\quad(7)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в (6):

$$\left(Y,\mathcal{H}_hy_t\right)=\left(y^{j+1}+y^j,y_t+\frac{h^2}{12}y_{\bar{x}xt}\right)=\left(y^{j+1}+y^j,y_t\right)+\left(y^{j+1}+y^j,\frac{h^2}{12}y_{\bar{x}xt}\right)=$$

$$=\left(y^{j+1}+y^j,\frac{1}{\tau}\left(y^{j+1}-y^j\right)\right)-\frac{h^2}{12}\left(y_{\bar{x}}^{j+1}+y_{\bar{x}}^j,\frac{1}{\tau}\left(y_{\bar{x}}^{j+1}-y_{\bar{x}}^j\right)\right]=$$

$$=\left(\|y\|^2\right)_t-\frac{h^2}{12}\left(\|y_{\bar{x}}]|^2\right)_t,\quad(8)$$

$$\frac{1}{2}\left(aY_{\bar{x}x},Y\right)=-\frac{1}{2}\left(a,\left(Y_{\bar{x}}\right)^2\right]\le-\frac{c_0}{2}\|Y_{\bar{x}}]|^2,\quad(9)$$

$$A\left(y_{\bar{x}xt},Y\right)=-A\left(y_{\bar{x}t},Y_{\bar{x}}\right]=-A\left(\frac{1}{\tau}\left(\hat{y}_{\bar{x}}-y_{\bar{x}}\right),\left(\hat{y}_{\bar{x}}+y_{\bar{x}}\right)\right]=$$

$$=-A\left(\frac{1}{\tau},(\hat{y}_{\bar{x}})^2-(y_{\bar{x}})^2\right]=-A\left(1,\left(y_{\bar{x}}^2\right)_t\right]=-A\left(\|y_{\bar{x}}]|^2\right)_t, \tag{10}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{s=1}^{m}\mathcal{H}_h d_s Y\left(\xi_s,t_j\right),Y\right)=-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{m}Y\left(\xi_s,t_j\right)\left(\mathcal{H}_h d_s,Y\right)\le$$

$$\le\sum_{s=1}^{m}\left(\frac{1}{4}Y^2\left(\xi_s,t_j\right)+\frac{c_2^2}{4}(1,Y)^2\right)\le M_1\sum_{s=1}^{m}Y^2\left(\xi_s,t_j\right)+\frac{mlc_2^2}{4}\left(1,Y^2\right)\le$$

$$\le M_2\left(\varepsilon\|Y_{\bar{x}}]|^2+\frac{1}{4\varepsilon}\|Y\|^2\right)+\frac{mlc_2^2}{4}\left(1,Y^2\right)\le M_3\left(\|Y_{\bar{x}}]|^2+\|Y\|^2\right), \tag{11}$$

$$\left(\mathcal{H}_h\varphi,Y\right)\le\frac{1}{2}\|Y\|^2+\frac{1}{2}\|\mathcal{H}_h\varphi\|^2. \tag{12}$$

Учитывая полученные преобразования (7)–(12), из (6) находим

$$\left(\|y\|^2\right)_t+A\left(\|y_{\bar{x}}]|^2\right)_t-\frac{h^2}{12}\left(\|y_{\bar{x}}]|^2\right)_t+\frac{c_0}{2}\|Y_{\bar{x}}]|^2\le$$

$$\le M_4\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar{x}}]|^2\right)+M_5\|\mathcal{H}_h\varphi\|^2.$$

Здесь и далее через M_i $(i=1,2,\ldots)$ обозначим положительные постоянные, зависящие только от входных данных исходной дифференциальной задачи.

Выбирая $h\le h_0=\sqrt{6A}$, из последнего находим

$$\left(\|y\|^2\right)_t+\frac{A}{2}\left(\|y_{\bar{x}}]|^2\right)_t+\frac{c_0}{4}\|Y_{\bar{x}}]|^2\le M_4\left(\|Y\|^2+\|Y_{\bar{x}}]|^2\right)+M_5\|\mathcal{H}_h\varphi\|^2. \tag{13}$$

Просуммируем (13) по j' от 0 до j, умножив обе части на τ, тогда получаем

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar{x}}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\,\tau\le$$

$$\le M_6\sum_{j'=0}^{j}\left(\|Y^{j'}\|^2+\|Y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\right)\tau+M_7\left(\sum_{j'=0}^{j}\|\mathcal{H}_h\varphi^{j'}\|^2\,\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar{x}}^0]|^2\right). \tag{14}$$

Преобразуем первое слагаемое в правой части (14), тогда получим с учетом $(a+b)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)$:

$$\sum_{j'=0}^{j}\|Y^{j'}\|^2\,\tau=\sum_{j'=0}^{j}\|y^{j'+1}+y^{j'}\|^2\,\tau\le 2\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y^{j'+1}\|^2+\|y^{j'}\|^2\right)\tau=$$

$$=2\sum_{j'=0}^{j}\|y^{j'+1}\|^2\tau+2\sum_{j'=0}^{j}\|y^{j'}\|^2\tau=2\sum_{j'=1}^{j+1}\|y^{j'}\|^2\tau+2\sum_{j'=0}^{j}\|y^{j'}\|^2\tau=$$

$$=2\|y^{j+1}\|^2+2\|y^0\|^2+4\sum_{j'=1}^{j}\|y^{j'}\|^2\tau. \qquad (15)$$

Учитывая (15), из (14) находим

$$(1-2M_6\tau)\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar{x}}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\tau\le$$

$$\le M_7\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y^{j'}\|^2+\|y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\right)\tau+M_8\left(\sum_{j'=0}^{j}\|\mathcal{H}_h\varphi^{j'}\|^2\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar{x}}^0]|^2\right). \qquad (16)$$

