

**Учредитель:** Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Пермский государственный национальный исследовательский университет»

Научный журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" публикует оригинальные научные статьи, краткие сообщения и обзорные статьи по направлениям журнала на русском и английском языках, ранее не публиковавшиеся и не представленные для публикации в других изданиях. Все статьи проходят рецензирование членами редакционной коллегии журнала и внешними рецензентами.

#### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**БУЗМАКОВА М. М.**, к. ф.-м. н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**МАЛАНИН В. В.**, д. т. н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**БАРУЛИНА М. А.**, д. ф.-м. н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**НУРБАКОВА Д. М.**, PhD in Computer Science; Национальный институт прикладных наук Лиона (National Institute of Applied Sciences of Lyon), Лион, Франция.

#### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**БУЗМАКОВА М. М.**, к.ф.-м.н., доцент, **главный редактор**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**РУСАКОВА О. Л.**, к.ф.-м.н., доцент, **ответственный секретарь**; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**АЛЕКСЕЕВ А. О.**, к.э.н., доцент; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;  
**АПТУКОВ В. Н.**, д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**АПУШКИНСКАЯ Д. Е.**, д.ф.-м.н.; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;  
**БАРУЛИНА М. А.**, д.ф.-м.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**БИРЮКОВ А. Н.**, д.э.н., доцент; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, Стерлитамак, Россия;  
**БОРИСОВ В. В.**, д.т.н., профессор; Смоленский филиал национального исследовательского университета «МЭИ», Смоленск, Россия;  
**ВЕЧТОМОВ Е. М.**, д.ф.-м.н., профессор; Вятский государственный университет, Киров, Россия;  
**ГУСЕВ А. Л.**, д.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**ДЕМИДОВ С. С.**, д.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;  
**ИВАНОВ Д. В.**, д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;  
**ИСАЕВ К. П.**, д.ф.-м.н.; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;  
**ИШКИН Х. К.**, д.ф.-м.н.; доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;  
**КРИВОШЕЕВА О. А.**, д. ф.-м. н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;  
**КОССОВИЧ Л. Ю.**, д.ф.-м.н., профессор; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;  
**КУЗНЕЦОВ А. Г.**, к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**МАЛАНИН В. В.**, д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**МАТВЕЕНКО В. П.**, д.т.н., профессор, академик РАН; Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь, Россия;

**МАХНЕВ А. А.**, д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;  
**ПАПКОВА И. В.**, д.ф.-м.н., доцент; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов, Россия;  
**ПЕСТРЕНИН В. М.**, к.ф.-м.н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**ПОЛОСКОВ И. Е.**, д.ф.-м.н., доцент; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**РУСАКОВ С. В.**, д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**САВЧИН В. М.**, д.ф.-м.н., профессор; Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Москва, Россия;  
**СЕЛЕТКОВ И. П.**, к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**ТРУСОВ П. В.**, д.ф.-м.н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;  
**ТЮРИН С. Ф.**, д.т.н., профессор; Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия;  
**ХАЧАЙ М. Ю.**, д.ф.-м.н., профессор РАН, чл.-корр. РАН; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия;  
**ХЕННЕР Е. К.**, д.ф.-м.н., профессор, чл.-корр. РАО; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**ФАЗУЛЛИН З.Ю.**, д.ф.-м.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;  
**ЧЕРМНЫХ В. В.**, д.ф.-м.н., доцент; Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия;  
**ЧЕРНИКОВ А. В.**, к.т.н.; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**ЧИНЕНОВА В. Н.**, к.ф.-м.н.; Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия;  
**ШАХМАМЕТОВА Г. Р.**, д.т.н., доцент; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;  
**ШВАРЦ К. Г.**, д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**ЮМАГУЛОВ М. Г.**, д.ф.-м.н., профессор; Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия;  
**ЯКОВЛЕВ В. И.**, д.ф.-м.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия;  
**ЯСНИЦКИЙ Л. Н.**, д.т.н., профессор; Пермский государственный национальный исследовательский университет, Пермь, Россия.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС 77 - 66787 от 08.08.2016.

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук (приказ от 08.07.2024). Научные специальности: Вещественный, комплексный и функциональный анализ; Дифференциальные уравнения и математическая физика; Геометрия и топология; Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика; Вычислительная математика; Теоретическая механика, динамика машин; Механика деформируемого твердого тела; Механика жидкости, газа и плазмы; Искусственный интеллект и машинное обучение; Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ; Теоретическая информатика, кибернетика; Системный анализ управление и обработка информации, статистика; Вычислительные системы и их элементы; Компьютерное моделирование и автоматизация проектирования. Издание включено в национальную информационно-аналитическую систему «Российский индекс научного цитирования» (РИНЦ, eLIBRARY ID 28484).

Founder: Perm State University

The journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" publishes Full Articles, Short Communications Article and Review paper/perspectives on the journal's directions, which have not been previously published. The papers have been written in Russian and English. The papers are reviewed by the journal editorial board members and external reviewers.

#### EDITORIAL COUNCIL

- BUZMAKOVA M. M.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**MALANIN V. V.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**BARULINA M. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Perm State University, Perm, Russia;  
**NURBAKOVA D. M.**, PhD in Computer Science; National Institute of Applied Sciences of Lyon, France.

#### EDITORIAL BOARD

**BUZMAKOVA M. M.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Editor-in-Chief**; Perm State University, Perm, Russia;  
**RUSAKOVA O. L.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; **Executive Secretary**; Perm State University, Perm, Russia;  
**ALEKSEEV A. O.**, Candidate of Science in Economics, Associate Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;  
**APTUKOV V. N.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**APUSHKINSKAYA D. E.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;  
**BARULINA M. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Perm State University, Perm, Russia;  
**BIRUKOV A. N.**, Doctor of Science in Economics, Associate Professor; Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;  
**BORISOV V. V.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Smolensk Branch of National Research University "MEI", Smolensk, Russia;  
**VECHTOMOV E. M.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Vyatka State University, Kirov, Russia;  
**GUSEV A. L.**, Doctor of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**DEMIDOV S. S.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;  
**IVANOV D. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;  
**ISAEV K. P.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**ISHKIN H. K.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**KRIVOSHEEVA O. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**KOSSOVICH L. Yu.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;  
**KUZNECOV A. G.**, Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**MALANIN V. V.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**MATVEENKO V. P.**, Doctor of Science in Engineering, Professor, Academician of RAS; Institute of Continuous Media Mechanics, UrD RAS, Perm, Russia;

**MAHNEV A. A.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS;  
**PAPKOVA I. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; N.G. Chernyshevsky Saratov National Research State University, Saratov, Russia;  
**PESTRENNIN V. M.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**POLOSKOV I. E.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**RUSAKOV S. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**SAVCHIN V. M.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russia;  
**SELETKOV I. P.**, Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**TRUSOV P. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;  
**TURIN S. F.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia;  
**HACHAI M. Yu.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor of RAS, member-corr. RAS; N.N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, UrD RAS, Yekaterinburg, Russia;  
**HENNER E. K.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor, member-corr. RAO; Perm State University, Perm, Russia;  
**FAZULLIN Z. Yu.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**CHERMNYH V. V.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Associate Professor; Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia;  
**CHERNIKOV A. V.**, Candidate of Science in Engineering; Perm State University, Perm, Russia;  
**CHINENOVA V. N.**, Candidate of Science in Physics and Mathematics; Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia;  
**SHAHMAMETOVA G. R.**, Doctor of Science in Engineering, Associate Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**SHVARTS K. G.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**UMAGULOV M. G.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia;  
**YAKOVLEV V. I.**, Doctor of Science in Physics and Mathematics, Professor; Perm State University, Perm, Russia;  
**YASNICKIY L. N.**, Doctor of Science in Engineering, Professor; Perm State University, Perm, Russia.

The journal is registered by the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology and Mass Communications (Roskomnadzor). Certificate of registration of the mass media PI No. FS 77 - 66787 dated 08.08.2016.

The journal is included in the peer-reviewed scientific publications list for the main research results should be published (Candidate of Sciences and Doctor of Sciences, order dated 07/08/2024). Scientific specialties: Real, complex and functional analysis; Differential equations and mathematical physics; Geometry and topology; Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics; Computational Mathematics; Theoretical mechanics, dynamics of machines; Mechanics of deformable solids; Mechanics of liquid, gas and plasma; Artificial intelligence and machine learning; Mathematical modeling, numerical methods and software packages; Theoretical Computer science, cybernetics; System analysis, information management and processing, statistics; Computer systems and their elements; Computer modeling and design automation. The journal is included in the national information and analytical system "Russian Science Citation Index" (eLIBRARY ID 28484).

## Содержание

ОТЧЕТ о IX Всероссийской научно-практической конференции с международным участием "Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века" .....	5
--	---

### МЕХАНИКА

<b>Алабужев А.А., Пьянкова М.А.</b> Влияние насыщения краевого угла на динамику капли в неоднородном переменном электрическом поле.....	6
<b>Герцик С.М., Конюхов В.А., Лекомцев С.В.</b> Численное моделирование фрагментации цилиндрической оболочки .....	21
<b>Изюмов Р.И., Свистков А.Л.</b> Математическая модель механического взаимодействия тел нанометрового масштаба.....	35
<b>Марышев Б.С., Клименко Л.С.</b> Параметрическое возбуждение конвекционной конвекции в замкнутой области пористой среды при наличии иммобилизации частиц примеси.....	46
<b>Тюлькина И.В., Голдобин Д.С.</b> Влияние шума на синхронность колебаний конвективных течений .....	65
<b>Фагалов А.Р., Беляев А.Ю.</b> Моделирование стационарного теплового режима цилиндрического элемента каркаса на орбите .....	78
<b>Шадрин В.В.</b> Независимость равновесного состояния размягченного эластомерного нанокompозита при одноосном нагружении от способа размягчения материала.....	95

### КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

<b>Быков И.В., Ротанева Н.Ю., Шкарапута А.П.</b> Применение математических методов в искусственной нейронной сети для распознавания в голосе "фальшивых" эмоций .....	104
<b>Гайнутдинова А.Ф.</b> Недетерминированные квантовые OBDD большой ширины .....	117
<b>Старцева О.Г., Айдагулова А.Р., Морозов И.В.</b> Использование интернет-ресурсов для приобретения навыков программирования .....	132
<b>Пенский О.Г.</b> Профессор Леонид Нахимович Ясницкий. Двойной юбилей.....	144
Информация для авторов.....	152

## Contents

REPORT about IX All-Russian scientific and practical conference with international participation "Artificial intelligence in current social and economic problems of the 21st century solving".....	5
---	---

### MECHANICS

<b>Alabuzhev A. A., Pyankova M. A.</b> The Contact Angle Saturation Influence on a Drop Dynamics in a Non-uniform Alternating Electric Field.....	6
<b>Gertsik S. M., Koniukhov V. A., Lekomtsev S. V.</b> Numerical Modeling of Cylindrical Shell Fragmentation.....	21
<b>Iziunov R. I., Svistkov A. L.</b> Nanometer-scale Bodies Mechanical Interaction Mathematical Model.....	35
<b>Maryshev B. S., Klimenko L. S.</b> Parametric Excitation of Concentration Convection in a Closed Region of a Porous Medium in the Presence of Solute Particle Immobilisation.....	46
<b>Tiulkina I. V., Goldobin D. S.</b> The Influence of Noise on the Synchronization of Oscillations of Convective Currents .....	65
<b>Fagalov A. R., Beliaev A. Yu.</b> Modeling of Stationar Thermal Regime of Cylindrical Frame Element in Orbit.....	78
<b>Schadrin V. V.</b> The Equilibrium State of the Softened Elastomeric Nanocomposite under Uniaxial Loading and it's Independence from the Method of Material Softening.....	95

### COMPUTER SCIENCE

<b>Bykov I. V., Rotaneva N. N., Shkaraputa A. P.</b> Mathematical Methods Application in an Artificial Neural Network to Recognize "Fake" Emotions in the Voice..	104
<b>Gainutdinova A. F.</b> Large Width Nondeterministic Quantum OBDDs.....	117
<b>Startseva O. G., Aidagulova A. R., Morozov I. V.</b> Using Internet Resources to Acquire Programming Skills.....	132
<b>Pensky O. G.</b> Professor Leonid Nakhimovich Yasnitsky. Double Jubilee.....	144
Information for authors .....	152

**ОТЧЕТ**  
**о IX Всероссийской научно-практической конференции**  
**с международным участием**  
**"Искусственный интеллект в решении актуальных социальных**  
**и экономических проблем XXI века"**



17–18 октября 2024 года в Перми на территории ВШЭ-Пермь и ПГНИУ состоялась уже ставшая традиционной IX Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием "Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века".

На конференцию было представлено 112 докладов, а на сайтах конференции зарегистрировались 194 участника из многих городов России и зарубежья.

Такого большого количества докладов мы не ожидали, поэтому было принято решение заслушать только небольшую часть докладов, которые нам показались наиболее интересными и актуальными.

Большинство же докладов мы представили как стендовые, оформили тезисы докладов в виде сборника, который будет опубликован отдельным изданием, а пока выложили на сайтах конференции: [https://perm.hse.ru/artificial\\_intelligence/](https://perm.hse.ru/artificial_intelligence/) и <https://aintellect-psu.ru/>. Здесь можно увидеть статьи, как обзорно-постановочного содержания, так и результаты вполне законченных научных исследований, имеющих как теоретическое, так и практическое значение. Имеются статьи, посвященные вопросам философского осмысления современных результатов искусственного интеллекта с прогнозами его будущего развития и влияния на нашу цивилизацию. Некоторые статьи можно назвать прорывными в области теории и будущих применений технологий искусственного интеллекта.

Несмотря на большое разнообразие рассмотренных вопросов, все статьи объединены общим вектором. Это проблемы развития и применения идей и методов искусственного интеллекта для решения актуальных социальных и экономических проблем XXI века.

Конференция проходила в очно-удаленном режиме. Были жаркие обсуждения, споры, иногда не приводящие к единому мнению.

Но все участники конференции были едины в том, что тема искусственного интеллекта актуальна, результаты его развития и применения значительны, а будущее ИИ, тесно связанное с будущим нашей цивилизации, далеко неочевидно. Поэтому конференции такого рода необходимы.

Председатель  
организационного и программного комитетов  
конференции *Л. Н. Ясницкий*

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 532.64, 514.86

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-6-20

<https://elibrary.ru/KJFXIA>



**Влияние насыщения краевого угла на динамику капли  
в неоднородном переменном электрическом поле**

Алексей Анатольевич Алабужев<sup>1</sup>, Марина Анатольевна Пьянкова<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия

<sup>1,2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия

<sup>2</sup>МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Россия

<sup>1</sup>alabuzhev@mail.ru

<sup>2</sup>ya.kashina-marina@yandex.ru

**Аннотация.** В данной статье предложена теоретическая модель электросмачивания на диэлектрической подложке с учетом насыщения динамического краевого угла от электрического напряжения. В качестве примера рассматриваются вынужденные колебания капли электролита, помещенной между двумя параллельными твердыми поверхностями в переменном электрическом поле. В состоянии механического равновесия капля имеет форму круглого цилиндра, ось симметрии которого перпендикулярна пластинам. Скорости линий контакта на обеих поверхностях зависят от внешней периодической силы электрического поля и отклонения краевого угла от его равновесного значения. Для описания неоднородности поверхности предполагается, что коэффициент пропорциональности является функцией координат. Эта функция индивидуальна для каждой поверхности. Показано, что это приводит к возбуждению дополнительных азимутальных мод, в отличие от случая однородных поверхностей. Внешнее переменное электрическое поле тоже является пространственно-неоднородным, так как в экспериментах сложно добиться однородного поля при конечных размерах проводника. Обнаружено, что неоднородность пластин изменяет значение угла насыщения. Продемонстрировано качественное согласие с экспериментами.

**Ключевые слова:** вынужденные колебания; движение линии контакта; электросмачивание; динамический краевой угол; насыщение краевого угла; неоднородная поверхность

**Для цитирования:** Алабужев А.А., Пьянкова М.А. Влияние насыщения краевого угла на динамику капли в неоднородном переменном электрическом поле // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 6–20. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-6-20. <https://elibrary.ru/KJFXIA>.

**Благодарности:** работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 24-21-00379.

*Статья поступила в редакцию 17.10.2024; одобрена после рецензирования 29.11.2024; принята к публикации 05.12.2024.*



Эта работа © 2024 Алабужев А.А., Пьянкова М.А. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## MECHANICS

Research article

# The Contact Angle Saturation Influence on a Drop Dynamics in a Non-uniform Alternating Electric Field

Aleksey. A. Alabuzhev<sup>1</sup>, Marina. A. Pyankova<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Perm State University, Perm, Russia

<sup>1,2</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

<sup>2</sup>MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia

<sup>1</sup>alabuzhev@mail.ru

<sup>2</sup>ya.kashina-marina@yandex.ru

**Abstract.** A theoretical model of electrowetting on a dielectric substrate is proposed taking into account the saturation of the dynamic contact angle from the electric voltage in this article. As an example, forced oscillations of an electrolyte droplet placed between two parallel solid surfaces in an alternating electric field are considered. In the state of mechanical equilibrium, the droplet has the shape of a round cylinder whose symmetry axis is perpendicular to the plates. The velocities of the contact lines on both surfaces depend on the external periodic force of the electric field and the deviation of the contact angle from its equilibrium value. To describe the surface inhomogeneity, it is assumed that the proportionality coefficient is a function of coordinates. This function is individual for each surface. It is shown that this leads to the excitation of additional azimuthal modes, in contrast to the case of homogeneous surfaces. The external alternating electric field is also spatially inhomogeneous, since it is difficult to achieve a uniform field in experiments with finite conductor sizes. It is found that the inhomogeneity of the plates changes the value of the saturation angle. Qualitative agreement with experiments was demonstrated.

**Keywords:** *forced oscillations; contact line motion; electrowetting; dynamic contact angle; contact angle saturation; heterogeneous surface*

**For citation:** Alabuzhev, A.A., Pyankova, M.A. (2024), "The Contact Angle Saturation Influence on a Drop Dynamics in a Non-uniform Alternating Electric Field", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), pp. 6-20. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-6-20. <https://elibrary.ru/KJFXIA>.

**Acknowledgments:** the work was supported by the Russian Science Foundation, Project № 24-21-00379.

*The article was submitted 17.10.2024; approved after reviewing 29.11.2024; accepted for publication 05.12.2024*

## Введение

С активным развитием изучения течений на микромасштабах и созданием микрожидкостных устройств (microfluidic devices) процессы электросмачивания (ЭС, electrowetting) [1–3] и электросмачивания на диэлектрической подложке (ЭСНД, electrowetting-on-dielectric) [4–6] – изменение сил поверхностного натяжения под воздействием электрического поля (тока), стали активно использоваться как методы контроля и управления микро- и наножидкостными объектами (капли, пузырьки, частицы). Второй метод, благодаря нанесению диэлектрического слоя на поверхность проводящей пластины, позволяет, во-первых, варьировать свойства (смачивание, шероховатость) такой поверхности в широких пределах. Во-вторых, позволяет отделить жидкость от контакта с металлом, что актуально для агрессивных или биологических жидкостей.

Применение ЭСНД демонстрируется на цифровых (капельных) микрожидкостных устройствах для биоанализа (лаборатория на чипе) [7–10].

Фактически такие устройства представляют собой плоский конденсатор, внутри которого помещена либо одна капля жидкости, либо группа таких капель. Соответственно, геометрия задачи в таких системах описывается как капиллярный жидкий мостик. Такой конденсатор характеризуется электроемкостью на единицу площади подложки  $C$ , величиной прикладываемого напряжения электрического тока  $V$  и физическими параметрами диэлектрика – относительной проницаемостью  $\varepsilon$  и толщиной диэлектрического слоя  $d$ . Разрабатываются различные перспективные устройства, например электронные жидкие линзы с переменным фокусом [11, 12], которые представляют собой каплю жидкости, помещенную на поверхность раздела двух жидких сред. В экспериментах по изучению электросмачивания обычно используется капля (пузырек) на подложке (жидкой или твердой). Это может быть капля электролита (например, водный раствор хлорида калия KCl концентрации  $10^{-3} - 1$  М и электропроводностью  $10^{-2} - 10$  Ом $^{-1}$ м $^{-1}$ ) объемом 1 мкл на диэлектрической (к напримеру, тефлоновой) подложке толщиной  $\sim 0,1$  мм, окруженная воздухом. Такие капли – хорошо известные испытательные стенды, которые используются для анализа различных явлений, связанных, главным образом, с силами поверхностного натяжения.

К примеру, исследование [10] экспериментально подтверждает, что процесс перемешивания в капле может быть улучшен путем воздействия на каплю на резонансных и на чередующихся частотах с использованием устройства ЭСНД с параллельными пластинами. Установлено, что время перемешивания в резонансной капле значительно короче, чем в нерезонансной. В случае приведения капли в движение путем чередования двух резонансных частот эффективность перемешивания значительно повышается при определенной продолжительности чередования этих частот.

Без электрического поля равновесный краевой угол  $\vartheta_0$  описывается условием Юнга [1–6]:

$$\cos \vartheta_0 = \frac{\sigma_{ip} - \sigma_{cp}}{\sigma_{ic}}, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ip}$  – межфазное поверхностное натяжение между подложкой и окружающей средой,  $\sigma_{cp}$  – межфазное поверхностное натяжение между жидкостью капли и подложкой,  $\sigma_{ic}$  – межфазное поверхностное натяжение на поверхности капли с окружающей средой. Для описания влияния электрического поля при ЭСНД используется модель Липпмана [1–6], которая с условием Юнга (1) дает условия для вычисления краевого угла  $\vartheta$  при ЭСНД [1–6]:

$$\cos(\vartheta) = \cos(\vartheta_0) + E_w, \quad E_w = \frac{C}{2\sigma_{ic}} V^2, \quad C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{d}, \quad (2)$$

где  $E_w$  – электрокапиллярное число (отношение электрической силы к силе поверхностного натяжения),  $\varepsilon_0$  – коэффициент диэлектрической проницаемости вакуума. Характерное определение электрокапиллярного числа в экспериментах  $E_w \approx 10^{-5} V^2$ , типичные напряжения составляют  $\sim 10-100$  В и достигают 1 кВ.

Таким образом, типичные значения  $E_w \sim 10^{-3}..10$ . Отметим, что для электрокапиллярного числа  $E_w$  в формуле значения ограничены  $E_w \leq 1$ .

Условие Юнга–Липпмана (Юнга–Дюпре) (2) хорошо определяет значение краевого угла при малых напряжениях, т. е.  $E_w \ll 1$ , но, во-первых, не учитывает при высоких



напряжениях эффект насыщения краевого угла (значение краевого угла не меняется с увеличением электрического напряжения). Кроме того, насыщение краевого угла может достигаться и при относительно низких напряжениях, когда формально  $E_w \ll 1$ . Во-вторых, предельный переход от переменного напряжения к постоянному (т. е.  $\omega \rightarrow 0$ ) приводит к бесконечному значению отклонения боковой поверхности капли от ее равновесного значения. В-третьих, в некоторых экспериментах для высоких значений частоты ( $\sim 10$  МГц) переменного электрического поля также обнаружен эффект насыщения. Хотя последнее наблюдение нуждается в дополнительных проверках (возможно, из-за высоких частот было сложно фиксировать изменение краевого угла), проблема построения теоретической модели для описания изменения краевого угла при электросмачивании является до сих пор нерешенной.

Качественно переменный электрический ток не меняет условие (2). Внешнее переменное поле, изменяющееся по закону  $\cos(\omega t)$  ( $\omega$  – частота электрического поля,  $t$  – время), перераспределяет заряды на поверхности капли, что приводит к изменению поверхностного натяжения и, следовательно, для очень быстрых релаксационных процессов (т. е. время изменения наведенного заряда меньше периода вибраций и поверхностные силы успевают меняться) на линии контакта, краевой угол будет меняться по закону  $\cos(2\omega t)$  согласно закону Липпмана (2). Отметим, что колебания поверхности капли на удвоенной частоте электрического поля подтверждены экспериментально [1–6]. На основе линейного условия Хокинга [13] для движения линии контакта в работе [14] была предложена следующая модель:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \Lambda \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} + a \cos(2\omega t) \right), \quad (3)$$

где  $\zeta$  – функция отклонения поверхности от равновесного значения,  $\Lambda$  – параметр смачивания (параметр Хокинга),  $z$  – координата, ось которой перпендикулярна подложке, по которой движется линия контакта,  $a$  – эффективная амплитуда электрического поля. Параметр смачивания является феноменологическим параметром, имеющим размерность скорости. Второе слагаемое (3) описывает воздействие внешнего электрического поля на краевой угол  $\vartheta$  (2):  $\cos \vartheta = E_w = \tilde{E}_w V^2$  при условии  $\cos \vartheta_0 = 0$ . Это позволяет определить отклонение краевого угла в (3) за счет электрического поля:

$$\zeta_z \sim \operatorname{ctg} \vartheta = \frac{E_w}{\sqrt{1 - E_w^2}} = \frac{\tilde{E}_w V^2}{\sqrt{1 - \tilde{E}_w^2 V^4}} \approx \tilde{E}_w V^2 + O(V^6) \approx \tilde{E}_w V^2 \sim V^2.$$

Используя приведенную выше модель для постоянного тока, можно сделать обобщение на случай переменного электрического поля [1–6]: постоянный потенциал  $V$  меняем на переменный  $U = U_0 \cos(\omega t)$ . Следовательно, теперь  $\zeta_z \sim \operatorname{ctg} \vartheta \approx \tilde{E}_w U^2 \approx \tilde{E}_w U_0^2 \cos(2\omega t)$ . Другими словами, граничное условие (3) определяет скорость движения линии контакта за счет изменения краевого угла и внешнего периодического воздействия на нее с амплитудой  $a = \tilde{E}_w U_0^2$ . Это условие было обобщено на случай пространственно-неоднородного электрического поля [15] и неоднородных поверхностей пластин [16] аналогично работам [17, 18] с вибрационным воздействием.

Выше отмечалось, что в экспериментах был обнаружен эффект насыщения краевого угла, при котором краевой угол не меняется с дальнейшим повышением потенциала. Условие Юнга–Липпмана (2) и модифицированное условие Хокинга (3) не описывают насыщение краевого угла. Поэтому модель (3) нуждается в дальнейшей доработке.

В данной статье предлагается дополнить модель (3) эффектом насыщения краевого угла, в отличие от упомянутых выше работ, использующих условия (2) [1–6] или (3) [14–16]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \Lambda \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\cos \vartheta_s L(a)}{\sqrt{1 - (\cos \vartheta_s L(a))^2}} \cos(2\omega t) \right), \quad (4)$$

$$\cos(\vartheta) = \cos(\vartheta_s) L(a), \quad L(a) = \coth(3x) - \frac{1}{3x},$$

где  $\vartheta_s$  – угол насыщения,  $L(a)$  – функция Ланжевена. Функция Ланжевена выбрана исходя из теории поляризации диэлектриков Дебая аналогично модели намагничения парамагнетиков Ланжевена–Дебая [19, 20]:  $\langle P \rangle = P_0 L(\beta)$ , где  $\langle P \rangle$  – компонента суммарного дипольного момента диэлектрика, параллельная напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ ,  $P_0 = np$  – суммарный дипольный момент полностью поляризованного диэлектрика (поляризация насыщения),  $p$  – электрический дипольный момент одной молекулы диэлектрика,  $n$  – количество дипольных молекул,  $\beta = pE/(kT)$  – эффективная поляризуемость молекулы,  $k$  – постоянная Больцмана,  $T$  – температура.

## 1. Постановка задачи

Постановка задачи напоминает постановку работ [14–16]. В замкнутом сосуде круглой цилиндрической формы, заполненного несжимаемой жидкостью плотности  $\rho_e^*$ , помещена капля несжимаемой жидкости с плотностью  $\rho_i^*$  (рис. 1).

Снаружи к проводящим торцам сосуда, покрытым изнутри слоем диэлектрика, прикладывается переменное напряжение, имеющее частоту  $\omega^*$ , что позволяет возбудить внутри сосуда переменное электрическое поле.

Другими словами, сосуд представляет собой плоский конденсатор, внутри которого находятся две жидкости с деформируемой поверхностью раздела (рис. 1). Внешнее поле действует на линию контакта как периодическая сила с амплитудой  $a^*$  и частотой  $2\omega^*$ . Это принципиально отличается от вибрационного воздействия, при котором внешняя сила действует на всю систему в целом. В результате динамика линии описывается модифицированным граничным условием (4) с учетом насыщения краевого угла.

Использование приближения идеальной (невязкой несжимаемой) жидкости также накладывает ограничения на физические параметры. Для несжимаемой жидкости характерные скорости пульсационного течения много меньше скорости звука  $c^*$ :  $\omega^* L^* \ll c^*$ . Например, для капли воды  $L^* \sim 1$  мм скорость звука  $c^* = 1500$  м/с, т. е. верхний предел для частот вибраций  $\omega^* \ll 10^6$  рад/с. Для использования приближения невязкой жидкости толщина вязкого пограничного слоя  $\delta^* = \sqrt{\nu^*/\omega^*}$  для жидкости с коэффициентом кинематической вязкости  $\nu^*$  много меньше, чем характерный размер  $L^*$ :  $\delta^* \ll L^*$ .

