

УДК 517.3

doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-2

Определение структуры объектов и их визуализация в задаче восстановления диэлектрической проницаемости по результатам измерений ближнего электромагнитного поля

Б. А. Зайцев¹, М. Ю. Медведик²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия

¹zaytsevborist@gmail.com, ²_medv@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Целью данного исследования является разработка эффективного метода определения свойств объекта сферической формы. Для этого решается обратная задача дифракции с использованием модифицированных объединенных или обобщенных расчетных сеток. *Материалы и методы.* Представлено описание прямой и обратной задач, а также метод построения расчетной сетки. *Результаты и выводы.* Результат решения прямой задачи получается как решение соответствующего объемного интегрального уравнения. Для решения обратной задачи используется двухшаговый метод. Представлено подробное описание численного метода. Численные результаты решений задачи с зашумленными данными сравниваются с незашумленными данными.

Ключевые слова: задача дифракции, интегральное уравнение, метод коллокаций, визуализация, численный метод, математическая модель

Финансирование: работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Рег. № 124020200015-7).

Для цитирования: Зайцев Б. А., Медведик М. Ю. Определение структуры объектов и их визуализация в задаче восстановления диэлектрической проницаемости по результатам измерений ближнего электромагнитного поля // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2025. № 2. С. 15–26. doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-2

Determination of the structure of objects and their visualization in the problem of restoring the permittivity by the results of measurements of the near electromagnetic field

B.A. Zaytsev¹, M.Yu. Medvedik²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia

¹zaytsevborist@gmail.com, ²_medv@mail.ru

Abstract. *Background.* The main purpose of this study is to develop an effective method for determining the structure of the spherical object. To do this, the inverse diffraction problem is solved using modified combined or generalized computational grids. *Materials and methods.* The paper presents a description of the direct and inverse problems, as well as a method for constructing a computational grid. *Results and conclusions.* The result of solving the direct problem is obtained as a solution to the corresponding volume integral equation. To solve the inverse problem, a two-step method is used. A detailed description of the numerical method is presented. The numerical results of solving the problem with noisy data are compared with non-noisy data.

Keywords: diffraction problem, integral equation, collocation method, visualization, numerical method, mathematical model

Financing: the research was financed by the State task No. 124020200015-7 of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

For citation: Zaytsev B.A., Medvedik M.Yu. Determination of the structure of objects and their visualization in the problem of restoring the permittivity by the results of measurements of the near electromagnetic field. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2025;(2):15–26. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2025-2-2

Введение

Определение характеристик объектов через анализ внешних полей представляет ключевую научно-практическую задачу, особенно в контексте неразрушающего контроля и медицинской диагностики. Такой подход, известный как **обратная задача**, позволяет изучать внутреннюю структуру объектов без физического вмешательства. В медицине это направление играет важнейшую роль в диагностике патологий, включая онкологические заболевания.

Современные методы визуализации (рентген, магнитно-резонансная томография, ультразвуковое исследование, компьютерная томография) остаются основными инструментами, однако их точность на ранних стадиях заболеваний часто ограничена. Методы микроволновой томографии, основанные на решении обратных задач, предлагают альтернативу известным подходам. За счет математического моделирования взаимодействия полей с тканями можно реконструировать параметры объектов (плотность, проводимость, магнитную восприимчивость) с высокой детализацией. Например, анализируя характеристики отраженных радиоволн от тканей, можно построить изображение органов. Такой подход имеет ряд преимуществ: ранняя диагностика, отсутствие инвазивности, повышенная точность данных. Ранняя диагностика подразумевает выявление патологий до появления симптомов. Она демонстрирует высокое разрешение визуализации в процессе диагностики. Неинвазивность – это альтернатива болезненным процедурам, таким как биопсия. Повышенная точность данных означает, что магнитоэнцефалография превосходит электроэнцефалографию в анализе активности мозга за счет регистрации магнитных полей.

Однако решение обратных задач сопряжено с определенными вычислительными сложностями: нелинейность, некорректность и ресурсоемкость задачи. Нелинейность задачи требует использования нестандартных алгоритмов. Некорректность выражается в существенных ошибках при незначительных погрешностях в исходных данных (шум, погрешность измерений и т.д.). Ресурсоемкость означает, что классические численные методы требуют значительных временных и вычислительных затрат.

