

ПРОЕКТИРОВАНИЕ И КОНСТРУИРОВАНИЕ СТРОИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ. СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ, ПОДЗЕМНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ / RESEARCH PAPER

УДК 69.04

DOI: 10.22227/1997-0935.2024.4.527-543

Деформационно-прочностная модель бетона с двойным независимым упрочнением и повреждением

Александр Михайлович Бударин¹, Георгий Игоревич Ремпель¹,
Алексей Александрович Камзолкин², Владимир Николаевич Алехин³

¹ Институт Гидропроект; г. Москва, Россия;

² Научно-исследовательский центр «СтаДиО» (НИЦ «СтаДиО»); г. Москва, Россия;

³ Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (УрФУ);
г. Екатеринбург, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. Бетон, будучи неотъемлемой частью современного строительства, представляет собой сложный нелинейный материал. Поведение бетона в значительной степени зависит от вида напряженно-деформированного состояния (НДС) и истории нагружения. Среди элементов вновь возводимых и реконструируемых зданий и сооружений присутствует большое количество конструкций, работающих в условиях трехосного НДС; а также элементов, подверженных циклическим и знакопеременным нагрузкам. В качестве универсального инструмента, который дает возможность с достаточной точностью описывать работу бетона в подобных условиях, может выступать феноменологическая модель материала, применяемая в рамках численных методов. Цель исследования — разработка модели бетона, позволяющей с достаточной точностью описывать поведение материала в рамках статического кратковременного нагружения. Модель должна отражать ключевые особенности поведения бетона: эффекты контракции и дилатации, изменение жесткости в результате знакопеременного и циклического нагружений, влияние вида напряженного состояния на деформативность материала. Кроме того, модель должна иметь алгоритм регуляризации проблемы локализации необратимых деформаций.

Материалы и методы. В качестве основы используются результаты анализа и систематического обобщения данных, полученных из отечественных и зарубежных источников, посвященных вопросам теории пластичности и механики разрушения бетонных и железобетонных конструкций.

Результаты. Модель реализована в программном конечно-элементном комплексе ANSYS, с помощью которого возможно применять пользовательские модели материала. Проведено сравнение результатов лабораторных и численных испытаний, выполненных для бетонных и железобетонных образцов при различных видах НДС.

Выводы. Представленная модель бетона позволяет с достаточной точностью моделировать поведение материала при различных видах НДС в рамках статического кратковременного нагружения, а также отражает главные особенности поведения материала. Для регуляризации проблемы локализации необратимых деформаций в модели используется подход, основанный на теории полосы трещин. Приведены значения всех параметров, необходимых для использования модели материала.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: бетон, железобетон, теория пластического течения, повреждение, деформационная модель, дилатация, контракция, двойное упрочнение, повреждение, ANSYS

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Бударин А.М., Ремпель Г.И., Камзолкин А.А., Алехин В.Н. Деформационно-прочностная модель бетона с двойным независимым упрочнением и повреждением // Вестник МГСУ. 2024. Т. 19. Вып. 4. С. 527–543. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.4.527-543

Автор, ответственный за переписку: Александр Михайлович Бударин, alex.budarin01@gmail.com.

Concrete damage–plasticity model with double independent hardening

Alexander M. Budarin¹, Georgy I. Rempel¹, Alexey A. Kamzolkin², Vladimir N. Alekhin³

¹ Hydroproject Institute; Moscow, Russian Federation;

² Scientific Research Center “StaDiO” (SRC “StaDiO”); Moscow, Russian Federation;

³ Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin (UrFU);
Yekaterinburg, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. Being an integral part of the modern construction, concrete is a complex nonlinear material. The behaviour of concrete depends to a large extent on stress–strain state and loading history. Among the structures of newly constructed and reconstructed buildings, there are a large number of elements operating in the conditions of the triaxial stress–strain state, alternating and cyclic loading. A phenomenological material model used in the numerical methods can serve as a universal tool that allows to describe the behavior of concrete under such conditions. The aim of the research is to develop the concrete model that allows to simulate material behavior with sufficient accuracy under static short-term loading. The model should reflect the key features, which characterizes the behaviour of concrete and have an algorithm for regularizing the problem of localization of irreversible deformations.

Materials and methods. This research is based on the analytical generalization and systematization of the data received from domestic and foreign sources devoted to the plasticity theory and fracture mechanics of concrete and reinforced concrete.

Results. The model was implemented in the ANSYS finite-element software package, with the help of which it is possible to apply custom material models. Comparison of the laboratory and numerical results for concrete and reinforced concrete was made.

Conclusions. The presented model allows to simulate behavior of concrete with substantial accuracy within the static short-term loading and reflects main features of the material behavior. To regularize the problem of localization of irreversible deformations, the model uses an approach based on the crack band theory. The values of all parameters required for the utilisation of the material model are presented.

KEYWORDS: concrete, reinforced concrete, plasticity theory, damage, deformation model, dilation, contraction, double hardening, ANSYS

FOR CITATION: Budarin A.M., Rempel G.I., Kamzolkin A.A., Alekhin V.N. Concrete damage–plasticity model with double independent hardening. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2024; 19(4):527-543. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.4.527-543 (rus.).

Corresponding author: Alexander M. Budarin, alex.budarin01@gmail.com.

ВВЕДЕНИЕ

Бетон, будучи неотъемлемой частью современного строительства, представляет собой сложный нелинейный материал. Поведение бетона в значительной степени зависит от вида напряженно-деформированного состояния (НДС) и истории нагружения. Среди элементов вновь возводимых и реконструируемых зданий и сооружений присутствует большое количество конструкций, работающих в условиях трехосного НДС (массивные части гидротехнических сооружений, атомных станций, узлы сопряжений плитных и вертикальных конструкций и т.д.); а также элементов, подверженных циклическим и знакопеременным нагрузкам (сейсмические, ветровые, волновые воздействия). Задача обоснования прочности и механической безопасности элементов, работающих в подобных условиях, является нетривиальной. Использование аналитических методов расчета для решения подобных задач может привести к неэкономичному, а в ряде случаев и ненадежному техническому решению ввиду их излишнего упрощения.

В качестве универсального инструмента, позволяющего описывать работу бетона в условиях сложного НДС, может выступать нелинейная феноменологическая модель материала, применяемая в рамках численных методов. В зависимости от вида определяющих соотношений, лежащих в основе модели, она может быть отнесена к одной из нескольких групп.

Первую группу составляют работы, в основе которых лежит теория малых упругопластических деформаций А.А. Ильюшина [1]. Модели данной группы устанавливают конечные зависимо-

сти между тензорами напряжений и деформаций. Среди них можно выделить труды Г.А. Гениева [2], Е.С. Лейтеса [3], А.В. Яшина [4] и др. Соотношения, лежащие в основе моделей, не дают возможность описывать случаи разгрузки, а также непропорционального нагружения, что существенно ограничивает границы их применимости [5].

Ко второй группе относятся модели нелинейной упругости. Нелинейное поведение бетона в моделях данной группы описывается путем изменения секущего модуля деформаций без разделения тензора деформаций на упругую и пластическую части. Такой подход применялся в исследованиях Н.И. Карпенко [6], С.Ф. Клованича [7], Х. Купфера [8], Н. Оттосена [9] и др. Модели этой группы просты в использовании и нетребовательны к производительности, однако имеют узкие границы применимости, ограниченные монотонным нагружением в границах опытных данных, по которым строились соотношения модели [10]. Так же, как и теория малых упругопластических деформаций, нелинейная теория упругости не позволяет учитывать влияние остаточных деформаций, возникающих не только при циклическом и знакопеременном нагружении, но и вследствие локальной разгрузки материала при перераспределении усилий.

В настоящее время одним из наиболее популярных подходов для построения моделей бетона является комбинация теории пластического течения и механизма повреждений. Теория пластического течения, получившая современный вид благодаря публикациям Д.С. Друкера [11] и П. Прагера [12], имеет широкие границы применимости, включающие случаи непропорционального нагружения, разгрузки и повторного нагружения материала, случаи локали-

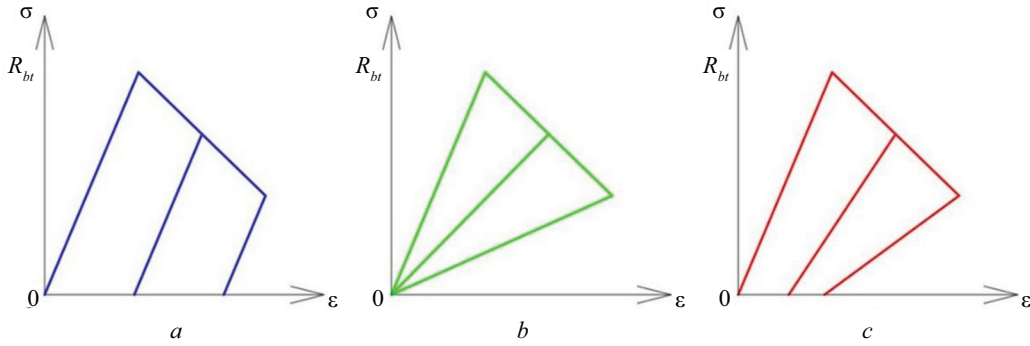


Рис. 1. Соотношения «напряжения – деформации» для моделей бетона, использующих в основе механизмы: *a* — теория пластического течения; *b* — механизм повреждений; *c* — комбинация механизма повреждений и теории пластического течения

Fig. 1. Stress-strain relationship for concrete model using the following mechanics: *a* — plasticity theory; *b* — damage mechanism; *c* — combination of damage mechanism and plasticity theory

зации пластических деформаций. Механизм повреждений, подробно описанный Ю.Н. Работновым [13], дает возможность отражать изменение жесткостных характеристик материала при циклическом и знакопеременном нагружении. На рис. 1 изображены соотношения «напряжения – деформации» для образцов, подверженных циклическому нагружению в условиях одноосного растяжения (серия циклов нагрузка – разгрузка) при условии использования различных механизмов в основе модели.

Подобный подход использовался в работах Д. Ли [14], Г. Этса [15], П. Грассла [16, 17], И. Зреида [18] и др. Однако модели данной группы содержат недостатки, затрудняющие их применение. К основным недостаткам можно отнести:

- значительное отклонение формы поверхности нагружения/прочности от экспериментальных данных;
- недостаточно точная форма поверхности пластического потенциала, не позволяющая правильно отразить эффекты дилатации и контракции;
- отсутствие алгоритмов получения параметров, необходимых для использования модели материала;
- наличие нескольких зон сингулярности в поверхности нагружения, ведущее к ухудшению стабильности решения;
- отсутствие механизма регуляризации проблемы локализации необратимых деформаций, ведущее к зависимости результатов от размера конечно-элементной сетки и ухудшению сходимости задачи при стремлении размера конечного элемента (КЭ) к нулю.

