Нечеткие медианы как агрегаторы нечеткой информации

В. Л. Хацкевич

Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина, г. Воронеж, Россия

Аннотация. На основе нечетких медиан систем нечетких чисел введен и изучен класс операторов осреднения для реализации задачи агрегирования нечеткой информации. Установленные свойства (симметричности, идемпотентности, непрерывности, монотонности) операторов осреднения являются модификацией на нечеткий случай характерных свойств скалярных функций агрегирования. Дополнительно установлены свойства аддитивности и однородности, экстремальное свойство, что обуславливает адекватность применения нечетких медиан в задачах агрегирования нечеткой информации.

Ключевые слова: нечеткие медианы, операторы осреднения, агрегирование информации.

DOI 10.14357/20718594220107

Введение

В задачах агрегирования информации важную роль играют функции агрегирования (агрегаторы), которые векторной оценке объекта $\bar{X} = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ – вещественные параметры, ставят в соответствие скалярную величину $A(\bar{X}) = A(x_1, \dots, x_n)$, т.е. обобщенную оценку. Агрегаторы обладают рядом специальных свойств, в частности, свойствами симметричности, идемпотентности, непрерывности, монотонности и др. [1-3]. При этом свойство симметричности состоит в том, что произвольная перестановка компонентов вектора $\bar{X}$ не меняет значение $A(\bar{X})$. Идемпотентность понимается как $A(x, \dots, x) = x$. Свойство монотонности означает, что $A(\bar{X}) \le A(\bar{Y})$ для любых векторов $\bar{X} \le \bar{Y}$, где последнее неравенство понимается покоординатно $(x_i \le y_i, i = 1, \dots, n)$. Кроме того, обычно предполагается, что $min\, x_i \le A(x_1, \dots, x_n) \le max\, x_i$.

К функциям агрегирования относятся [4]: средняя арифметическая $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, средняя степенная $(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}}$ при $p > 1$, средняя геометрическая $(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}$ и др. Все они удовлетворяют приведенным выше свойствам агрегаторов. Рассматриваются также взвешенные средние.

Другие функции агрегирования порождаются треугольными нормами и ко-нормами [5, 6], в том числе операциями взятия минимума и максимума. Функции агрегирования широко используются для принятия многокритериальных решений. При этом активно применяются интегралы Шоке и Сугено [7, 8].

В ряде работ по теории агрегирования рассматривают, так называемую k-медиану (см., напр., [9]), определяемую для системы чисел $x_1, \dots, x_n$ и заданного числа k как медиану среди трех чисел $\{min\, x_i, max\, x_i, k\}$. Показано, что k-медиана – симметричный, идемпотентный, ассоциативный оператор. Разнообразные вопросы

✉ *Хацкевич Владимир Львович. E-mail:vlkhats@mail.ru*

теории и приложений агрегирующих функций отражены в недавних работах [10-12]. В частности, в работе [11] рассматриваются так называемые порядковые средние (OWA и WOWA).

С другой стороны, в статистике важную роль играют медианы [13]. Для вещественных чисел $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ медианой называют срединное значение этой последовательности. В случае неоднозначности (когда n – четное число) под медианой понимают полусумму центральных членов. Известно, что медианы являются симметричными, однородными, монотонными средними [13, гл. I, § 5]. В отличие от средних арифметических медианы нивелируют наблюдения, отклоняющиеся от общей картины (выбросы). В этом смысле они являются робастными оценками эмпирических данных.

В последнее время активно развивается теория нечетких множеств, являющаяся инструментом моделирования различных неопределенностей [5, 14]. Нечеткие медианы систем нечетких чисел рассматриваются в нечеткой статистике [15, 16].

Целью настоящей работы является обоснование применения нечетких медиан в задаче агрегирования нечеткой информации. Для этого показывается, что для них справедливы модификации свойств, присущих скалярным агрегирующим функциям.

При этом под результатом агрегирования совокупности нечетких чисел (отражающих нечеткую информацию) понимается нечеткое число, характеризующее существенные особенности этой совокупности.

1. Операторы осреднения, порождаемые нечеткими медианами

Будем рассматривать интервальное представление нечетких чисел [14]. А именно, каждому нечеткому числу $\tilde{z}$ с функцией принадлежности $\mu_{\tilde{z}}(x)$ поставим в соответствии интервал α-уровня, который определяется соотношением:

$$Z_\alpha = \{x | \mu_{\tilde{z}}(x) \geq \alpha\}, (\alpha \in (0,1]),$$
$$Z_0 = cl\{x | \mu_{\tilde{z}}(x) > 0\},$$

где символ cl означает замыкание множества.