Выбирая $\tau\le\tau_0=\dfrac{1}{M_6}$, из (16) находим

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\tau\le$$

$$\le M_9\sum_{j'=0}^{j}\left(\|y\|^2+\|y_{\bar{x}}]|^2\right)\tau+M_{10}\left(\sum_{j'=0}^{j}\|\mathcal{H}_h\varphi^{j'}\|^2\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar{x}}^0]|^2\right). \qquad (17)$$

Применяя к неравенству (17) разностный аналог леммы Гронуолла [24, лемма 4, с. 171], находим оценку

$$\|y^{j+1}\|^2+\|y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2+\sum_{j'=0}^{j}\|Y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\tau\le$$

$$\le M\left(\sum_{j'=0}^{j}\|\mathcal{H}_h\varphi^{j'}\|^2\tau+\|y^0\|^2+\|y_{\bar{x}}^0]|^2\right), \qquad (18)$$

где $M=\text{const}>0$, зависящая только от входных данных рассматриваемой задачи (1)–(3) и не зависящая от h и τ.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4), тогда существуют такие τ_0, h_0, что если $\tau\le\tau_0(c_0,c_1,c_2,T,l)$, $h\le h_0(c_0,c_1,c_2,T,l)$, то для решения разностной задачи (5), (6) справедлива априорная оценка (18).

Из априорной оценки (18) следуют единственность решения разностной задачи (5), (6), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных.

Пусть $u(x,t)-$ решение задачи (1)–(3), $y(x_i,t_j)=y_i^j$ – решение разностной задачи (5), (6). Для оценки точности разностной схемы (5), (6) рассмотрим разность $z_i^j = y_i^j - u_i^j$, где $u_i^j = u\left(x_i, t_j\right)$. Тогда, подставляя $y = z + u$ в соотношения (5), (6), получаем задачу для функции z:

$$\mathcal{H}_h z_t = \frac{1}{2} a Z_{\bar{x}x} + \frac{1}{2} A z_{\bar{x}xt} - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{m} \mathcal{H}_h d_s Z\left(\xi_s, t_j\right) + \mathcal{H}_h \Psi, \tag{19}$$

$$z_0 = z_N = 0, \quad z\left(x_i, 0\right) = 0, \tag{20}$$

где $\mathcal{H}_h \Psi = O\left(h^4 + \tau^2\right)$ – погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1)–(3) разностной схемой (5), (6) в классе решении $u = u(x,t)$ задачи (1)–(3).

Применяя априорную оценку (18) к решению задачи (19), (20), получаем неравенство

$$\| z^{j+1} \|^2 + \| z_{\bar{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \| Z_{\bar{x}}^{j'}]|^2 \tau \le M \sum_{j'=0}^{j} \| \mathcal{H}_h \Psi^{j'} \|^2 \tau, \tag{21}$$

где $M = \text{const} > 0$, не зависящая от h и τ.

Из априорной оценки (21) следует сходимость решения разностной задачи (5), (6) к решению дифференциальной задачи (1)–(3) в смысле нормы $\| z^{j+1} \|_1^2$ на каждом слое, при этом существуют такие τ_0, h_0, что если $\tau \le \tau_0\left(c_0, c_1, c_2, T, l\right)$, $h \le h_0\left(c_0, c_1, c_2, T, l\right)$, то справедлива оценка

$$\| y^{j+1} - u^{j+1} \|_1 \le M\left(h^4 + \tau^2\right),$$

где $\| z^{j+1} \|_1^2 = \| z^{j+1} \|^2 + \| z_{\bar{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \| Z_{\bar{x}}^{j'}]|^2 \tau$.

3. Постановка многомерной задачи

В цилиндре $\bar{Q}_T = \bar{G} \times [0 \le t \le T]$, основанием которого является p-мерный прямоугольный параллелепипед $\bar{G} = \left\{x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right): 0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1, 2, \ldots, p\right\}$ с границей Γ, $\bar{G} = G \cup \Gamma$, рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \bar{L}u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{22}$$

$$u|_\Gamma = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{23}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{G}, \tag{24}$$

где

$$\bar{L}u = \sum_{\alpha=1}^{p} \bar{L}_\alpha u, \quad \bar{L}_\alpha u = A \frac{\partial^3 u}{\partial x_\alpha^2 \partial t}, \quad Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u,$$

$$L_\alpha u = k_\alpha(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - \sum_{s=1}^{m} q_{\alpha,s}(x\ t)\, u\left(x_1,...,x_{\alpha-1},\xi_\alpha^s,x_{\alpha+1},...,x_p,t\right),$$

$$u(x,t)\in C^{6,3}\left(\bar{Q}_T\right),\ k_\alpha(t)\in C^1[0,T],\quad q_{\alpha,s}(x,t),\ f(x,t)\in C^{4,1}\left(\bar{Q}_T\right), \quad (25)$$