Таким образом, актуальной является задача разработки модели бетона, позволяющей с достаточной точностью описывать поведение материала в рамках различных видов НДС, подверженного статическому кратковременному нагружению. Модель должна отражать основные особенности НДС, характерные для бетона (эффекты дилатации и контракции, изменение жесткости в результате знако-

переменного и циклического нагружения), иметь алгоритм регуляризации проблемы локализации необратимых деформаций. Поверхность нагружения модели должна содержать минимальное количество зон сингулярности.

В статье представлена модификация авторской модели [19], позволяющая расширить границы применимости оригинала. Доработке подвергся механизм разупрочнения (описание процесса разупрочнения происходит с помощью параметров поврежденности), поверхность пластического потенциала и законы упрочнения.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

В качестве основы модель использует комбинацию теории пластического течения и механизма повреждений, что отражается на соотношении «напряжения – деформации»:

$$\sigma = (\bar{\sigma}_t \cdot (W_t - 1) + \bar{\sigma}_c) \cdot (W_c - 1), \quad (1)$$

где σ — тензор номинальных напряжений, характеризующий напряженное состояние поврежденного материала; $\bar{\sigma}_t$, $\bar{\sigma}_c$ — положительная и отрицательная части тензора эффективных напряжений, соответственно. Тензор эффективных напряжений описывает напряженное состояние неповрежденного материала и может быть найден согласно уравнению (2); W_t , W_c — скалярные безразмерные параметры поврежденности материала для растяжения и сжатия соответственно. Значения параметров варьируются от 0 (неповрежденный материал) до 1 (полностью поврежденный материал).

$$\bar{\sigma}_t = D_e \cdot (\varepsilon - \varepsilon_p), \quad (2)$$

где D_e — упругая матрица жесткости; ε — тензор деформаций; ε_p — тензор пластических деформаций.

Часть модели, использующая в качестве основы теорию пластического течения, независима от механизма повреждений и включает в себя по-

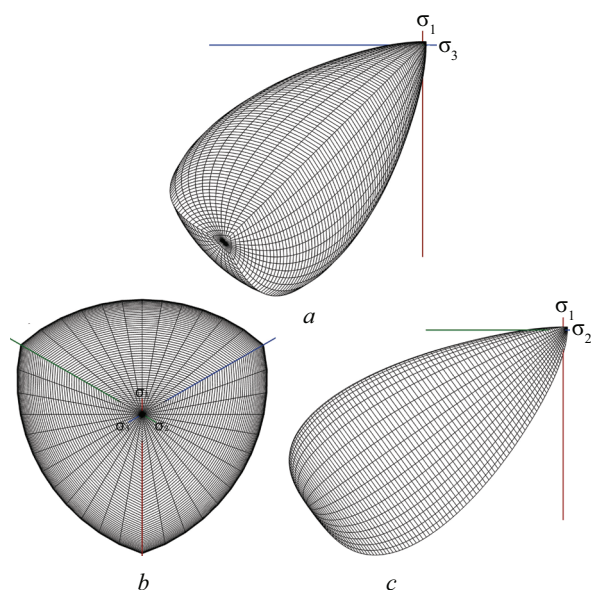


Рис. 2. Поверхность нагружения модели: *a* — вид на плоскость $\sigma_1\text{--}\sigma_3$; *b* — вид на девиаторную плоскость; *c* — вид на плоскость $\sigma_1\text{--}\sigma_2 = \sigma_3$

Fig. 2. Loading surface of the model: *a* — view on plane $\sigma_1\text{--}\sigma_3$; *b* — deviatoric plane view; *c* — view on plane $\sigma_1\text{--}\sigma_2 = \sigma_3$

верхность нагружения, поверхность пластического потенциала и законы упрочнения.

В качестве поверхности нагружения модели применяется поверхность Менетри – Виллама [20], модифицированная авторами путем добавления шатра сжатия. Полученная поверхность нагружения имеет единственную зону сингулярности, расположенную в вершине в зоне трехосного растяжения ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$). Данная сингулярность не оказывает существенного влияния на стабильность работы модели и регулируется введением дополнительного условия для поверхности пластического потенциала, которое будет описано далее. Девиаторные сечения поверхности, соответствующие разным степеням гидростатического обжатия, не обладают аффинным подобием, что согласуется с опытными данными. Поверхность нагружения изображена на рис. 2.

Модель определена в цилиндрических координатах Хейга – Вестергаарда: гидростатический инвариант p (3); девиаторный инвариант q (4); угол подобия θ (5), находящийся в диапазоне от 0 до 60°:

$$p = I_1 / \sqrt{3}; \quad (3)$$

$$q = \sqrt{2 \cdot J_2}; \quad (4)$$

$$\cos(3 \cdot \theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}}. \quad (5)$$

Модифицированное уравнение поверхности нагружения является квадратичной версией уравнения Менетри – Виллама и представлено формулой (6). Следствием использования квадратичной формы

уравнения (6) служит появление мнимой упругой зоны в области трехосного растяжения (рис. 3).

Для решения вышеуказанной проблемы для точек с положительным значением координаты p в качестве уравнения поверхности нагружения используется формула (7). Параметр m , определяющий форму меридионального сечения поверхности нагружения, и эллиптическая функция $r(e, \theta)$, контролирующая форму ее девиаторного сечения, могут быть найдены с помощью формул (8)–(13). $f_{comp}(p)$ — функция, описывающая шатер сжатия поверхности (14):

$$f = \left(\left(\frac{q}{R_b} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 + \frac{c_h \cdot m \cdot q}{\sqrt{6} \cdot R_b} \cdot r(e, \theta) \right)^2 - f_{comp}(p) \cdot \left(c_h - c_h \cdot m \cdot \frac{p}{\sqrt{3} \cdot R_b} \right)^2; \quad (6)$$

$$f = \left(\frac{q}{R_b} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 + c_h \times \times m \cdot \left(\frac{q \cdot r(e, \theta)}{\sqrt{6} \cdot R_b} + \frac{p}{\sqrt{3} \cdot R_b} \right) - c_h; \quad (7)$$

$$r(e, \theta) = \left(4 \cdot C_1 \cdot \cos(\theta)^2 + C_2 \right) / \left(2 \cdot C_1 \cdot \cos(\theta) + C_2 \cdot \sqrt{4 \cdot C_1 \cdot \cos(\theta)^2 + 5 \cdot e^2 - 4 \cdot e} \right); \quad (8)$$

$$C_1 = 1 - e^2; \quad (9)$$

$$C_2 = 2 \cdot e - 1; \quad (10)$$

$$e = \frac{1 + \xi}{2 - \xi}; \quad (11)$$

$$\xi = \frac{R_{bt}}{R_{2b}} \cdot \frac{R_{2b}^2 - R_b^2}{R_b^2 - R_{bt}^2}; \quad (12)$$

$$m = 3 \cdot \frac{R_b^2 - R_{bt}^2}{R_b - R_{bt}} \cdot \frac{e}{e + 1}; \quad (13)$$

$$f_{comp}(p) = 1 - \left(\frac{p - X \cdot R_{vh}}{X(1 - R_{vh})} \right)^2 \cdot H(X - p), \quad (14)$$

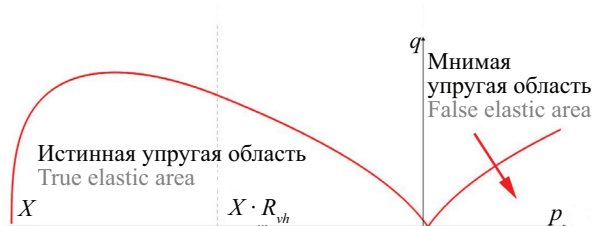


Рис. 3. Меридиональное сечение функции (6)

Fig. 3. Meridional section of the function (6)

где R_b, R_{bt}, R_{2b} — пределы прочности на одноосное сжатие, одноосное растяжение и двухосное равномерное сжатие соответственно. Значение R_{2b} может быть найдено на основании формулы (15) согласно работе [21]; c_h — параметр девиаторной эволюции поверхности нагружения; $H(X-p)$ — функция Хевисайда; X — координата пересечения шатра сжатия с гидростатической осью, МПа; R_{vh} — безразмерный множитель к X , определяющий координату начала шатра сжатия на гидростатической оси. Значение R_{vh} может быть найдено по эмпирической формуле (16) согласно труду [22].

$$R_{2b} = \left(1,2 - \left(\frac{R_b[\text{МПа}]}{1000} \right) \right) \cdot R_b[\text{МПа}], \text{ МПа}; \quad (15)$$

$$R_{vh} = \frac{1}{4,46 \cdot \exp\left(\frac{-R_b[\text{МПа}]}{11,52}\right) + 1,95}, \quad (16)$$

Поверхность пластического потенциала является комбинированной и состоит из трех поверхностей: $g_{shear}, g_{tens}, g_{comp}$ (рис. 4).

Форма поверхности пластического потенциала отвечает за соотношение компонентов тензора пластических деформаций. Для любого вида напряженного состояния это соотношение характеризуется с помощью угла Ψ , представляющего собой угол между вертикалью и нормалью к поверхности пластического потенциала.

Значение угла Ψ устанавливается на основании формулы:

$$\Psi = \text{atan}\left(\frac{\partial g / \partial p}{\partial g / \partial q}\right), \text{ рад}. \quad (17)$$

Условие $\Psi = 0$ соответствует девиаторному нагружению, в рамках которого шаровой тензор пластических деформаций имеет нулевую норму (длину). С ростом абсолютного значения угла Ψ увеличивается доля объемных деформаций в тензоре пластических деформаций.