Будем считать, что все α-уровни нечеткого числа есть замкнутые и ограниченные интервалы вещественной оси. Обозначим левую границу интервала через $z^-(\alpha)$, а правую – $z^+(\alpha)$. Иногда $z^-(\alpha)$ и $z^+(\alpha)$ называют, соответственно, левым и правым индексами нечеткого числа. Будем предполагать, что индексы нечеткого числа, измеримые по Лебегу и ограниченные функции от $\alpha \in [0,1]$. Множество таких нечетких чисел обозначим J.

Суммой нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\tilde{u}$ с α-интервалами $[z^-(\alpha), z^+(\alpha)]$ и $[u^-(\alpha), u^+(\alpha)]$ называют нечеткое число с α-интервалами $[z^-(\alpha) + u^-(\alpha), z^+(\alpha) + u^+(\alpha)]$. Умножение на положительное число означает умножение индексов на это число, а умножение на отрицательное число – умножение индексов на это число и перемену их местами. Два нечетких числа равны, если совпадают все их соответствующие α-интервалы.

Пусть $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$ – система нечетких чисел, а $z_i^-(\alpha)$ и $z_i^+(\alpha)$ – совокупность их α-индексов при фиксированном $\alpha \in (0,1]$.

Нечеткой медианой системы нечетких чисел $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$ называют [17] нечеткое число $\tilde{z}_{Me} = \widetilde{Me}(\tilde{Z})$, с левым α-индексом $z_{Me}^-(\alpha) = Me\{z_1^-(\alpha), \ldots, z_n^-(\alpha)\}$ и правым α-индексом $z_{Me}^+(\alpha) = Me\{z_1^+(\alpha), \ldots, z_n^+(\alpha)\}$. Здесь $\tilde{Z}$ – нечеткий вектор с компонентами $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n$. Значок $Me\{\ldots\}$ означает числовую медиану.

Рассмотрим совокупность J^n векторов с нечеткими компонентами (нечетких векторов) вида $\tilde{Z} = (\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_n)$, где нечеткие числа $\tilde{z}_i \in J (i = 1, \ldots, n)$. Для двух нечетких векторов $\tilde{Z}$ и $\widetilde{W}$ их сумму и умножение на вещественные числа будем понимать покоординатно. Для нечеткого вектора $\tilde{Z}$ рассмотрим оператор осреднения $A_{Me}: J^n \to J$, задаваемый равенством:

$$A_{Me}(\tilde{Z}) = \widetilde{Me}(\tilde{Z}). \quad (1)$$

Он обладает рядом свойств, аналогичных скалярным агрегирующим функциям [1-3]. Согласно определению имеют место… .

Утверждение 1. *Оператор (1) является симметричным, т.е. значения A_{Me} не зависят от перемены порядка компонентов $\tilde{z}_i$ вектора $\tilde{Z} \in J^n$.*

Утверждение 2. *Оператор (1) является идемпотентным, т.е. если все компоненты аргумента $\tilde{Z} \in J^n$ одинаковы $\tilde{z}_1 = \tilde{z}_2 = \ldots = \tilde{z}_n = \tilde{z}$, то $A_{Me}(\tilde{Z}) = \tilde{z}$.*

Утверждение 3. *Для каждого $\alpha \epsilon (0,1]$ справедливы соотношения:*

$$\min z_i^-(\alpha) \leq z_{Me}^-(\alpha) \leq \max z_i^-(\alpha),$$
$$\min z_i^+(\alpha) \leq z_{Me}^+(\alpha) \leq \max z_i^+(\alpha).$$

Утверждение 3 характеризует нечеткую медиану как среднее, заключенное между наименьшим и наибольшим. Кроме того, оказывается, что справедлива… .

Теорема 1. *Оператор осреднения $A_{Me}: J^n \to J$ является аддитивным и однородным.*

Доказательство. Покажем аддитивность. Пусть $\tilde{Z}, \widetilde{W} \in J^n$ с компонентами $\tilde{z}_i, \widetilde{w}_i (i = 1, \dots, n)$. Фиксируем $\alpha \in (0,1]$. Не ограничивая общности, можно считать, что имеет место, например, следующая упорядоченность для левых индексов $z_1^-(\alpha) \le z_2^-(\alpha) \le \dots \le z_n^-(\alpha)$ и $w_1^-(\alpha) \le w_2^-(\alpha) \dots \le w_n^-(\alpha)$. Пусть $z_{Me}^-(\alpha)$ и $w_{Me}^-(\alpha)$ – левые индексы соответствующих медиан.