$$0 < c_0 \le k_\alpha(t) \le c_1,\quad \left|q_{\alpha,s}(x,t)\right| \le c_2,\quad A>0,\quad s=1,2,...,m,$$

$$\alpha = \overline{1,p},\quad c_0,c_1,c_2 = const > 0,$$

ξ_α^s, $(s=1,2,...,m)$ – произвольные точки интервала $(0,l_\alpha)$,

$$Q_T = G\times(0<t\le T].$$

4. Построение разностной схемы повышенного порядка точности

Разобьем p-мерное пространство переменных $x_1,\dots,x_p$ (гиперплоскость размерности p) $(p-1)$-мерными гиперплоскостями $x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha$, $\alpha = 1,2,\dots,p$, где $h_\alpha = \frac{i_\alpha}{N_\alpha}$, i_α – целые числа, на p-мерные параллелепипеды [24, с. 486]. Вершины этих параллелепипедов будем называть узлами сетки. Множество узлов, принадлежащих открытой области $G=\bar{G}\setminus\Gamma$, назовем внутренними узлами и обозначим через

$$\omega_h = \left\{x_i = \left(x_1^{(i_1)},...,x_p^{(i_p)}\right), 0 < l_\alpha < N_\alpha\right\}.$$

Множество узлов, принадлежащих границе Г, назовем граничными узлами $\gamma_h = \{x_i \in \Gamma\}$.

На отрезке $0\le t\le T$ введем сетку

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{t_j = j\tau, j=0,1,...,m,\ m\tau = T\right\}.$$

Таким образом, в замкнутой области $\bar{Q}_T$ вводится равномерная сетка [24]:

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \left\{\left(x_i,t_j\right),\ x\in\bar{\omega}_h,\ t\in\bar{\omega}_\tau\right\},$$

$$\bar{\omega}_h = \prod_{\alpha=1}^{p}\bar{\omega}_{h_\alpha},\quad \bar{\omega}_{h_\alpha} = \left\{x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0,1,...,N_\alpha,\ N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\right\},$$

$$\bar{\omega}_\tau = \left\{t_j = j\tau,\ j=0,1,...,m,\ m\tau = T\right\}.$$

На сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ дифференциальной задаче (22)–(25) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации $O\left(|h|^4+\tau^2\right)$:

$$y_t = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha Y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + A\sum_{\alpha=1}^{p} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha t} - \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha t} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{m}\mathcal{H}_{\alpha,h_\alpha} d_{\alpha,s} Y\left(x_1,...,x_{\alpha-1},\xi_\alpha^s,x_{\alpha+1},...,x_p,t_j\right),Y\right)_\alpha + \mathcal{H}_h\varphi,\ (x,t)\in\omega_{h\tau}, \quad (26)$$

$$y|_{\gamma_h}=0,\ y(x,0)=u_0(x), \quad (27)$$

где

$$\mathcal{H}_h=\sum_{\alpha=1}^{p}\mathcal{H}_{\alpha,h_\alpha},$$

$$\mathcal{H}_{\alpha,h_\alpha} y_{i_\alpha}^j=\frac{1}{12}\left(y_{i_\alpha+1}^j+10y_{i_\alpha}^j+y_{i_\alpha-1}^j\right)=y_{i_\alpha}^j+\frac{h_\alpha^2}{12}y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha,i_\alpha}^j,\ i_\alpha=\overline{1,N_\alpha-1},$$

$$y_t=\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau},\ \hat{y}=y^{j+1}, y=y^j, y_{\bar{x}_\alpha}=\frac{y_{i_\alpha}-y_{i_\alpha-1}}{h_\alpha}, y_{x_\alpha}=\frac{y_{i_\alpha+1}-y_{i_\alpha}}{h_\alpha},$$

$$Y^{j+1}=y^{j+1}+y^j,\ a_\alpha=k_\alpha\left(\bar{t}_j\right),\quad d_{\alpha,s}=q_{\alpha,s}\left(x,\bar{t}_j\right),\quad \varphi=f\left(x,\bar{t}_j\right),$$

$$\bar{t}=(j+0.5)\tau=t_j+0.5\tau=t_{j+0.5},\quad t_{j+\frac{\alpha}{p}}=t_j+\frac{\alpha\tau}{p}=\left(j+\frac{\alpha}{p}\right)\tau,$$

$$x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}\right)}\le\xi_\alpha^s\le x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}+1\right)},\quad \eta_s^j=\frac{\left(\xi_\alpha^s-x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}\right)}\right)\left(\xi_\alpha^s-x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}+1\right)}\right)\left(\xi_\alpha^s-x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}+2\right)}\right)}{-6h^3}y_{i_{\alpha_s}-1}^{(\alpha)}+$$

$$+\frac{\left(\xi_\alpha^s-x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}-1\right)}\right)\left(\xi_\alpha^s-x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}+1\right)}\right)\left(\xi_\alpha^s-x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}+2\right)}\right)}{2h^3}y_{i_{\alpha_s}}^{(\alpha)}+$$

$$+\frac{\left(\xi_\alpha^s-x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}-1\right)}\right)\left(\xi_\alpha^s-x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}\right)}\right)\left(\xi_\alpha^s-x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}+2\right)}\right)}{-2h^3}y_{i_{\alpha_s}+1}^{(\alpha)}+$$

$$+\frac{\left(\xi_\alpha^s-x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}-1\right)}\right)\left(\xi_\alpha^s-x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}\right)}\right)\left(\xi_\alpha^s-x_\alpha^{\left(i_{\alpha_s}+1\right)}\right)}{6h^3}y_{i_{\alpha_s}+2}^{(\alpha)},$$