Для капли воды  $L^* \sim 1$  мм и  $v^* \sim 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с нижний предел частот  $\omega^* \gg 1$  рад/с. Таким образом, диапазон частот составляет  $1 \ll \omega^* \ll 10^6$  рад/с для капли воды размером 1 мм в воздухе, что соответствует размерам капель, используемых в микрожидкостных устройствах, упомянутых выше.

Расстояние между торцами (крышкой и дном сосуда) равно  $h^*$ . Предполагается, что сосуд настолько велик по сравнению с характерными размерами капли, что влияние его боковой стенки на движение капли не учитывается. В состоянии механического равновесия капля имеет форму круглого цилиндра с прямым краевым углом радиуса  $R_0^*$  и высотой  $h^*$ . Равновесный прямой краевой угол представляет собой оправданное приближение, так как это позволяет упростить не только решение задачи, но и сохранить все возможные эффекты, наблюдаемые для реальной капли. Отметим, что в работе [21] проводилось сравнение поведения капли, представляющей собой фигуру вращения (т. е. равновесный краевой угол отличен от прямого) с цилиндрической каплей. Например, было показано, что наибольшие значения частот собственных колебаний достигаются при прямом краевом угле, т. е. отличия только количественные. Трансляционные вынужденные колебания такой капли (с непрямым краевым углом) качественно совпадают с колебаниями цилиндрической капли [22].

Эффективное граничное условие Хокинга [13] характеризует диссипацию энергии в системе, которая связана со взаимодействием с подложкой линии контакта при движении последней. Эта диссипация не связана с молекулярной вязкостью жидкости, что позволяет добавить затухание свободных колебаний даже для невязкой жидкости. Диссипация мала либо в случае закрепленной (малоподвижной) линии контакта, либо при слабом взаимодействии ее с подложкой [13–18, 23, 24]. В первом случае декремент затухания свободных колебаний пропорционален  $\Lambda^2$  и возможно рассмотрение случая малой вязкости, т. е. введение тонкого пограничного слоя на поверхности подложки [24]. Во втором случае декремент затухания пропорционален  $\Lambda^{-1}$ . Следовательно, благодаря наличию диссипации течение жидкостей можно рассматривать как потенциальное, несмотря на наличие деформируемой поверхности раздела – боковой поверхности капли.

Подобные решения использовались и в работах [14–18, 23, 24] (см. также библиографию этих работ). Все это позволяет использовать потенциал скорости  $\mathbf{v}^* = \nabla \varphi^*$  ( $\mathbf{v}^*$  – скорость течения жидкости,  $\varphi^*$  – потенциал скорости) в соответствии с кинематической теоремой Кельвина о циркуляции.

Поверхность раздела (боковая поверхность капли) – деформируемая и описывается функцией  $r^* = R_0^* + \zeta^*(\alpha, z^*, t^*)$  в цилиндрической системе координат  $r^*, \alpha, z^*$  (рис. 1). Учитывается сила поверхностного натяжения с коэффициентом  $\sigma^*$ . Азимутальный угол  $\alpha$  отсчитывается от оси  $x$ .

Рассматривая равновесную форму капли как круглый цилиндр, пренебрегаем влиянием силы тяжести на форму капли. Другими словами, отношение силы тяжести к силе поверхностного натяжения (число Бонда или число Этвеша) мало:  $|\rho_i^* - \rho_e^*| g^* L^{*2} \ll \sigma^*$ , где  $g^*$  – ускорение свободного падения,  $L^*$  – характерный пространственный размер. Для большинства микрожидкостных устройств это приближение также справедливо (капля воды размером  $L^* \sim 1$  мм в воздухе).

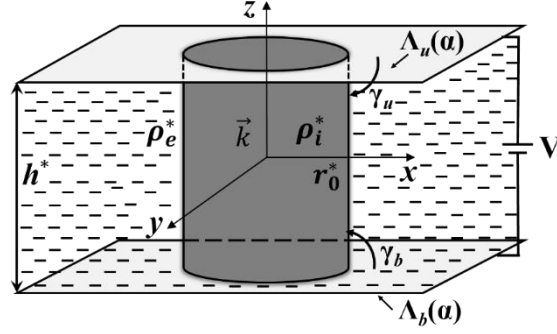


Рис. 1. Геометрия задачи

Введем следующие единицы обезрамеривания задачи: время  $t^*$  –  $\sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)R_0^{*3}/\sigma}$ , координаты  $r^* - R^*$  и  $z^* - h^*$ , амплитуда  $\zeta^* - A^*$ , скорость  $\mathbf{v}^* - A^* \sqrt{\sigma^*/((\rho_e^* + \rho_i^*)R_0^{*3})}$ , потенциал  $\varphi^* - A^* \sqrt{\sigma^*/((\rho_e^* + \rho_i^*)R_0^*)}$ , плотность  $\rho^* - \rho_e^* + \rho_i^*$ , давление  $p^* - A^* \sigma^*/R_0^{*2}$ .

В дальнейшем безразмерные переменные будут обозначаться теми же переменными без символа \*. В результате обезрамеривания задача будет характеризоваться следующими безразмерными параметрами: амплитуда колебаний –  $\varepsilon = A^*/R_0^*$ , геометрический параметр –  $b = R_0^*/h^*$ , плотность внешней жидкости –  $\rho_e = \rho_e^*/(\rho_e^* + \rho_i^*)$ , плотность жидкости в капле –  $\rho_i = \rho_i^*/(\rho_e^* + \rho_i^*)$  (последние два параметра связаны соотношением  $\rho_i + \rho_e = 1$ ), параметр смачивания (параметр Хокинга) –  $\lambda = \Lambda^* b \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)R_0^*/\sigma}$ , амплитуда внешнего воздействия –  $a = 0.5A^* C \sigma^{-3/2} \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)R_0^{*3}}$ , частота внешнего воздействия –  $\omega = \omega^* \sqrt{(\rho_e^* + \rho_i^*)R_0^{*3}/\sigma}$ .

Рассматриваются только малоамплитудные (линейные) колебания, линеаризованные по малой безразмерной амплитуде вибраций  $\varepsilon$ , а граничные условия сносятся с безразмерной подвижной границы раздела  $r = 1 + \varepsilon \zeta(\alpha, z, t)$  на невозмущенную поверхность  $r = 1$  (см., например, [18, 23]).

Безразмерные уравнения и граничные условия в линейном приближении имеют следующий вид:

$$p_j = -\rho_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial t}, \quad \Delta \varphi_j = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial z^2} = 0, \quad j = e, i, \quad (5)$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial \varphi_e}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial r}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad p_e - p_i = \zeta + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}, \quad (6)$$

$$r = 1, \quad z = \pm \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \mp \Lambda_{u,b}(\alpha) \left( \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\cos(\vartheta_s) L(a)}{\sqrt{1 - (\cos(\vartheta_s) L(a))^2}} f(\alpha) \cos(2\omega t) \right), \quad (7)$$

$$z = \pm \frac{1}{2}: \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

где  $\Lambda_{u,b}(\alpha)$  – безразмерный параметр смачивания на верхней ( $z = 1/2$ ) и нижней ( $z = -1/2$ ) пластинах соответственно,  $\vartheta_s$  – значение краевого угла насыщения,  $L(\alpha)$  – функция Ланжевена,  $a$  – эффективная амплитуда внешнего воздействия,  $f(\alpha)$  – функция пространственной неоднородности электрического поля (в случае однородного электрического поля  $f(\alpha) = 1$ ).

## 2. Вынужденные колебания

Насыщение краевого угла важно только для вынужденных колебаний, поэтому ниже будем рассматривать только их. Собственные колебания такой капли рассмотрены ранее как для случая одинаковых [23] и разных [15] однородных поверхностей пластин, так и одинаковых [17] и разных [24] неоднородных.

Исследуем вынужденные колебания капли жидкости, определяемые внешней однородной периодической силой, действующей только на линию контакта (7). Отметим еще раз, что благодаря диссипации энергии будут существовать только вынужденные колебания с частотой  $2\omega$ . Если внешнее переменное электрическое поле пространственно-однородное (т. е.  $f(\alpha) = 1$ ), то возбуждается только осесимметричная мода колебаний. Поверхность пластин однородная при  $\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b}$ . Если же поверхность неоднородная (например,  $\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b} |\cos(\alpha)|$  в [16] или  $\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b} |\sin(k \cos(\alpha))|$  в [24]), то будут возбуждаться дополнительные гармоники из-за взаимодействия линии контакта с поверхностью. Неоднородность поверхности пластин описывает не только шероховатость поверхности, но и смачиваемость жидкостью.

Если сравнивать выражения для внешней силы с насыщением (7) и без (3), то при малых значениях эффективной амплитуды  $a$  решения будут совпадать. С дальнейшим увеличением  $a$  в случае без насыщения амплитуда внешнего воздействия будет нарастать по линейному закону, тогда как в случае с насыщением (7) – будет выходить на некоторое предельное значение.

Будем использовать разложение в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа (5) для решения линейной краевой задачи (5)–(8). Спектр этих функция определяется вторым слагаемым (7), так как именно эта сила вызывает колебания. Функции  $\Lambda_{u,b}(\alpha)$ , рассматриваемые в [16] и [24], неотрицательные и четные относительно угла  $\alpha$ , поэтому будем раскладывать решение задачи (5)–(8) по  $\cos(2m\alpha)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$

С учетом граничных условий (8) решения для потенциала скорости можно представить в следующем виде:

$$\varphi_i(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)i}(r) \sin((2k+1)\pi z) + a_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)i}(r) \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \quad (9)$$

$$\varphi_e(r, \alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( i2\omega \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( b_{mk}^{(1)} R_{mk}^{(1)e}(r) \sin((2k+1)\pi z) + b_{mk}^{(0)} R_{mk}^{(0)e}(r) \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) e^{i2\omega t} \right), \quad (10)$$

где  $R_{mk}^{(0)e}(r) = K_m(2k\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(0)i}(r) = I_m(2k\pi br)$ ,  $R_{mk}^{(1)e}(r) = K_m((2k+1)\pi br)$ ,  $R_{m0}^{(0)e}(r) = r^{-m}$ ,

$R_{mk}^{(1)i}(r) = I_m((2k+1)\pi br)$ ,  $R_{m0}^{(0)i}(r) = r^m$ ,  $I_m$  и  $K_m$  – модифицированные функции Бесселя.

Функции  $\sin((2k+1)\pi z)$  и  $\cos(2k\pi z)$  описывают стоячие волны на поверхности раздела. Их суммы указывают на существование бегущих капиллярных волн на боковой поверхности капли [13–24].

Кинематическое условие на поверхности раздела и баланс нормальных напряжений (7) определяют функцию отклонения поверхности:

$$\begin{aligned} \zeta(\alpha, z, t) = \operatorname{Re} \left( \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left( c_{mk}^{(1)} \sin((2k+1)\pi z) + c_{mk}^{(0)} \cos(2k\pi z) \right) \cos(2m\alpha) + d_0^{(1)} \sin\left(\frac{z}{b}\right) \right. \right. \\ \left. \left. + d_0^{(0)} \cos\left(\frac{z}{b}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left( d_m^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) + d_m^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{4m^2-1}}{b} z\right) \right) \cos(2m\alpha) \right) e^{i2\omega t} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставляя решения (9)–(11) в уравнения (7)–(10), получим систему для нахождения неизвестных амплитуд  $a_{jmk}$ ,  $b_{jmk}$ ,  $c_{jmk}$ ,  $d_{j0}$  и  $d_{jm}$ :

$$\begin{aligned} 2i\omega \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( c_{mk}^{(0)} \pm c_{mk}^{(1)} \right) + \delta_{m0} \left( d_0^{(0)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \pm d_0^{(1)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \right. \\ \left. + \delta_{m1} \left( \frac{1}{4} d_1^{(0)} \pm \frac{1}{2} d_1^{(1)} \right) + \delta_{mn} \left( d_n^{(0)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \pm d_n^{(1)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{n^2-1}}{2b}\right) \right) \right) = \\ = \mp \left( B_{mn} \left( \frac{\delta_{n0}}{b} \left( \mp d_0^{(0)} \sin\left(\frac{1}{2b}\right) + d_0^{(1)} \cos\left(\frac{1}{2b}\right) \right) + \delta_{n1} \left( \pm d_1^{(0)} + d_1^{(1)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta_{nl} \frac{\sqrt{l^2-1}}{b} \left( \pm d_l^{(0)} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) + d_l^{(1)} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{l^2-1}}{2b}\right) \right) \right) + C_m L(a) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$b_{m0}^{(0)} = -a_{m0}^{(0)}, \quad b_{mk}^{(0)} = a_{mk}^{(0)} \frac{R_{mkr}^{(0)i}(1)}{R_{mkr}^{(0)e}(1)}, \quad b_{mk}^{(1)} = a_{mk}^{(1)} \frac{R_{mkr}^{(1)i}(1)}{R_{mkr}^{(1)e}(1)}, \quad ma_{mk}^{(0)} = c_{m0}^{(0)} + g_{m0}^{(0)} d_m^{(0)},$$

$$a_{mk}^{(0)} R_{mkr}^{(0)i}(1) = c_{mk}^{(0)} + g_{mk}^{(0)} d_m^{(0)}, \quad a_{mk}^{(1)} R_{mkr}^{(1)i}(1) = c_{mk}^{(1)} + g_{mk}^{(1)} d_m^{(1)}, \quad c_{10}^{(0)} = -f_{10}^{(0)} d_1^{(0)} - \frac{b^2}{2\omega^2} d_1^{(0)},$$

$$c_{00}^{(0)} = -g_{00}^{(0)} d_0^{(0)}, \quad c_{m0}^{(0)} = \frac{4\omega^2 g_{m0}^{(0)} d_m^{(0)}}{\Omega_{m0}^{(0)2} - 4\omega^2}, \quad c_{mk}^{(0)} = \frac{4\omega^2 g_{mk}^{(0)} d_m^{(0)}}{\Omega_{mk}^{(0)2} - 4\omega^2}, \quad c_{mk}^{(1)} = \frac{4\omega^2 g_{mk}^{(1)} d_m^{(1)}}{\Omega_{mk}^{(1)2} - 4\omega^2},$$

$$\Omega_{m0}^{(0)2} = m(m^2 - 1), \quad \Omega_{mk}^{(0)2} = \frac{m^2 - 1 + (2\pi kb)^2}{\rho_i \frac{R_{mkr}^{(0)i}(1)}{R_{mkr}^{(0)i}(1)} - \rho_e \frac{R_{mkr}^{(0)e}(1)}{R_{mkr}^{(0)e}(1)}}, \quad \Omega_{mk}^{(1)2} = \frac{m^2 - 1 + (2k+1)^2 \pi^2 b^2}{\rho_i \frac{R_{mkr}^{(1)i}(1)}{R_{mkr}^{(1)i}(1)} - \rho_e \frac{R_{mkr}^{(1)e}(1)}{R_{mkr}^{(1)e}(1)}},$$

$$R_{mkr}^{(0)i}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(0)i}(r), \quad R_{mkr}^{(1)i}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(1)i}(r), \quad R_{mkr}^{(0)e}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(0)e}(r), \quad R_{mkr}^{(1)e}(r) = \frac{d}{dr} R_{mk}^{(1)e}(r),$$

$$g_{0k}^{(1)} = \frac{1}{\|\cos(2\pi kz)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} \sin\left(\frac{z}{b}\right) \cos(2\pi kz) dz, \quad g_{0k}^{(0)} = \frac{1}{\|\cos(2\pi kz)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} \cos\left(\frac{z}{b}\right) \cos(2\pi kz) dz,$$

$$g_{mk}^{(0)} = \frac{1}{\|\cos(2\pi kz)\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{m^2-1}}{b} z\right) \cos(2\pi kz) dz,$$

$$g_{mk}^{(1)} = \frac{1}{\left\| \sin((2k+1)\pi z) \right\|^2} \int_{-1/2}^{1/2} \operatorname{sh} \left( \frac{\sqrt{m^2-1}}{b} z \right) \sin((2k+1)\pi z) dz,$$

$$B_{mn} = \frac{1}{\left\| \cos(2m\alpha) \right\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda_{u,b}(\alpha) \cos(2n\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha,$$

$$C_m = \frac{1}{\left\| \cos(2m\alpha) \right\|^2} \int_0^{2\pi} \Lambda_{u,b}(\alpha) f(\alpha) \cos(2m\alpha) d\alpha,$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\Omega_{mk}^{(0)}$  и  $\Omega_{mk}^{(1)}$  – частоты собственных колебаний капли со свободной линией контакта ( $\lambda \rightarrow 0$ ).

Линейную систему (12) можно решить аналитически, но из-за ее громоздкости она решалась численно с параметрами  $m = 4..10$  и  $N = 20$ . Частоты основных азимутальных мод собственных колебаний  $\Omega_{m0}^2$  растут как  $m^3$ , частоты гармоник колебаний формы  $\Omega_{mn}^2 - n^3 b^3$ . Для проверки точности вычислений были проведены дополнительные расчеты при  $N = 10$  (относительная погрешность  $\sim 5\%$  в сравнении с  $N = 20$ ) и  $N = 50$  (относительная погрешность  $\sim 1\%$ ).

Для примера рассмотрим неоднородную поверхность пластины  $\Lambda_{u,b}(\alpha) = \lambda_{u,b} |\cos(\alpha)|$ , благодаря которой возбуждаются как осесимметричная, так и четные азимутальные моды. Отметим, что применяемый метод можно использовать для любого типа функции неоднородности, которая допускает разложение в ряд Фурье.

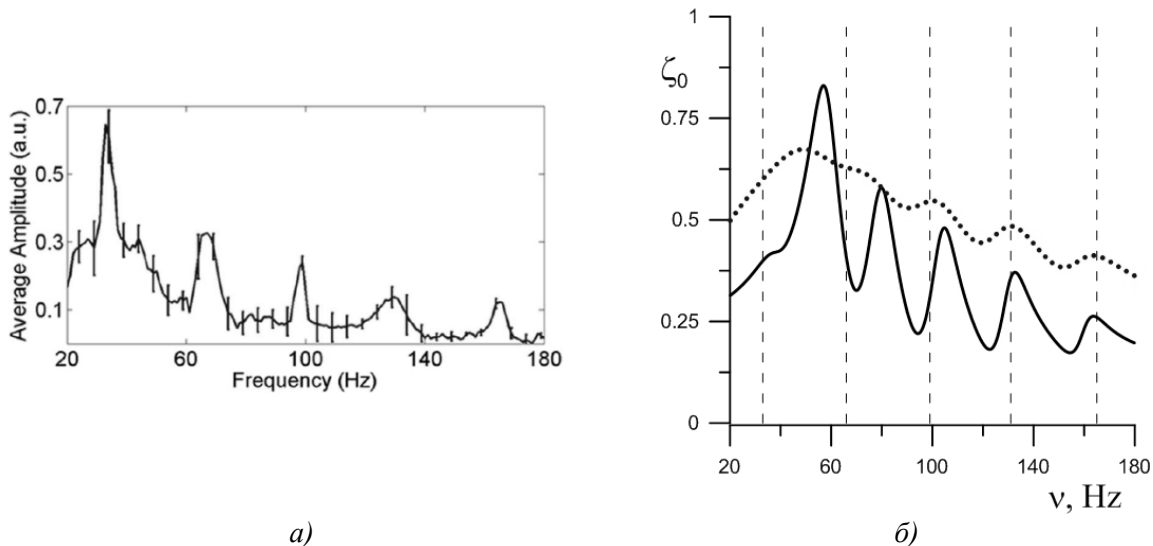
Удобно ввести дополнительные обозначения для амплитуд колебаний поверхности в характерных точках:  $\zeta_0 = |\zeta(0, 0, 0)|$ ,  $\zeta_q = |\zeta(0, 0.25, 0)|$ ,  $\zeta_u = |\zeta(0, 0.5, 0)|$ ,  $\zeta_b = |\zeta(0, -0.5, 0)|$ ,  $\gamma_u$  ( $\gamma_b$ ) – краевой угол между верхней (нижней) пластиной и боковой поверхностью капли для  $\alpha = 0$ .

Выше упоминалось об экспериментальном изучении возможности перемешивания двух жидкостей в капле при воздействии переменного электрического поля в прототипе лаборатории-на-чипе [10]. Было показано, что на резонансных частотах время перемешивания уменьшается в несколько раз. Это может быть полезно при создании лекарств или ускорении химической реакции. В ходе экспериментов были определены значения частот собственных колебаний капли: 34, 66, 99, 131 и 165 Гц. Авторы экспериментальной работы не исследовали, какой гармонике колебаний формы капли соответствуют эти частоты.

Сравним значения резонансных частот и амплитуду колебаний [10] со значениями частот и амплитуды для аналогичных физических параметров, получаемых при решении системы (12). Отметим, что для нашей модельной задачи значения частот собственных колебаний могут зависеть от равновесного краевого угла [17, 18], хотя качественно динамика капли не меняется. Для сильно сплюснутой капли  $b \gg 1$ , представляющей собой фигуру вращения (т. е. равновесный краевой угол отличен от прямого) подобно [10], наибольшие значения частот собственных колебаний получались для случая прямого равновесного краевого угла [23]. Этот эффект наиболее сильно проявлялся для низких частот. Следовательно, возможно завышение значений теоретических частот по сравнению с экспериментальными для первых гармоник, так как в эксперименте равновесный краевой угол отличался от прямого.

Приведенная средняя экспериментальная амплитуда колебаний [10] и теоретическая амплитуда колебаний из решения (9)–(11) продемонстрированы на рис. 2 для случая  $V_{m,n} = \lambda_{u,b} \delta_{m,n}$ ,  $C = \lambda_{u,b} (0.1, 0.1, 0.7, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1)$  при  $m = 0, 1, \dots, 6$  (12). Из сравнения графиков следует, что получается хорошее качественное согласие теоретических и экспериментальных результатов (даже без учета угла насыщения), если учесть завышенные теоретические значения частот. Отметим, что выбор функции неоднородностей поверхности и параметра смачивания является произвольным, так как они не определялись в эксперименте. Более того, возможно, что параметры смачивания  $\lambda_{u,b}$  зависят от напряжения. Например, была продемонстрирована подобная зависимость при экспериментальном измерении коэффициента трения в [25].

На рис. 3 показаны зависимости амплитуд колебания и угла отклонения в зависимости от амплитуды внешней силы для случая без насыщения и краевым углом насыщения  $\gamma_s = 60^\circ$ . Отметим, что по причине неоднородности поверхности не всегда достигается краевой угол насыщения при малых и конечных значениях параметра смачивания  $\lambda_{u,b}$  из-за сильного взаимодействия с подложкой и слабой подвижности линии контакта (рис. 3а,б). При больших значениях параметра  $\lambda$  сила взаимодействия с подложкой мала, и неоднородность поверхности слабо влияет на динамику капли (рис. 3в). В этом случае краевой угол достигает угла насыщения. Другими словами, неоднородность может вызывать ограничение значения краевого угла, но этот эффект не связан с насыщением краевого угла при повышении электрического напряжения. Амплитуда колебаний линии контакта также ограничена в случае насыщения краевого угла, тогда как без насыщения она увеличивается с ростом амплитуды внешней силы (рис. 3г-е).



**Рис. 2.** Относительная амплитуда (fig. 3. [10]) (а) и амплитуда  $\zeta_0$  (б) от  $\omega$  ( $b = 2.55$ ,  $\rho_i = 1$ ,  $\lambda_b = 100$ ). (б)  $\lambda_u = 0.5$  – сплошная линия,  $\lambda_u = 2$  – пунктирная. Вертикальными линиями обозначены значения резонансных частот в эксперименте [10]

### Заключение

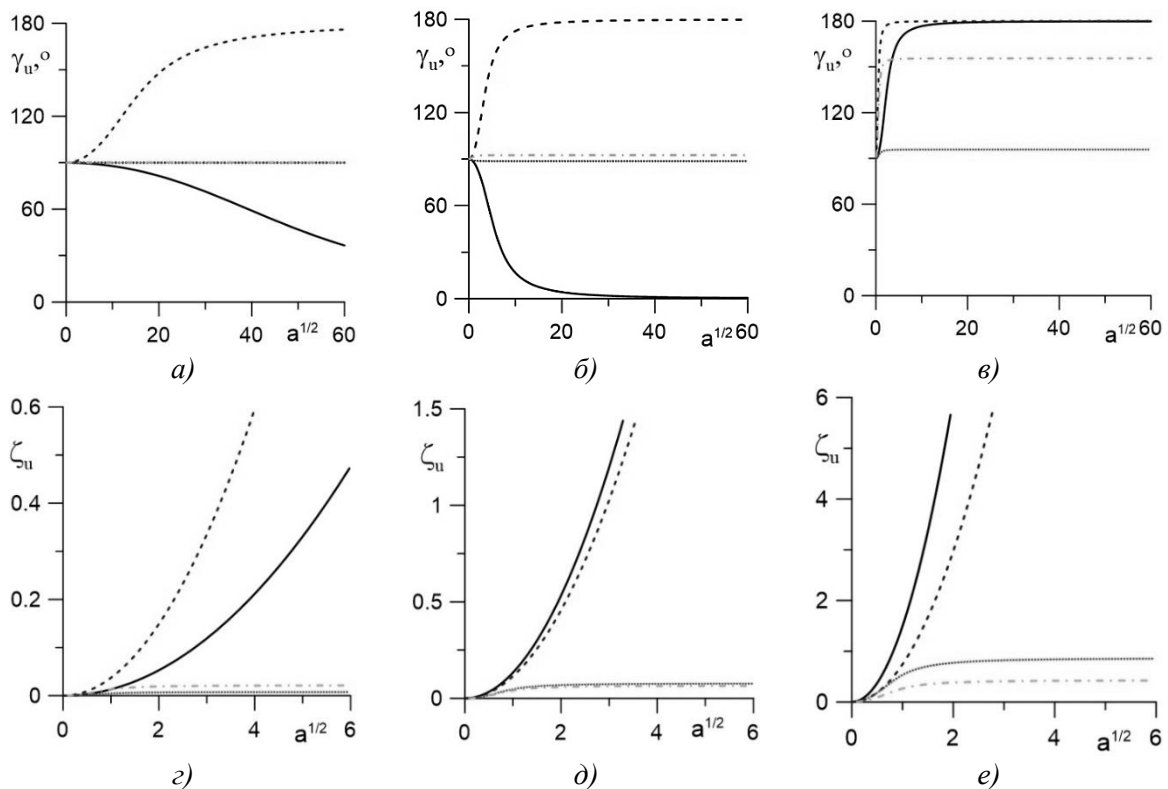
В данной работе предложена теоретическая модель, учитывающая насыщение краевого угла в переменном электрическом поле на основе рассмотренной ранее модели [14–16] без насыщения.



Модель допускает аналитическое описание пространственной неоднородности как поверхности подложки, так и электрического поля. Кроме того, предложенная модель не только описывает насыщение краевого угла с увеличением напряжения, но и ограничение амплитуды колебаний поверхности капли, что соответствует реальной ситуации: амплитуда ограничена с увеличением напряжения до электрического пробоя слоя диэлектрика.

В качестве примера рассматривались вынужденные колебания капли несжимаемой жидкости, окруженной жидкостью другой плотности и зажатой между двумя твердыми параллельными пластинами с индивидуальными неоднородностями поверхности в пространственно-неоднородном переменном электрическом поле. Показано качественное согласие с результатами эксперимента [10] по определению резонансных частот капли даже без учета насыщения краевого угла при низких напряжениях.

Продемонстрировано, что неоднородность также может ограничивать значение отклонения краевого угла даже в модели без насыщения. Кроме того, возможно, что параметр Хокинга также зависит от электрического поля (например, из-за поляризации диэлектрического слоя), и его значение может различаться при разных амплитудах внешней силы. Необходимы дальнейшие исследования и сравнения значений этого параметра при наличии и отсутствии электрического поля. Например, работы по определению этого параметра смачивания в экспериментах с вибрациями и слиянию капель можно посмотреть в [18]. Отметим, что значение краевого угла насыщения также является феноменологическим параметром и для конкретной конфигурации и набора параметров определяется экспериментально. Поэтому работа с предложенной моделью (4) еще далека до завершения. В дальнейшем ее планируется использовать и для капли на подложке, так как для такой геометрии имеется большое количество экспериментальных данных.