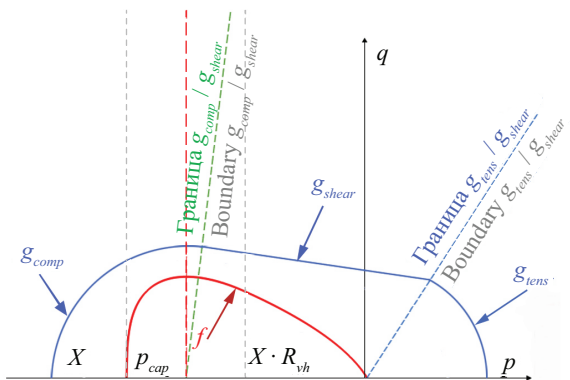


Рис. 4. Комбинированная поверхность пластического потенциала

Fig. 4. Combined surface of plastic potential

Первая поверхность g_{shear} описывается уравнением (18) и позволяет моделировать эффект дилатации:

$$g_{shear} = \frac{r(e, \theta)}{R_b} \cdot \left(q \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 + \frac{q}{\sqrt{6}} \cdot m + m_g(p), \quad (18)$$

где $m_g(p)$ — корректирующая функция. Поскольку при вычислении пластического множителя (51) используется не само уравнение пластического потенциала, а его частные производные по инвариантам тензора напряжений, то удобнее вместо функции $m_g(p)$ представить алгоритм вычисления производной функции по гидростатическому инварианту $\partial m_g(p) / \partial p$, значение которой равно производной $\partial g_{shear}(p) / \partial p$. Значение $\partial m_g(p) / \partial p$ может быть вычислено исходя из следующих предпосылок [23]:

1) при одноосном растяжении нормаль к поверхности g_{shear} совпадает с траекторией нагружения, что соответствует условию $\Psi = 1/\sqrt{2}$ рад;

2) при одноосном сжатии угол Ψ равен углу дилатации Ψ_b , значение которого может быть вычислено по формулам (19), (20). Формула (19) построена на основании допущения, согласно которому при достижении поверхности прочности в области одноосного сжатия полные объемные деформации равны нулю:

$$\Psi_b = \frac{R_b \cdot (1 - 2 \cdot \nu) \cdot \sqrt{2}}{|2 \cdot R_b \cdot (\nu + 1) - 3 \cdot \epsilon_0 \cdot E_b|}, \text{ рад}; \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_0 = & (18 + R_b[\text{МПа}]) \cdot (62 \cdot R_b[\text{МПа}] + \\ & + 0,675 \cdot R_b^2[\text{МПа}] + 22) / (53\,000 - \\ & - 62 \cdot R_b[\text{МПа}]) \cdot (7 \cdot R_b[\text{МПа}] + \\ & + R_b^2[\text{МПа}] + 22), \text{ м/м}, \end{aligned} \quad (20)$$

где ν, E_b — коэффициент Пуассона и модуль упругости соответственно; ϵ_0 — абсолютное значение полных осевых относительных деформаций, соответствующих пределу прочности при одноосном сжатии R_b и вычисляемых на основании работы [6].

Значение производной функции $m_g(p)$ по гидростатическому инварианту p может быть вычислено с помощью формул (21)–(24):

$$\partial m_g(p) / \partial p = A_g \cdot \exp(C_g(p)^2 \cdot B_g); \quad (21)$$

$$A_g = \frac{\sqrt{3} \cdot (R_b \cdot m + 6 \cdot R_{bt} \cdot r(e, \theta))}{6 \cdot R_b}; \quad (22)$$

$$B_g = 3 \cdot \left(\frac{R_b}{R_{bt} + R_b} \right)^2 \cdot \ln \left(\frac{\Psi_b \cdot \sqrt{2} \cdot R_b \cdot (m + 6)}{R_b \cdot m + 6 \cdot R_{bt}} \right); \quad (23)$$

$$C_g(p) = (p - R_{bt} / \sqrt{3}) / R_b. \quad (24)$$

Функция $C_g(p)$ построена таким образом, чтобы принимать значение, равное 0 в области одноосного

растяжения. В этом случае производная $\partial m_g(p)/\partial p$ равна параметру A_g . Значение параметра B_g подбиралось так, чтобы в области одноосного сжатия выполнялось условие $\Psi = \Psi_b$.

Для получения радиального возврата на поверхность нагружения необходимо приравнять к нулю производную поверхности g_{shear} по углу подобия θ , используемую в уравнении для вычисления пластического множителя (51). В этом случае поверхность (18) превращается в серию поверхностей, каждая из которых соответствует определенному углу подобия.

Вторая поверхность g_{tens} представляет собой сферу с центром, расположенным в вершине поверхности нагружения в области трехосного растяжения. Данная поверхность применяется для обработки зоны сингулярности и описывается уравнением:

$$g_{tens} = q^2 + (p - R_b \cdot \sqrt{3} / m). \quad (25)$$

Третья поверхность g_{comp} представляет собой сферу и используется для возвращения точки на шатер сжатия. Центр сферы находится на гидростатической оси, при этом p -координата центра p_{cap} является координатой экстремума функции поверхности нагружения (место перегиба функции). Выразив из уравнения (6) координату q , находим производную полученного выражения по координате p . Значение p_{cap} может быть найдено, приравняв числитель полученного выражения к нулю (единственное условие, при котором выражение может быть равно нулю). Результат преобразований — квадратное уравнение, один из корней которого есть искомая величина p_{cap} . Алгоритм получения величины p_{cap} может быть сведен к уравнениям (26)–(29):

$$A = 4 \cdot \sqrt{3} \cdot c_h \cdot m; \quad (26)$$

$$B = -6 \cdot c_h \cdot (\sqrt{3} \cdot X \cdot R_{vh} \cdot m + R_b); \quad (27)$$

$$C = 2\sqrt{3} \cdot c_h \cdot (2 \cdot R_{vh} - 1) \times \\ \times m \cdot X^2 + 6 \cdot R_b \cdot c_h \cdot X \cdot R_{vh}; \quad (28)$$

$$p_{cap} = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A}, \text{ МПа.} \quad (29)$$

Поверхность g_{comp} описывается уравнением:

$$g_{comp} = q^2 + (p - p_{cap})^2. \quad (30)$$

Переход между поверхностями в рамках комбинированной поверхности пластического потенциала осуществляется с помощью уравнений (31), (32):

$$g = g_{tens}, \text{ если } p > q \cdot \frac{\partial g_{shear} / \partial p}{m / \sqrt{6}} + \frac{R_b \cdot \sqrt{3}}{m}. \quad (31)$$

Условие (31) представляет собой уравнение прямой, проходящей через вершину поверхности нагружения в зоне трехосного растяжения:

$$g = g_{comp}, \text{ если } p_{cap} > p_{g_shear}. \quad (32)$$

Условие (32) заключается в сравнении двух гидростатических координат: p_{cap} — координата центра сферы для возврата на шатер сжатия и p_{g_shear} — гидростатическая координата точки, в которой линия, совпадающая с нормалью к поверхности g_{comp} , пересекает гидростатическую ось. Графическая интерпретация условия (32) приведена на рис. 5.

Значение p_{g_shear} может быть найдено с помощью формул (33)–(35):

$$k_{g_shear} = \frac{\partial g_{shear} / \partial p}{\partial g_{shear} / \partial q}; \quad (33)$$

$$b_{g_shear} = -k_{g_shear} \cdot p_{cap}; \quad (34)$$

$$p_{g_shear} = (q - b_{g_shear}) / k_{g_shear}, \text{ МПа,} \quad (35)$$

где k_{g_shear} — угловой коэффициент прямой, получаемый из формулы (17) на основании условия совпадения угловых коэффициентов рассматриваемой прямой и нормали к поверхности g_{shear} ; b_{g_shear} — свободный член рассматриваемой прямой. Использование данного условия позволяет выполнить плавный переход между поверхностями g_{shear} и g_{comp} , исключая «слепые» зоны, в которые возврат точки невозможен.

В модели используется два независимых механизма эволюции поверхности нагружения: девиаторная эволюция и эволюция шатра сжатия [24, 25]. Девиаторная эволюция представлена дисторсионным упрочнением и выполняется путем изменения безразмерного параметра упрочнения c_h ($c_{h0} \leq c_h \leq 1$). c_{h0} служит начальным значением параметра c_h , соответствующего нижней границе микротрещинообразования материала [26]. Значение параметра c_{h0} может быть найдено по эмпирической формуле (36)

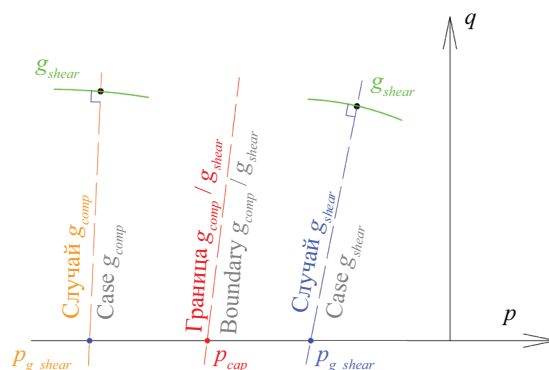


Рис. 5. Графическая интерпретация условия (32)

Fig. 5. Graphical interpretation of the condition (32)

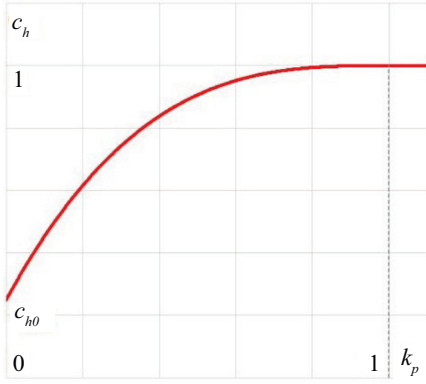


Рис. 6. Геометрическая интерпретация закона девиаторного упрочнения

Fig. 6. Geometric interpretation of deviatoric hardening law

согласно труду [27]. Закон девиаторного упрочнения описывается с помощью системы (37):

$$c_{h0} = \sqrt{1 - \exp(-0,052 \cdot R_b^{0,642} [\text{МПа}])}; \quad (36)$$

$$c_h = \begin{cases} c_{h0} + (1 - c_{h0}) \cdot k_p \cdot (k_p^2 - 3 \cdot k_p + 3), & k_p < 1; \\ 1, & k_p \geq 1. \end{cases} \quad (37)$$

Геометрическая интерпретация закона девиаторного упрочнения представлена на рис. 6.

Параметр c_h является функцией внутренней переменной k_p . Эволюция k_p описывается уравнениями (38)–(41):

$$dk_p = d\lambda \cdot h_D(k_p, \sigma); \quad (38)$$

$$h_D(k_p, \sigma) = \frac{\|\mathbf{m}(k_p, \sigma)\|}{x_h(p) \cdot \beta} \cdot (2 \cdot \cos(\theta))^2 \cdot \chi; \quad (39)$$

$$\beta = 1 + \exp(10 \cdot p/q); \quad (40)$$

$$\chi = \begin{cases} \cos(\Psi_b), & \Psi_b < 0; \\ 1, & \Psi_b \geq 0, \end{cases} \quad (41)$$

где $d\lambda$ — пластический множитель [28]; $\mathbf{m}(k_p, \sigma) = \partial g(\sigma)/\partial \sigma$ — производная поверхности пластического потенциала по тензору напряжений; $x_h(p)$ — коэффициент хрупкости; β — множитель, предотвращающий девиаторную эволюцию поверхности нагружения в области растяжения; χ — множитель, контролирующий девиаторную эволюцию поверхности в случае контракции.