здесь

$$\eta_s^j=y\left(x_1,...,x_{\alpha-1},\xi_\alpha^s,x_{\alpha+1},...,x_p,t_j\right),$$

$$Y\left(x_1,...,x_{\alpha-1},\xi_\alpha^s,x_{\alpha+1},...,x_p,t_j\right)=\eta_s^{j+1}+\eta_s^j.$$

В дальнейшем будем считать, что $h < \min\left\{\xi_\alpha^1, l-\xi_\alpha^m\right\}$:

$$x^{\delta\alpha} = x_1,...,x_{\alpha-1}, x_\alpha + \delta h_\alpha, x_{\alpha+1},...,x_p, \ \ \overline{t} = (j+0,5)\tau = t_j + 0,5\tau = t_{j+0,5},$$

$$|h|^4 = h_1^4 + h_2^4 + ... + h_p^4, \ \ \tau, h - \text{шаги сетки.}$$

5. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для получения априорной оценки решения разностной задачи (26), (27) воспользуемся методом энергетических неравенств. Введем скалярное произведение в следующем виде:

$$(u,v) = \sum_{x\in\omega_h} u(x)v(x)h_1h_2\cdots h_p =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p-1} u\left(i_1h_1, i_2h_2,\ldots,i_ph_p\right)v\left(i_1h_1, i_2h_2,\ldots,i_ph_p\right)h_1h_2\cdots h_p;$$

$$(u,v)_\alpha = \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\cdots\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p-1} u(x)v(x)h_1h_2\cdots h_p =$$

$$= \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha-1} u(x)v(x)h_\alpha\right)H/h_\alpha,$$

$$(u,v]_\alpha = \sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}\cdots\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha}\cdots\sum_{i_p=1}^{N_p-1} u(x)v(x)h_1h_2\cdots h_p =$$

$$= \sum_{i_\beta\neq i_\alpha}\left(\sum_{i_\alpha=1}^{N_\alpha} u(x)v(x)h_\alpha\right)H/h_\alpha, \ \ H = \prod_{\alpha=1}^{p} h_\alpha.$$

В пространстве функции определим норму и введем ее в таком виде:

$$(y,y) = \|u\|^2, \ \ (y,y] = \|u]|^2, \ \ (y,v] = \sum_{\alpha=1}^{p}(y,v]_\alpha, \ \ \|y_{\overline{x}}]|^2 = \sum_{\alpha=1}^{p}\|y_{\overline{x}_\alpha}]|^2.$$

Умножим (26) скалярно на $Y = \hat{y} + y$:

$$(y_t, Y) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(a_\alpha Y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha}, Y\right) + \left(A\sum_{\alpha=1}^{p} y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha t}, Y\right) - \left(\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12} y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha t}, Y\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{m}\mathcal{H}_{\alpha,h_\alpha} d_{\alpha,s} Y\left(x_1,...,x_{\alpha-1},\xi_\alpha^s, x_{\alpha+1},...,x_p,t_j\right), Y\right)_\alpha, Y\right) + \left(\mathcal{H}_h\varphi, Y\right). \quad (28)$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (28) с учетом первой разностной формулы Грина [24]:

$$\left(y_t, Y\right) = \left(\frac{1}{\tau}(\hat{y} - y), (\hat{y} + y)\right) = \frac{\left(1, \hat{y}^2\right) - \left(1, y^2\right)}{\tau} = (1, y^2)_t = \left(\| y \|^2\right)_t, \tag{29}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha Y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, Y\right) = -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(a_\alpha, Y_{\bar{x}_\alpha}^2\right]_\alpha \le -\frac{c_0}{2}\| Y_{\bar{x}}]|^2, \tag{30}$$

$$\left(A\sum_{\alpha=1}^{p} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha t}, Y\right) = A\sum_{\alpha=1}^{p}\left(y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha t}, Y\right) = -A\sum_{\alpha=1}^{p}\left(y_{\bar{x}_\alpha t}, Y_{\bar{x}_\alpha}\right] =$$

$$= -A\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{1}{\tau}\left(\hat{y}_{\bar{x}_\alpha} - y_{\bar{x}\alpha}\right), \left(\hat{y}_{\bar{x}_\alpha} + y_{\bar{x}_\alpha}\right)\right] = -A\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{1}{\tau}, \left(\hat{y}_{\bar{x}_\alpha}\right)^2 - \left(y_{\bar{x}_\alpha}\right)^2\right] =$$

$$= -A\sum_{\alpha=1}^{p}\left(1, \left(y_{\bar{x}_\alpha}^2\right)_t\right] = -A\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\| y_{\bar{x}_\alpha}]|^2\right)_t, \tag{31}$$

$$-\left(\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha t}, Y\right) = \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\left(y_{\bar{x}_\alpha t}, Y_{\bar{x}_\alpha}\right]_\alpha =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\left(\frac{1}{\tau}\left(y_{\bar{x}_\alpha}^{j+1} - y_{\bar{x}_\alpha}^{j}\right), y_{\bar{x}_\alpha}^{j+1} + y_{\bar{x}_\alpha}^{j}\right]_\alpha =$$