**Рис. 3.** Краевой угол (а-в) и амплитуда линии контакта (г-е) от  $\sqrt{a}$  ( $b=1$ ,  $\rho_i=0.7$ ,  $\Lambda_{u,b}(\alpha)=\lambda_{u,b}|\cos\alpha|$ ).  $\omega=2.5$  – сплошная (без насыщения) и пунктирная (с насыщением) линия,  $\omega=6$  – штриховая (без насыщения) и штрихпунктирная (с насыщением) линия; (а, г)  $\lambda_u=\lambda_b=0.1$ , (б, д)  $\lambda_u=\lambda_b=1$ , (в, е)  $\lambda_u=\lambda_b=10$

**Список источников**

1. Mugele F., Baret J.-C. Electrowetting: from basics to applications // J. Phys.: Condens. Matter. 2005. Vol. 17(28). P. 705–774. DOI: 10.1088/0953-8984/17/28/R01.
2. Chen L., Bonaccorso E. Electrowetting - From statics to dynamics // Adv. Colloid Interface Sci. 2014 Vol. 210. P. 2–12. DOI: 10.1016/j.cis.2013.09.007.
3. Zhao Y.-P., Wang Y. Fundamentals and Applications of Electrowetting: A Critical Review // Rev. Adhesion Adhesives 2013. Vol. 1 P. 114–174. DOI: 10.7569/RAA.2013.097304.
4. Chung S.K., Rhee K., Cho S.K. Bubble actuation by electrowetting-on-dielectric (EWOD) and its applications: A review // Int. J. Precis. Eng. Manuf. 2010. Vol. 11. P. 991–1006. DOI: 10.1007/s12541-010-0121-1.
5. Royal M. W., Jokerst N.M., Fair R.B. Droplet-Based Sensing: Optical Microresonator Sensors Embedded in Digital Electrowetting Microfluidics Systems // IEEE Sensors Journal 2013. Vol. 13. P. 4733–4742. DOI: 10.1109/JSEN.2013.2273828.
6. Nelson W.C., Kim C.-J. Droplet actuation by electrowetting-on-dielectric (EWOD): a review // J. Adhes. Sci. Technol. 2012. Vol. 26. P. 1747–1771. DOI: 10.1163/156856111X599562.
7. Hua Z., Rouse J.L., Eckhardt A.E., etc. Multiplexed real-time polymerase chain reaction on a digital microfluidic platform // Anal. Chem. 2010. Vol. 82 P. 2310–2316. DOI: 10.1021/ac902510u.
8. Li J., Kim C.-J. Current commercialization status of electrowetting-on-dielectric (EWOD) digital microfluidics // Lab Chip. 2020. Vol. 20. P. 1705–1712. DOI: 10.1039/D0LC00144A.
9. Li J., Wang Y., Chen H., Wan J. Electrowetting-on-dielectrics for manipulation of oil drops and gas bubbles in aqueous-shell compound drops // Lab Chip. 2014. Vol. 14 P. 4334–4337. DOI: 10.1039/C4LC00977K.
10. Lee C.-P., Chen H.-C., Lai M.-F. Electrowetting on dielectric driven droplet resonance and mixing enhancement in parallel-plate configuration // Biomicrofluidics. 2012. Vol. 6(1): 012814. DOI: 10.1063/1.3673258.
11. Kuiper S., Hendriks B.H.W. Variable-focus liquid lens for miniature cameras // Appl. Phys. Lett. 2004. Vol. 85. P. 1128–1130. DOI: 10.1063/1.1779954.
12. Li C., Jiang H. Fabrication and characterization of flexible electrowetting // Micromachines 2014. Vol. 5 P. 432–441. DOI: 10.3390/mi5030432.
13. Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // J. Fluid Mech. 1987. Vol. 179. P. 253–266. DOI: 10.1017/S0022112087001514.
14. Алабужев А.А., Кашина М.А. Влияние различия свойств поверхностей на осесимметричные колебания сжатой капли в переменном электрическом поле // Изв. Вузов. Радиофизика. 2018. Т. 61, № 8–9. С. 662–676. DOI: 10.1007/s11141-019-09919-4.
15. Алабужев А.А., Кашина М.А. Динамика зажатой капли в неоднородном электрическом поле // Вестник Пермского университета. Физика. 2019. № 4. С. 33–43. DOI: 10.17072/1994-3598-2019-4-33-4.
16. Kashina M.A., Alabuzhev A.A. The Forced Oscillations of an Oblate Drop Sandwiched Between Different Inhomogeneous Surfaces under AC Vibrational Force // Microgravity Sci. Technol. 2021. Vol. 33: 35. DOI: 10.1007/s12217-021-09886-4.
17. Alabuzhev A.A. Influence of heterogeneous plates on the axisymmetrical oscillations of a cylindrical drop // Microgravity Sci. Technol. 2018. Vol. 30(1–2). P. 25–32. DOI: 10.1007/s12217-017-9571-8.
18. Pyankova M.A., Alabuzhev A.A. Influence of the properties of the plate surface on the oscillations of the cramped drop // Phys. Fluids. 2022. Vol. 34: 092015. DOI: 10.1063/5.0101011.
19. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред. 2-е изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. 621 с.
20. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 788 с.
21. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на колебания сжатой капли // ПМТФ. 2012. Т.53, № 1. С. 1-12. DOI: 10.1134/S0021894412010026.

22. Алабужев А.А., Пьянкова М.А. Динамика зажатой капли в поле трансляционных вибраций // Вычислительная механика сплошных сред. 2023. Т. 16, № 1. С. 78–88. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.1.6.
23. Алабужев А.А., Любимов Д.В. Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли// ПМТФ. 2007. Т. 48, № 5. С. 78-86. DOI: 10.1007/s10808-007-0088-6.
24. Алабужев А.А. Пьянкова М.А. Влияние пространственной неоднородности подложек и электрического поля на динамику зажатой капли // Вестник Пермского университета. Физика. 2022. № 2. С. 56–65. DOI: 10.17072/1994-3598-2022-2-56-65.
25. Wang Q., Li L., Gu J., etc. Manipulation of a Nonconductive Droplet in an Aqueous Fluid with AC Electric Fields: Droplet Dewetting, Oscillation, and Detachment // *Langmuir*. 2021. Vol. 37 (41). P. 12098–1221. DOI: 10.1021/acs.langmuir.1c01934.

## References

1. Mugele, F. and Baret, J.-C. (2005), "Electrowetting: from basics to applications", *Journal of Physics: Condensed Matter*, vol. 17(28), pp. 705–774. DOI: 10.1088/0953-8984/17/28/R01.
2. Chen, L., and Bonaccorso, E. (2014), "Electrowetting - From statics to dynamics", *Advances in Colloid and Interface Science*, vol. 210, pp. 2–12. DOI: 10.1016/j.cis.2013.09.007.
3. Zhao, Y.-P. and Wang, Y. (2013), "Fundamentals and Applications of Electrowetting: A Critical Review", *Reviews of Adhesion and Adhesives*, vol. 1, pp. 114–174. DOI: 10.7569/RAA.2013.097304.
4. Chung, S.K., Rhee, K. and Cho, S.K. (2010), "Bubble actuation by electrowetting-on-dielectric (EWOD) and its applications: A review", *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, vol. 11, pp. 991–1006. DOI: 10.1007/s12541-010-0121-1.
5. Royal, M. W., Jokerst, N.M. and Fair, R.B. (2013), "Droplet-Based Sensing: Optical Microresonator Sensors Embedded in Digital Electrowetting Microfluidics Systems", *IEEE Sensors Journal*, vol. 13, pp. 4733–4742. DOI: 10.1109/JSEN.2013.2273828.
6. Nelson, W.C. and Kim, C.-J. (2012), "Droplet actuation by electrowetting-ondielectric (EWOD): a review", *Journal of Adhesion Science and Technology*, vol. 26, pp. 1747–1771. DOI: 10.1163/156856111X599562.
7. Hua, Z., Rouse, J.L., Eckhardt, A.E., etc. (2010) "Multiplexed real-time polymerase chain reaction on a digital microfluidic platform", *Analytical Chemistry*, vol. 82, pp. 2310–2316. DOI: 10.1021/ac902510u.
8. Li, J. and Kim, C.-J. (2020), "Current commercialization status of electrowetting-on-dielectric (EWOD) digital microfluidics", *Lab Chip*, vol. 20, pp. 1705–1712. DOI: 10.1039/D0LC00144A
9. Li, J., Wang, Y., Chen, H. and Wan, J. (2014) "Electrowetting-on-dielectrics for manipulation of oil drops and gas bubbles in aqueous-shell compound drops", *Lab Chip*, vol. 14, pp. 4334–4337. DOI: 10.1039/C4LC00977K.
10. Lee, C.-P., Chen, H.-C. and Lai, M.-F. (2012), "Electrowetting on dielectric driven droplet resonance and mixing enhancement in parallel-plate configuration", *Biomicrofluidics*, vol. 6(1), 012814. DOI: 10.1063/1.3673258.
11. Kuiper, S. and Hendriks, B.H.W. (2004), "Variable-focus liquid lens for miniature cameras", *Applied Physics Letters*, vol. 85, pp. 1128–1130. DOI: 10.1063/1.1779954.
12. Li, C. and Jiang, H. (2014) "Fabrication and characterization of flexible electrowetting", *Micromachines*, vol. 5, pp. 432–441. DOI: 10.3390/mi5030432.
13. Hocking, L.M. (1987), "The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 179, pp. 253–266. DOI: 10.1017/S0022112087001514.
14. Alabuzhev, A.A. and Kashina, M.A. (2019), "Influence of Surface Properties on Axisymmetric Oscillations of an Oblate Drop in an AC Electric Field", *Radiophysics and Quantum Electronics*, vol. 61, pp. 589–602. DOI: 10.1007/s11141-019-09919-4.

15. Alabuzhev, A. A. and Kashina, M. A. (2019), "Dynamics of a drop under the influence of an inhomogeneous electric field", *Bulletin of Perm University. Physics*, no. 4, pp. 33–43. DOI: 10.17072/1994-3598-2019-4-33-4.
16. Kashina, M.A. and Alabuzhev, A. A. (2021), "The Forced Oscillations of an Oblate Drop Sandwiched Between Different Inhomogeneous Surfaces under AC Vibrational Force", *Microgravity Science and Technology*, vol. 33, 35. DOI: 10.1007/s12217-021-09886-4.
17. Alabuzhev, A.A. (2018), "Influence of heterogeneous plates on the axisymmetrical oscillations of a cylindrical drop", *Microgravity Science and Technology*, vol. 30(1–2), pp. 25–32. DOI: 10.1007/s12217-017-9571-8.
18. Pyankova, M.A. and Alabuzhev, A.A. (2022), "Influence of the properties of the plate surface on the oscillations of the cramped drop", *Physics of Fluids*, vol. 34, 092015. DOI: 10.1063/5.0101011.
19. Landau, L.D., Lifshitz, E.M. and Pitaevskii L.P. (1995), *Course of Theoretical Physics. Volume 8. Electrodynamics of Continuous Media*, Elsevier Science, Amsterdam, Netherlands.
20. Kittel, C. (2005), *Introduction to Solid State Physics*, Wiley, Hoboken, NJ, USA.
21. Alabuzhev, A.A., Lyubimov, D.V. (2012), "Effect of the contact-line dynamics on the oscillations of a compressed droplet", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 53, pp. 9–19. DOI: 10.1134/S0021894412010026.
22. Alabuzhev, A. A., Pyankova, M. A. (2023). Dynamics of a clamped drop under translational vibrations. *Computational Continuum Mechanics*, vol. 16(1), pp. 78-88. DOI: 10.7242/1999-6691/2023.16.1.6.
23. Alabuzhev, A.A. and Lyubimov, D.V. (2007), "Effect of the contact-line dynamics on the natural oscillations of a cylindrical droplet", *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, vol. 48, pp. 686–693. DOI: 10.1007/s10808-007-0088-6.
24. Alabuzhev, A. A. and Pyankova, M. A. (2022), "Influence of surface properties on the dynamics of a clamped drop in an inhomogeneous electric field", *Bulletin of Perm University. Physics*, no. 2, pp. 56–65. DOI: 10.17072/1994-3598-2022-2-56-65.
25. Wang, Q., Li, L., Gu, J., etc. (2021), "Manipulation of a Nonconductive Droplet in an Aqueous Fluid with AC Electric Fields: Droplet Dewetting, Oscillation, and Detachment", *Langmuir*, vol. 37 (41), pp. 12098–1221. DOI: 10.1021/acs.langmuir.1c01934.

### Информация об авторах:

А. А. Алабужев – кандидат физико-математических наук, доцент, с. н. с. лаборатории Вычислительной гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1); профессор кафедры теоретической физики, Пермский государственный национальный исследовательский университет (614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID: 17106;

М. А. Пьянкова – кандидат физико-математических наук, б/з, м.н.с. лаборатории вычислительной гидродинамики, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1); ассистент кафедры компьютерного дизайна, МИРЭА – Российский технологический университет (105275, ЦФО, Россия, г. Москва, 5-я улица Соколиной Горы, д. 22), AuthorID: 833254.

### Information about the authors:

A. A. Alabuzhev, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (1, Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013); Professor, Department of Theoretical Physics, Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614990; AuthorID: 17106;

M. A. Pyankova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Junior Engineer, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (1, Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), assistant, Department of Computer Design, MIREA – Russian Technological University (22, 5th St. of Sokolinaya Gora, Moscow, Russia, 105275), AuthorID: 833254.

## МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 531.395

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-21-34

<https://elibrary.ru/gpjxcd>



## Численное моделирование фрагментации цилиндрической оболочки

Сергей Михайлович Герцик<sup>1</sup>, Владислав Авенирович Конюхов<sup>2</sup>,  
Сергей Владимирович Лекомцев<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Центр компетенций и обучения, г. Саров, Россия

<sup>2,3</sup> Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия

<sup>1</sup>[smgertsik@compcenter.org](mailto:smgertsik@compcenter.org)

<sup>2</sup>[koniukhov.v@icmm.ru](mailto:koniukhov.v@icmm.ru)

<sup>3</sup>[lekomtsev@icmm.ru](mailto:lekomtsev@icmm.ru)

**Аннотация.** Знание параметров фрагментации конструкции при ее быстропотекающем разрушении необходимо для обеспечения безопасности людей и окружающих объектов. Характеристики фрагментов и их пространственно-массовое распределение, получаемые в результате экспериментов, являются существенно неоднородными. Это может быть связано с неоднородностью структуры реальных материалов, которую нужно учитывать при проведении расчетов. В данной работе приведены результаты численного моделирования задачи фрагментации цилиндрической оболочки с учетом вероятностного распределения параметра разрушения. Вычисления выполнены в отечественном пакете программ ЛОГОС с применением метода конечных элементов. Разрушение оболочки реализовано за счет разделения узловых связей, критерием наступления которого является превышение величины пластической деформации критического значения. Достоверность полученных результатов подтверждена сравнением с экспериментальными данными и сходимостью решения при увеличении числа узловых неизвестных. Выполнен анализ влияния критерия разрушения, задаваемого в виде константы материала и в виде параметра, распределенного по нормальному закону. Показано, что использование вероятностного критерия разрушения позволяет прогнозировать параметры фрагментации, качественно согласующиеся с экспериментальными данными. Установлено, что степень дискретизации оболочки оказывает существенное влияние на параметры фрагментов, но практически не меняет вида их распределения по массовым группам.

**Ключевые слова:** *фрагментация; разрушение; цилиндрическая оболочка; численное моделирование; пакет ЛОГОС; вероятностный закон распределения; метод конечных элементов*

**Для цитирования:** Герцик С.М., Конюхов В.А., Лекомцев С.В. Численное моделирование фрагментации цилиндрической оболочки // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 21–34. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-21-34. <https://elibrary.ru/gpjxcd>.



Эта работа © 2024 Герцик С.М., Конюхов В.А., Лекомцев С.В. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

**Благодарности:** работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы 124020700047-3.

*Статья поступила в редакцию 05.10.2024; одобрена после рецензирования 20.10.2024; принята к публикации 01.12.2024.*

## MECHANICS

Research article

### Numerical Modeling of Cylindrical Shell Fragmentation

Sergey. M. Gertsik<sup>1</sup>, Vladislav. A. Koniukhov<sup>2</sup>, Sergey. V. Lekomtsev<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Competence and Training Center, Sarov, Russia

<sup>2,3</sup>Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russia

<sup>1</sup>smgertsik@compcenter.org

<sup>2</sup>koniukhov.v@icmm.ru

<sup>3</sup>lekomtsev@icmm.ru

**Abstract.** Knowledge of the fragmentation of a structure during its rapid destruction is essential for ensuring the safety of people and surrounding objects. The characteristics of fragments and their space-mass distribution obtained as a result of experiments are essentially inhomogeneous. This may be due to the inhomogeneity of the structure made of real materials, which should be taken into account in calculations. The paper presents the results of numerical modeling of the problem of cylindrical shell fragmentation taking into account the probability distribution of the fracture parameter. The calculations are performed in the LOGOS software using the finite element method. Fracture of the shell is realized by separating the nodal bonds. The criterion for the onset of fracture is the exceedance of the critical value of plastic strains. The validity of the obtained results is confirmed by their agreement with the experimental data and convergence of the solution with increasing number of nodal unknowns. The influence of the fracture criterion, which is set as a material constant and as a parameter distributed according to the normal probability law, is analyzed. It is shown that the use of the probabilistic fracture criterion allows predicting the parameters of the fragmentation field, which are qualitatively consistent with the experimental data. It is established that the degree of shell discretization has a significant effect on the fragment parameters, but practically does not change the type of their mass distribution.

**Keywords:** *fragmentation; destruction; cylindrical shell; numerical modeling; LOGOS software; probability law of distribution; finite element method*

**For citation:** Gertsik, S.M., Koniukhov, V.A. and Lekomtsev, S.V. (2024), "Numerical Modeling of a Cylindrical Shell Fragmentation", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), pp. 21-34. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-21-34. <https://elibrary.ru/gpjxcd>.

**Acknowledgments:** the study was made in the framework of the government task, registration number of the theme 124020700047-3.

*The article was submitted 05.10.2024; approved after reviewing 20.10.2024; accepted for publication 01.12.2024.*

### Введение

Одной из наиболее сложных и приоритетных задач, решаемых с помощью численного моделирования, является прогнозирование разрушения материалов и конструкций в результате взрывного воздействия различной природы. Данная проблема особенно актуальна в современном мире, поскольку взрывчатые вещества широко используются в различных отраслях промышленности: горнодобывающей [1], металлургической [2], строительной [3] и других [4].

С целью повышения защищенности людей и объектов проводятся исследования различных аспектов взрывного воздействия. В работе [5] выполнено экспериментальное исследование влияния предварительного повреждения многослойного стекла первичными осколками перед прохождением взрывной волны. Возможные последствия взрыва резервуара для хранения авиационного керосина определены в [6]. В статье [7] исследовано напряженно-деформированное состояние 3D-ауксетических решетчатых сэндвич-панелей под воздействием воздушного взрыва. Авторы публикации [8] оценили эффективность применения защитных пластин с помощью эксперимента в масштабе 1:5, имитирующего взрыв нефтепровода в городе Циндао (Китай).

Проведение натуральных экспериментов сопряжено с высокими экономическими затратами и повышенной опасностью для окружающих людей и объектов, поэтому в настоящее время активно разрабатываются различные численные методы моделирования быстротекущего разрушения исследуемых конструкций. В качестве основных численных методов применяются: метод конечных элементов (МКЭ) (Finite Element Method – FEM), расширенный МКЭ (Extended FEM – XFEM), произвольный и сопряженный методы Эйлера – Лагранжа (Arbitrary Lagrangian – Eulerian method – ALE, Coupled Eulerian – Lagrangian method – CEL), метод сглаженных частиц (Smoothed Particle Hydrodynamics – SPH).

Одним из самых распространенных и проработанных численных алгоритмов, используемых для решения рассматриваемого класса задач, является метод конечных элементов. С его помощью в работе [9] проведено исследование разрушения многослойного стекла с помощью разделения расчетной модели по узлам на основании критерия разрушения по напряжениям. Влияние величины шага нагружения и степени дискретизации модели при решении задачи разрушения упруго-хрупкой полосы материала определено в [10]. В статье [11] численно оценено влияние отверстий, полученных в результате проведения взрывных работ, на характер распространения трещин.

Одним из способов моделирования ударной волны является применение эмпирического метода CONWEP, позволяющего имитировать воздействие в виде действующего на исследуемую модель изменяющегося поля давления. Несмотря на ряд допущений, упрощений и ограниченной области применения, данный подход не утратил свою актуальность. Он используется в [12] для определения взрывостойкости железобетонных плит и показал хорошее соответствие численных и экспериментальных данных. С другой стороны, алгоритм CONWEP не позволил получить достоверные количественные результаты в исследовании [13], которое посвящено разработке вероятностной модели взрывной нагрузки, действующей на купольную конструкцию.

Широкое распространение для решения задач разрушения материалов и конструкций получили методы ALE и CEL. Они активно используются для моделирования подводных взрывов, лежащих вне области применимости метода CONWEP. В качестве примера перечислим несколько работ. В [14] с помощью метода ALE проводится численное моделирование подводного взрыва опор морского моста с целью определения динамической реакции и механизма разрушения. Поведение моделей кораблей, подвергающихся подводной ударной волне, исследовано в [15, 16] с применением метода CEL. Однако область применения рассматриваемых методов не ограничена задачами данного класса. В работах [17, 18] эти подходы используются для моделирования разрушения различных железобетонных конструкций.

В последнее время активно разрабатывается новый инструмент для решения широкого круга инженерных задач – нейронная сеть. Она представляет собой возможную альтернативу дорогостоящим натурным экспериментам и ресурсоемкому численному моделированию. Примерами использования нейронных сетей для определения параметров взрыва и разрушения могут служить публикации [19–21]. В первой из них с применением глубокого машинного обучения осуществлено прогнозирование динамического поведения железобетонных плит при взрывном воздействии. Предметом исследования работы [20] является определение эффективности различных моделей машинного обучения для прогнозирования параметров импульсного воздействия и давления. В статье [21] с помощью методов машинного обучения осуществлено определение пикового избыточного давления отраженных ударных волн.

Одним из вопросов, представляющих научный и практический интерес в данном направлении, является определение необходимости учета разброса параметров реальных материалов и взрывного нагружения. Данной теме посвящена работа [22], в которой приведено несколько вероятностных моделей для прогнозирования разрушения стальных колонн, подверженных взрыву. Их использование обусловлено необходимостью учитывать изменчивость различных факторов: колебаний атмосферных условий, повторяемости результатов натурных испытаний при идентичных экспериментальных условиях, погрешности моделирования. Неопределенность параметров взрывного нагружения также была отражена в работе [13]. В ней сделано заключение, что при проектировании взрывозащитных систем наиболее подходящей вероятностной моделью взрыва является распределение Гаусса.

В данной работе обсуждается использование критерия разрушения на основе нормального закона распределения, который отражает неоднородную структуру реальных материалов, исследуется влияние степени дискретизации конечно-элементной модели на параметры фрагментов, оценивается соответствие результатов расчетов экспериментальным данным.

## 1. Математическая постановка задачи и численный алгоритм решения

В работе моделируется чрезвычайная ситуация, возникающая в резервуаре для хранения технологических жидкостей или на участке магистрального трубопровода, осуществляющего транспортировку нефти или газа. В качестве примера решается задача воздействия ударной волны на тонкостенную цилиндрическую оболочку (средний радиус  $R = 193.3$  мм, длина  $L = 345.6$  мм, толщина  $h = 1.7$  мм) при подрыве взрывчатого вещества массой 1 кг в тротиловом эквиваленте, расположенного внутри (рис. 1). Материал конструкции считается изотропным упругопластическим с изотропным упрочнением (модуль Юнга  $E = 200$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ , начальный предел текучести  $\sigma_0 = 400$  МПа, модуль упрочнения  $E_T = 1$  ГПа).

Математическая постановка краевой задачи при отсутствии массовых сил имеет следующий вид:

$$\int_V \rho \ddot{x}_i \delta x_i dV + \int_V \sigma_{ij} \delta x_{i,j} dV - \int_S t_i \delta x_i dS = 0, \quad (1)$$

где  $V$  – объем оболочки,  $\rho$  – плотность материала,  $x_i$  и  $\delta x_i$  –  $i$ -я компонента вектора перемещений и ее вариация,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $S$  – поверхность, на которой действуют внешние силы,  $t_i$  –  $i$ -я компонента вектора внешней силы, точками сверху обозначена вторая производная по времени.



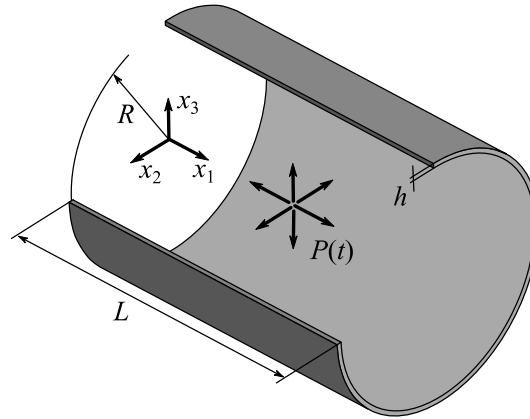


Рис. 1. Круговая цилиндрическая оболочка (сечение)

Связь напряжений и деформаций для изотропного материала представляется известным образом:

$$\sigma_{ij} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе,  $\theta = \varepsilon_{ii}$ ,  $\delta_{ij}$  – дельта Кронекера,  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора деформаций.

Условие текучести записывается в виде:

$$\frac{3}{2} \xi_{ij} \xi_{ij} - \sigma_y^2 \leq 0, \quad (3)$$

$$\xi_{ij} = s_{ij} - \alpha_{ij}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}),$$

где  $s_{ij}$  – компоненты девиатора тензора напряжений,  $\alpha_{ij}$  – центр поверхности пластичности.

Предел текучести материала оболочки  $\sigma_y$  определяется соотношением:

$$\sigma_y = \sigma_0 + \beta E_p \varepsilon_p, \quad E_p = \frac{E_T E}{E - E_T}, \quad (4)$$

где  $\beta$  – параметр упрочнения,  $\varepsilon_p$  – пластическая деформация,  $E_p$  – модуль пластического упрочнения.

Взрывное нагружение реализовано с помощью эмпирического метода CONWER, согласно которому изменение давления описывается уравнением Фридлендера:

$$P(t) = P_{so} \left( 1 - \frac{t-t_a}{t_d} \right) \exp \left( -A \frac{(t-t_a)}{t_d} \right), \quad (5)$$

где  $P(t)$  – давление в момент времени  $t$ ,  $P_{so}$  – пиковое избыточное давление в момент времени  $t = t_a$ ,  $t_a$  – время прибытия ударной волны,  $t_d$  – продолжительность фазы избыточного давления,  $A$  – коэффициент затухания. Подробное описание метода и способ моделирования распространения взрывной волны в пространстве представлен в работе [23].

Начальные условия имеют вид:

$$\sigma_{ij}|_{t=0} = 0, \quad x_i|_{t=0} = 0, \quad \dot{x}_i|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

Разрушение конструкции в результате взрыва реализовано за счет разделения дублирующихся узлов конечно-элементной сетки, критерием наступления которого является превышение величины пластической деформации критического значения:

$$\varepsilon_p > \varepsilon_{ppf}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_{ppf}$  – пластическая деформация разрушения, которая принята равной остаточной деформации образца при испытании на одноосное растяжение.

Неоднородность структуры материала моделируется путем задания нормального закона распределения для пластической деформации разрушения  $\varepsilon_{ppf}$  с помощью оригинального программного кода на языке "Python". Плотность вероятности описывается уравнением:

$$f(\varepsilon_{ppf}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\varepsilon_{ppf} - \gamma)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (8)$$

где  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение,  $\gamma$  – математическое ожидание,  $\sigma^2$  – дисперсия распределения. В расчетах полагалось  $\sigma = 0.05$ ,  $\gamma = 0.35$ .