В исследовании предложен подход, преобразующий краевую задачу в интегральное уравнение, что исключает необходимость моделирования внешней среды. Компактная форма уравнения описывает взаимодействие волн с неоднородностями, а его решение позволяет восстановить параметры тканей на основе экспериментальных данных.

Несмотря на прогресс в технологиях, диагностика онкологических заболеваний остается сложной. Разработка новых алгоритмов и оборудования на базе обратных задач может повысить доступность, безопасность и точность медицинских исследований, что критически важно для улучшения диагностики [1–13].

Постановка задачи

Предметом исследования является распространение электромагнитных волн внутри тела биологического объекта и выявление скрытых неоднородностей в его структуре. Цель – восстановить параметры этих неоднородностей, т.е. их форму, размер и диэлектрические свойства, используя информацию о рассеянном поле. Решение этой задачи позволяет построить точную математическую модель, описывающую поведение электромагнитного поля вне тела, в частности, позволяющую определить значения напряженности поля в заранее заданных точках пространства. Важно избежать физического повреждения исследуемого объекта, неприемлемого для медицинского применения. Для моделирования мы рассматриваем точечный источник электромагнитного излучения, расположенный на некотором расстоянии от объекта. Этот источник генерирует электромагнитное поле, которое взаимодействует с объектом, проникая внутрь и рассеиваясь на неоднородностях. Будем использовать низкочастотные диапазоны электромагнитного спектра, поскольку это безопасно для здоровья пациентов. Кроме того, данный диапазон обладает большей глубиной проникновения в ткани и позволяет получить более полную информацию о внутренней структуре объекта.

Рассмотрим классическую задачу дифракции электромагнитного поля на этом объекте. Пусть тело $Q \in R^3$, расположенное в свободном пространстве, имеет диэлектрическую проницаемость, характеризующуюся функцией $\epsilon(x)$, и кусочно-гладкую границу ∂Q (рис. 1).

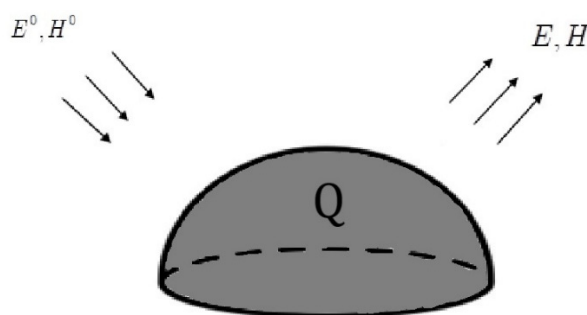


Рис. 1. Дифракционная модель поведения электромагнитных волн на неоднородном теле

Граница объекта предполагается кусочно-гладкой (это означает, что она может иметь изломы, но не бесконечно резкие перепады). За пределами объекта диэлектрическая проницаемость равна ϵ_0 – диэлектрической проницаемости свободного пространства. Рассмотрим задачу дифракции электромагнитного поля на теле Q . Вне тела Q диэлектрическая проницаемость $\epsilon = \epsilon_0$, где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость свободного пространства.

Источник поля $J_E^0 \in R^3 / \bar{Q}$ находится за пределами \bar{Q} . Падающее поле выражается через ток \mathbf{J}_E^0 [8].

Данная задача описывается системой уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}} = -i\omega\epsilon\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{j}}_E^0, \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} = i\omega\mu_0\bar{\mathbf{H}}. \end{cases} \quad (1)$$

Для $\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{H}}$ должны выполняться краевые условия на границе тела:

$$[\bar{\mathbf{E}}_\tau] |_{\partial\bar{Q}} = 0, \quad [\bar{\mathbf{E}}_\nu] |_{\partial\bar{Q}} = 0, \quad (2)$$

где $[\cdot]$ – скачок предельных значений, а также условие конечности энергии в ограниченном объеме,

$$\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_{2,loc}(R^3). \quad (3)$$