Согласно предположению, нечеткое число $\tilde{v}_i = \tilde{z}_i + \widetilde{w}_i$ имеет левые индексы $v_i^-(\alpha) = z_i^-(\alpha) + w_i^-(\alpha)$. Поэтому сохраняется порядок $v_1^-(\alpha) \le v_2^-(\alpha) \le \dots \le v_n^-(\alpha)$. Следовательно, для медианы $\tilde{v}_{Me}$ сумм нечетких чисел $\tilde{z}_i + \widetilde{w}_i$ по свойствам числовых медиан справедливо равенство $v_{Me}^-(\alpha) = z_{Me}^-(\alpha) + w_{Me}^-(\alpha)$. Аналогично для правых индексов, что и доказывает аддитивность.

Покажем однородность. Это свойство при умножении на положительное число k обеспечивается неравенством $kz_1^-(\alpha) \le kz_2^-(\alpha) \le \dots \le kz_n^-(\alpha)$ и аналогичным неравенством для правых индексов.

В случае умножения на отрицательное число $-k\ (k > 0)$ левые индексы чисел $(-k)\tilde{z}_i$ $(i = 1, \dots, n)$ образуют последовательность $-kz_1^+(\alpha) \ge -kz_2^+(\alpha) \ge \dots \ge -kz_n^+(\alpha)$, а правые индексы – последовательность $-kz_1^-(\alpha) \ge -kz_2^-(\alpha) \ge \dots \ge -kz_n^-(\alpha)$. Так что медиана $\widetilde{M}e(-k\tilde{Z})$ семейства нечетких чисел $\{-k\tilde{z}_i\}(i = 1, \dots, n)$ имеет левый индекс $-kMe\{z_1^+(\alpha), \dots, z_n^+(\alpha)\}$ и правый индекс $-kMe\{z_1^-(\alpha), \dots, z_n^-(\alpha)\}$. Что совпадает с левым и правым индексами нечеткого числа $-k\widetilde{M}e(\tilde{Z})$.

Следствие 1. *Пусть $\tilde{Z}$ – заданный нечеткий вектор с компонентами $\tilde{z}_i$, а $\tilde{v}$ – фиксированное нечеткое число. Пусть $\widetilde{W}$ – нечеткий вектор с компонентами $\widetilde{w}_i = \tilde{z}_i + \tilde{v} (i = 1, \dots, n)$. Тогда справедлива формула:*

$$A_{Me}(\widetilde{W}) = A_{Me}(\tilde{Z}) + \tilde{v}.$$

Отметим, что Следствие 1 есть «нечеткий» аналог свойства переносимости числовых медиан [13].

Рассмотрим на множестве нечетких чисел J метрику [18]:

$$\rho(\tilde{z}, \widetilde{w}) = \sup_{0 < \alpha \le 1} \max\{|z^+(\alpha) - w^+(\alpha)|, |z^-(\alpha) - w^-(\alpha)|\}, \quad (2)$$

где $z^\pm(\alpha)$ и $w^\pm(\alpha)$ – правые и левые индексы нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\widetilde{w}$, соответственно.

Для нечетких векторов $\tilde{Z}, \widetilde{W} \in J^n$ с компонентами $\tilde{z}_i, \widetilde{w}_i \in J (i = 1, \dots, n)$ зададим метрику формулой:

$$\rho_n(\tilde{Z}, \widetilde{W}) = \sum_{i=1}^n \rho(\tilde{z}_i, \widetilde{w}_i), \quad (3)$$

где ρ определяется выражением (2).

Утверждение 4. *Оператор $A_{Me}: J^n \to J$ непрерывен.* Действительно, зададим $\varepsilon > 0$. Соотношение $\rho_n(\tilde{Z}, \widetilde{W}) \le \varepsilon$ согласно (3) влечет $\rho(\tilde{z}_i, \widetilde{w}_i) \le \varepsilon (\forall i = 1, \dots, n)$. А это по определению (2) дает

$$|z_i^-(\alpha) - w_i^-(\alpha)| \le \varepsilon\ \forall i = 1, \dots, n, \alpha \in (0,1]$$

и аналогично для индексов с плюсом. Тогда по определению медианы:

$$|z_{Me}^-(\alpha) - w_{Me}^-(\alpha)| \le \varepsilon,$$
$$|z_{Me}^+(\alpha) - w_{Me}^+(\alpha)| \le \varepsilon\ \forall i = 1, \dots, n, \alpha \in (0,1].$$

Следовательно, $\rho\left(A_{Me}(\tilde{Z}), A_{Me}(\widetilde{W})\right) = \rho(\tilde{z}_{Me}, \widetilde{w}_{Me}) \le \varepsilon$, что и влечет указанную непрерывность.

Отметим, что Утверждение 4 – один из вариантов модификации на случай нечетких чисел свойства непрерывности скалярных агрегирующих функций $A(x_1, \dots, x_n)$ введения.