Коэффициент хрупкости контролирует скорость приращения параметра k_p и, соответственно, переменной c_h в зависимости от степени гидростатического обжатия образца. Чем выше степень гидростатического обжатия в образце, тем большая норма тензора пластических деформаций требуется для достижения поверхности нагружения, соответствующей $c_h = 1$ (поверхность прочности). Концепция упрочнения с использованием коэффициента хрупкости была введена Г. Этсем

и К. Вилламом [15]. В данной работе используется авторская модификация закона упрочнения, представленного в работе П. Грассла [16, 17]. Значение $x_h(p)$ может быть получено с помощью формул (42)–(45):

$$R_h = -p / R_b - 1 / \sqrt{3}; \quad (42)$$

$$x_h(p) = \begin{cases} E_h \cdot \exp(-R_h / F_h) + D_h, & R_h < 0; \\ A_h - (A_h - B_h) \cdot \exp(-R_h / C_h), & R_h \geq 0, \end{cases} \quad (43)$$

$$E_h = B_h - D_h; \quad (44)$$

$$F_h = E_h \cdot C_h / (B_h - A_h). \quad (45)$$

Параметры A_h , B_h , C_h , D_h контролируют зависимость коэффициента хрупкости от гидростатического инварианта p . Данные параметры устанавливаются на основании сопоставления результатов численных испытаний с результатами лабораторных испытаний, либо с эталонными осредненными диаграммами, построенными с помощью инженерных методик [29]. В случае отсутствия опытных данных могут быть использованы следующие значения параметров: $A_h = 0,08$, $C_h = 2$, $D_h = 0,000001$. Значение параметра B_h (параметр контролирует норму тензора пластических деформаций при одноосном сжатии) может быть найдено по эмпирической формуле:

$$B_h = 0,0032 - R_b \cdot 0,000015. \quad (46)$$

Графическая интерпретация механизма девиаторной эволюции изображена на рис. 7.

Эволюция шатра сжатия также имеет дисторсионный характер и контролируется внутренней переменной X (координата пересечения шатра сжатия и гидростатической оси). Приращение переменной X зависит от оператора h_v (47), являющегося функцией объемных пластических деформаций ε_{pm} . Эволюция шатра сжатия позволяет смоделировать необратимую сжимаемость бетона (контракцию) [30].

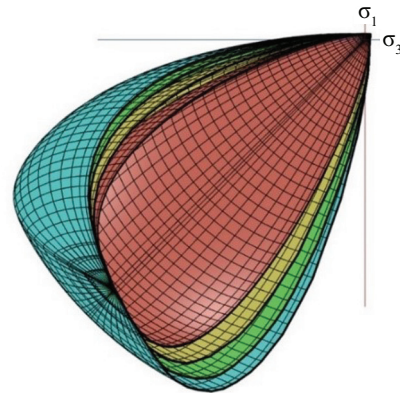


Рис. 7. Механизм девиаторной эволюции поверхности нагружения

Fig. 7. Loading surface deviatoric evolution mechanism

Параметр материала A_{hV} может быть получен на основании уравнения:

$$h_V = A_{hV} = \frac{3 \cdot E_b \cdot (1 - \nu)}{5 \cdot (1 + \nu) \cdot (1 - 2 \cdot \nu)}. \quad (47)$$

Эволюция внутренней переменной X описывается уравнением (48). Текущее значение переменной X может быть получено на основании уравнения (49). Эволюция шатра сжатия осуществляется при условии $p < p_{cap}$:

$$dX = h_V \cdot d\varepsilon_{pV} = A_{hV} \cdot d\lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \mathbf{m}(k_p, \boldsymbol{\sigma}); \quad (48)$$

$$X = X_0 + dX, \text{ МПа}, \quad (49)$$

где δ_{ij} — дельта Кронекера; X_0 — начальное значение X , которое может быть найдено с помощью уравнения (50) на основании исследования [22]:

$$X_0 = -17,1 - 1,89 \cdot R_b [\text{МПа}], \text{ МПа}. \quad (50)$$

Графическая интерпретация механизма эволюции шатра сжатия показана на рис. 8.

Пластический множитель для метода секущих плоскостей (cutting plane algorithm) может быть получен на основании уравнения (51) по аналогии с трудом [31]:

$$d\lambda = \frac{f^{rr}}{\mathbf{n}(k_p, \boldsymbol{\sigma}) : \mathbf{D} : \mathbf{m}(k_p, \boldsymbol{\sigma}) - \frac{df^{rr}}{dk_p} \cdot h_D - \frac{df^{rr}}{dX} \cdot h_V}, \quad (51)$$

где f^{rr} — значение функции поверхности нагружения (6), (7) с пробными значениями координат; $\mathbf{n}(k_p, \boldsymbol{\sigma}) = \partial f(\boldsymbol{\sigma}) / \partial \boldsymbol{\sigma}$ — производная поверхности нагружения по тензору напряжений; $\mathbf{D}$ — матрица жесткости.

Механизм повреждений дает возможность моделировать разупрочнение материала, а также изменение жесткости при циклическом и знакопеременном нагружении. В модели используется следующая концепция механизма повреждений, отраженная

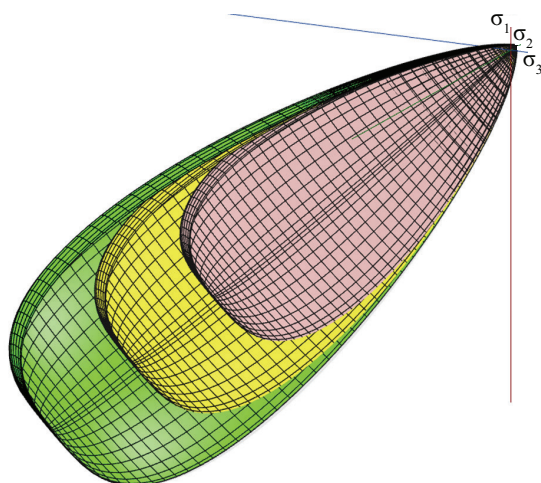


Рис. 8. Механизм эволюции шатра сжатия поверхности нагружения

Fig. 8. Loading surface compression cap evolution

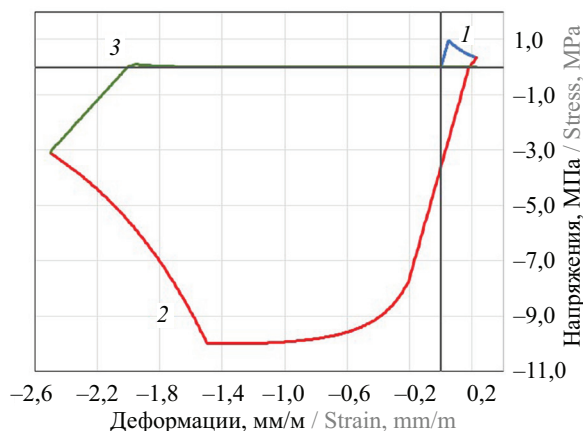


Рис. 9. Работа модели при знакопеременном нагружении в цикле растяжение – сжатие – растяжение

Fig. 9. Model behavior under alternating loading in the tension – compression – tension cycle

в уравнении (1): параметр поврежденности при сжатии W_c (52) влияет на весь тензор напряжений, в то время как параметр поврежденности при растяжении W_t (53) влияет только на его положительную часть. Данный подход позволяет отразить разницу в поведении бетона при сжатии и растяжении при знакопеременном и циклическом нагружениях. На рис. 9 представлено соотношение «напряжения – деформации» для образца, подверженного знакопеременной нагрузке: линия 1 соответствует нагружению в условиях одноосного растяжения; 2 — разгрузка после одноосного растяжения, переходящая в нагрузку в условиях одноосного сжатия; линия 3 — разгрузка после одноосного сжатия, переходящая в одноосное растяжение с остаточным значением предела прочности при одноосном растяжении, уменьшенном в результате роста параметров поврежденности W_t и W_c .

$$W_c = 1 - \exp(-\alpha_{dc} / \varepsilon_{fc}); \quad (52)$$

$$W_t = 1 - \exp(-\alpha_{dt} / \varepsilon_{ft}), \quad (53)$$

где α_{dc} (55), α_{dt} (54) — переменные, отвечающие за эволюцию параметров поврежденности при растяжении и сжатии соответственно [32]; ε_{fc} , ε_{ft} — параметры, контролирующие начальный наклон кривой закона поврежденности материала. Геометрическая интерпретация зависимости W_t (W_c) — α_{dt} (α_{dc}) приведена на рис. 10.

$$d\alpha_{dt} = (1 - \alpha_c) \cdot d\lambda \cdot \|\mathbf{m}(k_p, \boldsymbol{\sigma})\| / x_s(p); \quad (54)$$

$$d\alpha_{dc} = \alpha_c \cdot d\lambda \cdot \|\mathbf{m}(k_p, \boldsymbol{\sigma})\| / x_s(p), \quad k_p \geq 1, \quad (55)$$

где α_c — скалярный безразмерный коэффициент, обеспечивающий переход между режимами сжатия и растяжения (56); $x_s(p)$ — коэффициент хрупкости при разупрочнении, отражающий зависимость разупрочнения бетона от степени гидростатического

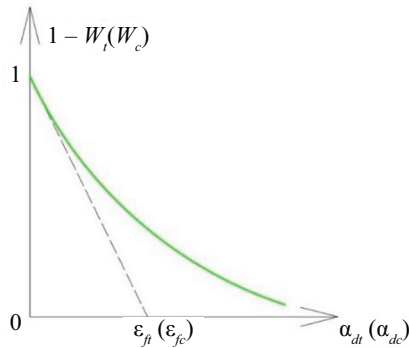


Рис. 10. Эволюция параметров поврежденности $W_i(W_c)$ в зависимости от функций $\alpha_{dt}(\alpha_{dc})$

Fig. 10. Evolution of damage parameters $W_i(W_c)$ depending on functions $\alpha_{dt}(\alpha_{dc})$

обжатия. Коэффициент $x_s(p)$ может быть получен с помощью формул (57) и (58):

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^3 \left(\bar{\sigma}_{ci} \cdot (\bar{\sigma}_{ci} + \bar{\sigma}_{ti}) / \|\bar{\sigma}\|^2 \right); \quad (56)$$

$$x_s(p) = 1 + (A_s - 1) \cdot R_s(p)^3; \quad (57)$$

$$R_s(p) = \begin{cases} -\frac{p \cdot \sqrt{2}}{q}, & p \leq 0; \\ 0, & p > 0, \end{cases} \quad (58)$$

где A_s — безразмерный скалярный параметр, отвечающий за скорость изменения коэффициента хрупкости при разупрочнении в зависимости от гидростатического инварианта p . Значение параметра должно подбираться на основании трехосных испытаний бетона. В случае отсутствия опытных данных значение может быть принято равным 20.