Численное моделирование выполнено в отечественном пакете "ЛОГОС" разработки ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ" [24], в котором реализована конечно-элементная аппроксимация по пространству и конечно-разностная по времени. Дискретизация цилиндрической оболочки осуществлена с помощью четырехугольного конечного элемента типа Belytschko – Lin – Tsay с линейной аппроксимацией перемещений и углов поворота [25]. Он основан на теории Рейсснера – Миндлина и широко применяется для нелинейного анализа импульсно нагруженных тонкостенных конструкций с учетом больших деформаций. Интегрирование уравнений динамики осуществлено центрально-временной конечно-разностной схемой типа "КРЕСТ" [26]. Она имеет второй порядок точности и условно устойчива при выполнении условия Куранта – Фридрихса – Леви:

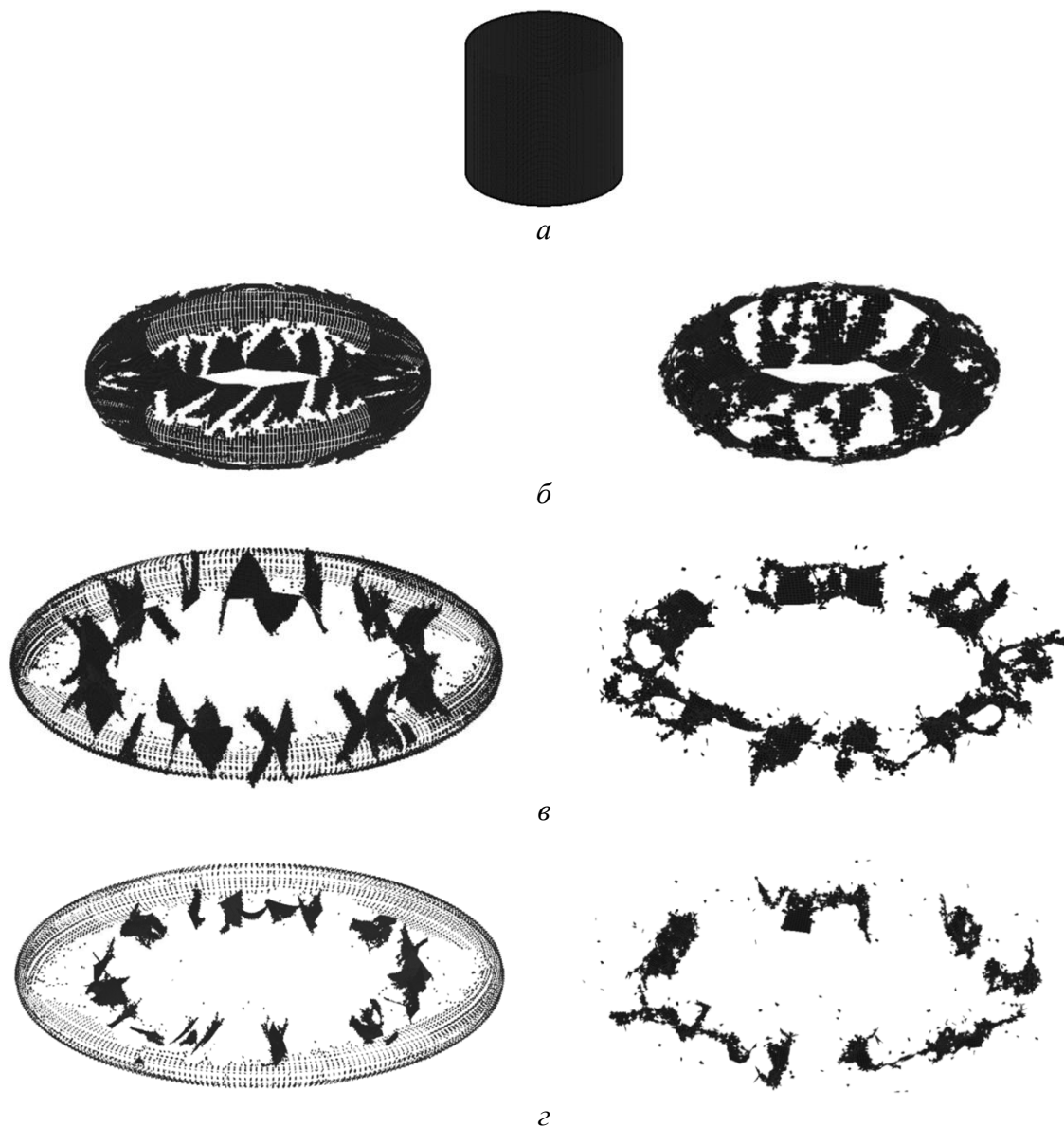
$$\tau \leq k \frac{a}{c}, \quad (9)$$

где  $\tau$  – шаг по времени,  $k$  – число Куранта,  $a$  – характерный размер конечного элемента,  $c$  – скорость звука в среде. В расчетах было принято  $k = 0.67$ .

## 2. Результаты численного моделирования

### 2.1. Оценка влияния вероятностного критерия разрушения на фрагментацию

Исследование влияния вероятностного критерия разрушения узловых связей проведено путем сравнения результатов, полученных с использованием численных моделей с различными параметрами пластической деформации разрушения  $\varepsilon_{ppf}$ . В первой из них  $\varepsilon_{ppf}$  являлась постоянной величиной, равной математическому ожиданию  $\gamma$ . Во второй модели значение определялось по выражению (8) с учетом нормального распределения. Сравнительный анализ показал, что применение критерия разрушения, подчиненного нормальному закону, приводит к существенно неоднородному пространственно-массовому распределению фрагментов (рис. 2). Поле фрагментов, полученное по первой модели, демонстрирует однородный характер, что не согласуется с экспериментальными данными [27, 28].



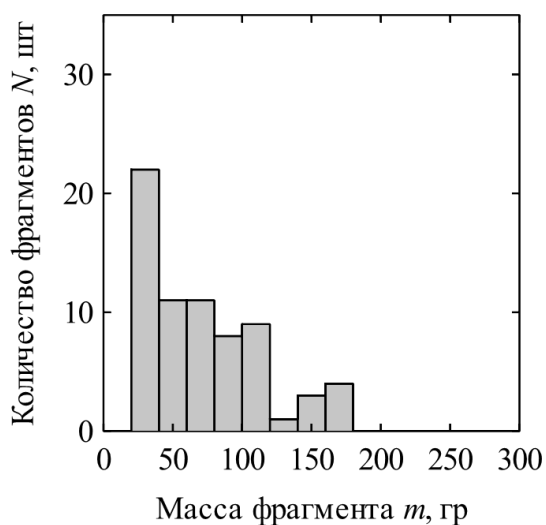
**Рис. 2.** Фрагментация цилиндрической оболочки с постоянным (слева) и вероятностным (справа) критерием разрушения в различные моменты времени:  $a - t = 0.0$  мс,  $б - t = 0.6$  мс,  $в - t = 1.2$  мс,  $г - t = 1.9$  мс

## 2.2. Оценка влияния дискретизации на фрагментацию оболочки

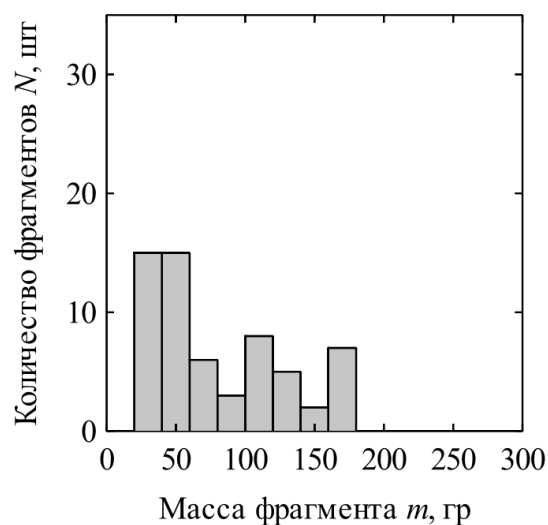
В данном разделе проанализировано влияние параметров конечно-элементной сетки на характеристики фрагментов. Рассмотрено четыре модели. При обработке результатов фрагменты, состоящие из одного конечного элемента, не учитывались в связи с их искажением в процессе расчета. Анализ полученных данных показал, что с увеличением количества конечных элементов значения характеристик изменяются непропорционально. При уменьшении размера элемента ниже определенной величины наблюдается скачкообразное изменение параметров фрагментов (табл. 1), однако их общий вид распределения по массовым группам с повышением степени дискретизации модели остается подобным друг другу (рис. 3). В частности, для всех расчетов наибольшее количество фрагментов расположено в диапазоне 20–40 гр.

Таблица 1. Параметры фрагментов при различной дискретизации модели

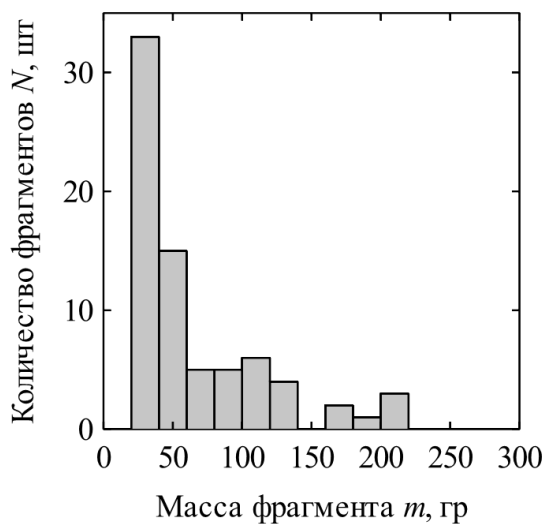
№	Число КЭ, шт.	Размер стороны КЭ, мм	Масса одного КЭ $m_{кэ}$ , гр.	Общее количество фрагментов, шт.	Средняя масса фрагмента, гр.	Минимальная масса фрагмента, гр.	Максимальная масса фрагмента, гр.
1	6776	7.9	0.83	85	60.41	20	166
2	9964	6.5	0.56	87	62.07	28	171
3	15074	5.3	0.37	107	49.81	18	215
4	20944	4.5	0.26	102	49.27	16	248



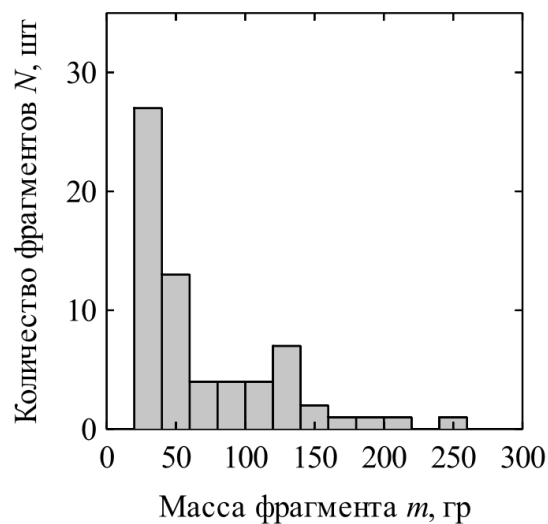
а



б



в



г

Рис. 3. Гистограммы распределения фрагментов по массе при различной дискретизации: а)  $m_{кэ} = 0.83$  гр, б)  $m_{кэ} = 0.56$  гр, в)  $m_{кэ} = 0.37$  гр, г)  $m_{кэ} = 0.26$  гр

### 2.3. Сравнение результатов расчета фрагментации оболочки с экспериментом

С целью сравнения с экспериментальными данными на конечно-элементной сетке № 4 была проведена серия из десяти расчетов для сбора статистики. В каждом из них критерий разрушения заново устанавливался с помощью разработанного алгоритма. Анализ полученных распределений долей массовых групп по отношению к учтенной массе модели показал, что результаты численного моделирования качественно согласуются с экспериментальными данными, полученными в работе [29] при проведении взрывных испытаний открытого цилиндра (рис. 4), где  $m_{\text{МГ}}$  – масса массовой группы,  $m_{\text{к}}$  – учтенная масса фрагментов.

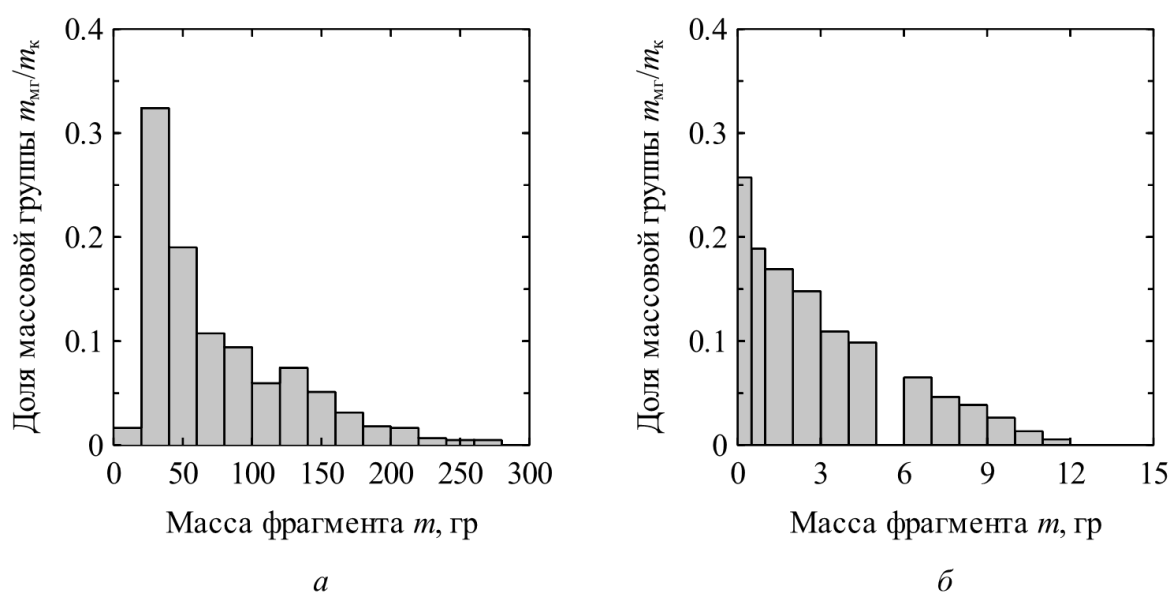


Рис. 4. Гистограммы распределения фрагментов по массовым группам в виде "масса по массе": а) результат численного моделирования, б) результат эксперимента

### Заключение

Рассмотрены некоторые аспекты численного моделирования процесса разрушения упругопластической тонкостенной цилиндрической оболочки при возникновении взрыва внутри конструкции. Результаты расчетов и отработанная методика их проведения имеют возможность практического применения в нефтегазовой отрасли для оценки последствий и повышения защищенности людей и объектов в случае наступления чрезвычайной ситуации.

Продемонстрирована необходимость учета неоднородной структуры материала для корректного описания картины фрагментации, качественно согласующейся с экспериментальными данными. Исследовано влияние степени дискретизации расчетной области на характеристики поля фрагментов и их распределения по массовым группам. Скачкообразное изменение этих параметров, наблюдаемое с ростом количества конечных элементов при превышении их некоторого критического значения, приводит к необходимости разработки требований к степени дискретизации модели, основанных на анализе экспериментальных данных.

### Список источников

1. *Taiwo B. O., Gebretsadik A., Abbas H. H., Khishe M., Fissaha Y., Kahraman E., Rab-bani A., Akinlabi A. A.* Explosive utilization efficiency enhancement: An application of machine learning for powder factor prediction using critical rock characteristics // *Heliyon*. 2024. Vol. 10, № 12. e33099. URL: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e33099> (дата обращения: 10.07.2024).
2. *Sherpa B. B., Rani R.* Advancements in explosive welding process for bimetallic material joining: A review // *Journal of Alloys and Metallurgical Systems*. 2024. Vol. 6. 100078. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jalmes.2024.100078> (дата обращения: 10.07.2024).
3. *Isobe D., Jiang R.* Explosive demolition planning of building structures using key element index // *Journal of Building Engineering*. 2022. Vol. 59. 104935. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2022.104935> (дата обращения: 10.07.2024).
4. *Miętkiewicz R.* High explosive unexploded ordnance neutralization - Tallboy air bomb case study // *Defence Technology*. 2022. Vol. 18, № 3. P. 524–535. URL: <https://doi.org/10.1016/j.dt.2021.03.011> (дата обращения: 10.07.2024).
5. *Osnes K., Dey S., Hopperstad O. S., Børvik T.* On the Dynamic Response of Laminated Glass Exposed to Impact Before Blast Loading // *Experimental Mechanics*. 2019. Vol. 59, № 7. P. 1033–1046. URL: <https://doi.org/10.1007/s11340-019-00496-1> (дата обращения: 10.07.2024).
6. *Song S., Wang C., Qiao B., Gu G.* Explosion damage effects of aviation kerosene storage tank under strong ignition // *Defence Technology*. 2024. Vol. 37. P. 27–38. URL: <https://doi.org/10.1016/j.dt.2023.12.009> (дата обращения: 10.07.2024).
7. *Zhang Z., Zhang Z., Huang X.* Experimental study on the impact response of the polyurea-coated 3D auxetic lattice sandwich panels subjected to air explosion // *Composite Structures*. 2023. Vol. 323. 117500. URL: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.117500> (дата обращения: 10.07.2024).
8. *Hou L., Li Y., Qian X., Shu C., Yuan M., Duanmu W.* Large-scale experimental investigation of the effects of gas explosions in underdrains // *Journal of Safety Science and Resilience*. 2021. Vol. 2, № 2. P. 90–99. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jnlssr.2021.03.001> (дата обращения: 10.07.2024).
9. *Osnes K., Holmen J. K., Hopperstad O. S., Børvik T.* Fracture and fragmentation of blast-loaded laminated glass: An experimental and numerical study // *International Journal of Impact Engineering*. 2019. Vol. 132. 103334. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2019.103334> (дата обращения: 10.07.2024).
10. *Вильдеман В. Э., Феклистова Е. В., Мугатаров А. И., Муллахметов М. Н., Кучуков А. М.* Аспекты численного моделирования процессов разрушения упруго-хрупких тел // *Вычислительная Механика Сплошных Сред*. 2023. Т. 16, № 4. С. 420–429. URL: <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.4.35> (дата обращения: 10.07.2024).
11. *Li M., Zhu Z., Liu R., Liu B., Zhou L., Dong Y.* Study of the effect of empty holes on propagating cracks under blasting loads // *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*. 2018. Vol. 103. P. 186–194. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2018.01.043> (дата обращения: 10.07.2024).

12. Tian S., Yan Q., Du X., Chen F., Zhang B. Experimental and numerical studies on the dynamic response of precast concrete slabs under blast load // *Journal of Building Engineering*. 2023. Vol. 70. 106425. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2023.106425> (дата обращения: 10.07.2024).
13. Qi S., Zhi X., Fan F., Flay R.G.J. Probabilistic blast load model for domes under external surface burst explosions // *Structural Safety*. 2020. Vol. 87. 102004. URL: <https://doi.org/10.1016/j.strusafe.2020.102004> (дата обращения: 10.07.2024).
14. Zhou L., Li X., Yan Q. Dynamic response and vulnerability analysis of pier under near-field underwater explosion // *Engineering Failure Analysis*. 2024. Vol. 155. 107749. URL: <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2023.107749> (дата обращения: 10.07.2024).
15. Gan N., Liu L. T., Yao X. L., Wang J. X., Wu W. B. Experimental and numerical investigation on the dynamic response of a simplified open floating slender structure subjected to underwater explosion bubble // *Ocean Engineering*. 2021. Vol. 219. 108308. URL: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.108308> (дата обращения: 10.07.2024).
16. He Z., Du Z., Zhang L., Li Y. Damage mechanisms of full-scale ship under near-field underwater explosion // *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 189. 110872. URL: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2023.110872> (дата обращения: 10.07.2024).
17. Kishore K. B., Gangolu J., Ramancha M. K., Bhuyan K., Sharma H. Performance-based probabilistic deflection capacity models and fragility estimation for reinforced concrete column and beam subjected to blast loading // *Reliability Engineering & System Safety*. 2022. Vol. 227. 108729. URL: <https://doi.org/10.1016/j.res.2022.108729> (дата обращения: 10.07.2024).
18. Huang X., Yue Y., Zhu B., Chen Y. Failure analysis of underground concrete silo under near-field soil explosion // *Tunnelling and Underground Space Technology*. 2024. Vol. 147. 105696. URL: <https://doi.org/10.1016/j.tust.2024.105696> (дата обращения: 10.07.2024).
19. Zhou X.-Q., Huang B.-G., Wang X.-Y., Xia Y. Deep learning-based prediction of structural responses of RC slabs subjected to blast loading // *Engineering Structures*. 2024. Vol. 311. 118184. URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118184> (дата обращения: 10.07.2024).
20. Widanage C., Mohotti D., Lee C. K., Wijesooriya K., Meddage, D. P. P. Use of explainable machine learning models in blast load prediction // *Engineering Structures*. 2024. Vol. 312. 118271. URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.118271> (дата обращения: 10.07.2024).
21. Zhang H., Xu Y., Xiao L., Zhen C. Physics-informed machine learning model for prediction of ground reflected wave peak overpressure // *Defence Technology*. 2024. URL: <https://doi.org/10.1016/j.dt.2024.06.004> (дата обращения: 10.07.2024).
22. Singh K., Gardoni P., Stochino F. Probabilistic models for blast parameters and fragility estimates of steel columns subject to blast loads // *Engineering Structures*. 2020. Vol. 222. 110944. URL: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110944> (дата обращения: 10.07.2024).
23. Randers-Pehrson G., Bannister K. A. Airblast Loading Model for DYNA2D and DYNA3D. U.S. Army Research Laboratory. 1997.
24. *Пакет программ "ЛОГОС"* [Электронный ресурс]. URL: <http://logos.vniief.ru/> (дата обращения: 10.07.2024)

25. Belytschko T., Lin J. I., Tsay C.-S. Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1984. Vol. 42, №2. P. 225–251. URL: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(84\)90026-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(84)90026-4) (дата обращения: 10.07.2024).
26. Hughes T. J. R., Liu W. K. Nonlinear finite element analysis of shells-part II. two-dimensional shells // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1981. Vol. 27, № 2. P. 167–181. URL: [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(81\)90148-1](https://doi.org/10.1016/0045-7825(81)90148-1) (дата обращения: 10.07.2024).
27. Wang K., Chen P., Sun X., Liu Y., Meng J., Li X., Zheng X., Xiao C. Fracture behavior and mechanism of highly fragmented steel cylindrical shell under explosive loading // *Defence Technology*. 2024. Vol. 36. P. 122–132. URL: <https://doi.org/10.1016/j.dt.2024.02.004> (дата обращения: 10.07.2024).
28. An X., Ye P., Liu J., Tian C., Feng S., Dong Y. Dynamic fracture and fragmentation characteristics of metal cylinder and rings subjected to internal explosive loading // *Materials*. 2020. Vol. 13, № 3. 778. URL: <https://doi.org/10.3390/ma13030778> (дата обращения: 10.07.2024).
29. *Физика взрыва* / под ред.: Л. П. Орленко. М.: Физматлит, 2004. Т. 2. 656 с.

## References

1. Taiwo, B.O., Gebretsadik, A., Abbas, H.H., Khishe, M., Fissaha, Y., Kahraman E., Rabhani A. and Akinlabi A.A. (2024) "Explosive utilization efficiency enhancement: An application of machine learning for powder factor prediction using critical rock characteristics", *Heliyon*, vol. 10, no. 12, e33099.
2. Sherpa, B.B. and Rani, R. (2024), "Advancements in explosive welding process for bimetallic material joining: A review", *Journal of Alloys and Metallurgical Systems*, vol. 6, 100078.
3. Isobe, D. and Jiang, R. (2022), "Explosive demolition planning of building structures using key element index", *Journal of Building Engineering*, vol. 59, 104935.
4. Miętkiewicz, R. (2022), "High explosive unexploded ordnance neutralization - Tallboy air bomb case study", *Defence Technology*, vol. 18, no. 3, pp. 524–535.
5. Osnes, K., Dey, S., Hopperstad, O.S. and Børvik, T. (2019) "On the Dynamic Response of Laminated Glass Exposed to Impact Before Blast Loading", *Experimental Mechanics*, vol. 59, no. 7, pp. 1033–1046.
6. Song, S., Wang, C., Qiao, B. and Gu, G. (2024), "Explosion damage effects of aviation kerosene storage tank under strong ignition", *Defence Technology*, vol. 37, pp. 27–38.
7. Zhang, Z., Zhang Z. and Huang, X. (2023), "Experimental study on the impact response of the polyurea-coated 3D auxetic lattice sandwich panels subjected to air explosion", *Composite Structures*, vol. 323, 117500.
8. Hou, L., Li, Y., Qian, X., Shu, C., Yuan, M. and Duanmu, W. (2021), "Large-scale experimental investigation of the effects of gas explosions in underdrains", *Journal of Safety Science and Resilience*, vol. 2, no. 2, pp. 90–99.
9. Osnes, K., Holmen, J.K., Hopperstad, O.S. and Børvik, T. (2019), "Fracture and fragmentation of blast-loaded laminated glass: An experimental and numerical study", *International Journal of Impact Engineering*, vol. 132, 103334.



10. Wildemann, V.E., Feklistova, E.V., Mugatarov, A.I., Mullahmetov M.N. and Kuchukov, A.M. (2023), "Aspects of numerical simulation of failure of elastic-brittle solids", *Computational Continuum Mechanics*, vol. 16, no. 4, pp. 420–429.
11. Li, M., Zhu Z., Liu, R., Liu, B., Zhou, L. and Dong, Y. (2018), "Study of the effect of empty holes on propagating cracks under blasting loads", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, vol. 103, pp. 186–194.
12. Tian, S., Yan, Q., Du, X., Chen, F. and Zhang, B. (2023), "Experimental and numerical studies on the dynamic response of precast concrete slabs under blast load", *Journal of Building Engineering*, vol. 70, 106425.
13. Qi, S., Zhi, X., Fan, F. and Flay, R.G.J. (2020), "Probabilistic blast load model for domes under external surface burst explosions", *Structural Safety*, vol. 87, 102004.
14. Zhou L., Li X. and Yan Q. (2024), "Dynamic response and vulnerability analysis of pier under near-field underwater explosion", *Engineering Failure Analysis*, vol. 155, 107749.
15. Gan, N., Liu, L.T., Yao, X.L., Wang, J.X. and Wu, W.B. (2021), "Experimental and numerical investigation on the dynamic response of a simplified open floating slender structure subjected to underwater explosion bubble", *Ocean Engineering*, vol. 219, 108308.
16. He Z., Du, Z., Zhang, L. and Li, Y. (2023), "Damage mechanisms of full-scale ship under near-field underwater explosion", *Thin-Walled Structures*, vol. 189, 110872.
17. Kishore, K.B., Gangolu, J., Ramancha, M.K., Bhuyan, K. and Sharma, H. (2022), "Performance-based probabilistic deflection capacity models and fragility estimation for reinforced concrete column and beam subjected to blast loading", *Reliability Engineering & System Safety*, vol. 227, 108729.
18. Huang, X., Yue, Y., Zhu, B. and Chen, Y. (2024), "Failure analysis of underground concrete silo under near-field soil explosion", *Tunnelling and Underground Space Technology*, vol. 147, 105696.
19. Zhou, X.-Q., Huang, B.-G., Wang, X.-Y. and Xia, Y. (2024), "Deep learning-based prediction of structural responses of RC slabs subjected to blast loading", *Engineering Structures*, vol. 311, 118184.
20. Widanage, C., Mohotti, D., Lee, C.K., Wijesooriya, K. and Meddage, D.P.P. (2024), "Use of explainable machine learning models in blast load prediction", *Engineering Structures*, vol. 312, 118271.
21. Zhang, H., Xu, Y., Xiao, L. and Zhen, C. (2024), "Physics-informed machine learning model for prediction of ground reflected wave peak overpressure", *Defence Technology*, In Press.
22. Singh K., Gardoni, P. and Stochino, F. (2020), "Probabilistic models for blast parameters and fragility estimates of steel columns subject to blast loads", *Engineering Structures*, vol. 222, 110944.
23. Randers-Pehrson, G. and Bannister, K.A. (1997), "Airblast Loading Model for DYNA2D and DYNA3D", *Army Research Laboratory*.
24. "LOGOS" software [Electronic resource]. URL: <http://logos.vniief.ru/> (accessed 10 July 2024).
25. Belytschko, T., Lin, J.I. and Tsay, C.-S. (1984), "Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 42, no. 2, pp. 225–251.

26. Hughes, T.J.R. and Liu, W.K. (1981), "Nonlinear finite element analysis of shells-part II. two-dimensional shells", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 27, no. 2, pp. 167–181.
27. Wang, K., Chen, P., Sun, X., Liu, Y., Meng, J., Li, X., Zheng, X. and Xiao, C. (2024), "Fracture behavior and mechanism of highly fragmented steel cylindrical shell under explosive loading", *Defence Technology*, vol. 36, pp. 122–132.
28. An, X., Ye, P., Liu, J., Tian, C., Feng, S. and Dong, Y. (2020), "Dynamic fracture and fragmentation characteristics of metal cylinder and rings subjected to internal explosive loading", *Materials*, vol. 13, no. 3, 778.
29. Orlenko, L.P. (ed.) (2004), *Fizika vzryva [Physics of explosion]*, FIZMATLIT, Moscow, Russian Federation.

#### **Информация об авторах:**

С. М. Герцик – главный специалист по учебно-методической работе Центра компетенций и обучения (607182, Нижегородская обл., г. Саров, ул. Парковая, 1 стр. 3, помещ. 36), Scopus Author ID: 57223340179;

В. А. Конюхов – инженер-исследователь Института механики сплошных сред УрО РАН (614068, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), WoS Researcher ID: JOJ-9991-2023;

С. В. Лекомцев – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией механики функциональных материалов Института механики сплошных сред УрО РАН (614068, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), WoS Researcher ID: F-3528-2018, Scopus Author ID: 56155162000, РИНЦ Author ID: 671355.

#### **Information about the authors:**

S. M. Gertsik – leading specialist in educational and methodological work of the Competence and Training Center (1, building 3, Parkovaya St., Nizhny Novgorod region, Sarov, Russia, 6607182), Scopus Author ID: 57223340179;

V. A. Koniukhov – research engineer, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (1, Academica Koroleva St., Perm, Russia, 614068), WoS Researcher ID: JOJ-9991-2023;

S. V. Lekomtsev – Ph. D., head of the Laboratory of Functional Materials Mechanics, Institute of Continuous Media Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (1, Academica Koroleva St., Perm, Russia, 614068), WoS Researcher ID: F-3528-2018, Scopus Author ID: 56155162000, РИНЦ Author ID: 671355.