2. Экстремальное свойство и свойство монотонности

Как известно [13], медиана x_{Me} совокупности вещественных чисел $x_1, \dots, x_n$ обладает следующим экстремальным свойством:

$$\sum_{i=1}^n |x_{Me} - x_i| \le \sum_{i=1}^n |x_j - x_i|\ \forall j = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим модификацию этого свойства для нечетких чисел. Для этого рассмотрим на множестве нечетких чисел метрику, задаваемую для $\tilde{z}, \widetilde{w} \in J$ равенством [19]:

$$r(\tilde{z}, \widetilde{w}) = \int_0^1 (|z^-(\alpha) - w^-(\alpha)| + |z^+(\alpha) - w^+(\alpha)|) d\alpha. \quad (4)$$

Оказывается, что имеет место следующее экстремальное свойство нечеткой медианы.

Теорема 2. *Пусть $\tilde{z}_{Me}$ – нечеткая медиана системы нечетких чисел $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$, тогда*

$$\sum_{i=1}^{n} r(\tilde{z}_i, \tilde{z}_{Me}) \le \sum_{i=1}^{n} r\big(\tilde{z}_i, \tilde{z}_j\big)\ (\forall j = 1, \dots, n). \quad (5)$$

Доказательство. Фиксируем $\alpha \in (0,1]$ и рассмотрим числовую последовательность левых индексов $z_1^-(\alpha), \dots, z_n^-(\alpha)$. По определению числа $z_{Me}^-(\alpha)$ и свойству числовых медиан имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i^-(\alpha) - z_{Me}^-(\alpha)| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \big|z_i^-(\alpha) - z_j^-(\alpha)\big|\ (\forall j = 1, \dots, n).$$

Аналогично, для правых индексов:

$$\sum_{i=1}^{n} |z_i^+(\alpha) - z_{Me}^+(\alpha)| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \big|z_i^+(\alpha) - z_j^+(\alpha)\big|\ (\forall j = 1, \dots, n).$$

Просуммируем левые и правые части указанных неравенств, а затем проинтегрируем полученный результат по α от 0 до 1, тогда в соответствие с (4) получим соотношение (5).

Отметим, что Теорема 2 характеризует равномерность агрегирования системы нечетких чисел $\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_n$ посредством нечеткой медианы $\tilde{z}_{Me}$ (в метрике r). При этом величину $\sum_{i=1}^{n} r(\tilde{z}_i, \tilde{z}_{Me})$ можно считать оценкой качества агрегирования.

Отметим еще, что Утверждение 4 (о непрерывности) сохраняет свою силу, если в качестве метрики на множестве J рассматривать (4), а для нечетких векторов $\tilde{Z}$ и $\widetilde{W}$ определить метрику равенством $r_n(\tilde{Z}, \widetilde{W}) = \sum_{i=1}^{n} r(\tilde{z}_i \widetilde{w}_i)$, где $\tilde{z}_i, \widetilde{w}_i$ – нечеткие компоненты векторов $\tilde{Z}$ и $\widetilde{W}$.

Рассмотрим на множестве нечетких чисел J отношение доминирования (ранжирования) $\tilde{z} \prec \widetilde{w}$, задаваемое для $\tilde{z}$ и $\widetilde{w}$, соотношениями:

$$z^-(\alpha) \le w^-(\alpha), z^+(\alpha) \le w^+(\alpha)\ (\forall \alpha \epsilon (0,1]), \quad (6)$$

где $\tilde{z}^{\pm}(\alpha)$ и $\widetilde{w}^{\pm}(\alpha)$ – правые и левые индексы нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\widetilde{w}$, соответственно.

Такое определение используется, например, в книге [20] при анализе инвестиционных проектов с нечеткими данными. В частности, если функции принадлежности нечетких чисел $\tilde{z}$ и $\widetilde{w}$ связаны соотношением $\mu_{\tilde{z}}(x) \le \mu_{\widetilde{w}}(x) \forall x \in R$, то выполнено (6).

По-существу (6) вводит частичную упорядоченность на множестве нечетких чисел, т.е. бинарное отношение, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности [21].

Для нечетких векторов $\tilde{Z}$ и $\widetilde{W}$ с компонентами $\tilde{z}_i$ и $\widetilde{w}_i$, $i = 1, \dots, n$ соотношение доминирования $\tilde{Z} \prec \widetilde{W}$ будем понимать покоординатно в смысле определения (6).

Назовем произвольный оператор $B: J^n \to J$ монотонным, если из условия $\tilde{Z} \prec \widetilde{W} (\tilde{Z}, \widetilde{W} \in J^n)$ следует, что $B(\tilde{Z}) \prec B(\widetilde{W})$. Оказывается, что справедлива

Теорема 3. *Оператор осреднения $A_{Me}: J^n \to J$ является монотонным.* Действительно, пусть $\tilde{Z}, \widetilde{W} \in J^n$ – векторы с нечеткими компонентами $\tilde{z}_i$ и $\widetilde{w}_i (i = 1, \dots, n)$ соответственно, такие что $\tilde{Z} \prec \widetilde{W}$.