Процесс разупрочнения бетона при растяжении сопровождается локализацией необратимых деформаций на участках сравнительно малого размера. Локализация необратимых деформаций, возникающая в околонулевом объеме в рамках конечно-элементного решения, ведет к патологической чувствительности результатов решения к размеру конечно-элементной сетки, а также возникновению тенденции к ухудшению сходимости с уменьшением размера КЭ [33, 34]. С математической точки зрения подобное явление вызвано локальной потерей эллиптичности дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих стационарные процессы [35]. Для решения проблемы локализации в данной работе был использован метод регуляризации, основанный на теории полосы трещин (crack band theory) [36]. Основная идея подхода заключается в том, что параметр ϵ_{ft} , контролирующий разупрочнение при растяжении, является функцией от характерного размера элемента l_{char} . Значение l_{char} равно размеру КЭ в плоскости, перпендикулярной направлению образования трещины (вычисляется индивидуально для каждого КЭ). Геометрическая интерпретация параметра l_{char} изображена на рис. 11.

Таким образом, значение параметра ϵ_{ft} может быть найдено по формуле:

$$\epsilon_{ft} = \frac{G_F}{R_{bt} \cdot l_{char}}, \quad (59)$$

где G_F — энергия разрушения (энергия, требующаяся для полного разрыва межатомных связей на единичной площади поверхности трещины). Величина энергии разрушения может быть найдена по формуле (60) согласно исследованию [20]. В формуле может быть использовано значение призмной прочности вместо цилиндрической, так как разница в величине энергии разрушения пренебрежимо мала. Концепция применения подобного способа регуляризации в рамках модели бетона ранее рассматривалась в работе [37]. Несмотря на то, что этот способ уступает в эффективности регуляризации нелокальным подходам, он является наиболее простым с точки зрения математики:

$$G_F = 74 \cdot R_b^{0,18} [\text{МПа}], \text{ Н/мм}. \quad (60)$$

Значение параметра ϵ_{fc} должно устанавливаться на основании опытных данных либо эталонных диаграмм, представленных в нормативных документах. В условии отсутствия сведений параметры может быть принят равным 0,001.

Таким образом, для использования модели необходимо 14 параметров, которые можно разделить на четыре группы:

- две упругие константы: модуль упругости E_b , коэффициент Пуассона ν ;
- пять параметров поверхности нагружения: пределы прочности на одноосное сжатие R_b , одноосное растяжение R_{bt} и двухосное равномерное сжатие R_{2b} , координата пересечения шатра сжатия с гидростатической осью X и множитель, определяющий начало шатра сжатия R_{vh} ;
- четыре параметра упрочнения A_h, B_h, C_h, D_h ;
- три параметра повреждения: энергия разрушения G_F ; модуль разупрочнения при сжатии ϵ_{fc} ; параметр, контролирующий зависимость параметра хрупкости от степени гидростатического обжатия A_s .

Значения параметров третьей и четвертой группы могут быть найдены согласно рекомендациям и формулам, представленным в тексте статьи на основании значения R_b .

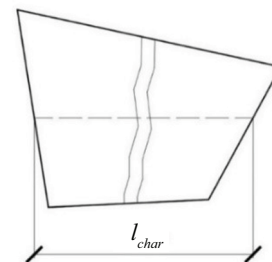


Рис. 11. Геометрическая интерпретация параметра l_{char}

Fig. 11. Geometric interpretation of the parameter l_{char}

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Модель материала реализована на языке FORTRAN 77 в качестве пользовательской модели USERMAT в конечно-элементном комплексе ANSYS. В настоящем разделе приведено сравнение результатов лабораторных и численных испытаний. На рис. 12–14 линиями показаны результаты численных опытов, точками — результаты, полученные в лаборатории.

В опытах И. Имрана [38] цилиндрические образцы подвергались трехосному неравномерному сжатию. Опыты выполнялись в два этапа: на первом этапе образец нагружался боковым давлением, на втором этапе происходило осевое нагружение образца при постоянной величине бокового давления. Бетон образцов имел следующие характеристики: $E_b = 30\,000$ МПа, $\nu = 0,15$, $R_b = 47,4$ МПа, $R_{bt} = 4,74$ МПа. Сравнение результатов представлено на рис. 12, рядом с результатами каждого опыта указаны главные напряжения бокового давления.

В опытах Х. Купфера [39] на бетонных образцах-пластинах воссоздавалась работа материала при плоском напряженном состоянии. Образцы разных серий испытывались при различных соотноше-

ниях главных напряжений. Бетон образцов имел следующие характеристики: $E_b = 32\,000$ МПа, $\nu = 0,18$, $R_b = 32,8$ МПа, $R_{bt} = 3,3$ МПа. Сравнение результатов лабораторных и численных испытаний приведено на рис. 13 (рядом с результатами каждого опыта указано соотношение ненулевых главных напряжений).

В опытах, проведенных Ф.К. Канером [40], цилиндрические образцы подвергались трехосному сжатию. Бетон образцов имел следующие характеристики: $E_b = 25\,000$ МПа, $\nu = 0,2$, $R_b = 45,7$ МПа, $R_{bt} = 4,57$ МПа. Было выполнено две серии опытов. В первой серии опытов испытание образцов происходило в два этапа: на первом этапе образцы нагружались трехосным равномерным сжатием, на втором этапе при постоянном боковом давлении происходило осевое деформирование цилиндра. Образцы разных серий испытывались при различных значениях предварительного трехосного обжатия. Во второй серии опытов образцы подвергались трехосному равномерному сжатию. Сравнение результатов лабораторных и численных испытаний для обеих серий показано на рис. 14.

В серии опытов, описанных в работе [41], образцы подвергались циклическому одноосному растяжению. Бетон образцов имел следующие характе-

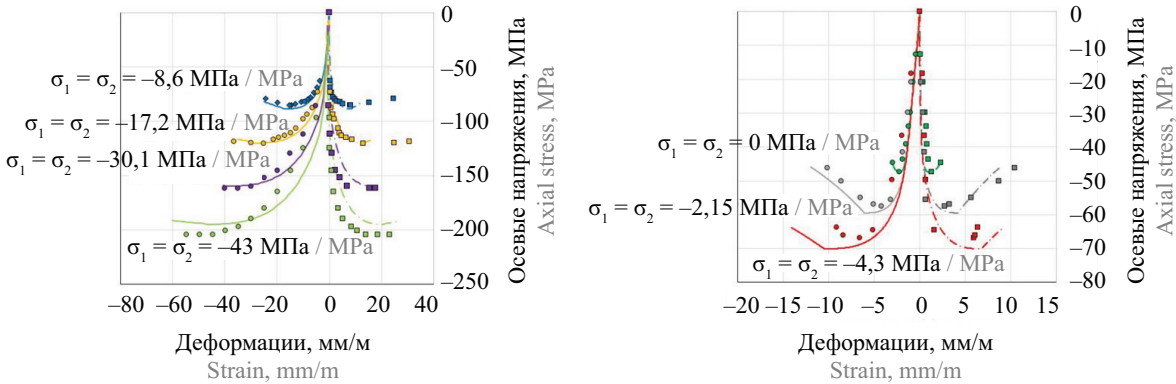


Рис. 12. Сравнение результатов численных и лабораторных испытаний, выполненных И. Имраном

Fig. 12. Comparison of the numerical model response and laboratory results made by I. Imran

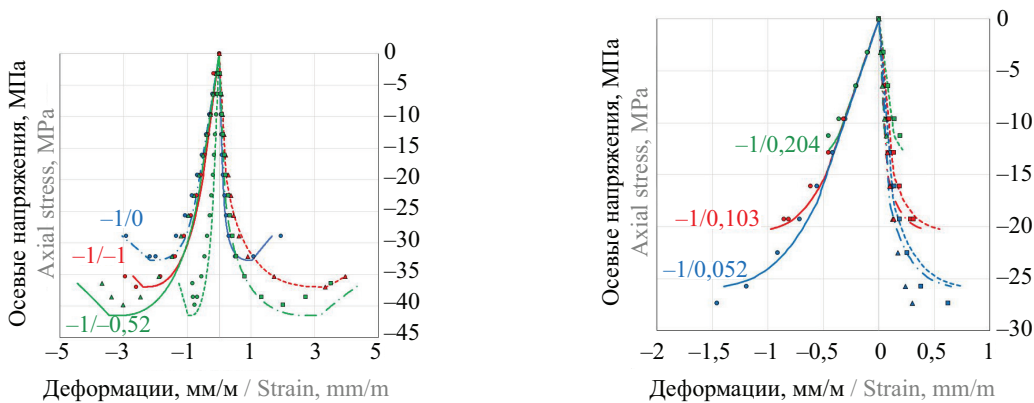


Рис. 13. Сравнение результатов численных и лабораторных испытаний, выполненных Х. Купфером

Fig. 13. Comparison of the numerical model response and laboratory results made by H. Kupfer

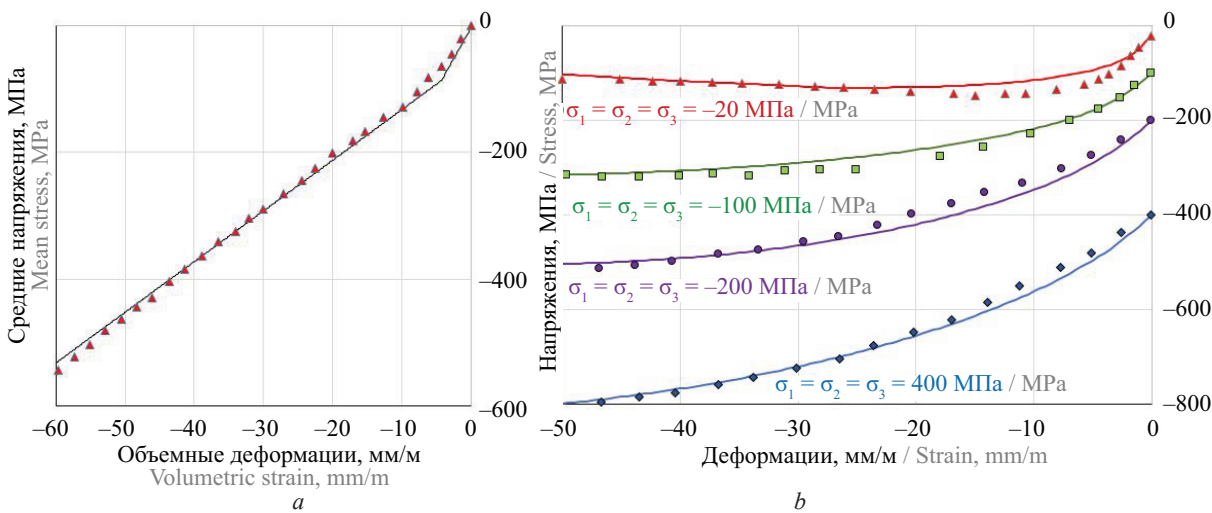


Рис. 14. Сравнение результатов численных и лабораторных испытаний, выполненных Ф.К. Канером: *a* — результаты для образцов первой серии испытаний; *b* — для второй

Fig. 14. Comparison of the numerical model response and laboratory results made by F.C. Caner: *a* — first test series are shown; *b* — second test series are shown

ристики: $E_b = 28\,000$ МПа, $\nu = 0,2$, $R_b = 40$ МПа, $R_{bt} = 3,5$ МПа, $G_F = 55$ Н/м. В рамках опытов, выполненных И.Д. Карсаном [42], бетонные образцы подвергались циклическому одноосному сжатию. Бетон образцов имел следующие характеристики: $E_b = 30\,000$ МПа, $\nu = 0,2$, $R_b = 28$ МПа, $R_{bt} = 2,8$ МПа, $A_s = 25$, $\epsilon_{fc} = 0,001$. Сравнение результатов лабораторных и численных испытаний для обеих серий представлено на рис. 15 (пунктирной линией показаны результаты лабораторного испытания).