Для $\bar{\mathbf{E}}, \bar{\mathbf{H}}$ должны выполняться краевые условия излучения на бесконечности:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial r} - ik\mathbf{E} \right) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial r} - ik\mathbf{H} \right) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Пусть электромагнитное поле \mathbf{E}, \mathbf{H} есть решение краевой задачи (1)–(4). Запишем систему уравнений Максвелла (1) для падающего поля:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}_0 = -i\omega\epsilon_e\bar{\mathbf{E}}_0 \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}_0 = i\omega\mu_e\bar{\mathbf{H}}_0. \end{cases} \quad (5)$$

Вычитая (5) из (1), получим систему для рассеянного поля

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{H}}_S = -i\omega\epsilon_e\bar{\mathbf{E}}_S + \mathbf{j}_E, \\ \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}_S = i\omega\mu_e\bar{\mathbf{H}}_S. \end{cases} \quad (6)$$

Решение системы уравнений (6) представляется в виде

$$\mathbf{E}_S = i\omega\mu_e\mathbf{A} - \frac{1}{i\omega\epsilon_e}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}, \quad \mathbf{H}_S = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \quad (7)$$

где \mathbf{A} – векторный потенциал.

Применяя решения (7) в (6), перепишем уравнению в следующем виде:

$$\Delta\mathbf{A} + k_e^2\mathbf{A} = -\mathbf{j}_E. \quad (8)$$

Последнее уравнение имеет единственное решение. Это решение записывается в форме объемного потенциала:

$$\mathbf{A}(x) = \int_Q G(x, y) \mathbf{j}_p(y) dy, \quad x \in R^3, \quad (9)$$

где $G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}$.

Рассматриваемая задача является векторной и может быть сведена к объемному сингулярному интегральному уравнению [1] следующего вида:

$$\vec{E}^0(x) = \xi(x)\vec{J}(x) - k_0^2 \int_Q G(r)\vec{J}(y)dy - \text{grad div} \int_Q G(r)\vec{J}(y)dy, \quad x \in Q, \quad (10)$$

здесь $G(x, y)$ – функция Грина; $\vec{E}^0(x)$ – падающее поле; $\vec{J}(x)$ – токи поляризации внутри тела; $\xi(x) = \left(\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1\right)^{-1}$ и $\vec{J}(x) = \left(\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1\right)^{-1} \vec{E}(x)$.

Требуется определить электромагнитное поле \vec{E}, \vec{H} . Ядро уравнения (10) имеет особенность. Для задачи (1)–(4) справедливо следующее утверждение о единственности однозначной разрешимости [8].

Перепишем объемное интегральное уравнение (4) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) = & \mathbf{E}^0(x) + k_0^2 \int_Q G_E(x, y) \left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1\right) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q G_E(x, y) \left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1\right) \mathbf{E}(y) dy. \end{aligned} \quad (11)$$

Существует несколько методов решения данного интегрального уравнения, среди которых выберем метод коллокации [7–13]. Этот метод применяется для решения интегрального уравнения (11), благодаря чему определяются значения электромагнитного поля внутри определенной области, такой как внутренняя структура тела. Далее, основываясь на полученных значениях поля, строится модель, которая позволяет расширить расчет поля за пределы данной области. Для этого координаты каждой точки наблюдения подставляются в правую часть уравнения (11) и в соответствующую функцию Грина. Таким образом, мы получаем возможность рассчитать значения электромагнитного поля не только внутри исходной области, но и в окружающем пространстве, используя ранее найденное решение как основу для дальнейших расчетов. Функция Грина в данном контексте играет ключевую роль, позволяя учесть влияние поля внутри области на внешнее поле:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x_{ob}) = & \mathbf{E}^0(x_{ob}) + k_0^2 \int_Q G_E(x_{ob}, y) \left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1\right) \mathbf{E}(y) dy + \\ & + \text{grad div} \int_Q G_E(x_{ob}, y) \left(\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1\right) \mathbf{E}(y) dy. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение данного уравнения позволяет смоделировать значение поля в точках наблюдения x_{ob} .