Фиксируем $\alpha \in (0,1]$. Без ограничения общности можно считать, что $z_1^-(\alpha) \le z_2^-(\alpha) \le \dots \le z_n^-(\alpha)$ и $w_1^-(\alpha) \le w_2^-(\alpha) \le \dots \le w_n^-(\alpha)$. При этом в силу предположения о доминируемости $\tilde{Z} \prec \widetilde{W}$ имеем:

$$z_i^-(\alpha) \le w_i^-(\alpha), z_i^+(\alpha) \le w_i^+(\alpha) (i = 1, \dots, n).$$

Это влечет справедливость следующих неравенств для левых и, соответственно, правых индексов соответствующих медиан

$$z_{Me}^-(\alpha) \le w_{Me}^-(\alpha), z_{Me}^+(\alpha) \le w_{Me}^+(\alpha).$$

А это означает справедливость соотношения $A_{Me}(\tilde{Z}) \le A_{Me}(\widetilde{W})$ (монотонность).

Теорема 3 является модификацией на нечеткие числа свойства монотонности для скалярных агрегирующих функций $A(x_1, \dots, x_n)$.

Следствие 2. Пусть нечеткие векторы $\tilde{Z}, \widetilde{W} \in J^n$ таковы, что $\tilde{Z} \prec \widetilde{W}$. Тогда $A_{Me}(\tilde{Z} + \tilde{V}) \prec A_{Me}(\widetilde{W} + \tilde{V})$ при любых $\tilde{V} \in J^n$.

Действительно, по определению интервального сложения нечетких чисел и свойствам числовых неравенств, если $\tilde{Z} \prec \widetilde{W}$, то $\tilde{Z} + \tilde{V} \prec \widetilde{W} + \tilde{V}$ для любых $\tilde{V} \in J^n$, тогда Следствие 2 вытекает из Теоремы 3.

Отметим, что вместо (6) можно рассматривать следующую модификацию ранжирования нечетких чисел: $\tilde{z} \prec \widetilde{w}$, когда для заданного $\beta \in (0,1)$ выполнены соотношения:

$$z^-(\alpha) \le w^-(\alpha), z^+(\alpha) \le w^+(\alpha)\ (\forall \alpha \epsilon [\beta, 1]).$$

Вышеприведенные результаты остаются справедливыми и при таком определении.

Пример 1. Нечеткое число $\tilde{z}$ называют треугольным, если его функция принадлежности имеет вид:

$$\mu_{\tilde{z}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, \text{если } x \in [a,b]; \\ \dfrac{x-c}{b-c}, \text{если } x \in [b,c]; \\ 0, \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $a < b < c$ – заданные числа.

В этом случае треугольное число $\tilde{z}$ записывается формулой $\tilde{z} = (a, b, c)$.

Согласно определению, левый и, соответственно, правый индексы нечеткого числа $\tilde{z} = (a, b, c)$ имеют вид $z^-(\alpha) = (b-a)\alpha + a, z^+(\alpha) = -(c-b)\alpha + c$. Ввиду этого и согласно (6) для двух треугольных чисел $\tilde{z}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $\tilde{z}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ условие доминирования $\tilde{z}_1 \prec \tilde{z}_2$ эквивалентно выполнению неравенств $a_1 \le a_2, b_1 \le b_2, c_1 \le c_2$.

Пусть заданы n нечетких треугольных чисел $\tilde{z}_i = (a_i, b_i, c_i)(i = 1, \dots, n)$, которые связаны отношением доминирования $\tilde{z}_1 \prec \tilde{z}_2 \prec \ldots \prec \tilde{z}_n$. Тогда нечеткой медианой этой совокупности будет треугольное число $z_{Me} = (Me\{a_i\}, Me\{b_i\}, Me\{c_i\})$.

Действительно, по определению для $\forall\alpha \in (0,1]$ имеем:

$$\begin{gathered} z_1^-(\alpha) \le z_2^-(\alpha) \le \cdots \le z_n^-(\alpha), \\ z_1^+(\alpha) \le z_2^+(\alpha) \le \ldots \le z_n^+(\alpha). \end{gathered} \tag{7}$$

При этом для треугольных чисел $\tilde{z}_i$ левый и, соответственно, правый индексы имеют вид: $z_i^-(\alpha) =$
$= (b_i - a_i)\alpha + a_i, z_i^+(\alpha) = -(c_i - b_i)\alpha + c_i$.

Так что соотношения (7) означают следующее:

$$\begin{gathered} a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n, b_1 \le b \le \cdots \le b_n, \\ c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_n. \end{gathered}$$

Откуда и следует высказанное утверждение.