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК:531

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-35-45

<https://elibrary.ru/QOWZIC>



**Математическая модель механического взаимодействия  
тел нанометрового масштаба**

**Роман Игоревич Изюмов<sup>1</sup>, Александр Львович Свистков<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия

<sup>1</sup>[izumov@icmm.ru](mailto:izumov@icmm.ru)

<sup>2</sup>[svistkov@icmm.ru](mailto:svistkov@icmm.ru)

**Аннотация.** Атомно-силовая микроскопия (АСМ) базируется на регистрации взаимодействия зонда АСМ с образцом. Для интерпретации экспериментальных данных разработана новая математическая модель. Актуальность работы вызвана необходимостью корректного учета эффектов, которые возникают при взаимодействии тел на наноуровне в условиях больших деформаций. Стандартные модели являются развитием модели Герца, предпосылки которой далеко не всегда являются корректными для конкретных случаев. В новой модели учитывается криволинейность границы контакта зонда с материалом. Также в процессе построения модели было принято во внимание исчезновение и появление новых нелинейных поверхностей контакта и соответствующее изменение энергии поверхностного натяжения, что играет важную роль при индентировании мягких материалов (полимеры, биологические ткани). По результатам апробации разработанной модели на экспериментальных данных наноиндентации было показано ее способность с высокой точностью описывать сопровождающие контакт и процесс внедрения эффекты: скачкообразное втягивание зонда в образец под действием поверхностных эффектов, прилипание зонда при его извлечении из образца и момент отрыва зонда от образца. Проведено сравнение полученной модели с результатами, которые дают стандартные модели ДМТ и ДжКР. Оно показало большую гибкость новой модели, ее способность более точно описывать экспериментальные данные.

**Ключевые слова:** атомно-силовая микроскопия; поверхностное натяжение; модель

**Для цитирования:** Изюмов Р.И., Свистков А.Л. Математическая модель механического взаимодействия тел нанометрового масштаба // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 35-45. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-35-45. <https://elibrary.ru/QOWZIC>.

**Благодарности:** Работа выполнена в рамках государственной темы (рег. номер АААА-А20-120022590044-7).

*Статья поступила в редакцию 25.10.2024; одобрена после рецензирования 30.11.2024; принята к публикации 09.12.2024.*



Эта работа © 2024 Изюмов Р.И., Свистков А.Л. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MECHANICS

Research article

**Nanometer-scale Bodies Mechanical Interaction  
Mathematical Model**

**Roman. I. Iziumov<sup>1</sup>, Alexander. L. Svistkov<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of RAS, Perm, Russia

<sup>1</sup>izumov@icmm.ru

<sup>2</sup>svistkov@icmm.ru

**Abstract.** Atomic force microscopy (AFM) is based on registration of the interaction of the AFM probe with the sample. A new mathematical model has been developed for the interpretation of experimental data. The relevance of the work is caused by the need to correctly account for the effects that arise in the interaction of bodies at the nanoscale under conditions of large deformations. Standard models (Deryagin-Muller-Toporov (DMT), Johnson-Kendall-Roberts (JKR), etc.) represent a modification of the Hertz model, whose assumptions are not always correct for specific cases. The new model takes into account the curvilinearity of the interface between the probe and the material. Also in the process of model construction the disappearance and appearance of new nonlinear contact surfaces and the corresponding change of surface tension energy were taken into account, which plays an important role in indentation of soft materials (polymers, biological tissues). The results of testing the developed model on experimental data of nanoindentation showed its ability to describe with high accuracy the effects accompanying the contact and the indentation process: a jump-like retraction of the probe into the sample under the influence of surface effects, sticking of the probe at its removal from the sample, and the moment of probe detachment from the sample. A comparison of the obtained model with the results given by the standard DMT and JKR models was carried out. It has demonstrated the greater flexibility of the new model and its ability to describe the experimental data more accurately.

**Keywords:** *atomic force microscopy; surface tension; model*

**For citation:** Iziumov, R. I., Svistkov, A. L. (2024), "Nanometer-scale Bodies Mechanical Interaction Mathematical Model", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67)), pp. 35-45. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-35-45. <https://elibrary.ru/QOWZIC>.

**Acknowledgments:** This work was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (theme No. AAAA-A20-120022590044-7).

*The article was submitted 25.10.2024; approved after reviewing 30.11.2024; accepted for publication 09.12.2024.*

**Введение**

Атомно-силовая микроскопия позволяет получать трехмерные данные о рельефе поверхности образца и регистрировать силовые взаимодействия зонда с материалом на нанометровом масштабе. Интерпретация полученных результатов базируется на математических и конечно-элементных моделях взаимодействия зонда АСМ с образцом.

Математические модели, нашедшие широкое распространение в научной и инженерной среде, такие как ДМТ, ДжКР и др. [1–5], являются развитием модели Герца [6].

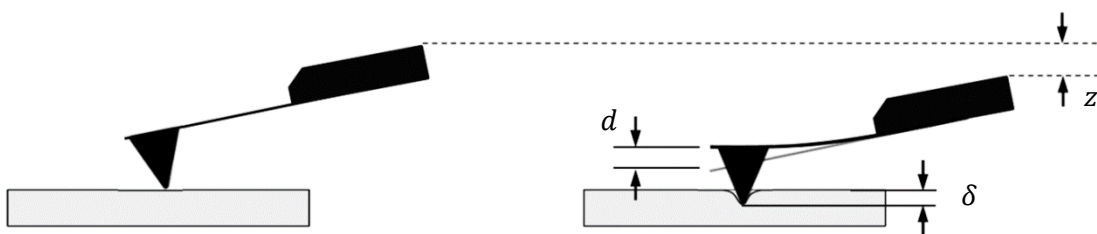
Современными последователями стали авторы таких работ как [7–11]. Создание узконаправленных моделей вызвано очень широким спектром всевозможных факторов, которые невозможно описать некоторой универсальной моделью (в том смысле, что эта модель становится неподъемной для современного уровня развития вычислительных ресурсов).

Поскольку в конкретных условиях чаще всего выделяется какой-то один фактор, то разумнее создавать модель с учетом особенностей только исследуемого объекта.

Примером могут быть: неоднородность материала [12], описание уменьшающегося контакта [13]. Некоторыми исследователями предпринимается попытка учесть такие явления как относительные сдвиги [14], капиллярные эффекты [15]. Существует множество работ, в которых показано существенное влияние поверхностного натяжения при взаимодействии объектов нанометрового масштаба [16–19]. В нашей работе этому явлению уделено внимание в контексте взаимодействия зонда атомно-силового микроскопа с поверхностью полимерных образцов. Также показана несостоятельность некоторых допущений, которые применяются в Герц-подобных моделях.

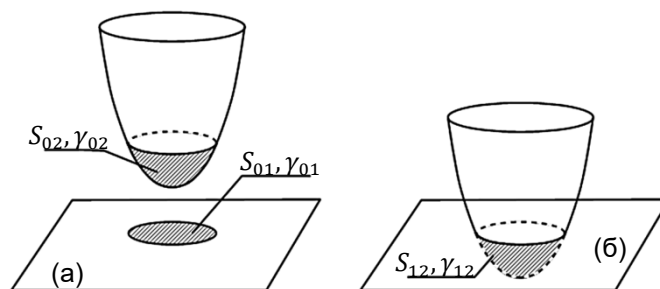
## 1. Постановка задачи

В процессе проведения экспериментов на атомно-силовом микроскопе взаимодействие зонда АСМ с образцом регистрируется путем измерения отклонения от равновесного положения балки кантилевера, на конце которой расположен зонд в виде конусообразной иглы (рис. 1). От того, как будет расшифрована зависимость изгиба кантилевера от положения зонда, будет зависеть достоверность информация о свойствах образца.



**Рис. 1.** Взаимодействие зонда АСМ с образцом сопровождается: перемещением основания кантилевера  $z$ , изгибом балки кантилевера  $d$ , и внедрением зонда в образец  $\delta$

Рассмотрим изменение состояния системы зонд-образец при возникновении контакта между ними (рис. 2).



**Рис. 2.** Система зонд-образец до и после внедрения.

В состоянии до контакта (а) отмечены цветом те участки образца (01) и зонда (02), которые при внедрении (б), образуют общую поверхность контакта (12)

Поверхность контакта – это геометрическое положение точек тела, с определенной плотностью энергии, которая зависит от среды, с которой контактируют эти точки тела. Поэтому одну и ту же геометрическую поверхность в условиях контакта с разными средами корректно обозначать разными символами.

Опишем появление контакта в терминах поверхностной энергии. Состояние системы до контакта (а) будет иметь следующие характеристики:

Поверхность 01: площадь  $S_{01}$  и плотность поверхностной энергии  $\gamma_{01}$ .  $U_{01} = \gamma_{01}S_{01}$ .

Поверхность 02: площадь  $S_{02}$  и плотность поверхностной энергии  $\gamma_{02}$ .  $U_{02} = \gamma_{02}S_{02}$ .

В состоянии контакта (б):

Поверхность 12: площадь  $S_{12}$  и плотность поверхностной энергии  $\gamma_{12}$ .  $U_{12} = \gamma_{12}S_{12}$ .

Переход из состояния (а) в (б) сопровождается исчезновением поверхностей контакта 01 и 02 появлением поверхности 12. В свою очередь происходит изменение поверхностной энергии. Разницу между энергией в конечном состоянии и начальном обозначим как  $U_s$ :

$$U_s = U_{12} - (U_{01} + U_{02}). \quad (1)$$

Определим площадь поверхности для конкретной формы параболического зонда, которую в осесимметричной постановке можно описать формулой  $H(r) = r^2/(2R)$ , где  $R$  – радиус кривизны в вершине параболоида.

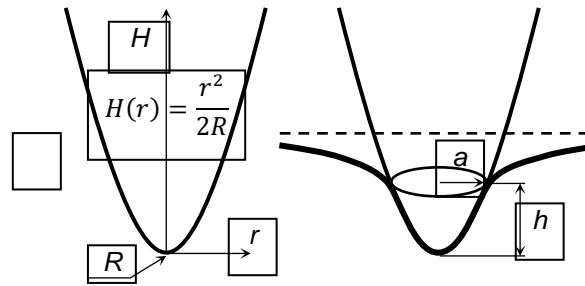


Рис. 3. Геометрия контакта:  $h$  – его высота,  $a$  – его радиус на высоте  $h$

Для представленной на рис. 3 геометрии выполняется следующее соотношение:  $a^2 = 2Rh$ . Тогда соотношения для поверхностной энергии будут иметь вид:

$$U_{01} = \pi a^2 \gamma_{01} = 2\pi \gamma_{01} R h, \quad (2)$$

$$U_{02} = 2\pi \gamma_{02} \left( (2hR + R^2)^{3/2} - R^3 \right) / 3R, \quad (3)$$

$$U_{12} = 2\pi \gamma_{12} \left( (2hR + R^2)^{3/2} - R^3 \right) / 3R, \quad (4)$$

$$U_s = -2\pi \gamma_{01} R h - \frac{2\pi(\gamma_{02} - \gamma_{12})}{3R} \left( (2hR + R^2)^{3/2} - R^3 \right). \quad (5)$$

Изменение поверхностной энергии в результате увеличения контакта, который определяется его высотой  $h$ , вызывает появление силы  $F_s = \frac{\partial U_s}{\partial h}$ :

$$F_s = -2\pi \gamma_{01} R - 2\pi(\gamma_{02} - \gamma_{12}) (2hR + R^2)^{1/2}. \quad (6)$$

Полная энергия системы является суммой следующих энергий:

$$U = U_m + U_s + U_c, \quad (7)$$

где  $U_s$  – изменение поверхностной энергии,  $U_m$  – упругая энергия деформирования образца,  $U_c$  – энергия, накопленная кантилевером или работа вдавливающей силы, которая передается на зонд от кантилевера.

Состояние равновесия описывается формулой  $\frac{\partial U}{\partial h} = 0$  или:

$$F_c + F_m + F_s = 0, \quad (8)$$

где  $F_s$  – поверхностная сила, которая стремится сблизить зонд и поверхность образца. Она тянет зонд в сторону образца, вниз, при этом поверхность образца тянется к зонду, вверх.  $F_m$  – реакция образца на внедрение, действующая противоположно направлению внедрения. Дальнейшие выкладки будут проводиться в рамках малых деформаций. Это позволит провести корректное сравнение со стандартными моделями. Однако представленные рассуждения можно обобщить на общий случай конечных деформаций неоднородного материала с включениями с применением метода конечно-элементного моделирования.

Рассмотрим систему зонд-образец и действующие в этой системе силы (рис. 4).

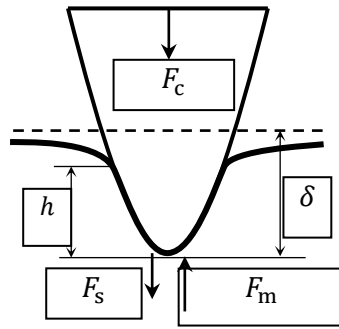


Рис. 4. Состояние системы зонд-образец в присутствии поверхностных сил

В таком виде (рис. 4) мы не можем определить положение зонда  $\delta$ , так как в системе, где присутствуют поверхностные силы, не выполняется соотношение  $h = \delta/2$ , установленное для случая индентирования параболическим зондом без этих сил [5], а именно:  $h > \delta/2$ .

Основной проблемой прямого решения с приложением всех сил в этом случае является то, что расчет поверхностной силы по вычисленной поверхности контакта и добавление ее в систему приводит к еще большему внедрению и увеличению поверхности контакта, а, значит, и не соответствию между размером этой поверхности и рассчитанной силой. Предлагается обойти проблему изменения размера контакта следующим приемом. На рис. 5 представлена схема поэтапного приложения сил к системе зонд-образец, которая приводит в состояние, аналогичное тому, которое представлено на рис. 4.

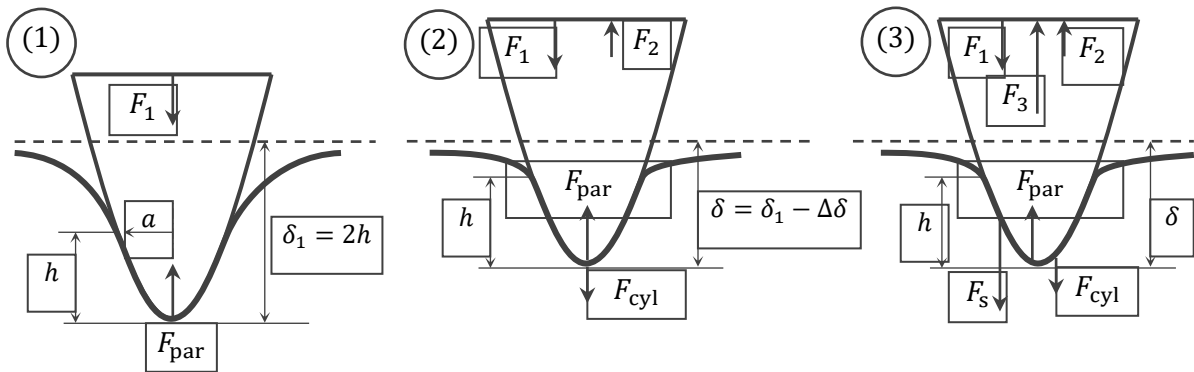


Рис. 5. Поэтапное приложение сил к системе зонд-образец

(1) Вначале зонд нагружается силой  $F_1$ . Зонд внедрится на глубину  $\delta_1$ , что вызовет реакцию материала образца, которая описывается формулой Герца для парабоида (решение Снеддона [5]):

$$F_{\text{par}} = E_* R^{1/2} \delta_1^{3/2}, \quad (9)$$

где  $E_* = 4/3 \cdot E/(1 - \nu^2)$ ,  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\nu = 0.5$ . При этом образуется контакт высотой  $h$  и выполняется соотношение  $h = \delta_1/2$  (показано в той же работе [5]).

(2) Далее приложим силу  $F_2$ , которая поднимет зонд на величину  $\Delta\delta$ . Примем, что в области контакта произошло прилипание образца к зонду.

В работе [3] было показано, что подъем парабоида с прилипанием аналогичен задаче о подъеме цилиндрического штампа с радиусом основания  $a$  равным радиусу

контакта в точке  $h$ , которая, в свою очередь, была решена Буссинеском. Реакция материала на подъем зонда:

$$F_{\text{cyl}}(\Delta\delta) = 1.5E_*a\Delta\delta. \quad (10)$$

Новое положение зонда обозначим  $\delta = \delta_1 - \Delta\delta$ . Это положение произвольное, зависящее от произвольной силы  $F_2$ , что будет использоваться на третьем этапе.

Важно отметить, что теперь материал около точки контакта трех сред имеет растягивающую компоненту в общем напряженном состоянии, которое является результатом реакции на внедрение и подъем зонда.

(3) Теперь приложим поверхностную силу  $F_s$ , рассчитанную для контакта высотой  $h$ . Чтобы не произошло смещения зонда, приложим к нему противоположную силу  $F_3$ . В этом случае действие поверхностной силы  $F_s$  будет стремиться увеличивать контакт через подъем поверхности образца к зонду. Однако это действие компенсируется реакцией материала  $F_{\text{cyl}}$  на приложенную ранее силу  $F_2$  и предварительно напряженным состоянием материала около контакта. Так как сила  $F_{\text{cyl}}$  была произвольной на втором шаге, то она может быть задана в том числе и такой, чтобы выполнялось условие: сила  $F_{\text{cyl}}$  должна вызывать такое состояние в материале, чтобы оно полностью компенсировало действие поверхностной силы  $F_s$ . Это значит, что высота контакта сохранится равной  $h$ .

По итогу было получено то же состояние системы зонд-образец, что и представленное на рис. 4. Однако во второй схеме в системе действуют другие, более удобные для вычисления силы.

Остается определить неизвестную величину  $\Delta\delta$ . По своей физической сути величина  $\Delta\delta$  определяет, насколько будут отличаться глубины индентирования при наличии и при отсутствии поверхностных сил в системе. Поэтому для определения  $\Delta\delta$  рассмотрим следующую вспомогательную задачу (рис. 6).

### Вспомогательная задача для определения $\Delta\delta$

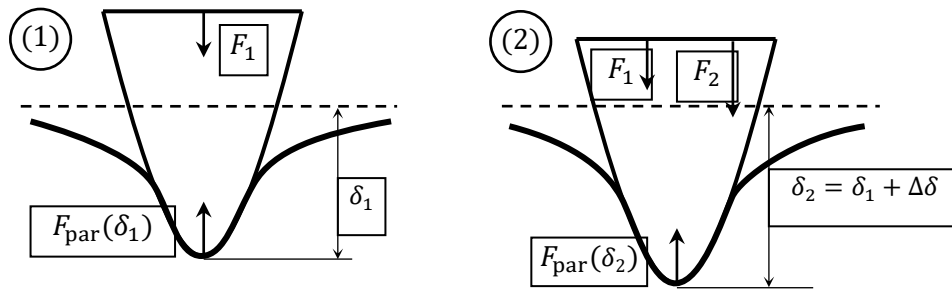


Рис. 6. Вспомогательная схема приложения сил к системе зонд-образец

**ШАГ 1.** Внедрение на глубину  $\delta_1$  силой  $F_1$ . Поверхностные силы отсутствуют.

Упругая реакция образца:

$$F_{\text{par}}(\delta_1) = E_*R^{1/2}\delta_1^{3/2}, \quad h = \delta_1/2, \quad a = \sqrt{\delta_1 R}. \quad (11)$$

Равновесие описывается уравнением:

$$F_1 + F_{\text{par}}(\delta_1) = 0. \quad (12)$$

В абсолютных значениях:

$$-|F_1| + |F_{\text{par}}(\delta_1)| = 0. \quad (13)$$

Из этого уравнения можно определить  $F_1$  по заданному значению  $\delta_1$  и  $F_s$  по вычисленному  $h$ . Используя уравнение (6), рассчитаем  $F_s$  для данной величины контакта:



$$F_s = 2\pi\gamma_1 R + 2\pi(\gamma_2 - \gamma_{12})(2hR + R^2)^{1/2}. \quad (14)$$

**ШАГ 2.** Приложим силу к зонду силу  $F_2$ , равную по значению силе  $F_s$ . Зонд опустится на глубину  $\delta_2$ . Упругая реакция образца:

$$F_{\text{par}}(\delta_2) = E_* R^{1/2} \delta_2^{3/2}. \quad (15)$$

Равновесие описывается уравнением:

$$F_1 + F_2 + F_{\text{par}}(\delta_2) = 0. \quad (16)$$

В абсолютных значениях:

$$-|F_1| - |F_2| + |F_{\text{par}}(\delta_2)| = 0. \quad (17)$$

Или, учитывая уравнение (13), полученное на первом шаге:

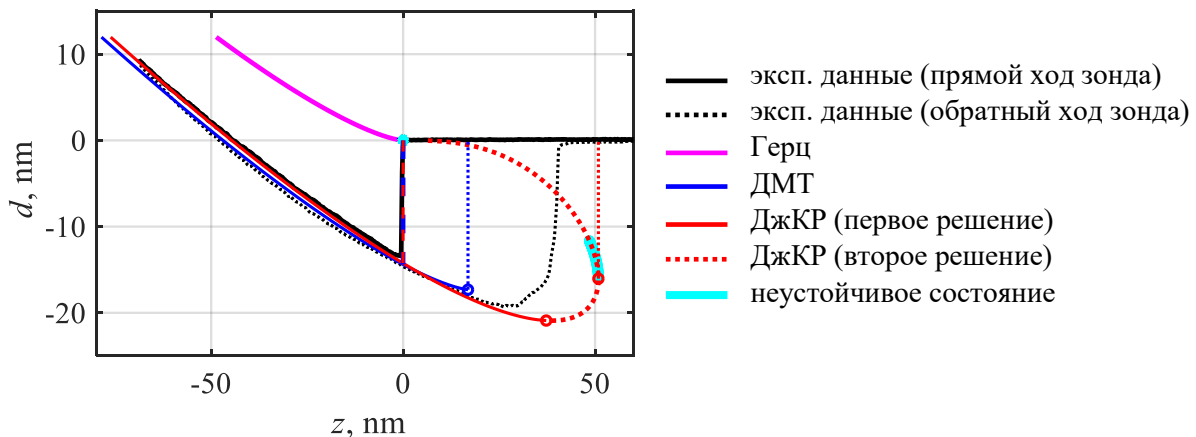
$$-|F_{\text{par}}(\delta_1)| - |F_s| + |F_{\text{par}}(\delta_2)| = 0. \quad (18)$$

Из полученного соотношения с учетом (11, 14 и 15) можно определить  $\delta_2$ , а, следовательно, и дополнительное перемещение зонда:  $\Delta\delta = \delta_2 - \delta_1$ .

## 2. Сравнение полученных результатов со стандартными моделями

Для верификации модели были использованы экспериментальные данные по indentированию ненаполненного бутадиен-стирольного каучука. Использовались кантилеверы CSG-30 (производитель TipsNano, Estonia). Радиус закругления в вершине зонда составляет  $R = 10$  нм. Жесткость балки кантилевера  $k = 0.417$  Н/м.

На рис. 7 представлены результаты применения стандартных моделей ДМТ и ДжКР для описания полученных экспериментальных данных процесса indentирования (рис. 7, черная линия). Результаты представлены в виде зависимостей изгиба кантилевера от перемещения его основания  $d(z)$ . Для определения изгиба использовалось соотношение:  $F = kd$ .



**Рис. 7.** Экспериментальные данные: зависимость изгиба кантилевера  $d$  от перемещения зонда  $z$ . Решения задачи indentирования по модели Герца, ДМТ и ДжКР

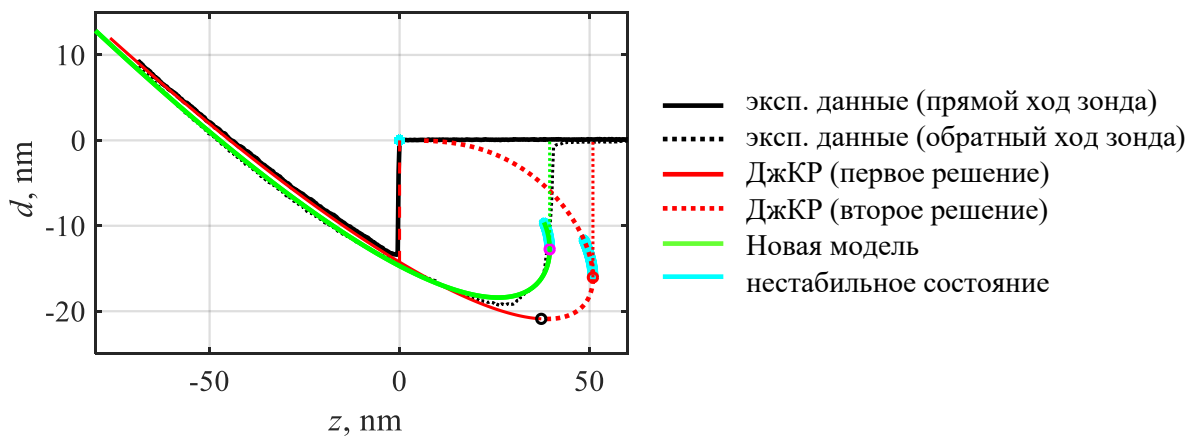
Используются понятия *прямой и обратный ход зонда*, обозначающие, соответственно, сближение зонда с образцом с последующим внедрением (сплошная линия) и извлечение зонда из образца с подъемом в начальное положение (пунктирная линия). Модель Герца представлена для наглядной демонстрации качественного отличия моделей, но очевидно, что она не способна описать скачок зонда в материал в момент его касания.

В модели ДМТ поверхность контакта является плоской, из-за чего поверхностная сила является константой. Это приводит к тому, что извлечение завершается резким отрывом, при достижении некоторого силового критерия (рис. 7, синяя пунктирная линия).

В работе [3] показано, что математическая постановка задачи по модели ДжКР дает два решения. Было доказано, что одно из них является неустойчивым. На рис. 7 показано, что с помощью второго решения можно описать более точно обратный ход зонда до момента, когда это решение не становится математически неоднозначным (для одного положения зонда определены два возможных значения изгиба). Однако подбор параметров модели не позволяет одинаково хорошо описать и процесс внедрения (мы брали эту часть кривой в приоритет при аппроксимации), и процесс извлечения зонда.

В нашей модели мы учли изменение поверхностей контакта в процессе внедрения жесткого зонда в мягкий материал образца. Таким образом, поверхность контакта – это поверхность параболоида. Кроме того, мы приняли во внимание, что до контакта поверхность, относящаяся к образцу, была кругом в недеформированном состоянии.

На рис. 8 показано сравнение возможностей новой модели с ДжКР. При достаточно хорошем описании этапа прямого хода зонда, модель гораздо лучше справляется с описанием обратного хода. Это вызвано большим числом варьируемых параметров – по сравнению с ДжКР имеется не одно значение плотности поверхностной энергии, а две (на рис. 2 указано три значения, однако энергия на поверхности 12 определяется по формуле  $\gamma_{12} = \sqrt{\gamma_1 \gamma_2}$  [20] и не является варьируемым параметром).



**Рис. 8.** Экспериментальные данные: зависимость изгиба кантилевера  $d$  от перемещения зонда  $z$ . В новой модели использовано решение задачи с малыми деформациями, но с точным учетом изменения поверхностной энергии

Поскольку силовые кривые разных моделей имеют существенное отличие только при описании процесса извлечения, то для их оценки приведем сравнение параметров расчетных силовых кривых от параметров экспериментальной силовой кривой в момент отрыва зонда от поверхности образца (табл. 1).

Точка отрыва в эксперименте:  $z = 39.3$  нм,  $\delta = -27.6$  нм,  $F = -4.87$  нН. Положение зонда  $\delta$  определяется с помощью следующего соотношения:  $\delta = -z - d$ .

**Таблица 1.** Отклонение расчетных параметров от экспериментальных в точке отрыва зонда от поверхности образца

	$\Delta z$ , нм	$\Delta \delta$ , нм	$\Delta F$ , нН
ДМТ	22.4	28.0	2.3
ДжКР	11.6	7.2	1.8
Новая модель	0.2	0.9	0.4

Для описания эксперимента установлены следующие параметры (табл. 2).

**Таблица 2.** Параметры моделей

Модель	Модуль упругости $E$ , МПа	Плотность поверхностной энергии $\gamma$ , Н/м
Герц	4	-
ДМТ	4	$\gamma_{12} = 0.115$
ДжКР	4	$\gamma_{12} = 0.185$
Новая модель	4.7	$\gamma_1 = 0.029$ , $\gamma_2 = 0.084$ , $\gamma_{12} = 0.049$

Мы получили завышенное по сравнению со стандартными моделями значение модуля упругости. Это можно объяснить тем, что новая модель вычисляет поверхностную силу на большей поверхности контакта, нежели сравниваемые модели, что создает большую втягивающую силу. Это значит, что при одной и той же внешней силе внедрения наши расчеты при одинаковых параметрах моделей будут давать большую глубину внедрения. Чтобы откорректировать (уменьшить) глубину внедрения, необходимо повысить модельный параметр модуль упругости. Это вызовет большую реакцию материала, а итоговый расчет (кривая индентирования) по новой модели даст схожие с другими моделями результаты.

## Заключение

Было проведено теоретическое обоснование необходимости точного учета явлений, связанных с появлением криволинейной границы контакта зонда с материалом. При разработке новой модели было принято во внимание изменение поверхностей контакта и соответствующее изменение поверхностной энергии. Предложен математический прием, позволяющий корректно учесть действие поверхностных сил.

Модель использует больше варьируемых параметров, что дает ей большую гибкость при аппроксимации экспериментальных данных по сравнению со стандартными моделями ДМТ и ДжКР. За счет этого она способна более точно описывать эксперимент и давать более достоверные данные о свойствах материала образца.