Обратная задача восстановления неоднородностей на трехмерных объектах

Пусть неоднородное тело Q произвольной формы расположено в свободном пространстве. Рассмотрим такие вопросы, как распространение электромагнитных волн внутри тела и поиск в нем неоднородностей. Будем предполагать, что поиск решения второй задачи производится неинвазивным методом, не допускающим нарушения целостности объекта. В качестве источника электромагнитного поля рассматривается точечный излучатель, расположенный снаружи тела на некотором расстоянии от него. Электромагнитное поле, создаваемое этим источником, воздействует на тело. Одной из ключевых целей работы является восстановление характеристик неоднородностей при низких частотах, что особенно актуально в медицинской диагностике. Распределение электромагнитного поля в теле описывается уравнениями Максвелла. Используя метод, описанный ранее, сведем систему уравнений Максвелла к объемному интегральному уравнению на теле (11). Чтобы определить значения поля за пределами тела в заданных точках x_{ob} , используется модель перерасчета поля на основе известных значений, полученных при решении прямой задачи дифракции электромагнитной волны. Эта модель позволяет пересчитать параметры поля исходя из результатов решения исходной задачи, что дает возможность предсказывать поведение поля вне исследуемого объекта. Численно находим значение поля $E(y)$ и используем описанную выше модель, позволяющую вычислять значения поля за пределами тела. Для этого подставим координаты всех точек наблюдения x_{ob} в правую часть уравнения и его функцию Грина (12), где x_{ob} обозначает запись точек наблюдения.

Для выполнения реальных экспериментов используется специальная аппаратура (такая как векторный анализатор цепей), которая позволяет измерять значения электромагнитного поля в различных точках пространства с высокой точностью. После завершения этапа сбора данных мы можем перейти к решению следующей задачи – определению неоднородностей среды и их характеристик.

Важным аспектом является выбор местоположения точек наблюдения. Согласно условиям задачи эти точки должны находиться вне исследуемого объекта, на небольшом расстоянии от него. Проведенный анализ большого объема смоделированных данных показал, что наиболее эффективным способом размещения точек наблюдения является их равномерное распределение вокруг объекта. Тем не менее равномерное окружение объекта точками наблюдения не всегда оптимально, особенно если источник излучения находится близко к точкам наблюдения. В таком случае возникает эффект «засветки», когда интенсивность падающего излучения значительно превышает отраженную волну, что затрудняет анализ отраженного сигнала.

Пример расположения точек наблюдения представлен на рис. 2, где цветными прямоугольниками отмечены места неоднородностей. Далее, используя интегральное уравнение, можно выписать формулы, позволяющие определить значения и места расположения параметров неоднородности. Моделируя в точках x_{ob} значение электромагнитного поля, решаем поставленную задачу.

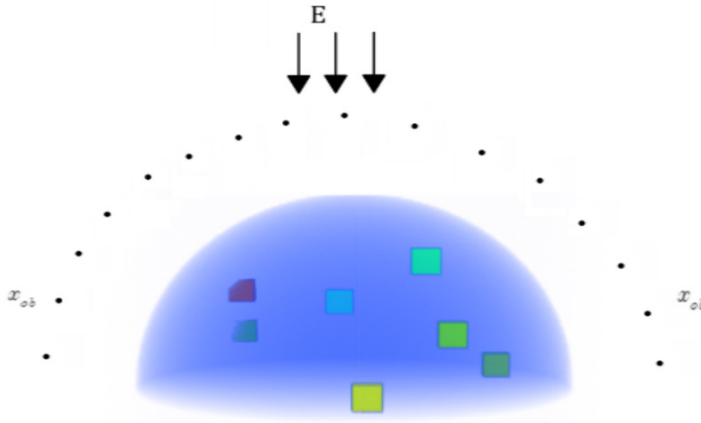


Рис. 2. Исследуемое неоднородное тело Q , имеющее форму полусферы, точки наблюдения x_{ob} , расположенные за пределами тела, источник поля E , неоднородности различного размера

Рассмотрим вопрос обнаружения неоднородностей внутри исследуемого объекта. Для поиска неоднородностей воспользуемся двухшаговым алгоритмом, подробно изложенным в трудах [7–13].