Уточним, что в случае нечетного $n = 2m + 1$ имеем $\tilde{z}_{Me} = (a_m, b_m, c_m)$. В случае четного $n = 2m$ имеем:
$\tilde{z}_{Me} = ((a_m + a_{m+1})/2, (b_m + b_{m+1})/2, (c_m + c_{m+1})/2)$.

Пример 2. Нечеткое число $\widetilde{w}$ называют трапецеидальным, если его функция принадлежности имеет вид:

$$\mu_{\widetilde{w}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, \text{если } a \le x \le b; \\ 1, \qquad \text{если } b \le x \le c; \\ \dfrac{d-x}{d-c}, \text{если } c \le x \le d; \\ 0, \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $a < b < c < d$ – заданные числа. Нечеткое трапецеидальное число записывают в виде $\widetilde{w} = (a, b, c, d)$. В случае $b = c$ оно превращается в треугольное нечеткое число. В соответствии с определением левый и соответственно правый индексы нечеткого трапецеидального числа имеют вид:

$$\begin{gathered} w^-(\alpha) = (b-a)\alpha + a, w^+(\alpha) = \\ = -(d-c)\alpha + d. \end{gathered}$$

Тогда для двух трапецеидальных чисел соотношение доминирования $\widetilde{w}_1 \prec \widetilde{w}_2$ эквивалентно выполнению неравенств: $a_1 \le a_2, b_1 \le b_2, c_1 \le c_2, d_1 \le d_2$.

Пусть заданы n нечетких трапецеидальных чисел $\widetilde{w}_i = (a_i, b_i, c_i, d_i), i = 1, \dots, n$, которые связаны отношением доминирования:

$$\widetilde{w}_1 \prec \widetilde{w}_2 \prec \ldots \prec \widetilde{w}_n. \tag{8}$$

Поскольку соотношение (8) означает, что $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n, b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n, c_1 \le c_2 \le \ldots \le c_n, d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$, то нечеткой медианой совокупности является нечеткое трапецеидальное число $\widetilde{w}_{Me} = (Me\{a_i\}, Me\{b_i\}, Me\{c_i\}, Me\{d_i\})$. При этом в случае нечетного $n = 2m + 1$ имеем $\widetilde{w}_{Me} = (a_m, b_m, c_m, d_m)$. В случая четного $n = 2m$ имеем $\widetilde{w}_{Me} = ((a_m + a_{m+1})/2, (b_m + b_{m+1})/2, (c_m + c_{m+1})/2, (d_m + d_{m+1})/2)$.

Пример 3. Число $\tilde{g}$ называют нечетким на основе гауссовской функции принадлежности с параметрами (b, a), если его функция имеет вид:

$$\mu_{\tilde{g}}(x) = exp\,(-\tfrac{(x-a)^2}{2b^2}).$$

Заметим, что это унимодальное ($\mu_{\tilde{g}}(a) = 1$) – выпуклое нечеткое число. Тогда его интервалы α-уровня $G_\alpha = \{x \mid \mu_{\tilde{g}}(x) \le \alpha\}, \alpha \in (0,1]$ представимы в виде [14, гл. 5, § 5.1]: $G_\alpha = (\mu_\uparrow{}^{-1}(\alpha), \mu_\downarrow{}^{-1}(\alpha))$, где $\mu_\uparrow{}^{-1}$ и $\mu_\downarrow{}^{-1}$ являются обратными функциями для возрастающей и соответственно убывающей частей функции $\mu_{\tilde{g}}(x)$.

Нетрудно видеть, что в случае гауссовской функции принадлежности с параметрами (b, a) имеют место равенства: ${\mu_{\uparrow}}^{-1}(\alpha) = a - \sqrt{-2b^2 \ln \alpha}$ и ${\mu_{\downarrow}}^{-1}(\alpha) = a + \sqrt{-2b^2 \ln \alpha}$. Тогда для двух нечетких гауссовских чисел $\tilde{g}_1$ и $\tilde{g}_2$ с параметрами (b, a_1) и (b, a_2) условие доминирования $\tilde{g}_1 \prec \tilde{g}_2$ означает, что $a_1 \leq a_2$. (Здесь для наглядности рассмотрен случай $b_1 = b_2 = b$).