$$= \left(\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\| y_{\bar{x}_\alpha}]|^2\right)_t = \sum_{\alpha=1}^{p}\frac{h_\alpha^2}{12}\left(\| y_{\bar{x}_\alpha}]|^2\right)_t, \tag{32}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\sum_{s=1}^{m}\mathcal{H}_{\alpha,h_\alpha} d_{\alpha,s} Y\left(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},\xi_\alpha^s,x_{\alpha+1},\ldots,x_p,t_j\right), Y\right)_\alpha =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{p} Y\left(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},\xi_\alpha^s,x_{\alpha+1},\ldots,x_p,t_j\right)\left(\sum_{s=1}^{m}\mathcal{H}_{\alpha,h_\alpha} d_{\alpha,s}, Y\right)_\alpha \le$$

$$\le \frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{p}\left(Y^2\left(x_1,\ldots,x_{\alpha-1},\xi_\alpha^s,x_{\alpha+1},\ldots,x_p,t_j\right) + \left(\sum_{s=1}^{m}\mathcal{H}_{\alpha,h_\alpha} d_{\alpha,s}, Y\right)_\alpha^2\right) \le$$

$$\le M_1\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\| Y \|^2 + \| Y_{\bar{x}_\alpha}]|^2 + \left(1, Y^2\right)_\alpha\right) \le M_2\left(\| Y \|^2 + \| Y_{\bar{x}}]|^2\right), \tag{33}$$

$$\left(\mathcal{H}_h\varphi, Y\right) \le \frac{1}{2}\| Y \|^2 + \frac{1}{2}\| \mathcal{H}_h\varphi \|^2 . \tag{34}$$

Учитывая оценки (29)–(34), после ряда преобразований из (28) получаем следующее неравенство:

$$\left(\| y \|^2\right)_t + \sum_{\alpha=1}^{p}\left(A - \frac{h_\alpha^2}{12}\right)\left(\| y_{\bar{x}_\alpha}]|^2\right)_t + c_0 \| Y_{\bar{x}}]|^2 \le$$

$$\le M_3\left(\| Y \|^2 + \| Y_{\bar{x}}]|^2\right) + \frac{1}{2}\| \mathcal{H}\varphi \|^2 . \quad (35)$$

Выбирая $h_\alpha \le h_\alpha^0 = \dfrac{A}{2}$, из (35) находим

$$\left(\| y \|^2\right)_t + \left(\| y_{\bar{x}}]|^2\right)_t + \| Y_{\bar{x}}]|^2 \le M_4\left(\| Y \|^2 + \| Y_{\bar{x}}]|^2\right) + M_5 \| \mathcal{H}\varphi \|^2 . \quad (36)$$

Умножим обе части (36) на τ и просуммируем по j' от 0 до j, тогда имеем:

$$\| y^{j+1} \|^2 + \| y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \| Y_{\bar{x}}^{j'}]|^2 \tau \le M_4 \sum_{j'=0}^{j}\left(\| Y^{j'} \|^2 + \| Y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\right)\tau +$$

$$+M_6\left(\sum_{j'=0}^{j} \| \mathcal{H}\varphi^{j'} \|^2 \tau + \| y^0 \|^2 + \| y_{\bar{x}}^0]|^2\right). \quad (37)$$

С помощью (15) преобразуем первое слагаемое в правой части (37):

$$(1 - M_4\tau)\left(\| y^{j+1} \|^2 + \| y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2\right) + \sum_{j'=0}^{j} \| Y_{\bar{x}}]|^2 \tau \le M_7 \sum_{j'=0}^{j}\left(\| y^{j'} \|^2 + \| y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\right)\tau +$$

$$+M_8\left(\sum_{j'=0}^{j} \| \mathcal{H}\varphi^{j'} \|^2 \tau + \| y^0 \|^2 + \| y_{\bar{x}}^0]|^2\right). \quad (38)$$

Выбирая τ таким образом, что для всех $\tau \le \tau_0$, $\tau_0 = \dfrac{1}{2M_4}$, из (38) получаем

$$\| y^{j+1} \|^2 + \| y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \| Y_{\bar{x}}]|^2 \tau \le M_9 \sum_{j'=1}^{j}\left(\| y^{j'} \|^2 + \| y_{\bar{x}}^{j'}]|^2\right)\tau +$$

$$+M_{10}\left(\sum_{j'=0}^{j} \| \mathcal{H}\varphi^{j'} \|^2 \tau + \| y^0 \|^2 + \| y_{\bar{x}}^0]|^2\right). \quad (39)$$

Применяя к (39) аналог леммы Гронуолла для сеточной функций [25, лемма 4, с. 171], получаем априорную оценку

$$\| y^{j+1} \|^2 + \| y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \| \left(y^{j'+1} + y^{j'} \right)_{\bar{x}}]|^2 \tau \le$$

$$\le M \left(\sum_{j'=0}^{j} \| \mathcal{H}\varphi^{j'} \|^2 \tau + \| y^0 \|^2 + \| y_{\bar{x}}^0]|^2 \right), \qquad (40)$$

где $M -$ положительная постоянная, не зависящая от $|h|$ и τ.