Определим значение тока $\mathbf{J}(y)$ через поле $\mathbf{J}(y) = \left[\frac{\varepsilon(y)}{\varepsilon_0} - 1 \right] \mathbf{E}(y)$. Далее решим уравнение относительно тока $\mathbf{J}(y)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m(x_{ob}) - \mathbf{E}^0(x_{ob}) = k_0^2 \int_Q G_E(x_{ob}, y) \mathbf{J}(y) dy + \\ + \text{grad div} \int_Q G_E(x_{ob}, y) \mathbf{J}(y) dy, \quad x_{ob} \notin Q, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\mathbf{E}_m(x_{ob})$ – моделируемое поле в точках x_{ob} .

Далее применяя формулу

$$\left(\frac{\varepsilon(x)}{\varepsilon_0} - 1 \right) = \frac{\mathbf{J}(x)}{\mathbf{E}^0(x) + \left(k_0^2 \int_Q G_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy + \text{grad div} \int_Q G_E(x, y) \mathbf{J}(y) dy \right)}, \quad x \in Q,$$

вычислим значение диэлектрической проницаемости.

Уравнение (13) представляет собой объемное сингулярное интегральное уравнение первого рода. Оно характеризуется наличием особой точки в ядре интеграла, что делает его решение крайне сложным и требует применения специальных численных методов. Применим метод объединенных расчетных сеток для получения устойчивого решения уравнения. Важность правильного подхода к решению такого типа уравнений связана с необходимостью обеспечения устойчивости вычислительного процесса и получения физически корректных результатов. Ошибки в учете сингулярности могут при-

вести к значительным погрешностям в итоговых значениях диэлектрической проницаемости, что повлияет на точность всей модели.

Численные результаты

Для решения данного уравнения применим следующую схему. Построим на теле Q равномерную, регулярную расчетную сетку размером $N_1 \times N_2 \times N_3$. Таким образом определим ячейки сетки и их центральные точки:

$$\Pi_{klm} = \{x : x_{1,k} < x_1 < x_{1,k+1}, x_{2,l} < x_l < x_{2,l+1}, x_{3,m} < x_3 < x_{3,m+1}\},$$

$$x_{1,k} = a_1 + \frac{a_2 - a_1}{N_1}k, \quad x_{2,l} = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{N_2}l, \quad x_{3,m} = c_1 + \frac{c_2 - c_1}{N_3}m,$$

где $k = 0, \dots, N_1 - 1$, $l = 0, \dots, N_2 - 1$, $m = 0, \dots, N_3 - 1$.

После этого, следуя процедуре построения объединенной расчетной сетки, смещаем все ячейки сетки на одинаковое расстояние по всем направлениям в обе стороны. В результате образуется расчетная сетка, состоящая из взаимно перекрывающихся ячеек. Такая конструкция позволяет более точно моделировать физические процессы и улучшает качество численных результатов.

Потребуем, чтобы для выбранных базисных функций выполнялось условие аппроксимации:

$$\forall x \in X \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{\bar{x} \in X_n} \|x - \bar{x}\| = 0.$$

Для уравнения $A\varphi = f$, ($\varphi, f \in X$) с линейным ограниченным оператором $A: X \rightarrow X$ в гильбертовом пространстве X приближенное решение $\varphi_n \in X_n$ определяется из уравнения $P_n A \varphi_n = P_n f$, где $\varphi_n \in X_n$ (X_n есть n -мерное подпространство пространства X), $P_n: X \rightarrow X_n$ – проективный оператор.