Результаты лабораторных испытаний узлов сопряжения плитных и вертикальных конструкций без поперечного армирования приведены в статье [43]. В рамках данной работы выполнено численное испытание образца PG-6, имеющего следующие характеристики: $E_b = 28\,700$ МПа, $\nu = 0,2$, $R_b = 34,7$ МПа, $R_{bt} = 2,4$ МПа.

Рабочая высота плиты составляет 96 мм. Армирование растянутой зоны представлено арматурными стержнями диаметром 14 мм, расположенными с шагом 110 мм и имеющими предел текучести 526 МПа. Армирование сжатой зоны отсутствует. Геометрия образца PG-6 и конечно-элементная сетка численной модели показаны на рис. 16.

Сравнение кривых нагрузка–перемещения, численного и лабораторного образцов представлено на рис. 17 (пунктирной линией показаны результаты лабораторного испытания; рядом с каждой кривой указано значение предельной нагрузки).

На рис. 18 приведено сравнение картины трещинообразования лабораторного образца и первые главные пластические деформации численного.

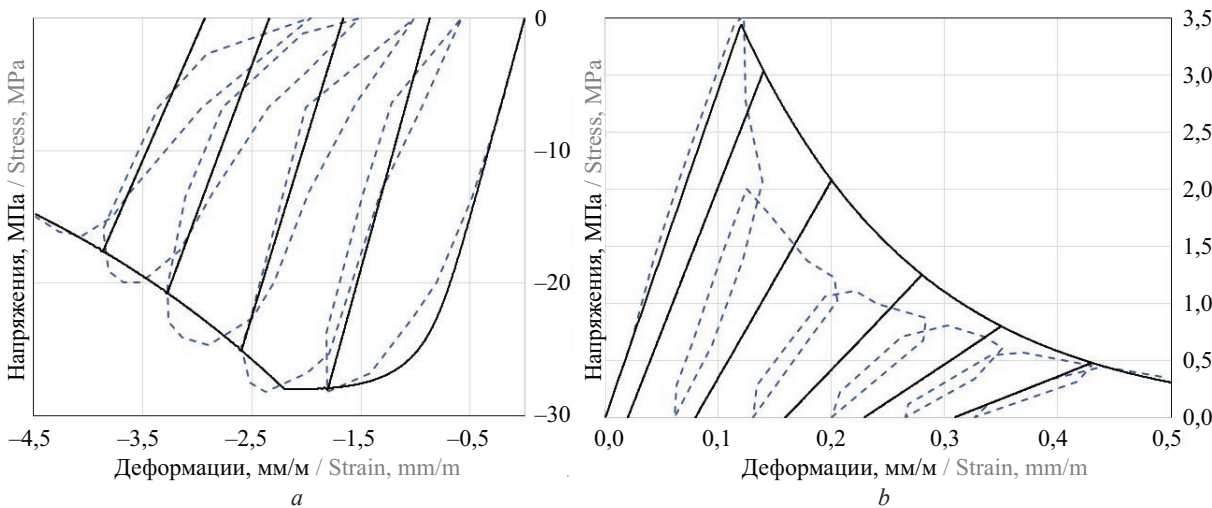


Рис. 15. Сравнение результатов численных и лабораторных испытаний для образцов, подвергавшихся циклическому нагружению: *a* — результаты испытания образцов, подвергавшихся сжатию; *b* — растяжению

Fig. 15. Comparison of numerical and laboratory test results for specimens subjected to cyclic loading: *a* — results of the compression test series are shown; *b* — results of the tension test series are shown

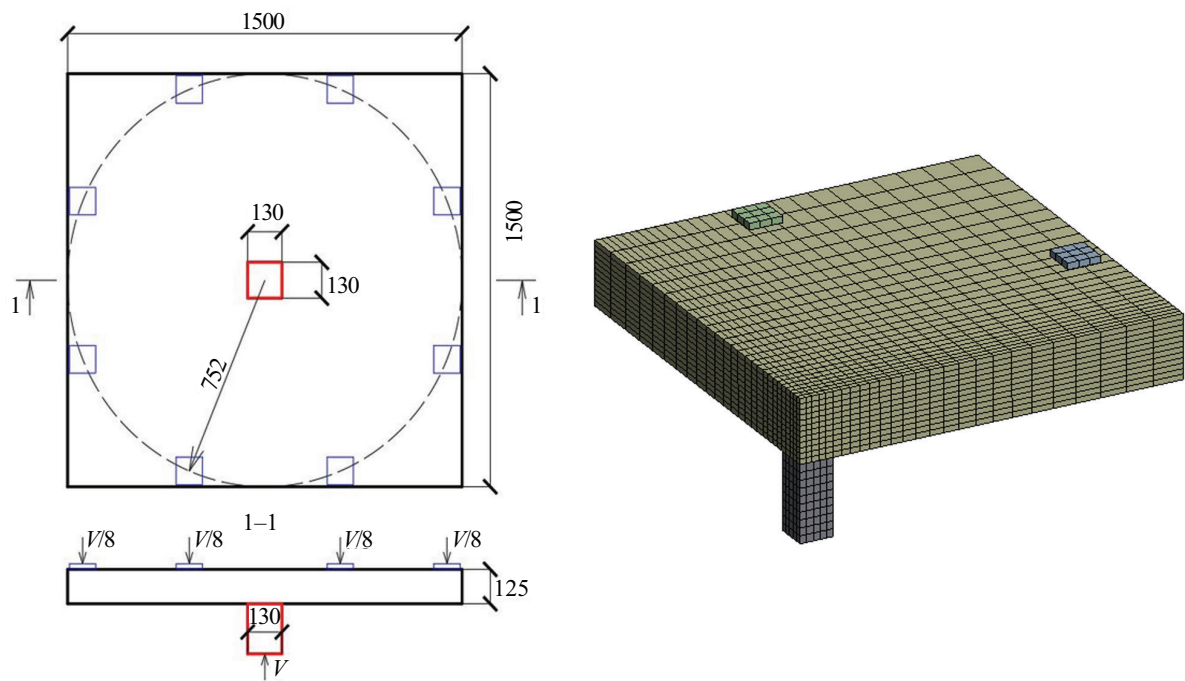


Рис. 16. Геометрия образца PG-6 (все размеры представлены в мм) и конечно-элементная сетка PG-6 (четверть)
Fig. 16. Geometry of the specimen PG-6 (all dimensions are in mm) and mesh of PG-6 (quarter)

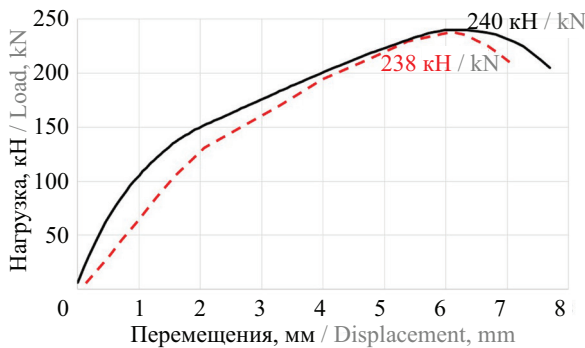


Рис. 17. Сравнение кривых нагрузка–перемещения для численного и лабораторного образцов
Fig. 17. Comparison of the load–deflection curves for the numerical and laboratory specimens

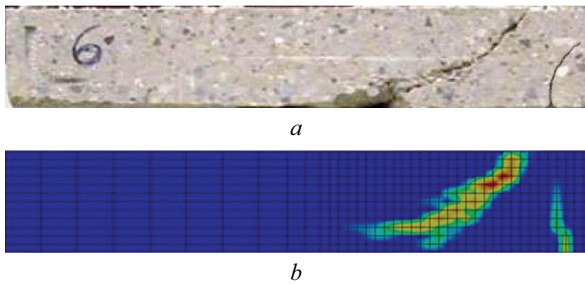


Рис. 18. Сравнение результатов: *a* — картина трещинообразования лабораторного образца PG-6; *b* — первые главные пластические деформации численной модели образца PG-6
Fig. 18. Comparison of results: *a* — crack pattern of the laboratory specimen PG-6; *b* — first principal plastic strains of the numerical specimen PG-6

Разница между предельными нагрузками лабораторного и численного образцов составила менее 1 %; разница между перемещениями, соответствующими предельным нагрузкам, — 1 %.

В отчете [44] представлены результаты испытаний шарнирно опертых бетонных балок с надрезом. Основная идея испытаний заключалась в создании искусственной зоны локализации необратимых деформаций для измерения энергии разрушения бетона. Данные опыты были включены в статью для тестирования стабильности работы материала на стадии разупрочнения при различных размерах конечно-элементной сетки. Длина балки составляет 500 мм; размер поперечного сечения — 100 × 100 мм; глубина и ширина надреза — 50 и 5,5 мм соответственно. Схема балки изображена на рис. 19.