Из априорной оценки (40) следует следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (25), тогда для решения разностной задачи (26), (27) при малом $\tau \le \tau_0 \left(c_0, c_1, c_2, l, T \right)$, $h_\alpha \le h_\alpha^0 \left(c_0, c_1, c_2, l, T \right)$ справедлива априорная оценка (40) на каждом временном слое.

Таким образом, доказаны единственность и устойчивость решения разностной задачи (26), (27) по начальным данным и правой части в смысле нормы $\| y \|_1^2 = \| y^{j+1} \|^2 + \| y_{\bar{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \| \left(y^{j'+1} + y^{j'} \right)_{\bar{x}}]|^2 \tau$ на слое.

Пусть $u(x,t) -$ решение многомерной задачи (22)–(24), $y_i^j -$ решение разностной задачи (26), (27), тогда обозначим через $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ погрешность аппроксимации. Подставляя $y_i^j = z_i^j + u_i^j$ в (26), (27) и считая $u\left(x_i, t_j \right)$ заданной функцией, получим задачу для z:

$$z_t = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} a_\alpha Z_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} + A \sum_{\alpha=1}^{p} z_{\bar{x}_\alpha x_\alpha t} - \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{h_\alpha^2}{12} z_{\bar{x}_\alpha x_\alpha t} -$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{p} \left(\sum_{s=1}^{m} \mathcal{H}_{\alpha, h_\alpha} d_{\alpha,s} Z\left(x_1, ..., x_{\alpha-1}, \xi_\alpha^s, x_{\alpha+1}, ..., x_p, t_j \right), Z \right)_\alpha + \mathcal{H}_h \varphi, \qquad (41)$$

$$z|_{\gamma_h} = 0, \; z(x,0) = 0, \qquad (42)$$

где $\mathcal{H}_h \varphi = O(|h|^4 + \tau^2) -$ погрешность аппроксимации (39) на решении исходной задачи при каждом фиксированном $t = \bar{t}$.

Применяя априорную оценку (40) в силу линейности разностной задачи (26), (27) к задаче для погрешности (41), (42), получим оценку

$$\| z^{j+1} \|^2 + \| z_{\bar{x}}^{j+1}]|^2 + \sum_{j'=0}^{j} \| \left(z^{j'+1} + z^{j'} \right)_{\bar{x}}]|^2 \tau \le M \sum_{j'=0}^{j} \| \mathcal{H}_h \Psi^{j'} \|^2 \tau. \qquad (43)$$

Из априорной оценки (43) следует сходимость схемы (26), (27) со скоростью $O(|h|^4 + \tau^2)$, $|h|^4 = h_1^4 + h_2^4 + ... + h_p^4$.

6. Тестовый пример и результаты численных расчетов задачи (1)–(3)

Коэффициенты уравнения и граничных условий дифференциальной задачи (1)–(3) подбираются таким образом, чтобы точным решением задачи (1)–(3) была функция

$$u(x,t)=t^3\left(x^6-lx^5\right).$$

Отметим, что для приведения разностной схемы (1)–(3) к расчетному виду можно воспользоваться методом параметрической прогонки [26].

В табл. 1, 2 при уменьшении шагов сетки приведены максимальные значения погрешности ($z=y-u$) и вычислительный (апостериорный) порядок сходимости (ПС) в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\overline{w}_{h\tau})}$ и $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$, где $\|y\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}=\max\limits_{(x_i,t_j)\in\overline{w}_{h\tau}}|y|$. Погрешность уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации $O\left(h^4+\tau^2\right)$.

Таблица 1

Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\overline{w}_{h\tau})}$, $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$ для задачи (1)–(3) при уменьшении параметров сетки на $t=1$, когда $h^2=\tau$

h	$\max\limits_{0<j<m}\|z^j\|_{L_2(\overline{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{L_2(\overline{w}_{h\tau})}$	$\|z\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$
1/5	4,68078e-4		6,24591e-6	
1/10	2,66724e-5	4,133330	3,68762e-5	4,082149
1/20	1,66821e-6	3,998979	2,30620e-6	3,999098
1/40	1,04342e-7	3,998909	1,44237e-7	3,999004
1/80	6,51831e-9	4,000676	9,01512e-9	3,999954
1/160	4,07668e-10	3,999028	5,63786e-10	3,999126

Таблица 2

Изменение погрешности и порядка сходимости в нормах $\|\cdot\|_{L_2(\overline{w}_{h\tau})}$, $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$ для задачи (1)–(3) при уменьшении τ на $t=1$, когда $h=1/200$

τ	$\max\limits_{0<j<m}\|z^j\|_{L_2(\overline{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{L_2(\overline{w}_{h\tau})}$	$\|z\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$	ПС в $\|\cdot\|_{C(\overline{w}_{h\tau})}$
1/5	3,48543e-4		6,83514e-4	
1/10	8,71451e-5	1,999846	1,70896e-4	1,999845
1/20	2,17866e-5	1,999977	4,27251e-5	1,999971
1/40	5,44643e-6	2,000058	5,44643e-6	2,000032
1/80	1,36135e-6	2,000270	1,36135e-6	2,000164
1/160	3,40081e-7	2,001090	3,40081e-7	2,000663

Вычислительный (апостериорный) порядок сходимости будем определять по формуле

$$\text{ПС} = \log_2 \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|},$$

где z_1 и z_2 – погрешности, соответствующие шагам $0{,}5\bar{h}$, $\bar{h}$.