Разработанная модель может быть представлена в простой аналитической форме, не требующей применения приближенных методов расчета. Математическая модель может быть обобщена на случай конечных деформаций, а также применяться в сочетании с конечно-элементной моделью, что позволит анализировать свойства и структуру неоднородного материала, материала, покрытого слоем другого материала, материала с твердыми частицами наполнителя.

### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Derjaguin B.V., Muller V.M. and Toporov Y.P. Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *J. Col Interface Sci* 53(2), 314–26 (1975).
2. Greenwood, J.A., Johnson, K.L., 1998. An alternative to the Maugis model of adhesion between elastic spheres. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 31, 3279–3290.
3. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids, *Proc. R. Soc. A* 324 (1558) (1971) 301–313.
4. Maugis D. Adhesion of spheres. The JKR-DMT transition using a Dugdale model, 1992, *J. Col and Interface Sci.* Vol. 150. № 1, 243–269.
5. Sneddon I.N. The relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile, 1965, *Int. J. of Eng. Sci.* Vol. 3, P. 47–57.
6. Hertz H., 1881. On the contact of elastic solids. *J. Reine Angew. Math.* 92, 156–171.
7. Muller V.M., Yushenko V.S., Derjaguin, B.V. 1980. On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid contact. *J. Colloid Interface Sci.* 77, 91–101.
8. Greenwood J.A., Johnson K.L. 1981. The mechanics of adhesion of viscoelastic solids. *Philo. Mag.* 43, 697–711.
9. Kim K.S., McMeeking R.M., Johnson K.L., 1998. Adhesion, slip cohesive zone and energy fluxes for elastic spheres in contact. *J. Mech. Phys. Solids* 46, 243–266.
10. Morrow C., Lovell M., Ning X. 2003. A JKR-DMT transition solution for adhesive rough surface contact. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 36, 534–540.
11. Chen S., Yan C., Zhang P., Gao H. Mechanics of adhesive contact on a power-law graded elastic half-space. *J. of the Mech and Physics of Solids* 57 (2009), 1437–1448.
12. Zhang X., Wang Q. J., Wang Y., Wang Z., Shen H., Liu J. Contact involving a functionally graded elastic thin film and considering surface effects. *Int. J. of Solids and Structures* 150 (2018) 184–196.
13. El-Borgi S., Comez I., A Receding Frictional Contact Problem between a Graded Layer and a Homogeneous Substrate Pressed by a Rigid Punch. *Mech Mat* 114 (2017) 201–214.
14. Yilmaz K.B., Comez I., Yildirim B., et. al. Frictional receding contact problem for a graded bilayer system indented by a rigid punch. *Int. J. Mech Sci* 141 (2018) 127–142.
15. Uzhegova N.I.; Svistkov A.L.; Lauke B. The influence of capillary effect on atomic force microscopy measurements. *Int. J. Eng Sci.* 2014. Vol. 75. P. 67–78.
16. Li X. and Mi C. Effects of surface tension and Steigmann–Ogden surface elasticity on Hertzian contact properties / *Int. J. Eng Sci* 145 (2019) 103165.
17. Weike Y., Wang G. Cylindrical indentation of an elastic bonded layer with surface tension. *Applied Mathematical Modelling* 65 (2019), 597–613.
18. Izumov R.I., Svistkov A.L. Effect of surface tension forces on changes in the surface relief of the elastomer nanocomposite. *Nanosci. Technol. Int. J.* 10(1), 51–66 (2019).
19. Style, R.W., et. al.: Surface tension and contact with soft elastic solids. *Nat. Commun.* 4, 2728–2733 (2013).
20. Marshall J.S., Li Sh. Adhesive particle flow: a discrete-element approach. Cambridge University Press, New York (2014).

### References

1. Derjaguin, B.V., Muller, V.M. and Toporov, Y.P.: Effect of contact deformations on the adhesion of particles. *J. Col Interface Sci* 53(2), 314–26 (1975).
2. Greenwood, J.A., Johnson, K.L., 1998. An alternative to the Maugis model of adhesion between elastic spheres. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 31, 3279–3290.
3. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. Surface energy and the contact of elastic solids, *Proc. R. Soc. A* 324 (1558) (1971) 301–313.

4. Maugis D. Adhesion of spheres. The JKR-DMT transition using a Dugdale model, 1992, *J. Col and Interface Sci*, Vol. 150, no. 1, 243-269.
5. Sneddon I.N. The relation between load and penetration in the axisymmetric boussinesq problem for a punch of arbitrary profile, 1965, *Int. J. of Eng. Sci.* Vol. 3, pp. 47-57.
6. Hertz H., 1881. On the contact of elastic solids. *J. Reine Angew. Math.* 92, 156–171.
7. Muller, V.M., Yushenko, V.S., Derjaguin, B.V., 1980. On the influence of molecular forces on the deformation of an elastic sphere and its sticking to a rigid contact. *J. Colloid Interface Sci.* 77, 91–101.
8. Greenwood, J.A., Johnson, K.L., 1981. The mechanics of adhesion of viscoelastic solids. *Philo. Mag.* 43, 697–711.
9. Kim, K.S., McMeeking, R.M., Johnson, K.L., 1998. Adhesion, slip cohesive zone and energy fluxes for elastic spheres in contact. *J. Mech. Phys. Solids* 46, 243–266.
10. Morrow, C., Lovell, M., Ning, X., 2003. A JKR-DMT transition solution for adhesive rough surface contact. *J. Phys. D: Appl. Phys.* 36, 534–540.
11. Chen, S., Yan, C., Zhang P., Gao H.. Mechanics of adhesive contact on a power-law graded elastic half-space. *J. of the Mech and Physics of Solids* 57 (2009), 1437–1448.
12. Zhang X., Wang Q. J., Wang Y., Wang Z., Shen H., Liu J. Contact involving a functionally graded elastic thin film and considering surface effects. *Int. J. of Solids and Structures* 150 (2018) 184–196.
13. El-Borgi S., Comez I., A Receding Frictional Contact Problem between a Graded Layer and a Homogeneous Substrate Pressed by a Rigid Punch. *Mech Mat* 114 (2017) 201–214.
14. Yilmaz K.B., Comez I., Yildirim B., et. al. Frictional receding contact problem for a graded bilayer system indented by a rigid punch. *Int. J. Mech Sci* 141 (2018) 127–142.
15. Uzhegova N.I.; Svistkov A.L.; Lauke B. The influence of capillary effect on atomic force microscopy measurements. *Int. J. Eng Sci.* 2014. Vol. 75. P. 67-78.
16. Li X. and Mi C. Effects of surface tension and Steigmann–Ogden surface elasticity on Hertzian contact properties / *Int. J. Eng Sci* 145 (2019) 103165.
17. Weike Y., Wang G. Cylindrical indentation of an elastic bonded layer with surface tension. *Applied Mathematical Modelling* 65 (2019), 597–613.
18. Izyumov, R.I., Svistkov, A.L.: Effect of surface tension forces on changes in the surface relief of the elastomer nanocomposite. *Nanosci. Technol. Int. J.* 10(1), 51–66 (2019).
19. Style, R.W., et. al.: Surface tension and contact with soft elastic solids. *Nat. Commun.* 4, 2728–2733 (2013).
20. Marshall, J.S., Li, Sh.: *Adhesive particle flow: a discrete-element approach.* Cambridge University Press, New York (2014).

#### **Информация об авторах:**

*А. Л. Свистков* – доктор физико-математических наук, зав. лаб. микромеханики структурно-неоднородных сред ИМСС УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), WoS ID: M-2112-2016 Scopus ID: 6701550738, РИНЦ ID: 3604;

*Р. И. Изюмов* – младший научный сотрудник лаб. микромеханики структурно-неоднородных сред ИМСС УрО РАН (614018, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), WoS ID: J-4556-2018 Scopus ID: 57197705275, РИНЦ ID: 642321.

#### **Information about the authors:**

*A. L. Svistkov* – doctor of physical and mathematical sciences, head of the laboratory of micromechanics of structurally inhomogeneous media ICMM UB RAS (1, Academica Koroleva St., Perm, Russia, 614018), WoS ID: M-2112-2016 Scopus ID: 6701550738, РИНЦ ID: 3604;

*R. I. Izyumov* – junior researcher of the laboratory of micromechanics of structurally inhomogeneous media ICMM UB RAS (1, Academica Koroleva St., Perm, Russia, 614018), WoS ID: J-4556-2018 Scopus ID: 57197705275, РИНЦ ID: 642321.

## МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 532.685, 532.5.013.4

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-46-64

<https://elibrary.ru/NYEHWX>**Параметрическое возбуждение концентрационной конвекции  
в замкнутой области пористой среды  
при наличии иммобилизации частиц примеси****Борис Сергеевич Марышев<sup>1</sup>, Людмила Сергеевна Клименко<sup>2</sup>**<sup>1,2</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия<sup>1,2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия<sup>1</sup>[bmaryshev@mail.ru](mailto:bmaryshev@mail.ru)<sup>2</sup>[lyudmilaklimenko@gmail.com](mailto:lyudmilaklimenko@gmail.com)

**Аннотация.** Проведено математическое моделирование изучения влияния модуляции потока жидкости на концентрационную конвекцию в замкнутой области пористой среды с учетом иммобилизации примеси на стенках пор. Транспорт примеси с учетом эффекта иммобилизации (осаждения) частиц примеси на стенках пор моделируется в рамках МММ подхода, фильтрация смеси в замкнутой области рассматривается в приближении Дарси–Буссинеска. В результате, получено точное решение поставленной задачи, настоящее решение описывает одномерную фильтрацию в горизонтальном направлении через рассматриваемую замкнутую область пористой среды. В линейном приближении решена задача устойчивости полученного точного решения. Метод решения задачи устойчивости разработан на основе подхода Галеркина. Построены нейтральные кривые в пространстве параметров задачи, исследована синхронизация возмущений с внешней модуляцией потока. Описана возможность управления возбужденными конвективными режимами за счет модуляции внешнего потока жидкости (прокачки).

**Ключевые слова:** *фильтрация; транспорт в пористой среде; конвекция; иммобилизация; модулированный поток; параметрическое возбуждение неустойчивости; метод Галеркина; управление конвективными течениями*

**Для цитирования:** *Марышев Б.С., Клименко Л.С. Параметрическое возбуждение концентрационной конвекции в замкнутой области пористой среды при наличии иммобилизации частиц примеси // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 46-64. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-46-64. <https://elibrary.ru/NYEHWX>.*

**Благодарности:** работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (бюджетная тема № 121031700169-1).

*Статья поступила в редакцию 25.10.2024; одобрена после рецензирования 06.12.2024; принята к публикации 12.12.2024.*



Эта работа © 2024 Марышев Б.С., Клименко Л.С. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## MECHANICS

Research article

# Parametric Excitation of Concentration Convection in a Closed Region of a Porous Medium in the Presence of Solute Particle Immobilisation

**Boris. S. Maryshev<sup>1</sup>, Lyudmila. S. Klimenko<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Perm State University, Perm, Russia

<sup>1,2</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia

<sup>1</sup>bmaryshev@mail.ru

<sup>2</sup>lyudmilaklimenko@gmail.com

**Abstract.** Mathematical modelling of the effect of fluid flow modulation on concentration convection in a closed region of a porous medium taking into account the immobilisation of impurity on pore walls has been carried out. Transport of impurity taking into account the effect of immobilisation (deposition) of impurity particles on pore walls is modelled in the framework of MIM approach, filtration of mixture in a closed region is considered in the Darcy-Boussinesq approximation. As a result, an exact solution of the problem has been obtained; the present solution describes one-dimensional filtration in the horizontal direction through the considered closed region of the porous medium. The stability problem of the obtained exact solution is solved in linear approximation. The method of solving the stability problem is developed on the basis of the Galerkin approach. Neutral curves in the parameter space of the problem are constructed, and the synchronisation of perturbations with external flow modulation is studied. The possibility of controlling excited convective modes by modulating the external fluid flow (pumping) is described.

**Keywords:** *filtration; transport in porous media; convection; immobilisation; modulated flow; parametric instability excitation; Galerkin method; control of convective flows*

**For citation:** Maryshev, B.S., Klimenko, L.S. (2024), "Parametric Excitation of Concentration Convection in a Closed Region of a Porous Medium in the Presence of Solute Particle Immobilisation", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), pp. 46-64. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-46-64. <https://elibrary.ru/NYEHWX>.

**Acknowledgments:** the work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (budget topic № 121031700169-1).

*The article was submitted 25.10.2024; approved after reviewing 06.12.2024; accepted for publication 12.12.2024.*

## Введение

Изучение транспортных процессов в пористых средах представляет интерес, как с фундаментальной, так и прикладной точки зрения. Это связано с тем фактом, что, несмотря на свою сложность (случайность и нерегулярность структуры пористого скелета), современные математические подходы в рамках механики сплошной среды позволяют с помощью численных методов решить огромный пласт задач. Кроме того, полученные фундаментальные решения находят свое практическое применение в широком спектре приложений. Так, например, фильтрационные процессы в пористых средах являются актуальными при добыче нефти и газа, находящихся в осадочных горных породах. А широко используемые в промышленности и быту фильтрационные системы могут быть спрогнозированы с помощью математического моделирования.

Первые исследования неустойчивости, связанные с возникновением тепловой конвекции, были проведены для пористого горизонтального слоя.

Данная задача в литературе называется классической задачей Хортона–Роджерса–Лэпвуда (ХРЛ) [1, 2]. Основному состоянию соответствует постоянный равновесный градиент температуры поперек слоя, течение при этом отсутствует. Неустойчивость возникает пороговым образом, при достижении определенного уровня нагрева между стенками, что характеризуется безразмерным числом Рэля–Дарси. Этот параметр связан с действием сил плавучести. В работе [1] было показано, что конвекция в таком слое возникает монотонным образом при пороговом значении числа Рэля–Дарси ( $\sim 4\pi^2$ ).

Было исследовано влияние навязанного потока жидкости вдоль слоя (прокачки) на возникновение конвекции в рамках задачи ХРЛ [3]. В этом случае в системе появляется еще один управляющий параметр – число Пекле. В работах [3] был рассмотрен случай стационарной прокачки, показано, что порог возникновения устойчивости не меняется. Однако теперь режим возникновения конвекции сменяется на колебательный, при этом частота возникающих колебаний линейным образом зависит от числа Пекле (скорости потока).

Настоящие результаты были подтверждены экспериментально [4] в ходе изучения конвекции в замкнутой длинной области пористой среды (соотношение длины к ширине  $3 \setminus 1$ ). Этот результат был также проанализирован с помощью аналитических и численных методов в работах [5, 6]. Было обнаружено, что для малых значений интенсивности прокачки и достаточно узких областей конвекция все же возникает монотонным образом, при этом интенсивность теплопереноса пропорциональна квадрату числа Пекле. Таким образом, в замкнутых полостях имеет место переход от монотонного конвективного течения к колебательному в зависимости от размеров области и числа Пекле. Изучению такого перехода посвящена работа [7], в которой обсуждаются критерии такого перехода и приведены карты существования колебательного режима в зависимости от параметров задачи.

Современный подход к изучению конвекции в пористой среде связан с учетом иммобилизации (осаждения) частиц примеси на стенках пористого скелета. Так, в ряде экспериментов [8–10] было продемонстрировано, что транспорт примеси является более сложным и не подчиняется классической линейной модели "диффузии–адвекции" (ADE – advection diffusion equation) [11]. Для учета взаимодействия частиц примеси со скелетом была предложена сплошнородная МИМ модель (mobile/immobile media) [12]. Согласно этой модели предполагается, что примесь состоит из двух фаз: мобильной (подвижной) и немобильной (адсорбированной). Переход примеси из одной фазы в другую описывается с помощью дополнительного уравнения, учитывающего механизм взаимодействия примеси со стенкой. Подробное описание приведено в следующем разделе.

В рамках МИМ модели было исследовано влияния параметров сорбции на колебательный режим конвекции. Были рассмотрены различные модели (линейная, фрактальная, нелинейная) [13–15], а также произведен учет снижения проницаемости и возможной закупорки среды в результате осаждения примеси на стенках пор [16]. Было показано, что в целом учет иммобилизации частиц примеси приводит к повышению устойчивости основного течения и затуханию колебательной динамики системы.



В рамках настоящей работы планируется исследовать возможность управления конвективным течением при помощи модулированного во времени внешнего потока.

Возможность управления конвективным течением за счет периодического внешнего воздействия является широко изученной задачей, востребованной во многих технологических процессах. Так, влияние модуляции температуры на границах на порог возникновения тепловой конвекции в горизонтальном слое однородной жидкости изучалось в [17–18]. Было показано, что модуляция вызывает тепловые волны, которые диффузно распространяются между границами слоя. В работах [19] и [20] теоретически и экспериментально изучена тепловая конвекция для ситуации, в которой движущая сила периодически изменяется во времени. Это изменение может происходить из-за изменений температуры на границах или из-за вертикальных вибраций, вызывающих изменение силы тяготения. Было получено, что в целом модуляция приводит к стабилизации основного состояния.

Если в отсутствии модуляции конвекция возбуждается колебательным образом, добавление модуляции приводит к более сложным системам уравнений и расширяет спектр возможного отклика. В таких системах следует ожидать появления трех типов отклика: синхронного, субгармонического и квазипериодического. Подобное поведение встречается в неоднородных системах под действием переменных воздействий различной природы: переменных тепловых полей [21], электрических полей [22] или вибраций [23].

В настоящей работе получены и проанализированы описанные типы отклика под действием модуляции приложенного давления. Ожидается, что такой тип модуляции может быть легко воспроизведен в экспериментальных и технологических условиях.

## **1. Модель транспорта примеси в пористой среде с учетом иммобилизации**

Транспорт через пористую среду зачастую осложняется взаимодействием примеси с твердой матрицей среды. Такое взаимодействие может иметь различную природу: химическую [24], бактериальную [25], механическое затыкание узких мест [26] и наиболее общий эффект – физическая сорбция [27], обеспечиваемая силами Ван-дер-Ваальса [28]. Все перечисленные выше взаимодействия приводят к тому, что взаимодействующая примесь перестает двигаться. Транспортный процесс замедляется и не может быть описан на основе стандартной модели адвекции-диффузии (ADE) [11]. Экспериментально показано [8–10], что наблюдается более медленный процесс, чем предсказывает (ADE). Наиболее продуктивным представляется подход к описанию в рамках концепции мобильно-немобильной среды (*mobile/immobile media* (MIM)) [12]. Так, примесь может быть разделена на две компоненты: мобильную (подвижную) и немобильную (связанную). Мобильная перемещается в среде с потоком несущей жидкости или благодаря диффузии. Немобильная примесь перемещаться не может, она не участвует в транспорте напрямую, но мобильная примесь может переходить в немобильное состояние и наоборот.

Таким образом, опосредованное влияние все же есть. Кинетика иммобилизации примеси обычно описывается специальным кинетическим уравнением, конкретный вид уравнения определяется механизмом взаимодействия. Так, в случае малой концентрации примеси применима линейная MIM модель [13].

Для несжимаемой смеси транспортные уравнения в рамках выбранной модели могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(Q/\phi + C) &= -\mathbf{u} \cdot \nabla C + D\Delta C, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= \alpha(C - K_d C), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $C$ ,  $Q$  – объемные концентрации мобильной и немобильной компонент соответственно,  $\mathbf{u}$  – вектор скорости фильтрации,  $\alpha$  – коэффициент переноса примеси,  $K_d$  – коэффициент распределения примеси,  $\phi$  – пористость среды. Стоит заметить, что характерные значения концентраций  $C$  и  $Q$  в рамках выбранной модели должны быть существенно меньше пористости среды  $\phi$ . Таким образом, иммобилизация примеси не оказывает существенного влияния на характеристики среды (пористость и проницаемость).

В качестве закона фильтрации будем использовать известную модель Дарси–Буссинеска [29]:

$$\mathbf{u} = -\frac{\kappa}{\eta} \nabla P + \rho_l \beta_c C \mathbf{g}. \quad (1.2)$$

где  $\kappa$  – проницаемость среды,  $\eta$  – кинематическая вязкость,  $\rho_l$  – плотность несущей жидкости,  $P$  – отклонение давления от гидростатического распределения,  $\beta_c$  – коэффициент концентрационного расширения,  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения.

## 2. Постановка задачи

В настоящей работе решается задача о возникновении концентрационной конвекции в прямоугольной области пористой среды, при заданном вертикальном перепаде концентрации, модуляции фильтрационного потока и учете взаимодействия примеси с твердой матрицей среды. Схема задачи представлена на рис. 1.

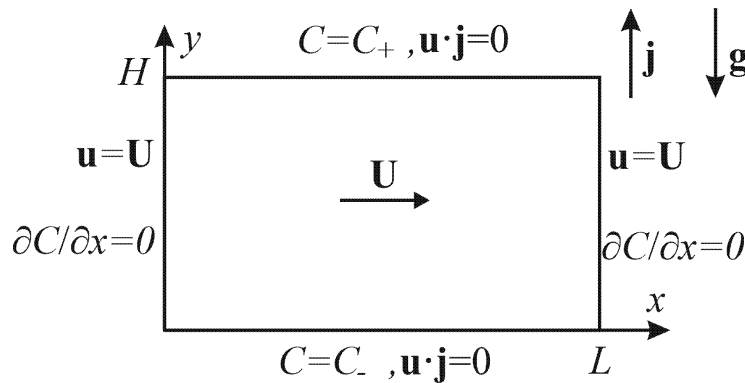


Рис. 1. Схема задачи

Как известно [29], наличие вертикального перепада концентрации тяжелой примеси ( $C_+ > C_-$ ) создает неустойчивую стратификацию в поле тяжести, что приводит к возникновению конвективного течения. Ранее в работе [7] нами было исследовано возникновение конвекции в отсутствие модуляции потока. Было показано, что конвекция может возникать как монотонным, так и колебательным образом, в зависимости от параметров задачи. При этом в узких областях наблюдается монотонная мода неустойчивости, а в длинных – колебательная мода. Наличие собственных колебаний обычно дает возможность управлять конвективным течением при помощи модуляции потока.

Поэтому в рассмотренной задаче на границе задается условие на модулированный поток в рамках модели (1.1)–(1.2). Будем предполагать, что область ориентирована горизонтально в поле сил тяжести, горизонтальные границы считаются не проницаемыми для жидкости, на вертикальных границах задана скорость фильтрации, а для концентрации использовано условие свободного протекания (отсутствует только диффузионный поток, т.е., например, установлена мембрана):

$$\begin{aligned} C|_{y=H} = C_+, \quad C|_{y=0} = C_-, \quad w|_{y=0,H} = 0, \\ \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=0,L} = 0, \quad u|_{x=0,L} = U = U_0 + U_a \sin \Omega t, \quad w|_{x=0,L} = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь использованы обозначения:  $\mathbf{j}$  – единичный вектор, направленный вверх,  $U$  – заданная скорость горизонтального потока,  $U_0$  – средняя скорость потока,  $U_a$  – амплитуда модуляции скорости,  $\Omega$  – частота модуляции. Обезразмерим задачу (1.1), (1.2), (2.1), для этого используем следующие масштабы расстояния, времени, давления, фильтрационной скорости, мобильной и немобильной концентраций, соответственно:

$$\begin{aligned} [L] = H, \quad [t] = \frac{H^2}{D}, \quad [p] = \frac{U\eta H}{\kappa}, \quad [u, w] = \frac{\phi D}{H}, \quad [C] = C_+ - C_- = C_0, \\ [Q] = \phi C_0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В безразмерной форме задача может быть записана как:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(Q + C) &= -\mathbf{u} \cdot \nabla C + \Delta C, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= aC - bQ, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u} &= -Pe \nabla P - RpC\mathbf{j}, \quad \mathbf{u} = (u, w), \\ C|_{y=1} &= 1, \quad C|_{y=0} = 0, \quad w|_{y=0,1} = 0, \\ \left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=0,l} &= 0, \quad u|_{x=0,l} = Pe + A \sin \omega t, \quad w|_{x=0,l} = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Задача (2.3) содержит семь безразмерных параметров: число Релея–Дарси, характеризующее действие сил плавучести:  $Rp = \kappa \rho_l \beta_c g H C_0 / (\phi \eta D)$ , число Пекле, характеризующее интенсивность внешней фильтрации:  $Pe = \phi U_0 H / D$ , безразмерные параметры адсорбции и десорбции, соответственно:  $a = \alpha H^2 / (D\phi)$  и  $b = \alpha K_d H^2 / D$ , геометрический параметр:  $l = L/H$ , амплитуда и частота модуляции скорости внешней фильтрации:  $A = \phi U_a H / D$  и  $\omega = \Omega H^2 / D$ . Она допускает решение, описывающее режим однородной горизонтальной фильтрации, аналогичное [13,15,16].

Решение может быть записано в форме:

$$\begin{aligned} C = C_1(y) = y, \quad Q = Q_1(y) = \frac{a}{b} y, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 = (Pe + A \sin \omega t, 0), \\ P = P_1(x, y) = -\left(1 + \frac{A}{Pe} \sin \omega t\right) x - \frac{Rp}{Pe} \frac{y^2}{2}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Нижний индекс "1" означает, что решение соответствует одномерному режиму горизонтальной фильтрации. Это решение может быть неустойчиво по отношению к двумерным возмущениям, поскольку оно задает неустойчивую стратификацию. Конвективное течение возникает как вследствие такой неустойчивости. Рассмотрим малые, двумерные возмущения полученного решения (2.4):

$$C - C_1 = c \ll 1, \quad Q - Q_1 = q \ll 1, \quad P - P_1 = p \ll 1, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \left( \frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right), \quad |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| \ll \max\{Pe, A\},$$

где  $\psi$  – функция тока для возмущений фильтрационной скорости. Подставим возмущения (2.5) в задачу (2.3) и линеаризуем ее.

В результате получим:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = Rp \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = ac - bq, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial t} = -(Pe + A \sin \omega t) \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2},$$

$$c|_{y=0,1} = 0, \quad \psi|_{y=0,1} = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=0,l} = 0, \quad \psi|_{x=0,l} = 0.$$

Задача (2.6) описывает возникновение конвективного течения, метод ее решения представлен в следующем параграфе.