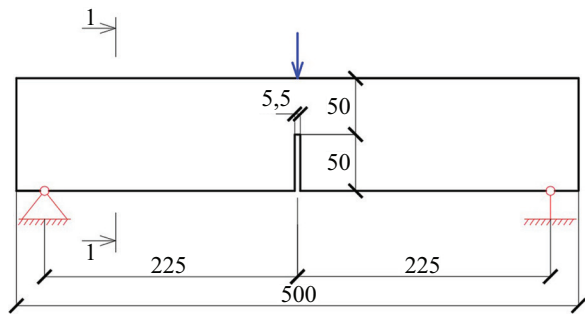


Рис. 19. Геометрическая схема балок с надрезом, использованных в испытаниях [44]
Fig. 19. Geometric diagram of the notched beams used in the tests [44]

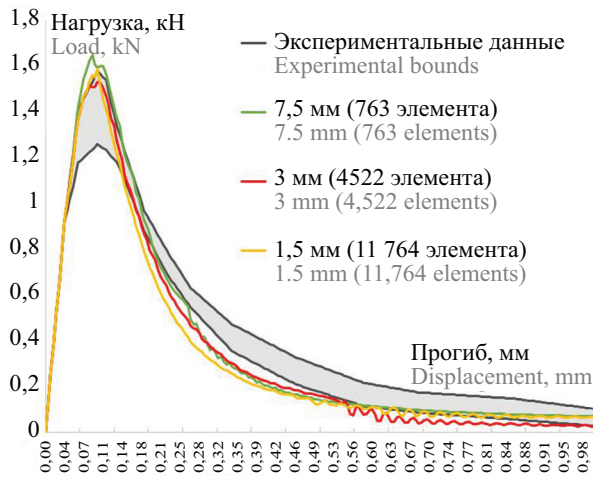


Рис. 20. Сравнение результатов лабораторных испытаний, полученных на балках-близнецах с результатами численных испытаний, полученных на образцах с разным размером конечно-элементной сетки

Fig. 20. Comparison of the laboratory test results obtained on twin beams with the results of numerical tests obtained on specimens with different mesh sizes

Бетон балок имеет следующие характеристики: $E_b = 20\,000$ МПа, $\nu = 0,2$, $R_b = 24$ МПа, $R_{bt} = 2,4$ МПа, $G_F = 100$ Н/м. Выполнено три численных испытания с разными размерами конечно-элементной сетки. Сравнение между результатами лабораторных и численных образцов показано на рис. 20. Серым цветом на графике отмечена огибающая зона, построенная на основании результатов испытаний не-

скольких балок-близнецов. Цветными линиями показаны результаты численных образцов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

Представленная авторами деформационно-прочностная модель бетона с двойным независимым упрочнением и повреждением представляет собой универсальный инструмент, позволяющий моделировать поведение бетона в рамках кратковременного статического нагружения. Поверхность нагружения модели имеет единственную зону сингулярности, плавный переход между основной частью и шатром сжатия и описывает напряженное состояние бетона с достаточной точностью. Эффекты дилатации и контракции учитываются путем введения комбинированной поверхности пластического потенциала наряду с двойным независимым упрочнением. Влияние напряженного состояния на деформативность материала обеспечивается путем использования коэффициентов хрупкости. Раздельное накопление параметров поврежденности позволяет моделировать изменение жесткости при циклических и знакопеременных нагружениях. Для регуляризации проблемы локализации необратимых деформаций, ведущей к зависимости результатов от размера конечно-элементной сетки и ухудшению сходимости при уменьшении размера КЭ, в модели используется подход, основанный на теории полосы трещин (crack band theory). В статье представлены значения для всех параметров, необходимых для использования модели материала.

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Ильюшин А.А. Пластичность: основы общей математической теории. М. : Изд-во АН СССР, 1963. 271 с.
2. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М. : Стройиздат, 1974. 316 с. EDN RSNPAX.
3. Лейтес Е.С. К построению теории деформирования бетона, учитывающей нисходящую ветвь диаграммы деформаций материала : сб. науч. тр. НИИЖБ, 1982. С. 24–32.
4. Яшин А.В. Теория деформирования бетона при простом и сложном нагружениях // Бетон и железобетон. 1986. № 8. С. 39–42.
5. Недорезов А.В. Деформации и прочность железобетонных элементов при сложных режимах объемного напряженного состава : дис. ... канд. техн. наук. Макеевка, 2018. 229 с.
6. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М. : Стройиздат, 1996. 416 с.
7. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики. Запо-

- рожье : Издательство журнала «Світ геотехніки», 2009. 400 с.
8. Kupfer H.B., Gerstle K.H. Behavior of concrete under biaxial stresses // Journal of the Engineering Mechanics Division. 1973. Vol. 99. Issue 4. Pp. 853–866. DOI: 10.1061/jmcea3.0001789
9. Ottosen N.S. Constitutive model for short-time loading of concrete // Journal of the Engineering Mechanics Division. 1979. Vol. 105. Issue 1. Pp. 127–141. DOI: 10.1061/jmcea3.0002446
10. Xing Y. Constitutive equation for concrete using strain-space plasticity model : Ph.D. thesis. New Jersey, 1993.
11. Drucker D.C. Some implications of work hardening and ideal plasticity // Quarterly of Applied Mathematics. 1950. Vol. 7. Issue 4. Pp. 411–418. DOI: 10.1090/qam/34210
12. Prager W. Recent developments in the mathematical theory of plasticity // Journal of Applied Physics. 1949. Vol. 20. Issue 3. Pp. 235–241. DOI: 10.1063/1.1698348

13. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. М. : Наука, 1987. 80 с.

14. Lee J., Fenves L.G. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures // Journal of Engineering Mechanics. 1998. Vol. 124. Issue 8. Pp. 892–900. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(1998)124:8(892)

15. Etse G., Willam K. Fracture Energy Formulation for Inelastic Behavior of Plain Concrete // Journal of Engineering Mechanics. 1994. Vol. 120. Issue 9. Pp. 1983–2011. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(1994)120:9(1983)

16. Grassl P., Jirásek M. Damage-plastic model for concrete failure // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. Issue 22–23. Pp. 7166–7196. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.032

17. Grassl P., Xenos D., Nyström U., Rempling R., Gylltoft K. CDPM2: A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete // International Journal of Solids and Structures. 2013. Vol. 50. Issue 24. Pp. 3805–3816. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.07.008

18. Zreid I., Kaliske M. A gradient enhanced plasticity–damage microplane model for concrete // Computational Mechanics. 2018. Vol. 62. Issue 5. Pp. 1239–1257. DOI: 10.1007/s00466-018-1561-1

19. Бударин А.М., Ремпель Г.И., Камзолкин А.А., Алехин В.Н. Деформационно-прочностная модель бетона с двойным независимым упрочнением // Вестник МГСУ. 2023. Т. 18. № 4. С. 517–532. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.4.517-532

20. Menetrey P., Willam K.J. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization // ACI Structural Journal. 1995. Vol. 92. Issue 3. DOI: 10.14359/1132

21. Fib model code for concrete structures 2010. 2013. DOI: 10.1002/9783433604090

22. Jiang H., Zhao H. Calibration of the continuous surface cap model for concrete // Finite Elements in Analysis and Design. 2015. Vol. 97. Pp. 1–19. DOI: 10.1016/j.finel.2014.12.002

23. Smith S.H. On fundamental aspects of concrete behavior : master's thesis. Boulder, University of Colorado at Boulder, 1985.

24. Соловьев Л.Ю. Нелинейная модель бетона на основе теории пластического течения // Системы. Методы. Технологии. 2014. № 4 (24). С. 131–140. EDN TFBEMN.

25. Yang B.L., Dafalias J.F., Herrmann L.R. A bounding surface plasticity model for concrete // Journal of Engineering Mechanics. 1985. Vol. 111. Issue 3. Pp. 359–380. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(1985)111:3(359)

26. Берг О.Я. Физические основы теории прочности бетона и железобетона. М. : Госстройиздат, 1962. 98 с.

27. Истомин А.Д., Беликов Н.А. Зависимость границ микротрещинообразования бетона от его прочности и вида напряженного состояния // Вестник МГСУ. 2011. № 2–1. С. 159–162. EDN OUVYTL.

28. Семенов А.С. Вычислительные методы в теории пластичности : учебное пособие. СПб. : Изд-во Политехнического ун-та, 2008. 210 с. EDN QJUTBT.

29. Samani A.K., Attard M.M. Lateral strain model for concrete under compression // ACI Structural Journal. 2014. Vol. 111. Issue 2. DOI: 10.14359/51686532

30. Bažant Z.P., Bishop F.C., Chang T. Confined compression tests of cement paste and concrete up to 300 ksi // ACI Journal Proceedings. 1986. Vol. 83. Issue 4. DOI: 10.14359/10448

31. Fossum A.F., Fredrich J.T. Cap plasticity models and compactive and dilatant pre-failure deformation // 4th North American Rock Mechanics Symposium. Seattle, Washington, 2000. Pp. 1169–1176.

32. Azadi Kakavand M.R., Taciroglu E. An enhanced damage plasticity model for predicting the cyclic behavior of plain concrete under multiaxial loading conditions // Frontiers of Structural and Civil Engineering. 2020. Vol. 14. Issue 6. Pp. 1531–1544. DOI: 10.1007/s11709-020-0675-7

33. Bažant Z., Planas J. Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials. Boca Raton : C.R.C., 1998. DOI: 10.1201/9780203756799

34. Jirásek M., Bauer M. Numerical aspects of the crack band approach // Computers & Structures. 2012. Vol. 110–111. Pp. 60–78. DOI: 10.1016/j.compstruc.2012.06.006

35. Galavi V., Schweiger H.F. Nonlocal multilaminate model for strain softening analysis // International Journal of Geomechanics. 2010. Vol. 10. Issue 1. Pp. 30–44. DOI: 10.1061/(asce)1532-3641(2010)10:1(30)

36. Bažant Z.P., Oh B.H. Crack band theory for fracture of concrete // Matériaux et Constructions. 1983. Vol. 16. Issue 3. Pp. 155–177. DOI: 10.1007/bf02486267

37. Červenka J., Červenka V., Laserna S. On crack band model in finite element analysis of concrete fracture in engineering practice // Engineering Fracture Mechanics. 2018. Vol. 197. Pp. 27–47. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2018.04.010

38. Imran I., Pantazopoulou S.J. Experimental study of plain concrete under triaxial stress // ACI Materials Journal. 1996. Vol. 93. Issue 6. DOI: 10.14359/9865

39. Kupfer H.B., Gerstle K.H. Behavior of concrete under biaxial stresses // Journal of the Engineering Mechanics Division. 1973. Vol. 99. Issue 4. Pp. 853–866. DOI: 10.1061/jmcea3.0001789

40. Caner F.C., Bažant Z.P. Microplane model M4 for concrete. II: Algorithm and calibration // Journal of Engineering Mechanics. 2000. Vol. 126. Issue 9. Pp. 954–961. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(2000)126:9(954)

41. Gopalaratnam V.S., Shah S.P. Softening response of plain concrete in direct tension // ACI Journal Proceedings. 1985. Vol. 82. Issue 3. DOI: 10.14359/10338

42. Karsan I.D., Jirsa J.O. Behavior of concrete under compressive loadings // Journal of the Structural Division. 1969. Vol. 95. Issue 12. Pp. 2543–2564. DOI:

10.1061/jsdeag.0002424

43. Guandalini S. Poinçonnement symétrique des dalles en béton armé : Ph.D. Thesis. Lausanne, 2006. DOI: 10.5075/epfl-thesis-3380

44. Kormeling H.A., Reinhardt H.W. Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete. Stevin Laboratory, Delft University of Technology, Report No. 5-83-18, 1983.

Поступила в редакцию 13 июля 2023 г.

Принята в доработанном виде 20 сентября 2023 г.