Уравнение $P_n A \varphi_n = P_n f$ эквивалентно

$$(A\varphi_n)(x^j) = f(x^j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Представим приближенное решение уравнения в виде линейной комбинации базисных функций: $\varphi_n = \sum_{k=1}^n c_k v_k$. Подставив это представление в уравнение (14), получим систему линейных алгебраических уравнений для нахождения c_k :

$$\sum_{k=1}^n c_k (A v_k)(x^j) = f(x^j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Матрицу, полученную из метода коллокации, представим в блочной форме:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_3 \end{array} \right).$$

Элементы B_k и A_{kl} определяются из соотношений:

$$B_k^s = E_0^k(x_s), \quad (15)$$

$$A_{kl}^{sj} = \xi_{kl} f_j^l(x_s) - \delta_{kl} k_0^2 \int_Q G(x_s, y) f_j^l(y) dy - \frac{\partial}{\partial x_k} \int_Q \frac{\partial}{\partial x_l} G(x_s, y) f_j^l(y) dy. \quad (16)$$

Решая систему линейных алгебраических уравнений, определяем значение тока электромагнитного поля. Далее, следуя схеме двухшагового метода, определяем значение диэлектрической проницаемости.

Для визуализации структуры объекта использовалась свободно распространяемая программа ParaView. На основе данных, полученных с применением описанного ранее алгоритма, был создан файл формата VTK. Для удобства исходная геометрия задачи задавалась на кубическом объекте. Информация о структуре неоднородностей хранилась в специальном векторе, описывающем геометрию задачи. Значения этого вектора заполнялись случайным образом. Для вычисления интеграла (16) по полусфере применялось интегрирование только по носителям, принадлежащим сфере. Если носитель лишь частично входил в сферу, интегрирование проводилось исключительно по точкам, расположенным внутри сферы. Процедура отбора носителей для верхней и нижней полусферы изображена на рис. 3.

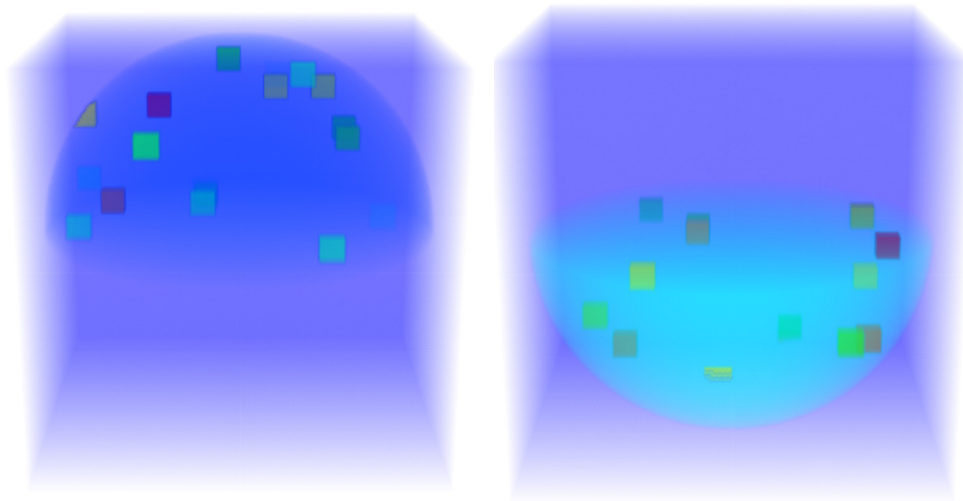


Рис. 3. Верхняя и нижняя полусферы, выделенные из кубического объекта. Цветными квадратиками обозначены неоднородности, попадающие внутрь полусфер

На рис. 4, 5 визуализирована структура исходного тела и структура тела, полученного на разных этапах решения задачи. Решение задачи производилось при частоте падающего поля 1,33 ГГц. Левая часть рис. 4 отображает

реальную структуру тела, правая показывает восстановленные значения при решении задачи с внесением случайной погрешности во входные данные на уровне 4 %. На правой части рисунка хорошо видны различные артефакты, являющиеся ложными решениями. Однако путем фильтрации, основанной на вращении объекта, удастся определить и удалить ложные решения (рис. 5).