Заключение

Разработаны новые разностные схемы для приближенного решения первой начально-краевой задачи для нагруженного нестационарного уравнения влагопереноса в одномерных и многомерных областях. Порядок аппроксимации для одномерной задачи составляет $O\left(h^4 + \tau^2\right)$, а для многомерной $-O(|h|^4 + \tau^2)$. Исследование основано на методе энергетических неравенств, что позволило получить априорные оценки в разностной форме для решений разностных задач. Эти оценки подтверждают единственность и устойчивость решений в зависимости от входных данных, а также обеспечивают сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи с точностью порядка $O\left(h^4 + \tau^2\right)$ и $O(|h|^4 + \tau^2)$ при условии, что решение дифференциальной задачи принадлежит классу достаточно гладких функций. Проведены численные эксперименты с тестовым примером для одномерного случая, которые подтверждают теоретические результаты, полученные в ходе исследования.

Список литературы

1. Knezer A. Belastete integralgleichungen // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1914. Vol. 37. P. 169–197.
2. Kneser A. Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der matem. Phusik, 1922. 248 p.
3. Lichtenstein L. Vorlesungen`ber einege Klassen nichtlinear Integralgleichungen und Integraldifferentialgleihungen nebst Anwendungen. Berlin : Springer, 1931. P. 164.
4. Gunther N. Sur le probleme des Belastete Integralgleichungen // Studia math. 1933. № IV. P. 8–14.
5. Назаров Н. Н. Об одном новом классе линейных интегральных уравнений // Труды института математики и механики АН УзССР. 1948. Т. 4. С. 77–106.
6. Габиб-заде А. Ш. Исследование решения одного класса линейных нагруженных интегральных уравнений // Труды Института физики и математики АН АзССР, Серия: математика. 1959. Т. 8. С. 177–182.
7. Смирнов М. М. Вырождающиеся гиперболические уравнения. Минск : Высшая школа, 1977. 157 с.
8. Будак Б. М., Искендеров А. Д. Об одном классе краевых задач с неизвестными коэффициентами // Доклады Академии наук СССР. 1967. Т. 175, № 1. С. 13–16.
9. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 86–94.
10. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012. 231 с.
11. Нахушев А. М., Борисов В. Н. Краевые задачи для нагруженных параболических уравнений и их приложения к прогнозу уровня грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 105–110.
12. Бородин А. В. Дифференцируемость по параметру решений нелинейно нагруженных краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 18–26.

13. Казиев В. М. Задача Трикоми для нагруженного уравнения Лаврентьева – Бицадзе // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. С. 173–175.
14. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы, 1995. 270 с.
15. Krall A. M. The development of general differential and general differential boundary systems // Rocky Mountain Journal of Mathematics. 1975. Vol. 5 (4). P. 493–542.
16. Нахушев А. М. Нелокальная задача и задача Гурса для нагруженного уравнения гиперболического типа и их приложения к прогнозу почвенной влаги // Доклады Академии наук СССР. 1978. Т. 242, № 5. С. 1008–1011.
17. Карданов Р. Г., Нахушев А. М. О некоторых способах идентификации математической модели динамики грунтовой воды и почвенной влаги // САПР и АСПР в мелиорации : сб. науч. трудов. Нальчик, 1983. С. 3–20.
18. Айда-заде К. Р., Абдуллаев В. М. О численном решении нагруженных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сибирский журнал вычислительной математики. 2014. Т. 17, № 1. С. 1–16.
19. Абдуллаев В. М. Решение дифференциальных уравнений с неразделенными многоточечными и интегральными условиями // Сибирский журнал вычислительной математики. 2012. Т. 15, № 3. С. 3–15.
20. Айда-заде К. Р., Абдуллаев В. М. Численный метод решения нагруженных нелокальных граничных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2014. Т. 54, № 7. С. 1096–1109.
21. Бештоков М. Х. Дифференциальные и разностные краевые задачи для нагруженных псевдопараболических уравнений третьего порядка и разностные методы их численной реализации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2017. Т. 57, № 12. С. 2021–2041.
22. Бештоков М. Х. Краевые задачи для нагруженного модифицированного уравнения влагопереноса дробного по времени порядка с оператором Бесселя и разностные методы их решения // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30, № 2. С. 158–175.
23. Beshtokov M. Kh., Khudalov M. Z. Difference Methods for Solving Local and Nonlocal Boundary Value Problems for a Loaded Fractional Order Heat Equation // Stability, Control and Differential Games : Lecture Notes in Control and Information Sciences – Proceedings. Ed. by A. Tarasyev, V. Maksimov, T. Filippova. Cham : Springer, 2020. P. 187–201.
24. Самарский А. А. Теория разностных схем. М. : Наука, 1983. 616 с.
25. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем. М. : Наука, 1973. 415 с.
26. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Численные методы расчета одномерных систем. Новосибирск : Наука, Сиб. отд-ние, 1981. 208 с.