Пусть заданы n нечетких гауссовских чисел $\tilde{g}_i, i = 1, \dots, n$ с параметрами (b, a_i), где $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Тогда их медианой будет нечеткое гауссовское число с параметрами $(b, Me\{a_i\})$. Здесь в случае нечетного $n = 2m + 1$ имеем $Me\{a_i\} = a_m$, а в случае четного $n = 2m$:

$$Me\{a_i\} = \frac{(a_m + a_{m+1})}{2}.$$

Заключение

В ряде работ обсуждается понятие и свойства нечеткой медианы посредством определения ее функции принадлежности через функции принадлежностей заданной системы нечетких чисел [15, 16]. В других работах используется интервальный подход, применяемый и в данной работе. В частности, в работах [17, 22] рассматривается вопрос аппроксимации медианы нечетко-случайной величины медианами нечетких выборок. Другой подход к многомерным медианам на основе порядка изложен в недавней работе [23].

Нам представляется, что приведенные в настоящей статье результаты ранее не отмечались.

Наибольший интерес на наш взгляд представляют результаты Раздела 2 данной работы, посвященные экстремальному свойству и свойству монотонности. В целом, совокупность установленных выше свойств нечетких медиан обуславливает адекватность их применения в задаче агрегирования нечеткой информации.

Литература

1. Mesiar R., Kolesarova A., Calvo T., Komornakova M. A Review of Aggregation Functions. Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models // Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer. 2008. V. 220. P. 121-144.
2. Леденева Т. М., Подвальный С.Л. Агрегирование информации в оценочных системах // Вестник ВГУ, Сер. Системный анализ и информационные технологии. 2016. №4. С. 155-164.
3. Grabisch M., Jean-Luc Marichal, Mesiar R., Pap E. Aggregation Functions (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). Cambridge University Press. 2009. 478 p.
4. Beliakov G., Bustince Sola H., Calvo T. A Practical Guide to Averaging Functions. Springer. Cham. 2016. 352 p.
5. Дюбуа Д, Прад А. Теория возможностей. Приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь. 1990. 288 с.
6. Klement E., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties // Fuzzy Sets and Systems. 143(1). 2004. P. 5-26.
7. Grabisch M., Labreuche C. A Decade of Application of the Choquet and Sugeno Integrals in Multi-criteria Decision Aid // Annals of Operations Research. 2008. 50 p.
8. Kwak K., Pedrycz W. Face recognition: A study in information fusion using fuzzy integral // Patt. Recog. Lett. 2005. V. 26. P. 719-733.
9. Calvo T., Mesiar R. Generalized median // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 1. P. 59-61.
10. Lopez de Hierro A.F.R., Roldin C., Bustince H., Fernandez J., Rodriguez I., Fardoun H., Lafuente J., Affine construction methodology of aggregation functions // Fuzzy Sets and Systems. 2020. V. 414. P. 146-164.
11. Torra V. Andness directedness for operators of the OWA and WOWA families // Fuzzy Sets and Systems. 2021. V. 144. P. 28-37.
12. Bustince H., Mesiar R., Fernandez J., Galar M., Paternain D., Altalhi A., Dimuro G.P., Bedregal B., Takaa Z., d-Choquet integrals: Choquet integrals based on dissimilarities // Fuzzy Sets and Systems. 2021. V. 414. P. 1-27.
13. Джини К. Средние величины. М.: Статистика. 1970. 447 с.
14. Аверкин А.Н. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. М.: Наука. 1986. 312 с.
15. Calvo T., Mesiar R. Criteria Importances in Median-Like Aggregation // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. Vol. 9. No. 4. 2001. P. 662-666.
16. Nguyen H. T., Wu B. Fundamentals of statistics with fuzzy data. Berlin: Springer. 2006. 204 p.
17. S. de la Rosa de Saa, S. Lubiano, M. A. Sinova, P. Filzmoser. Robust scale estimators for fuzzy data // Advances in Data Analysis and Classification. 2015. 11. 10.1007/s11634-015-0210-1.
18. Kaleva O., Seikkala S. On fuzzy metric spaces // Fuzzy Sets and Systems. 1984. Vol. 12. P. 215-229.
19. Diamond P., Kloeden P. Metric Spaces of Fuzzy Sets // Fuzzy Sets and Systems, 1990. Vol. 35. Issue 2. P. 241-249.
20. Смоляк С.А. Оценки эффективности инвестиционных проектов в условиях риска и неопределенности. М.: Наука. 2002. 182 с.
21. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: URSS. 2019. 572 с.
22. S. de la Rosa de Saa, M. Lubiano, B. Sinova, P. Filzmoser, M. A. Gil. Locationfree robust scale estimates for fuzzy data. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 2020. P. (99):1-1.
23. Raul Perez-Fernandez. On an order-based multivariate median // Fuzzy Sets and Systems. 2021. Vol. 414. P. 70-84.