Одобрена для публикации 2 февраля 2024 г.

ОБ АВТОРАХ: Александр Михайлович Бударин — главный специалист отдела расчетных обоснований; Институт Гидропроект; 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 2; alex.budarin01@gmail.com;

Георгий Игоревич Ремпель — главный эксперт отдела расчетных обоснований; Институт Гидропроект; 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 2; g.rempel@hydroproject.ru;

Алексей Александрович Камзолкин — ведущий инженер; Научно-исследовательский центр «СтаДиО» (НИЦ «СтаДиО»); 125124, г. Москва, 3-я ул. Ямского Поля, д. 18; holinmail@mail.ru;

Владимир Николаевич Алехин — кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой систем автоматизированного проектирования объектов строительства; Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (УрФУ); 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, д. 19; РИНЦ ID: 549888, Scopus: 7004307891, ResearcherID: B-4747-2016, ORCID: 0000-0001-8291-6052; v.n.alekhin@urfu.ru.

Вклад авторов:

Бударин А.М. — концепция исследования, сбор материала и обработка данных, реализация модели в конечно-элементном комплексе, научное редактирование, научное руководство.

Ремпель Г.И. — методология исследования, реализация модели в конечно-элементном комплексе, научное редактирование.

Камзолкин А.А. — методология исследования, реализация модели в конечно-элементном комплексе, научное редактирование.

Алехин В.Н. — научное редактирование.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Il'yushin A.A. *Plasticity: fundamentals of general mathematical theory*. Moscow, USSR Academy of Sciences Publishing House, 1963; 271. (rus.).

2. Geniev G.A., Kissyuk V.N., Tyupin G.A. *Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete*. Moscow, Stroyizdat, 1974; 316. EDN RSNPAX. (rus.).

3. Leites E.S. *To construct a theory of concrete deformation that takes into account the descending branch of the deformation diagram of the material : collection of scientific papers*. Moscow, NIIZhB, 1982; 24-32. (rus.).

4. Yashin A.V. Theory of concrete deformation under simple and complex loads. *Concrete and Reinforced Concrete*. 1986; 8:39-42. (rus.).

5. Nedorezov A.V. *Strain and strength of reinforced concrete elements in complex modes of triaxial stress composition : dis. ... cand. tech. sci.* Makeevka, 2018. (rus.).

6. Karpenko N.I. *General Models of the Reinforced Concrete Mechanics*. Moscow, Stroyizdat, 1996; 416. (rus.).

7. Klovanih S.F. *Finite element method in non-linear problems of engineering mechanics*. Zaporozhye, Publishing house of the magazine "Svit Geotekhniki", 2009; 400. (rus.).

8. Kupfer H.B., Gerstle K.H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1973; 99(4):853-866. DOI: 10.1061/jmcea3.0001789

9. Ottosen N.S. Constitutive model for short-time loading of concrete. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1979; 105(1):127-141. DOI: 10.1061/jmcea3.0002446

10. Xing Y. *Constitutive equation for concrete using strain-space plasticity model : Ph.D. Thesis*. New Jersey, 1993.

11. Drucker D.C. Some implications of work hardening and ideal plasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1950; 7(4):411-418. DOI: 10.1090/qam/34210

12. Prager W. Recent developments in the mathematical theory of plasticity. *Journal of Applied Physics*. 1949; 20(3):235-241. DOI: 10.1063/1.1698348.

13. Rabotnov Yu.N. *Introduction to fracture mechanics*. Moscow, Nauka, 1987; 80. (rus.).

14. Lee J., Fenves L.G. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics*. 1998; 124(8):892-900. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(1998)124:8(892)

15. Etse G., Willam K. Fracture energy formulation for inelastic behavior of plain concrete. *Journal*

- of *Engineering Mechanics*. 1994; 120(9):1983-2011. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(1994)120:9(1983)
16. Grassl P., Jirásek M. Damage-plastic model for concrete failure. *International Journal of Solids and Structures*. 2006; 43(22-23):7166-7196. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2006.06.032
17. Grassl P., Xenos D., Nyström U., Rempling R., Gylltoft K. CDPM2: A damage-plasticity approach to modelling the failure of concrete. *International Journal of Solids and Structures*. 2013; 50(24):3805-3816. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.07.008
18. Zreid I., Kaliske M. A gradient enhanced plasticity–damage microplane model for concrete. *Computational Mechanics*. 2018; 62(5):1239-1257. DOI: 10.1007/s00466-018-1561-1
19. Budarin A.M., Rempel G.I., Kamzolkyn A.A., Alekhin V.N. Stress-strain concrete model with double independent reinforcement. *Vestnik MGSU [Monthly Journal on Construction and Architecture]*. 2023; 18(4):517-532. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.4.517-532 (rus.).
20. Menetrey P., Willam K.J. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization. *ACI Structural Journal*. 1995; 92(3). DOI: 10.14359/1132
21. *Fib model code for concrete structures 2010*. 2013. DOI: 10.1002/9783433604090
22. Jiang H., Zhao H. Calibration of the continuous surface cap model for concrete. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2015; 97:1-19. DOI: 10.1016/j.finel.2014.12.002
23. Smith S.H. *On fundamental aspects of concrete behavior : masters's thesis*. Boulder, University of Colorado at Boulder, 1985.
24. Soloviev L.Yu. Non-linear concrete model based on the plastic flow theory. *Systems. Methods. Technologies*. 2014; 4(24):131-140. EDN TFBEMN. (rus.).
25. Yang B.L., Dafalias J.F., Herrmann L.R. A bounding surface plasticity model for concrete. *Journal of Engineering Mechanics*. 1985; 111(3):359-380. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(1985)111:3(359)
26. Berg O.Ya. *Physical foundations of the theory of strength of concrete and reinforced concrete*. Moscow, Gosstroyizdat, 1962; 98. (rus.).
27. Istomin A.D., Belikov N.A. Dependence of the borders of the microcreeping in concrete from strengs and strain condition. *Vestnik MGSU [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]*. 2011; 2-1:159-162. EDN OUVYTL. (rus.).
28. Semenov A.S. *Computational methods in theory of plasticity : textbook*. St. Petersburg, Publishing House of the Polytechnic University, 2008; 210. EDN QJUTBT. (rus.).
29. Samani A.K., Attard M.M. Lateral strain model for concrete under compression. *ACI Structural Journal*. 2014; 111(2). DOI: 10.14359/51686532.
30. Bažant Z.P., Bishop F.C., Chang T. Confined compression tests of cement paste and concrete up to 300 ksi. *ACI Journal Proceedings*. 1986; 83(4). DOI: 10.14359/10448
31. Fossum A.F., Fredrich J.T. Cap plasticity models and compactive and dilatant pre-failure deformation. *4th North American Rock Mechanics Symposium*. Seattle, Washington, 2000; 1169-1176.
32. Azadi Kakavand M.R., Taciroglu E. An enhanced damage plasticity model for predicting the cyclic behavior of plain concrete under multiaxial loading conditions. *Frontiers of Structural and Civil Engineering*. 2020; 14(6):1531-1544. DOI: 10.1007/s11709-020-0675-7
33. Bažant Z., Planas J. *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. Boca Raton, C.R.C., 1998. DOI: 10.1201/9780203756799
34. Jirásek M., Bauer M. Numerical aspects of the crack band approach. *Computers & Structures*. 2012; 110-111:60-78. DOI: 10.1016/j.compstruc.2012.06.006
35. Galavi V., Schweiger H.F. Nonlocal multilaminate model for strain softening analysis. *International Journal of Geomechanics*. 2010; 10(1):30-44. DOI: 10.1061/(asce)1532-3641(2010)10:1(30)
36. Bažant Z.P., Oh B.H. Crack band theory for fracture of concrete. *Matériaux et Constructions*. 1983; 16(3):155-177. DOI: 10.1007/bf02486267
37. Červenka J., Červenka V., Laserna S. On crack band model in finite element analysis of concrete fracture in engineering practice. *Engineering Fracture Mechanics*. 2018; 197:27-47. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2018.04.010
38. Imran I., Pantazopoulou S.J. Experimental study of plain concrete under triaxial stress. *ACI Materials Journal*. 1996; 93(6). DOI: 10.14359/9865
39. Kupfer H.B., Gerstle K.H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division*. 1973; 99(4):853-866. DOI: 10.1061/jmcea3.0001789
40. Caner F.C., Bažant Z.P. Microplane model M4 for concrete. II: Algorithm and calibration. *Journal of Engineering Mechanics*. 2000; 126(9):954-961. DOI: 10.1061/(asce)0733-9399(2000)126:9(954)
41. Gopalaratnam V.S., Shah S.P. Softening response of plain concrete in direct tension. *ACI Journal Proceedings*. 1985; 82(3). DOI: 10.14359/10338
42. Karsan I.D., Jirsa J.O. Behavior of concrete under compressive loadings. *Journal of the Structural Division*. 1969; 95(12):2543-2564. DOI: 10.1061/js-deag.0002424
43. Guandalini S. *Poinçonnement symétrique des dalles en béton armé : Ph.D. Thesis*. Lausanne, 2006. DOI: 10.5075/epfl-thesis-3380
44. Kormeling H.A., Reinhardt H.W. *Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete*. Stevin Laboratory, Delft University of Technology, Report No. 5-83-18, 1983.

Received July 13, 2023.

Adopted in revised form on September 20, 2023.

Approved for publication on February 2, 2024.

B I O N O T E S: **Alexander M. Budarin** — chief specialist of the Structural analysis department; **JSC Institute Hydroproject**; 2 Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation; alex.budarin01@gmail.com;

Georgy I. Rempel — chief expert of the Structural analysis department; **JSC Institute Hydroproject**; 2 Volokolamskoe shosse, Moscow, 125993, Russian Federation; g.rempel@hydroproject.ru;

Alexey A. Kamzolkin — lead engineer; **JSC NRC “Stadyo” (SRC “StaDiO”)**; 18 3rd Yamskogo Polya st., Moscow, 125124, Russian Federation; holinmail@mail.ru;

Vladimir N. Alekhin — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Computer-Aided Design Systems for Construction Projects; **Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin (UrFU)**; 19 Mira st., Yekaterinburg, 620002, Russian Federation; ID RSCI: 549888, Scopus: 7004307891, ResearcherID: B-4747-2016, ORCID: 0000-0001-8291-6052; v.n.alekhin@urfu.ru.

Contribution of the authors:

Alexander M. Budarin — research concept, data gathering and processing, implementation in finite-element software package, scientific editing of the text, scientific management.

Georgy I. Rempel — research methodology, implementation in finite-element software package, scientific editing of the text.

Alexey A. Kamzolkin — research methodology, implementation in finite-element software package, scientific editing of the text.

Vladimir N. Alekhin — scientific editing of the text.

The authors declare no conflicts of interests.