### 3. Метод решения задачи устойчивости

Симметрия задачи (2.6) относительно вертикальной координаты ( $y$ ) позволяет искать решение в следующей, нормальной форме:

$$c = \bar{c}(x, t) \sin(\pi y),$$

$$q = \bar{q}(x, t) \sin(\pi y),$$

$$\psi = \bar{\psi}(x, t) \sin(\pi y). \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.6) имеем:

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x^2} - \pi^2 \bar{\psi} = Rp \frac{\partial \bar{c}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = -f(t) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - \pi^2 \bar{c} - a\bar{c} + b\bar{q}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = a\bar{c} + b\bar{q},$$

$$\left. \frac{\partial \bar{q}}{\partial x} \right|_{x=0,l} = 0, \quad \left. \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right|_{x=0,l} = 0, \quad \bar{\psi}_{x=0,l} = 0,$$

где  $f(t) = Pe + A \sin \omega t$ . Для поиска полей концентрации и функции тока воспользуемся методом Галеркина в модификации Канторовича+ [30]. В качестве базиса выберем тригонометрические функции, поскольку в отсутствие внешнего потока они являются точным решением задачи. Тогда для искомым полей имеем:

$$\bar{c} = \sum_{n=1}^N c_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad \bar{q} = \sum_{n=1}^N q_n(t) \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \quad (3.3)$$

$$\bar{\psi} = \sum_{n=1}^N \psi_n(t) \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Подставляя в (3.2) находим

$$\begin{aligned}
 \pi^2 \sum_{n=1}^N \psi_n \left( \frac{n^2}{l^2} + 1 \right) \sin \left( \frac{\pi n x}{l} \right) &= \pi R p \sum_{n=1}^N \frac{n}{l} c_n \sin \left( \frac{\pi n x}{l} \right), \\
 \sum_{n=1}^N \frac{dq_n}{dt} \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right) &= a \sum_{n=1}^N c_n \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right) - b \sum_{n=1}^N q_n \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right), \\
 \sum_{n=1}^N \frac{dc_n}{dt} \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right) &= \pi f(t) \sum_{n=1}^N \frac{n}{l} c_n \sin \left( \frac{\pi n x}{l} \right) + \pi \sum_{n=1}^N \frac{n}{l} \psi_n \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right) \\
 -\pi^2 \sum_{n=1}^N c_n \left( \frac{n^2}{l^2} + 1 + \frac{a}{\pi^2} \right) \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right) &+ b \sum_{n=1}^N q_n \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Заметим, что первое уравнение системы (3.4) эквивалентно следующему соотношению:

$$\psi_n = \frac{R p}{\pi} \frac{n l}{n^2 + l^2} c_n. \tag{3.5}$$

С учетом соотношения (3.5) уравнения (3.4) могут быть упрощены:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^N \frac{dc_n}{dt} \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right) + \sum_{n=1}^N \left[ \pi^2 \left( \frac{n^2}{l^2} + 1 \right) + a - \frac{R p n^2}{n^2 + l^2} \right] c_n \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right) &= \\
 = \pi f(t) \sum_{n=1}^N \frac{n}{l} c_n \sin \left( \frac{\pi n x}{l} \right) + b \sum_{n=1}^N q_n \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right), \\
 \sum_{n=1}^N \frac{dq_n}{dt} \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right) &= \sum_{n=1}^N (a c_n - b q_n) \cos \left( \frac{\pi n x}{l} \right).
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Согласно процедуре метода Галеркина [30], помножим каждое из уравнений (3.6) на  $\cos(\pi n x/l)$  и проинтегрируем по координате  $x$  вдоль длины рассматриваемой области (т.е. на отрезке  $x \in [0, l]$ ), в результате получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{dc_k}{dt} + B_k c_k - b q_k - \sum_{n=1}^N G_{k,n} c_n &= 0, \quad \frac{dq_k}{dt} = a c_k - b q_k, \quad k = 1..N, \\
 B_k &= a + \pi^2 \left( \frac{k^2}{l^2} + 1 \right) - \frac{R p k^2}{k^2 + l^2},
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$G_{k,n} = \begin{cases} 0, & k = n, \\ \frac{f(t)}{l} [(-1)^{k+n} - 1] \frac{2n^2}{k^2 - n^2}, & k \neq n. \end{cases}$$

Задача (3.7) представляет собой систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $(c_n, q_n)$ , определяющих поведение возмущений основного состояния (2.4). Поскольку решается задача устойчивости, основной интерес представляет поведение возмущений на больших временах (рост или затухание). Поскольку коэффициенты уравнений (3.7) периодичны по времени, то, согласно теории Флоке [31], достаточно проследить за общим решением за один период модуляции. Поскольку система (3.7) имеет размерность  $2N$ , то решение может быть представлено в виде вектора:

$$\mathbf{S} = (c_1, c_2, \dots, c_N, q_1, q_2, \dots, q_N). \tag{3.8}$$

Начальное условие для системы (3.7) может быть выбрано произвольным образом, представим начальный вектор  $\mathbf{S}(t=0)$  в виде разложения по декартовому базису в  $2N$  – мерном пространстве, а именно:

$$\mathbf{S}(t = 0) = \sum_{i=1}^{2N} H_i \mathbf{R}_i(t = 0), \quad (\mathbf{R}_i(t = 0))_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad i, j = 1..2N \quad (3.9)$$

где  $H_i$  – произвольные коэффициенты,  $\mathbf{R}_i(t=0)$  – базисный вектор с номером  $i$  в евклидовом пространстве размерности  $2N$ , индекс  $j$  – номер компоненты вектора,  $\delta_{i,j}$  – символ Кронекера. Согласно теории Флоке [24], предположим, что имеет место соотношение:

$$\mathbf{S}\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) = \mu \mathbf{S}(t = 0), \quad (3.10)$$

где  $\mu$  – мультипликатор решения за период внешней модуляции. Для уравнения (3.10) с учетом разложения (3.9) имеем:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) &= \sum_{i=1}^{2N} H_i \mathbf{R}_i\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right) = \mu \sum_{i=1}^{2N} H_i \mathbf{R}_i(t = 0), \\ \left(\mathbf{R}_i\left(t = \frac{2\pi}{\omega}\right)\right)_j &= F_{i,j} \Rightarrow \sum_{i=1}^{2N} H_i F_{i,j} = \mu \sum_{i=1}^{2N} H_i \delta_{i,j}, \quad j = 1..2N. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Мультипликатор определяется решением задачи (3.11), поскольку коэффициенты  $H_i$  произвольны, мультипликатор может быть найден как корень уравнения:

$$\begin{vmatrix} F_{1,1} - \mu & F_{1,2} & \dots & F_{1,2N} \\ F_{2,1} & F_{2,2} - \mu & \dots & F_{2,2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{2N,1} & F_{2N,2} & \dots & F_{2N,2N} - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) имеет  $2N$  корней, которые в общем виде являются комплексными числами. При этом из (3.10) очевидно, что для роста возмущений необходимо  $|\mu_{max}| > 1$ , а для затухания  $|\mu_{max}| < 1$ , где  $\mu_{max}$  – максимальный по модулю корень уравнения (3.12). Граница устойчивости определяется соотношением  $|\mu_{max}| = 1$  характерным для нейтральных возмущений. Наложение на задачу (3.7) дополнительного условия  $|\mu_{max}| = 1$  позволяет определить значения одного из параметров как критическое, обычно среди параметров выбирают число Релея–Дарси, как параметр ответственный за возникновение конвективного течения.

Таким образом, решение задачи устойчивости свелось к решению системы дифференциальных уравнений (3.7) на одном периоде модуляции, для  $2N$  различных начальных условий в форме (3.9). После чего из полученных решений составляется матрица  $\mathbf{F}$ , для которой находится максимальное собственное число. Система (3.7) решалась численно с помощью метода Рунге–Кутты–Мерсона 4-го порядка точности [32], нахождение собственных значений матрицы осуществляется с помощью QR-алгоритма [33] совмещенного с преобразованием Хаусхолдера [34] для исходной матрицы.

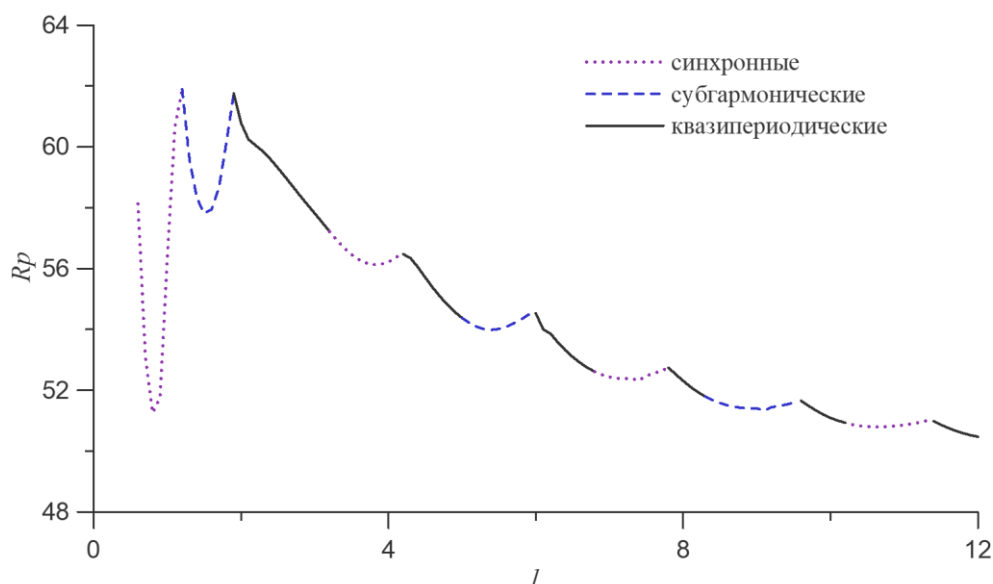
Результаты сходимости метода в зависимости от числа функций  $N$  в разложении (3.3) представлены в приложении, в расчетах использовано значение  $N=40$ .

В следующем параграфе представлены и обсуждены результаты решения в виде зависимостей критического значения числа Релея–Дарси от других параметров задачи.

#### 4. Результаты

Конвективное течение, как говорилось выше, возбуждается при достижении числом Рейля–Дарси некоторого критического значения, соответствующего условию  $|\mu_{max}|=1$ . При этом возможно несколько случаев, во-первых, мультипликатор может быть действительным числом или комплексным. Если мультипликатор действительный, может быть два случая:  $\mu_{max}=1$  и  $\mu_{max}=-1$ . В первом случае ( $\mu_{max}=1$ ), частота возмущений совпадает с частотой внешней модуляции. Такие возмущения принято [31] называть синхронными. Во втором случае ( $\mu_{max}=-1$ ), частота возмущений в два раза меньше частоты модуляции, возмущения принято называть субгармоническими. В случае же если мультипликатор комплексный возмущения обычно называются квазипериодическими.

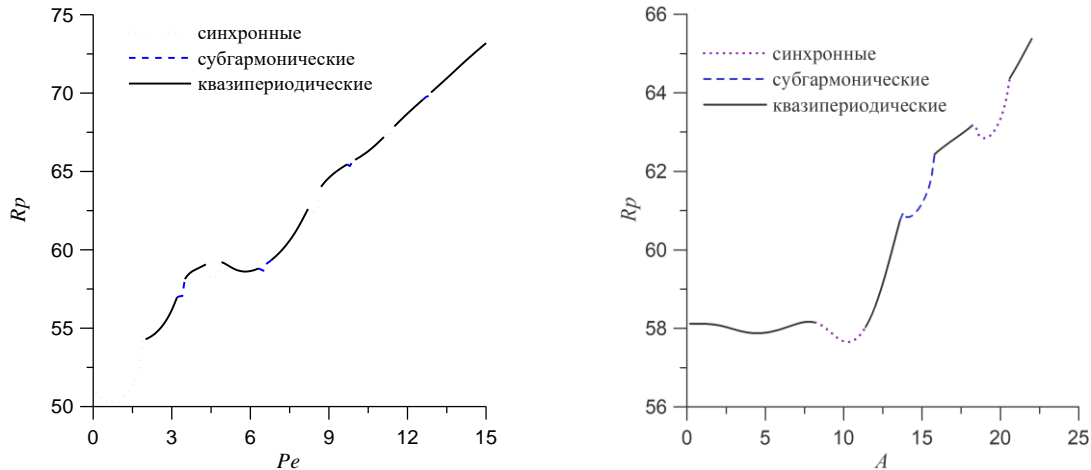
На рис. 2 приведена зависимость критического значения числа Рейля–Дарси от длины области (параметр  $l$ ), различными типами линий показаны разные типы возмущений.



**Рис. 2.** Зависимость критического значения числа Рейля–Дарси ( $R_p$ ) от параметра  $l$ , различные типы возмущений выделены разными линиями (указано в легенде). Значения остальных параметров задачи:  $a=8$ ,  $b=4$ ,  $Pe=7$ ,  $A=7$ ,  $\omega=5$

Рисунок 2 демонстрирует, что для узких полостей возможен только синхронный с внешней модуляцией режим возбуждения конвекции, что связано с отсутствием колебательной моды неустойчивости в отсутствие модуляции [7]. При увеличении длины рабочей области возникает субгармоническая неустойчивость, характерная для систем с параметрическим возбуждением типа уравнения Матье [31]. Заметим, что уравнение Матье является простейшей системой, в которой наблюдается параметрический резонанс. В рамках такой системы не наблюдается квазипериодический отклик системы. Мы же исследуем отклик сложной распределенной гидродинамической системы, в таких системах картина намного сложнее как это можно видеть, в том числе из работ [19–23]. По мере увеличения длины рабочей области, наблюдаются различные типы возмущений, в целом график выглядит как набор характерных для параметрического возбуждения резонансных мешков.

В нижней части мешка (вблизи локального минимума) всегда наблюдается область синхронизации отклика с модуляцией, это связано с возможностью уложить в область целое число конвективных ячеек. Для очень длинных областей  $l \gg 10$  "мешки" становятся очень "мелкими", и зависимость выходит на асимптоту характерную для бесконечного слоя (для параметров использованных при расчете (рис. 2)  $\lim_{l \rightarrow \infty} R_p \approx 46.2$ , см. [13]).



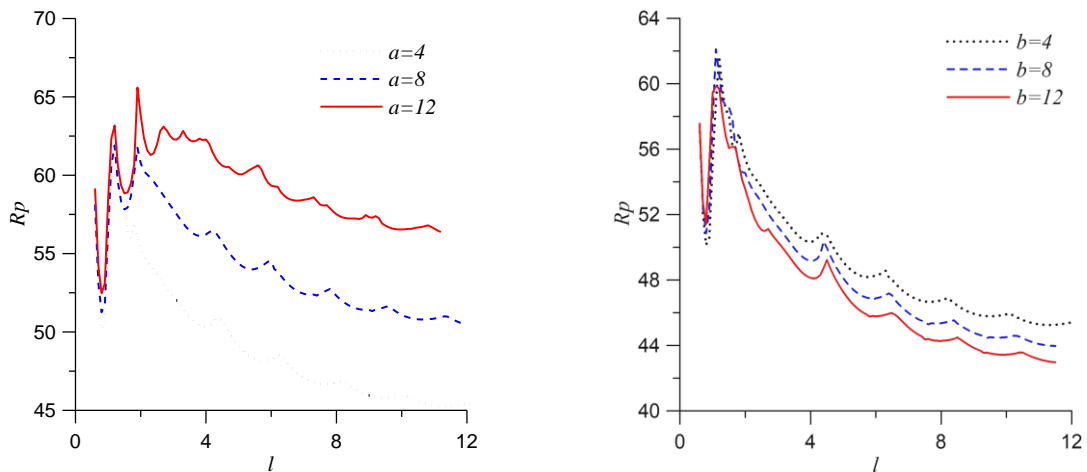
**Рис. 3.** Зависимости критического значения числа Релея–Дарси ( $R_p$ ) от числа Пекле (слева для  $A=7$ ) и от амплитуды модуляции (справа для  $Pe=7$ ), различные типы возмущений выделены разными линиями (указано в легенде). Значения остальных параметров задачи:  $a=8$ ,  $b=4$ ,  $\omega=5$ ,  $l=3$

На рис. 3 показаны зависимости критических значений числа Релея–Дарси от числа Пекле и амплитуды модуляции. Видно, что в обоих случаях имеется тенденция к стабилизации течения (росту  $R_p$ ) с увеличением интенсивности прокачки, что является известным фактом [3, 7, 13]. При малых числах Пекле наблюдается синхронный отклик, поскольку собственная частота мала (она пропорциональна  $Pe$  см. [3, 13]). С ростом числа Пекле наиболее часто наблюдается квазипериодический отклик, но присутствуют "мешки", характерные для синхронизации возмущений. Изменение амплитуды модуляции тоже приводит к обнаружению областей синхронизации. Именно существование таких областей параметров позволяет эффективно управлять потоком с помощью модуляции, благодаря сильной зависимости критических параметров от параметров модуляции. К сожалению, добавление нескольких кривых на один рисунок при выделении различных типов возмущений сильно перегружает его деталями. Демонстрация даже основных эффектов, наблюдаемых при вариации параметров системы с помощью одиноких кривых, на рисунке приведет к необоснованному увеличению объема статьи. Поэтому, ниже, на приведенных рисунках, тип возмущения выделяться не будет, хотя и стоит иметь в виду, что на кривых существует множество локальных минимумов, связанных с областями синхронизации.

На рис. 4 представлены зависимости критического числа Релея–Дарси от длины рабочей области при различных значениях параметров сорбции, видно, что с увеличением адсорбционных свойств среды (рост параметра  $a$  или уменьшение параметра  $b$ ),



происходит повышение устойчивости, связанное с уменьшением неоднородности плотности среды, благодаря переходу части примеси в немобильное состояние. При малых длинах области кривые практически совпадают, что связано с синхронным откликом, который всегда наблюдается в узких областях. Именно поэтому вариация параметров сорбции (иммобилизации) дает столь малый эффект для узких полостей, в длинных полостях кривые расходятся, но видно, что ростом  $l$  они стремятся к постоянному значению, характерному для бесконечного слоя (см. работу [13]).

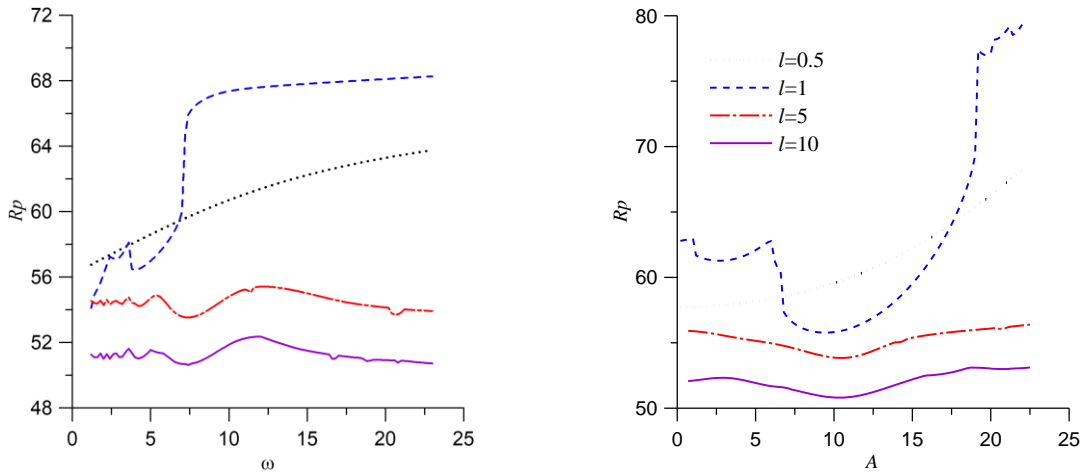


**Рис. 4.** Зависимости критического значения числа Релея–Дарси ( $R_p$ ) от параметра  $l$ . Слева для различных значений параметра адсорбции ( $b=4$ , значения  $a$  указаны в легенде), справа для различных значений параметра десорбции и от амплитуды модуляции ( $a=8$ , значения  $b$  указаны в легенде). Значения остальных параметров задачи:  $Pe=7$ ,  $A=7$ ,  $\omega=5$ ,  $l=3$

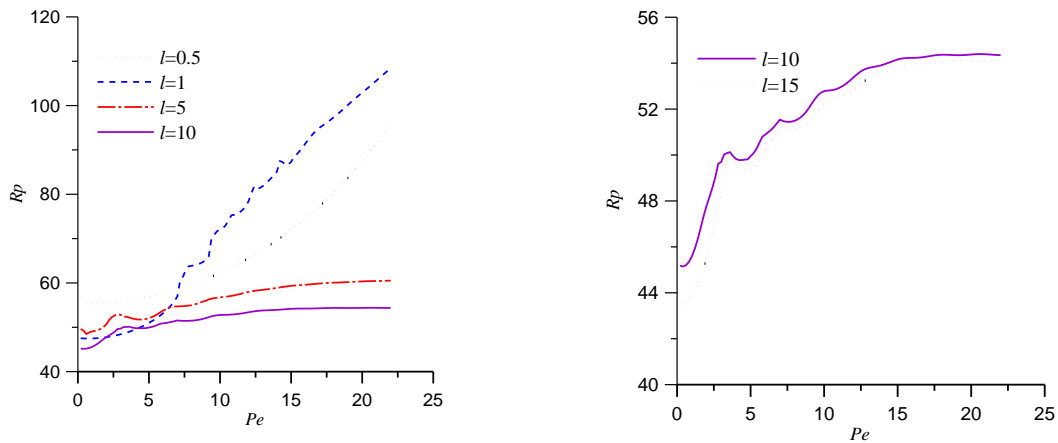
Рисунок 5 содержит зависимости критического значения числа Релея–Дарси от параметров модуляции ( $A$  и  $\omega$ ) для различных длин рабочей области. В случае малых  $l$  наблюдается монотонная зависимость, соответствующая синхронному отклику. С ростом длины рабочей области наблюдаются области синхронизации, и в целом происходит дестабилизация. Увеличение частоты модуляции так же приводит в целом к дестабилизации, а вот рост амплитуды, наоборот, к стабилизации за счет увеличения интенсивности прокачки (основного течения).

На рис. 6 представлены зависимость критического значения числа Релея–Дарси от средней интенсивности прокачки – числа Пекле. Опять же для малых  $l$  наблюдается монотонная зависимость и синхронный отклик. В целом, с ростом числа Пекле происходит стабилизация по тем же причинам, что и с ростом амплитуды. Видно (см. рис. 6 справа) что вариация длины области при длинных рабочих областях слабо влияет на кривую, это свидетельствует о наличии асимптоты горизонтального слоя (см. [13]).

Приведем оценки размерных параметров, используемых в описанных выше расчетах. Так, для области с  $H \gg 10$  см и  $\phi \sim 0.5$ , используемые в расчетах безразмерные параметры  $\omega = 5$  и  $Pe = 7$  при условии, что  $D \sim 5 \cdot 10^{-7}$  см<sup>2</sup>/с, соответствуют размерным частоте  $\Omega \sim 2.5 \cdot 10^{-4}$  1/с и скорости прокачки  $U_0 \sim 7 \cdot 10^{-5}$  см/с.



**Рис. 5.** Зависимости критического значения числа Релея–Дарси ( $R_p$ ) от частоты ( $A=7$  слева) и амплитуды ( $\omega=5$  справа) модуляции для различных длин области (значения параметра  $l$  указаны в легенде). Значения остальных параметров задачи:  $Pe=7$ ,  $a=8$ ,  $b=4$



**Рис. 6.** Зависимости критического значения числа Релея–Дарси ( $R_p$ ) от числа Пекле, при различных длинах области (значения параметра  $l$  указаны в легенде) Значения остальных параметров задачи:  $\omega=5$ ,  $A=7$ ,  $a=8$ ,  $b=4$

Безразмерные параметры иммобилизации  $a = 8$  и  $b = 4$  соответствуют  $K_d \sim 1$  и  $\alpha \sim 2 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с}$ , что является типичным для многих материалов. Например, в эксперименте, где рассматривался транспорт натриевой соли в пористой среде, состоящей из стеклянных шариков [35], была получена следующая оценка параметров:  $\alpha \sim 8 \cdot 10^{-4} \text{ 1/с}$ ,  $K_d \sim 2.5$ .

В работе [36] изучался процесс насыщения пористой матрицы, состоящей из углеродного волокна, частицами  $ZnBr_2$ , соответствие моделирования экспериментальным результатам было получено при  $\alpha \sim 10^{-4} \text{ 1/с}$ ,  $K_d \sim 0.9$ .

Основным приложением теории, развитой в настоящей работе, предполагается технология создания композитных материалов с заданной структурой примеси.

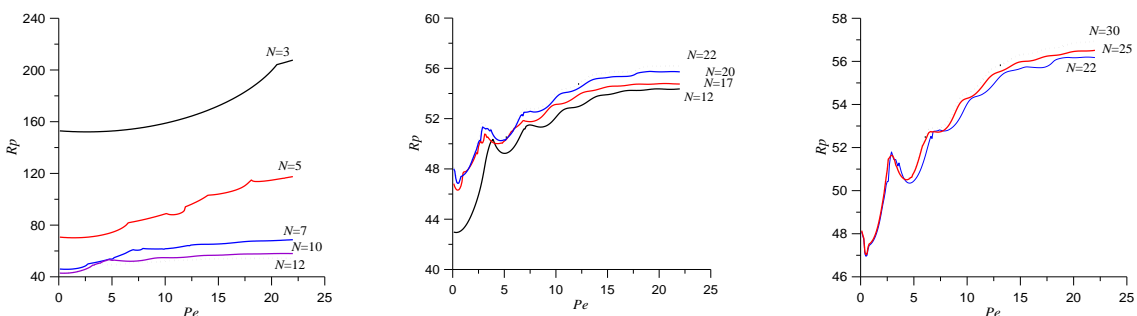
## Заключение

Исследовано влияние модуляции потока на концентрационную конвекцию в замкнутой области пористой среды с учетом иммобилизации примеси. Рассмотрена прямоугольная область. Транспорт примеси с учетом эффекта иммобилизации (осаждения) частиц примеси на стенках пор моделируется в рамках МММ подхода, фильтрация в рамках приближения Дарси–Буссинеска. Получено точное решение задачи, описывающее одномерную фильтрацию в горизонтальном направлении. Получены уравнения, описывающие эволюцию малых возмущений режима горизонтальной фильтрации. На основе подхода Галеркина разработан численный метод решения полученных уравнений. В результате получены и обсуждены нейтральные кривые в пространстве параметров задачи. Показано, что возбуждаются возмущения трех типов по отношению к модуляции, синхронные субгармонические и квазипериодические. Показано, что в узких областях наблюдаются только синхронный отклик. Продемонстрировано, что существуют многочисленные области синхронизации, всегда соответствующие локальному минимуму нейтральной кривой, что дает возможность управлять возбуждением конвективного течения с помощью вариации параметров модуляции. Исследование зависимости критических параметров от иммобилизации показало, что увеличение адсорбирующих свойств среды приводит к стабилизации режима горизонтальной фильтрации. Увеличение интенсивности прокачки приводит к тому же эффекту. Показано, что в пределе длинных областей для нейтральных кривых существуют асимптоты, соответствующие бесконечному горизонтальному слою [13].

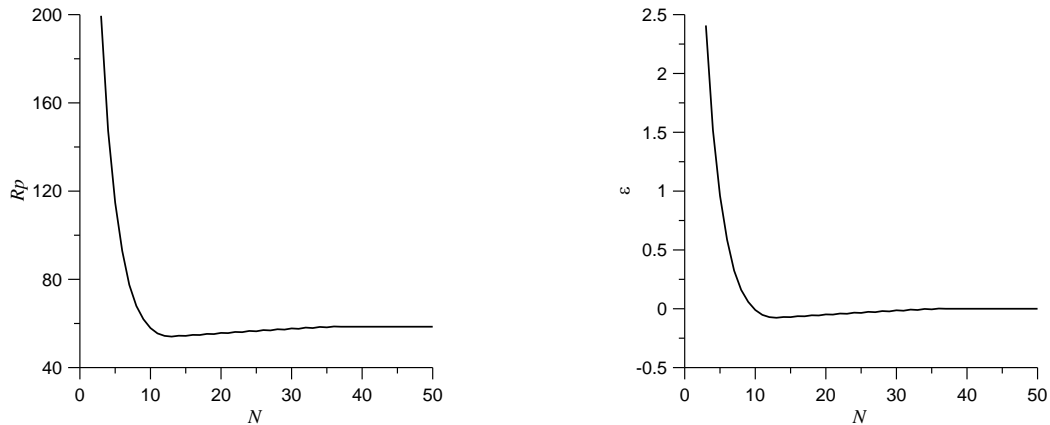
## Приложение: исследование сходимости метода

Как известно, при применении методов типа Галеркина [30] сходимость достигается по мере увеличения числа базисных функций в разложении типа (3.3). Для исследования вопроса сходимости, были построены нейтральные кривые для зависимости Критического числа Релея–Дарси от числа Пекле (см. рис. 7). Видно, что с ростом числа базисных функций кривые все меньше отличаются, при этом самое большое отличие соответствует значениям числа Пекле  $Pe \approx 20$ . Для более точного исследования вопроса была построена зависимость критического числа Релея от числа  $N$  функций в разложении (3.3) (см. рис. 8, слева), а также значение ошибки по отношению к значению при  $N=50$  (см. рис. 8, справа) т.е.  $\varepsilon = (Rp(N) - Rp(N=50)) / Rp(N=50)$ .

Видно, что для принятой точности по мультипликатору  $|\mu_{max}/-1| \leq 10^{-4}$ , полученное критического значения числа Релея–Дарси остается постоянным для  $N > 37$ . Основываясь на этом критерии все расчеты были проведены для  $N=40$ .



**Рис. 7.** Зависимости критического значения числа Релея–Дарси ( $Rp$ ) от числа Пекле, при различном количестве функций в разложении (3.3). Значения параметров задачи:  $l=10$ ,  $\omega=5$ ,  $A=7$ ,  $a=8$ ,  $b=4$



**Рис. 8.** Зависимость критического значения числа Релея–Дарси ( $R_p$ , слева) зависимости ошибки ( $\omega$ , справа) от числа функций ( $N$ ) в разложении (3.3). Значения остальных параметров задачи:  $Pe=20$ ,  $\omega=5$ ,  $A=7$ ,  $a=8$ ,  $b=4$

### Список источников

1. Horton C.W., Rogers Jr F.T. Convection currents in a porous medium // Journal of Applied Physics. 1945. Vol. 16, № 6. P. 367–370.
2. Lapwood E.R. Convection of a fluid in a porous medium // Mathematical Proceedings of the Cam-bridge Philosophical Society. Cambridge University Press, 1948. Vol. 44, № 4. P. 508–521.
3. Prats M. The effect of horizontal fluid flow on thermally induced convection currents in porous mediums // Journal of geophysical research. 1966. Vol. 71. № 20. P. 4835–4838.
4. Combarous M.A., Bia P. Combined free and forced convection in porous media // SPE Journal. 1971. Vol. 11, № 4. P. 399–405. URL: <https://doi.org/10.2118/3192-PA> (дата обращения: 20.10.2024).
5. Haajizadeh M., Tien C. L. Combined natural and forced convection in a horizontal porous channel // Int. J. Heat Mass Transf. 1984. Vol. 27, № 6. P. 799–813. URL: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(84\)90001-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90001-2) (дата обращения: 20.10.2024).
6. Chou F. C., Chung P. Y. Effect of stagnant conductivity on non-Darcian mixed convection in horizontal square packed channels // Numer. Heat Transf.; A: Appl. 1995. Vol. 27, № 2. P. 195–209.
7. Марышев Б. С. Концентрационная конвекция в замкнутой области пористой среды при заданном вертикальном перепаде концентрации и учете иммобилизации примеси // Вычислительная механика сплошных сред. 2024. Т. 17, № 1. С. 60–74.
8. Bromly M., Hinz C. Non-Fickian transport in homogeneous unsaturated repacked sand // Water Resour. Res. 2004. Vol. 40. W07402. URL: <https://doi.org/10.1029/2003WR002579> (дата обращения: 20.10.2024).
9. Gouze P. et al. Non-Fickian dispersion in porous media: 1. Multiscale measurements using single-well injection withdrawal tracer tests // Water Resour. Res. 2008. Vol. 44. W06426. URL: <https://doi.org/10.1029/2007WR006278> (дата обращения: 20.10.2024).
10. Wissocq A., Beaucaire C., Latrille C. Application of the multi-site ion exchanger model to the sorption of Sr and Cs on natural clayey sandstone // Appl. Geochemistry. 2018. Vol. 93. P. 167–177. URL: <https://doi.org/10.1016/j.apgeochem.2017.12.010> (дата обращения: 20.10.2024).