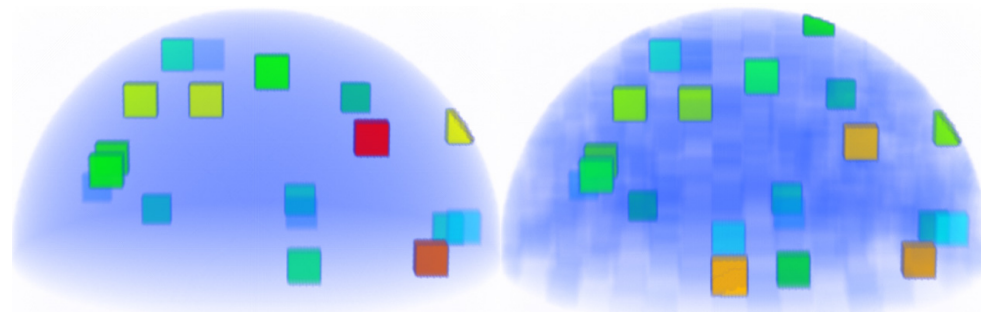


Рис. 4. Верхняя и нижняя полусферы, выделенные из кубического объекта. Цветными квадратиками обозначены неоднородности, попадающие внутрь полусфер

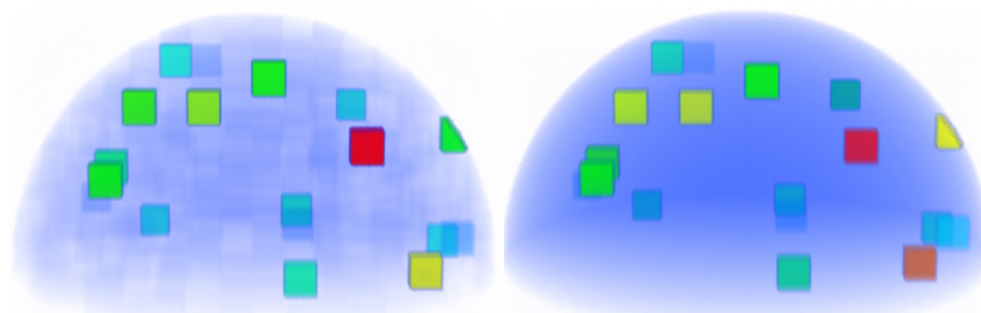


Рис. 5. Верхняя и нижняя полусферы, выделенные из кубического объекта. Цветными квадратиками обозначены неоднородности, попадающие внутрь полусфер

Заключение

Предложенный алгоритм позволяет эффективно восстанавливать значения диэлектрической проницаемости на сложных объектах и структурах при частотах от 1 до 10 ГГц. Данное свойство позволяет использовать алгоритм в медицинской диагностике. Опираясь на данные, полученные в процессе визуализации объекта, можно сделать вывод, что алгоритм устойчив к внесению помех на этапе решения задачи.

Список литературы

1. Самохин А. Б. Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии. М. : Радио и связь, 1998. 160 с.
2. Ильинский А. С., Свешников А. Г. Прямые и обратные задачи электродинамики // Вестник Московского университета. Серия 15: Вычислительная математика и кибернетика. 1978. № 4. С. 3–11.
3. Буров В. А., Румянцева О. Д. Обратные волновые задачи акустической томографии. Ч. II: Обратные задачи акустического рассеяния. 2-е изд. М. : Ленанд, 2021. 760 с.

4. Дмитриев В. И. Обратные задачи геофизики. М. : МАКС Пресс, 2012. 340 с.
5. Smirnov Y. G., Tsupak A. A. Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids: Mathematical Theory. Moscow : RU-SCIENCE, 2018. 212 p.
6. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G. Ellipticity of the electric field integral equation for absorbing media and the convergence of the Rao-Wilton-Glisson method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2014. Vol. 54. P. 114–122.
7. Medvedik M. Yu., Lapich A. O. Method of Volume Singular Equations for Solving a Nonlinear Problem of Diffraction in a Semi-Infinite Rectangular Waveguide // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44 (9). P. 4028–4033.
8. Medvedik M. Yu., Smirnov Yu. G., Tsupak A. A. Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2024. Vol. 32, № 3. P. 453–465.
9. Medvedik M. Yu., Moskaleva M. A. Numerical Method for Recovering Permittivity of an Inhomogeneous Dielectric Body Placed in a Semi-Infinite Rectangular Waveguide // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43 (5). P. 1245–1250.
10. Medvedik M. Yu., Evstigneev R. O. Problem of Determination of Inhomogeneity Parameters of Dielectric Body by Measurement of the Near Field // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020. Vol. 41 (7). P. 1320–1324.
11. Medvedik M. Yu., Evstigneev R. O. Reconstruction of Inhomogeneities in a Hemisphere from the Field Measurements // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40 (10). P. 1653–1659.
12. Smirnov Yu. G., Medvedik M. Yu., Moskaleva M. A. Two-Step Method for Permittivity Determination of an Inhomogeneous Body Placed in a Rectangular Waveguide // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39 (8). P. 1140–1147.
13. Smirnov Yu. G., Tsupak A. A., Medvedik M. Y. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2020. Vol. 28. P. 1474–1492.