References

1. Knezer A. Belastete integralgleichungen. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. 1914;37:169–197.
2. Kneser A. *Die Integralgleichungen und ihre Anwendung in der matem*. Phusik, 1922:248.
3. Lichtenstein L. *Vorlesungen`ber einege Klassen nichtlinear Integralgleichungen und Integraldifferentialgleihungen nebst Anwendungen*. Berlin: Springer, 1931:164.
4. Gunther N. Sur le probleme des Belastete Integralgleichungen. *Studia math*. 1933;(IV):8–14.
5. Nazarov H.H. On a new class of linear integral equations. *Trudy instituta matematiki i mekhaniki AN UzSSR = Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Academy of Sciences of the Uzbek SSR*. 1948;4:77–106. (In Russ.)

6. Gabib-zade A.Sh. Study of the solution of one class of linear loaded integral equations. *Trudy Instituta fiziki i matematiki AN AzSSR, Seriya: matematika = Proceedings of the Institute of Physics and Mathematics of the Academy of Sciences of the Azerbaijan SSR, Series: Mathematics*. 1959;8:177–182. (In Russ.)
7. Smirnov M.M. *Vyrozhdayushchiesya giperbolicheskie uravneniya = Degenerate hyperbolic equations*. Minsk: Vysshaya shkola, 1977:157.
8. Budak B.M., Iskenderov A.D. On a class of boundary value problems with unknown coefficients. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1967;175(1):13–16. (In Russ.)
9. Nakhushev A.M. Loaded equations and their applications. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1983;19(1):86–94. (In Russ.)
10. Nakhushev A.M. *Nagruzhennye uravneniya i ikh primenenie = Loaded equations and their applications*. Moscow: Nauka, 2012:231. (In Russ.)
11. Nakhushev A.M., Borisov V.N. Boundary value problems for loaded parabolic equations and their applications to groundwater level prediction. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1977;13(1):105–110. (In Russ.)
12. Borodin A.B. Differentiability with respect to the parameter of solutions of nonlinear loaded boundary value problems for second-order partial differential equations. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1979;15(1):18–26. (In Russ.)
13. Kaziev V.M. Tricoti problem for loaded Lavrentiev-Bitsadze equation. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 1979;15:173–175. (In Russ.)
14. Dzhenaliev M.T. *K teorii lineynykh kraevykh zadach dlya nagruzhennykh differentsial'nykh uravneniy = On the theory of linear boundary value problems for loaded differential equations*. Almaty, 1995:270. (In Russ.)
15. Krall A.M. The development of general differential and general differential boundary systems. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. 1975;5(4):493–542.
16. Nakhushev A.M. Nonlocal and Goursat problems for loaded hyperbolic equations and their applications to soil moisture forecasting. *Doklady Akademii nauk SSSR = Reports of the USSR Academy of Sciences*. 1978;242(5):1008–1011. (In Russ.)
17. Kardanov R.G., Nakhushev A.M. On some methods of identifying a mathematical model of the dynamics of groundwater and soil moisture. *SAPR i ASPR v melioratsii: sb. nauch. trudov = SAPR and ASPR in land reclamation: collected papers*. Nal'chik, 1983:3–20. (In Russ.)
18. Ayda-zade K.R., Abdullaev V.M. On the numerical solution of loaded systems of ordinary differential equations with non-separated multipoint and integral conditions. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki = Siberian journal of computational mathematics*. 2014;17(1):1–16. (In Russ.)
19. Abdullaev V.M. Solution of differential equations with non-separated multi-point and integral conditions. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki = Siberian journal of computational mathematics*. 2012;15(3):3–15. (In Russ.)
20. Ayda-zade K.R., Abdullaev V.M. Numerical method for solving loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of computational mathematics and mathematical physics*. 2014;54(7):1096–1109. (In Russ.)
21. Beshtokov M.Kh. Differential and diverse boundary problems for the loaded pseudoparabolic equation of the third phase and different methods for their numerical implementation. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki = Journal of computational mathematics and mathematical physics*. 2017;57(12):2021–2041. (In Russ.)
22. Beshtokov M.Kh. Regional tasks for loading modified level of moisture-permeable fractional time-lapse with operator Besselya and different methods of their solution. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki = Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer sciences.* 2020;30(2):158–175. (In Russ.)

23. Beshtokov M.Kh., Khudalov M.Z. Difference Methods for Solving Local and Nonlocal Boundary Value Problems for a Loaded Fractional Order Heat Equation. *Stability, Control and Differential Games: Lecture Notes in Control and Information Sciences – Proceedings. Ed. by A. Tarasyev, V. Maksimov, T. Filippova*. Cham: Springer, 2020:187–201.
24. Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem = Theory of difference schemes*. Moscow: Nauka, 1983:616. (In Russ.)
25. Samarskiy A.A., Gulin A.B. *Ustoychivost' raznostnykh skhem = Stability of difference schemes*. Moscow: Nauka, 1973:415. (In Russ.)
26. Voevodin A.F., Shugrin S.M. *Chislennye metody rascheta odnomernykh system = Numerical methods for calculating one-dimensional systems*. Novosibirsk: Nauka, Sib. otd-nie, 1981:208. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Мурат Хамидбиевич Бештоков
ведущий научный сотрудник,
Институт прикладной математики
и автоматизации, Кабардино-Балкарский
научный центр Российской академии
наук (Россия, г. Нальчик,
ул. Шортанова, 89а)

Murat Kh. Beshtokov
Leading researcher, Institute of Applied
Mathematics and Automation KBSC RAS
(89a Shortanova street, Nalchik, Russia)

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 30.05.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 17.06.2025

Принята к публикации / Accepted 10.07.2025