Хацкевич Владимир Львович. Доктор технических наук, профессор. Профессор, Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина. Области исследований: математическое моделирование, системный анализ, исследование операций. E-mail: vlkhats@mail.ru

Fuzzy Medians as Aggregators of Fuzzy Information

V. L. Khatskevich

Air Force Academy named after N.E. Zhukovsky and Y.U. Gagarin, Voronezh, Russia

Abstract: On the basis of fuzzy medians of fuzzy number systems, a class of averaging operators is introduced and studied for the implementation of the problem of aggregation of fuzzy information. The established properties of symmetry, idempotence, continuity, monotonicity of averaging operators are a modification of the characteristic properties of scalar aggregation functions for the fuzzy case. Additionally, the properties of additivity and homogeneity, the extreme property, are established. This determines the adequacy of the use of fuzzy medians in the tasks of aggregating fuzzy information.

Keywords: fuzzy medians, averaging operators, aggregation of information.

DOI 10.14357/20718594220107

References

1. Mesiar R., Kolesarova A., Calvo T., Komornakova M. A Review of Aggregation Functions. Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models // Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer. 2008. Vol. 220. P. 121-144.
2. Ledeneva T. M., Podval'nyj S.L., Agregirovanie informacii v ocenochnyh sistemah // Vestnik VGU, Ser. Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii. 2016. №4. P. 155-164.
3. Grabisch M., Marichal Jean-Luc, Mesiar R., Pap E. Aggregation Functions (Encyclopedia of Mathematics and its Applications). – Cambridge University Press/ 2009. 478 p.
4. Beliakov G., Bustince Sola H., Calvo T. A Practical Guide to Averaging Functions, Springer, Cham. 2016. 352 p.
5. Dubois D., Prade H. Possibility Theory. Springer-Verlag. 1988. 280 p.
6. Klement E., Mesiar R., Pap E. Triangular norms. Position paper I: basic analytical and algebraic properties // Fuzzy Sets and Systems. 143(1). 2004. P. 5-26.
7. Grabisch M., Labreuche C. A Decade of Application of the Choquet and Sugeno Integrals in Multi-criteria Decision Aid // Annals of Operations Research. 2008. 50 p.
8. Kwak K., Pedrycz W. Face recognition: A study in information fusion using fuzzy integral // Patt. Recog. Lett. 2005. V. 26. P. 719-733.
9. Calvo T., Mesiar R. Generalized median // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 1. P. 59-61.
10. Lopez de Hierro A.F.R., Roldin C., Bustince H., Fernandez J., Rodriguez I., Fardoun H., Lafuente J., Affine construction methodology of aggregation functions // Fuzzy Sets and Systems. 2020. V. 414. P. 146-164.
11. Torra V. Andness directedness for operators of the OWA and WOWA families // Fuzzy Sets and Systems. 2021. V. 144. P. 28-37.
12. Bustince H., Mesiar R., Fernandez J., Galar M., Paternain D., Altalhi A., Dimuro G.P., Bedregal B., Takaa Z., d-Choquet integrals: Choquet integrals based on dissimilarities // Fuzzy Sets and Systems. 2021. V. 414. P. 1-27.
13. Jini C. Le Medie. Torino: UTET. 1958. 512 p.
14. Averkin A.N. Fuzzy sets in models of management and artificial intelligence. M.: Nauka. 1986. 312 p.
15. Calvo T., Mesiar R. Generalized median // Fuzzy Sets and Systems. 2001. Vol. 1. Pp. 59-61.
16. Nguyen H. T., Wu B. Fundamentals of statistics with fuzzy data. Berlin: Springer. 2006. 204 p.
17. S. de la Rosa de Saa, S. Lubiano, M. A. Sinova, P. Filzmoser. Robust scale estimators for fuzzy data // Advances in Data Analysis and Classification, 2015. – 11. 10.1007/s11634-015-0210-1.
18. Kaleva O., Seikkala S. On fuzzy metric spaces // Fuzzy Sets and Systems. 1984. Vol. 12. P. 215-229.
19. Diamond P., Kloeden P. Metric Spaces of Fuzzy Sets // Fuzzy Sets and Systems. 1990. Vol. 35. Issue 2. P. 241-249.
20. Smolyak S.A. Ocenki effektivnosti investicionnyh proektov v usloviyah riska i neopredelennosti. M.: Nauka. 2002. 182 p.
21. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of the theory of functions and functional analysis. M.: URSS. 2019. 572 p.
22. S. de la Rosa de Saa, M. Lubiano, B. Sinova, P. Filzmoser, M. A. Gil. Locationfree robust scale estimates for fuzzy data. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020. P. (99):1-1.
23. Raul Perez-Fernandez. On an order-based multivariate median // Fuzzy Sets and Systems. 2021. Vol. 414. P. 70-84.

Khatskevich Vladimir L. Doctor of technical sciences, professor. Professor, Air Force Academy named after professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin. Research areas: mathematical modeling, system analysis, operations research. E-mail: vlkhats@mail.ru