References

1. Samokhin A.B. *Integral'nye uravneniya i iteratsionnye metody v elektromagnitnom rasseyanii = Integral equations and iterative methods in electromagnetic scattering*. Moscow: Radio i svyaz', 1998:160. (In Russ.)
2. Il'inskiy A.S., Sveshnikov A.G. Direct and inverse problems of electrodynamics. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 15: Vychislitel'naya matematika i kibernetika = Bulletin of Moscow University. Series 15: Computational mathematics and cybernetics*. 1978;(4):3–11. (In Russ.)
3. Burov V.A., Rummyantseva O.D. *Obratnye volnovye zadachi akusticheskoy tomografii. Ch. II: Obratnye zadachi akusticheskogo rasseyaniya. 2-e izd. = Inverse wave problems of acoustic tomography. Part 2: Inverse problems of acoustic scattering. The 2nd edition*. Moscow: Lenand, 2021:760. (In Russ.)
4. Dmitriev V.I. *Obratnye zadachi geofiziki = Inverse problems of geophysics*. Moscow: MAKS Press, 2012:340. (In Russ.)
5. Smirnov Y.G., Tsupak A.A. *Diffraction of Acoustic and Electromagnetic Waves by Screens and Inhomogeneous Solids: Mathematical Theory*. Moscow: RU-SCIENCE, 2018:212.
6. Medvedik M.Yu., Smirnov Yu.G. Ellipticity of the electric field integral equation for absorbing media and the convergence of the Rao-Wilton-Glisson method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2014;54:114–122.
7. Medvedik M.Yu., Lapich A.O. Method of Volume Singular Equations for Solving a Nonlinear Problem of Diffraction in a Semi-Infinite Rectangular Waveguide. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2023;44(9):4028–4033.

8. Medvedik M.Y., Smirnov Yu.G., Tsupak A.A. Inverse vector problem of diffraction by inhomogeneous body with a piecewise smooth permittivity. *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*. 2024;32(3):453–465.
9. Medvedik M.Yu., Moskaleva M.A. Numerical Method for Recovering Permittivity of an Inhomogeneous Dielectric Body Placed in a Semi-Infinite Rectangular Waveguide. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022;43(5):1245–1250.
10. Medvedik M.Yu., Evstigneev R.O. Problem of Determination of Inhomogeneity Parameters of Dielectric Body by Measurement of the Near Field. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020;41(7):1320–1324.
11. Medvedik M.Yu., Evstigneev R.O. Reconstruction of Inhomogeneities in a Hemisphere from the Field Measurements. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(10):1653–1659.
12. Smirnov Yu.G., Medvedik M.Yu., Moskaleva M.A. Two-Step Method for Permittivity Determination of an Inhomogeneous Body Placed in a Rectangular Waveguide. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2018;39(8):1140–1147.
13. Smirnov Yu.G., Tsupak A.A., Medvedik M.Y. Non-iterative two-step method for solving scalar inverse 3D diffraction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2020;28:1474–1492.

Информация об авторах / Information about the authors

Борис Алексеевич Зайцев

студент, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: zaytsevborist@gmail.com

Boris A. Zaytsev

Student, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Михаил Юрьевич Медведик

кандидат физико-математических наук,
доцент, доцент кафедры математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: _medv@mail.ru

Mikhail Yu. Medvedik

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, associate
professor of the sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов / The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 21.04.2025

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 14.05.2025

Принята к публикации / Accepted 20.05.2025