11. *Einstein A.* On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat // *Annalen der physic.* 1905. Vol. 17. P. 549–560. URL: <https://doi.org/10.1002/andp.19053220806> (дата обращения: 20.10.2024).
12. *Deans H.A.* A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media // *SPE Journal.* 1963. Vol. 3, № 1. P. 49–52. URL: <https://doi.org/10.2118/493-PA> (дата обращения: 20.10.2024).
13. *Maryshev B. S.* The effect of sorption on linear stability for the solutal Horton–Rogers–Lapwood problem // *Transport in Porous Media.* 2015. Vol. 109, № 3. P. 747–764.
14. *Klimenko L. S., Maryshev B. S.* Effect of solute immobilization on the stability problem within the fractional model in the solute analog of the Horton-Rogers-Lapwood problem // *The European Physical Journal E.* 2017. Vol. 40. P. 1–7.
15. *Maryshev B.* A Non-linear model for solute transport, accounting for sub-diffusive concentration decline and sorption saturation // *Mathematical Modelling of Natural Phenomena.* 2016. Vol. 11, № 3. P. 179–190.
16. *Клименко Л.С., Кольцова И.А.* Уточнение модели концентрационной конвекции в пористой среде с учетом иммобилизации примеси и слабой закупорки // *Вестник Пермского университета. Серия: Физика.* 2023. № 4. С. 35–44.
17. *Venezian G.* Effect of modulation on the onset of thermal convection // *Journal of Fluid Mechanics.* 1969. Т. 35, № 2. С. 243–254.
18. *Rosenblat S., Tanaka G. A.* Modulation of thermal convection instability // *Physics of Fluids.* 1971. Т. 14, № 7. С. 1319–1322.
19. *Ahlers G., Hohenberg P. C., Lücke M.* Thermal convection under external modulation of the driving force. I. The Lorenz model // *Physical Review A.* 1985. Т. 32, № 6. С. 3493.
20. *Ahlers G., Hohenberg P. C., Lücke M.* Thermal convection under external modulation of the driving force. II. Experiments // *Physical review. A, General Physics.* 1985. Т. 32, № 6. С. 3519–3534.
21. *Smorodin B. L., Lücke M.* Binary-fluid-mixture convection with low-frequency modulated heating, *Physical Review E* 2010, 82, 016310.
22. *Смородин Б.Л., Тараут А.В.* Параметрическая конвекция слабопроводящей жидкости в переменном электрическом поле // *Изв. РАН. МЖГ.* 2010. № 1. С. 3–11.
23. *Smorodin B. I., Myznikova J. C.* Legros, Evolution of convective patterns in a binary-mixture layer subjected to a periodical change of the gravity field, *Physics of fluids*, 2008, 20, 094102.
24. *Veldsink J. W. et al.* The use of the dusty-gas model for the description of mass transport with chemical reaction in porous media // *Chem. Eng. J.* 1995. Vol. 57, № 2. P. 115–126. URL: [https://doi.org/10.1016/0923-0467\(94\)02929-6](https://doi.org/10.1016/0923-0467(94)02929-6) (дата обращения: 20.10.2024).
25. *Vandevivere P.* Bacterial clogging of porous media: a new modelling approach // *Biofouling.* 1995. Vol. 8, № 4. P. 281–291. <https://doi.org/10.1080/08927019509378281>
26. *Zhou S. S. et al.* Permeability analysis of hydrate-bearing porous media considering the effect of phase transition and mechanical strain during the shear process // *SPE Journal.* 2022. Vol. 27, № 1. P. 422–433. URL: <https://doi.org/10.2118/206736-PA> (дата обращения: 20.10.2024).
27. *Johnson P. R., Elimelech M.* Dynamics of colloid deposition in porous media: Blocking based on random sequential adsorption // *Langmuir.* 1995. Vol. 11, № 3. P. 801–812. URL: <https://doi.org/10.1021/la00003a023> (дата обращения: 20.10.2024).
28. *Дерягин Б. В., Чураев Н. В., Муллер В. М.* Поверхностные силы. М: Наука, 1985. 398 с.

29. Nield D.A., Bejan A. Convection in porous media. New York: Springer, 2017. 988p.
30. Kantorovich L.V., Krylov V.I., Benster C.D., Weiss G. Approximate Methods of Higher Analysis // Phys. Today. 1960. Vol. 13, № 1. P. 74–76. URL: <https://doi.org/10.1063/1.3056800> (дата обращения: 20.10.2024).
31. Nayfeh A. H. Perturbation methods. New Jersey: John Wiley & Sons. 2008. 429 p.
32. Merson R.H. An operational method for the study of integration processes // Proc. Symp. Data Processing. 1957. Vol. 1. P. 110–125.
33. Parlett B. N. The QR algorithm // Computing in science & engineering. 2000. Vol. 2, № 1, P. 38–42.
34. Rotella F., Zambettakis I. Block Householder transformation for parallel QR factorization // Applied mathematics letters. 1999. Vol. 12, № 4. P. 29–34.
35. Maryshev B.S., Khabin M.R., Evgrafova A.V. Identification of transport parameters for the solute filtration through porous media with clogging // Journal of Porous Media. 2023. T. 26, № 6. P. 31–53
36. Demin V.A., Maryshev B.S., Menshikov A.I. Dynamics of an admixture front during the pumping of a nanofluid through a porous medium // Journal of Porous Media. 2021. T. 24, № 6. P. 53–67.

## References

1. Horton, C. W., Rogers Jr, F. T. (1945), "Convection currents in a porous medium", *Journal of Applied Physics*, vol. 16, no. 6, pp. 367-370.
2. Lapwood, E. R (1948), "Convection of a fluid in a porous medium", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge University Press*, vol. 44, no. 4, pp. 508-521.
3. Prats, M.(1966), "The effect of horizontal fluid flow on thermally induced convection currents in porous mediums", *Journal of geophysical research*, vol. 71, no. 20, pp. 4835-4838.
4. Combarous, M. A., Bia, P. (1971), "Combined free and forced convection in porous media", *SPE Journal*, vol. 11, no. 4, pp. 399-405.
5. Haajizadeh, M., Tien, C. L. (1984), "Combined natural and forced convection in a horizontal porous channel", *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 27, no. 6, pp. 799-813.
6. Chou, F. C., Chung, P. Y. (1955), "Effect of stagnant conductivity on non-Darcian mixed convection in horizontal square packed channels", *Numer. Heat Transf.; A: Appl.*, vol. 27, no. 2, pp. 195-209.
7. Maryshev, B. S. (2024), "Concentration convection in a closed porous domain at a given vertical concentration difference and when accounting for impurity immobilization" *Computational Continuum Mechanics*, vol.17, no. 1, pp. 60-74.
8. Bromly, M., Hinz, C. (2004), "Non-Fickian transport in homogeneous unsaturated re-packed sand", *Water Resour. Res.*, vol. 40, W07402.
9. Gouze, P. et al. (2008), "Non-Fickian dispersion in porous media: 1. Multiscale measurements using single-well injection withdrawal tracer tests", *Water Resour. Res.*, vol. 44, W06426.
10. Wissocq, A., Beaucaire, C., Latrille, C. (2018) "Application of the multi-site ion exchanger model to the sorption of Sr and Cs on natural clayey sandstone", *Appl. Geochemistry*, vol. 93, pp. 167-177.
11. Einstein, A. (1905), "On the motion of small particles suspended in liquids at rest required by the molecular-kinetic theory of heat", *Annalen der physic*, vol. 17, pp. 549-560.
12. Deans, H. A. (1963) "A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media", *SPE Journal*, vol. 3, pp. 49-52.
13. Maryshev, B. S. (2015), "The effect of sorption on linear stability for the solutal Horton–Rogers–Lapwood problem", *Transport in Porous Media*, vol. 109, no. 3, pp. 747-764.

14. Klimenko, L. S., Maryshev, B. S. (2017), "Effect of solute immobilization on the stability problem within the fractional model in the solute analog of the Horton-Rogers-Lapwood problem", *The European Physical Journal E*, vol. 40, pp. 1-7.
15. Maryshev, B. (2016), "A Non-linear model for solute transport, accounting for sub-diffusive concentration decline and sorption saturation", *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, vol. 11, no. 3, pp. 179-190.
16. Klimenko L. S., Koltsova I. A. (2023) "Refinement of the model of concentration convection in a porous medium taking into account immobilization of impurity and weak clogging", *Bulletin of Perm University. Physics*, no. 4, pp. 35–44.
17. Venezian G. (1969) "Effect of modulation on the onset of thermal convection" *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 35, no. 2, pp. 243-254.
18. Rosenblat S., Tanaka G. A. (1971) "Modulation of thermal convection instability" *Physics of Fluids*, vol. 14, no. 7, pp. 1319-1322.
19. Ahlers G., Hohenberg P. C., Lücke M. (1985) "Thermal convection under external modulation of the driving force. I. The Lorenz model" *Physical Review A*, vol. 32, no. 6, p. 3493.
20. Ahlers G., Hohenberg P. C., Lücke M. (1985) "Thermal convection under external modulation of the driving force. II. Experiments" *Physical review. A, General Physics*, vol. 32, no. 6, pp. 3519-3534.
21. Smorodin B. L., Lücke M. (2010) "Binary-fluid-mixture convection with low-frequency modulated heating", *Physical Review E*, vol.82, p. 016310.
22. Smorodin B. L., Taraut A. V. (2010) "Parametric convection of a low-conducting liquid in an alternating electric field", *Fluid Dynamics*, vol. 45, no. 1, pp. 1-9.
23. Smorodin B. L., Myznikova B. I., Legros J. C. (2008) "Evolution of convective patterns in a binary-mixture layer subjected to a periodical change of the gravity field", *Physics of fluids*, vol. 20, p. 094102.
24. Veldsink, J. W. et al. (1995), "The use of the dusty-gas model for the description of mass transport with chemical reaction in porous media", *Chem. Eng. Journal*, vol. 57, no. 2, pp. 115-126.
25. Vandevivere, P. (1995), "Bacterial clogging of porous media: a new modelling approach", *Biofouling*, vol. 8, no. 4, pp. 281-291.
26. Zhou ,S. S. et al. (2022), "Permeability analysis of hydrate-bearing porous media considering the effect of phase transition and mechanical strain during the shear process", *SPE Journal*, vol. 27, no. 1, pp. 422-433.
27. Johnson, P. R., Elimelech, M. (1995), "Dynamics of colloid deposition in porous media: Blocking based on random sequential adsorption", *Langmuir*, vol. 11, no. 3, pp. 801-812.
28. Deryagin B. V., Churaev N. V., Muller V. M. Surface forces. Moscow: Nauka, 1985. 398 p. (In Russian: Deryagin B. V., Charaev N. V., Muler V. M. Poverhnostnye Sily Moskva: Nauka).
29. Nield D.A., Bejan A. Convection in porous media. New York: Springer, 2017. 988 p.
30. Kantorovich L.V., Krylov V.I., Benster C.D., Weiss G. (1960) "Approximate Methods of Higher Analysis" *Phys. Today*, vol. 13, no. 1, pp. 74–76.
31. Nayfeh A. H. Perturbation methods. New Jercey: John Wiley & Sons. 2008. 429 p.
32. Merson R. H. (1957) "An operational method for the study of integration processes", *Proc. Symp. Data Processing*, vol. 1, pp. 110 –125.
33. Parlett B. N. (2000) "The QR algorithm", *Computing in science & engineering*, vol. 2, no. 1, pp. 38-42.
34. Rotella F., Zambettakis I. (1999) "Block Householder transformation for parallel QR factorization", *Applied mathematics letters*, vol. 12, no. 4, pp. 29-34.

35. Maryshev B. S., Khabin M. R., Evgrafova A. V. (2023) "Identification of transport parameters for the solute filtration through porous media with clogging", *Journal of Porous Media*, vol. 26. no. 6, pp. 31-53.
36. Demin V. A., Maryshev B. S., Menshikov A. I. (2021) "Dynamics of an admixture front during the pumping of a nanofluid through a porous medium" *Journal of Porous Media*, vol. 24, no. 6, pp. 53-67.

**Информация об авторах:**

*Б. С. Марышев* – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614000, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), научный сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН (614000, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1);

*Л. С. Клименко* – кандидат физико-математических наук, доцент физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614000, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), научный сотрудник Института механики сплошных сред УрО РАН (614000, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1).

**Information about the authors:**

*B. S. Maryshev* – PhD, Associate Professor of Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614000), researcher of Institute of Continuous Media Mechanics Ural RAS (1, Academica Koroleva St., Perm, Russia, 614000);

*L. S. Klimenko* – PhD, Associate Professor of Perm State University (15, Bukireva St., 15, Perm, Russia, 614000), researcher of Institute of Continuous Media Mechanics Ural RAS (1, Academica Koroleva St., Perm, Russia, 614000).



## МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 532.546, 517.925.42

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-65-77

<https://elibrary.ru/GPJXCD>**Влияние шума на синхронность колебаний  
конвективных течений****Ирина Валерьевна Тюлькина<sup>1</sup>, Денис Сергеевич Голдобин<sup>1,2</sup>**<sup>1</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия<sup>2</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия  
<sup>1</sup>[irinatiulkina95@gmail.com](mailto:irinatiulkina95@gmail.com)

**Аннотация.** В данной работе исследуется термоконцентрационная конвекция двухкомпонентной жидкости в подогреваемых снизу смежных горизонтальных ячейках пористой среды с учетом влияния случайных тепловых флуктуаций внешних условий. Рассмотрено два случая: пространственно регулярного притока тепла и пространственно случайного притока тепла. Получены стохастические уравнения для динамики фазы колебаний. В рамках этих фазовых уравнений проблема степени синхронности колебаний конвективных течений в связанных ячейках исследуется с использованием круговых кумулянтов.

**Ключевые слова:** термоконцентрационная конвекция; пористая среда; фазовое описание; синхронизация; шум; круговые кумулянты

**Для цитирования:** Тюлькина И. В., Голдобин Д. С. Влияние шума на синхронность колебаний конвективных течений // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 65–77. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-65-77. <https://elibrary.ru/GPJXCD>.

Статья поступила в редакцию 07.10.2024; одобрена после рецензирования 21.11.2024; принята к публикации 01.12.2024.

## MECHANICS

Research article

**The Influence of Noise on the Synchronization of Oscillations  
of Convective Currents****Irina. V. Tiulkina<sup>1</sup>, Denis. S. Goldobin<sup>1,2</sup>**<sup>1</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia<sup>2</sup>Perm State University, Perm, Russia<sup>1</sup>e-mail [irinatiulkina95@gmail.com](mailto:irinatiulkina95@gmail.com)

Эта работа © 2024 Тюлькина И.В., Голдобин Д.С. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

**Abstract.** In this work, we study the Soret-driven convection of a two-component liquid in adjacent rectangular cells of a porous medium heated from below, taking into account the influence of random thermal fluctuations of external conditions. Two cases are considered: a spatially regular heat influx and a spatially irregular heat influx. We obtain stochastic equations for the dynamics of oscillation phases. Within the framework of these phase equations, we study the problem of the degree of synchrony of oscillations of convective currents in coupled cells using circular cumulants.

**Keywords:** *Soret-driven convection; porous medium; phase reduction; synchronization; noise; circular cumulant*

**For citation:** Tiulkina, I. V. and Goldobin, D. S. (2024), "The Influence of Noise on the Synchronization of Oscillations of Convective Currents", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), pp. 65-77. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-65-77. <https://elibrary.ru/GPJXCD>.

*The article was submitted 07.10.2024; approved after reviewing 21.11.2024; accepted for publication 01.12.2024.*

## Введение

В системах с периодическими колебаниями собственная динамика проста, но есть одна нейтрально устойчивая степень свободы – фаза колебания. Слабое воздействие на систему позволяет управлять динамикой этой фазы, добиваясь совпадения ритмов колебаний элементов. Оказываются возможны коллективные явления при слабых связи или воздействии. С практической точки зрения, именно примерами связанных периодических осцилляторов являются электродвигатели и роторные двигатели, смонтированные на общей платформе, массивы одинаковых электроприборов, подключенных к общей сети переменного тока, пешеходы на мосту, колонии бактерий, пористые конвективные ячейки со связью через соприкасающиеся стенки и т.д. Даже если общая физическая картина, связанная с синхронизацией, сложна и многогранна, анализ синхронизации можно чрезвычайно упростить для слабых возмущений, рассматривая ее в рамках динамики фаз колебаний [1, 2]. Такая формулировка позволяет сосредоточиться исключительно на скалярной фазе осциллятора, вместо того чтобы описывать динамику состояния в полном многомерном (или бесконечномерном) конфигурационном пространстве.

В основе математической теории коллективных явлений в таких системах лежит фазовое описание [1–4], при котором главное внимание уделяется динамике фазы колебания элемента. Математически, на уровне уравнений, исследуется динамика ансамблей фаз. С точки зрения теории возмущений, фазовое описание представляет собой стандартный теоретический метод анализа слабовозмущенных осцилляторов с устойчивым предельным циклом, этот метод является частным случаем метода усреднения Крылова–Боголюбова [5, 6], при котором для каждого осциллятора остается уравнение динамики единственной "медленной" переменной [6]. Для метода Крылова–Боголюбова Боголюбовым была доказана теорема о равномерной сходимости разложений [5].

Эта статья является развитием работы [7], в которой отсутствовал учет влияния внешних тепловых флуктуаций на систему связанных пористых ячеек.

## 1. Постановка задачи

Рассматривается термоконцентрационная конвекция двухкомпонентной жидкости в подогреваемых снизу смежных горизонтальных ячейках пористой среды (рис. 1). Толщина стенки между ячейками –  $l$ , высота ячеек –  $h$ , толщина ячеек –  $H$ ; ось  $y$  выбираем перпендикулярно стенке между ячейками,  $x$  – вдоль ячеек, ось  $z$  – вертикально вверх. Границы ячеек полагаются непроницаемыми (в том числе для примеси), тепловой поток через горизонтальные границы – фиксированным, вертикальные границы обладают очень низкой теплопроводностью. Тепловая конвекция рассматривается с учетом эффекта Соре (эффект термодиффузии) (см. работу [7]), при котором диффузионная часть потока концентрации

$$\mathbf{j} = -D \left( \nabla C + \alpha_T \frac{C}{T} \nabla T \right),$$

где  $D$  – коэффициент диффузии,  $\alpha_T$  – константа термодиффузии,  $T$  – температура,  $C$  – концентрация тяжелой компоненты.

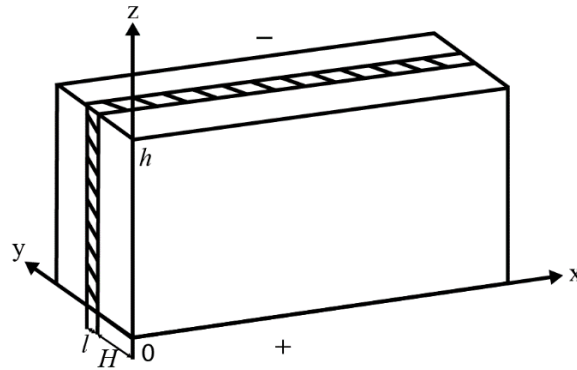


Рис. 1. Геометрия задачи и система координат

Для математического описания поведения системы используется модель Дарси–Буссинеска [8], предполагающая линейную зависимость плотности от температуры и концентрации  $\rho(C, T) = \rho_0 [1 + \beta_T (T - T_0) - \beta_C (C - C_0)]$ :

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_i - \frac{vm}{K} \mathbf{v}_i + g(\beta_T T_i - \beta_C C_i) \mathbf{e}_z, \\ \frac{\partial C_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) C_i &= D \Delta C_i + \frac{\alpha_T C_0 D}{T_0} \Delta T_i, \\ \frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{1}{b_*} (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) T_i &= \chi \Delta T_i + Q_i, \quad i = 1, 2 \\ \nabla \cdot \mathbf{v}_i &= 0, \\ z = 0, h: \quad \frac{\partial T_i}{\partial z} &= -A, v_{iz} = 0, j_{iz} = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где индекс  $i$  указывает номер ячейки,  $\mathbf{v}_i$  – средняя скорость (осредненная по масштабам пор) жидкости в порах,  $j_{iz}$  – вертикальная компонента потока концентрации,  $m$  – пористость среды (отношение объема пор в элементе пористой среды к объему этого элемента),  $K$  – коэффициент проницаемости,  $h$  – высота ячейки,  $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$  – вектор ускорения свободного падения,  $b_*$  – отношение теплоемкости пористой среды, насыщенной

жидкостью, к части этой теплоемкости, приходящейся на жидкость в порах ( $b_* > 1$ ),  $\chi$  – температуропроводность пористой среды, насыщенной жидкостью. При подогреве снизу градиент температуры в основном состоянии  $A > 0$ , что соответствует заданному тепловому потоку и отражено в граничном условии для температуры.  $Q_i$  – распределенный источник тепла. Качественно карта режимов линейной устойчивости системы [8] подобна таковой для термоконцентрационной конвекции жидкости в отсутствие пористого скелета ([9], §32 в [10], §30, раздел, 3 в [11]).

В работе [7] было показано, как систему двух связанных конвективных ячеек можно свести к двум уравнениям в терминах фаз (система Курамото–Сакагучи) (1.2) и исследовать синхронизацию конвективных потоков:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_1 &= \Omega_0 + |K|(\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) - \sin \beta), \\ \dot{\varphi}_2 &= \Omega_0 + |K|(\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) - \sin \beta).\end{aligned}\tag{1.2}$$

где  $\Omega_0$  – частота колебательного течения при  $Ra = Ra_0 + \delta Ra$ , с учетом слабонелинейной поправки,  $\beta$  – фазовый сдвиг связи,  $K$  – комплексный коэффициент связи. Вместе с тем, в работе [7] не учитывалось влияние случайных флуктуаций внешних условий – шума.

## 2. Нестационарность внешних температурных условий

Основным естественным источником случайных флуктуаций является нестационарность внешних температурных условий, поскольку непроницаемость границ для течения и примеси является более точным граничным условием, чем фиксированность вертикального теплового потока и теплоизолированность боковых границ.

Опишем интегральную по поперечной координате  $y$  флуктуирующую компоненту притока тепла в ячейку  $i$  распределенным безразмерным притоком тепла на единицу площади плоскости  $(x, z)$  полем  $q_{gi}(x, z, t)$ . Отметим, что посредством  $q_{gi}(x, z, t)$  можно описать не только теплопередачу через боковые границы, но и флуктуации потока тепла через горизонтальные границы: последние дают в  $q_{gi}(x, z, t)$  вклады вида  $\sim \delta(z)$  и/или  $\sim \delta(z-1)$ .

В этом случае в уравнениях для амплитуды, выведенных в [7], появятся новые члены – эффективные шумовые слагаемые:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_1}{\partial t} &= C_R \delta Ra A_1 + C_A a (A_2 - A_1) + C_T |A_1|^2 A_1 + \sigma(\xi_{re,1}(t) + i\xi_{im,1}(t)), \\ \frac{\partial A_2}{\partial t} &= C_R \delta Ra A_2 + C_A a (A_1 - A_2) + C_T |A_2|^2 A_2 + \sigma(\xi_{re,2}(t) + i\xi_{im,2}(t)),\end{aligned}\tag{2.1}$$

где  $A$  – амплитуда колебательных конвективных течений,  $\delta Ra$  – отклонение числа Рэ-ля-Дарси от порога линейной неустойчивости,  $a$  – коэффициент тепловой связи между пористыми ячейками,

$$a = \frac{\kappa_b}{\kappa} \frac{h^2}{Hl},$$

$\kappa$  – теплопроводность насыщенного жидкостью пористого скелета и  $\kappa_b$  – теплопроводность стенки, разделяющей ячейки. Коэффициенты  $C_R$ ,  $C_A$ ,  $C_T$  зависят от управляющих параметров системы:

$$C_R = \frac{1-N}{24}k^2 + i\frac{k^4}{24\omega_0}(N - S(1-N)),$$

$$C_A = \frac{1}{2} - i\frac{k^2}{2\omega_0} \frac{b(N+S) - S^2(1-N)(b-1)}{(1-N)(b-S(b-1))},$$

$$C_T = -i\frac{Ra_0^2 k^6 N}{320\omega_0} \left( N - (1-N) \left( S + \frac{i\omega_0}{k^2} \right) \right) \times$$

$$\times \left[ 3 - \frac{i\omega_0}{k^2} + \frac{Ra_0 b^2}{12S} \frac{3N + [b - N - S(b-1)(1-N)] \left( -3S + \frac{i\omega_0}{k^2} \right)}{[b - S(b-1)] \left( S + \frac{i\omega_0}{k^2} \right)} \right],$$

где  $S = D/\chi$  – обратное число Льюиса, модифицированные параметр

$$b = \frac{b_* - 1}{b_* - S(b_* - 1)},$$

и параметр плавучести

$$N = \frac{N_* b_* - N_* S(b_* - 1)}{1 - N_* S(b_* - 1)}, \quad N_* = \frac{(-\alpha_T)\beta_c C_0}{\beta T_0},$$

критическое значение модифицированного числа Рэлея–Дарси

$$Ra = [1 - N_* S(b_* - 1)] \frac{\beta_T A h^2 g K}{mbv\chi}$$

для колебательной неустойчивости равно

$$Ra_0 = \frac{12 + 12S}{1 - N},$$

частота колебаний длинноволновых возмущений с волновым вектором  $k$  на границе неустойчивости:

$$\frac{\omega_0^2}{k^4} = \frac{(1+S)N}{1-N} - S^2.$$

В (2.1)  $\xi_{re,1}(t)$  и  $\xi_{im,1}(t)$  – независимые нормированные дельта-коррелированные гауссовы шумы:  $\langle \xi_{re,1}(t), \xi_{re,1}(t') \rangle = \langle \xi_{im,1}(t), \xi_{im,1}(t') \rangle = 2\delta(t-t')$ ,  $\langle \xi_{re,1}(t) \rangle = \langle \xi_{im,1}(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_{re,1}(t), \xi_{im,1}(t') \rangle = 0$ . Нетривиальной задачей, решаемой в настоящей работе, является физически корректное введение шума в итоговых уравнениях для фазы колебаний и описание влияния шума на основе подхода "круговых кумулянтов" [13].

Отметим, что идеализация дельта-коррелированного шума в амплитудном уравнении уместна и при конечных, но коротких временах корреляций, поскольку в "медленном" времени, на масштабах которого происходит эволюция амплитуд вблизи порога линейной неустойчивости системы, эти времена корреляций будут еще меньше. Амплитуда  $\sigma$  по-разному вычисляется для случаев *пространственно регулярного* и *пространственно случайного* притока тепла.

### 3. Пространственно регулярный приток тепла

Для пространственно регулярного притока тепла имеем

$$q_{\vartheta_i}(x, z, t) = \sigma_{\vartheta}(x, z)\xi_1(t), \quad (3.1)$$

где  $\sigma_{\vartheta}(x, z)$  – детерминированная функция координат,  $\xi_1(t)$  – дельта-коррелированный гауссов шум:  $\langle \xi_1(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \xi_1(t), \xi_1(t') \rangle = 2\delta(t-t')$ . В этом случае сигналы  $\xi_1(t)\cos(\omega_0 t + \beta_q)$  и  $\xi_1(t)\sin(\omega_0 t + \beta_q)$  при любом значении  $\beta_q$  можно представить независимыми эффективными шумами  $\xi_{re,1}(t)/\sqrt{2}$  и  $\xi_{im,1}(t)/\sqrt{2}$  соответственно. В самом деле, для статистически стационарного шума имеет место эргодичность: среднее по времени эквивалентно среднему по реализациям шума:

$$\begin{aligned} & \langle \xi_1(t)\cos(\omega_0 t + \beta_q)\xi_1(t+\tau)\cos(\omega_0(t+\tau) + \beta_q) \rangle_{\xi_1} = \\ & = \langle \langle \xi_1(t)\xi_1(t+\tau) \rangle_{\xi_1} \cos(\omega_0 t + \beta_q)\cos(\omega_0(t+\tau) + \beta_q) \rangle_t = \\ & = \langle 2\delta(\tau)\cos(\omega_0 t + \beta_q)\cos(\omega_0(t+\tau) + \beta_q) \rangle_t = \\ & = 2\delta(\tau)\langle \cos^2(\omega_0 t + \beta_q) \rangle_t = \delta(\tau). \end{aligned}$$

Аналогичное выражение имеем для второго сигнала, а перекрестная корреляционная функция выглядит как:

$$\langle \xi_1(t)\cos(\omega_0 t + \beta_q)\xi_1(t+\tau)\sin(\omega_0(t+\tau) + \beta_q) \rangle_{\xi_1} = 2\delta(\tau)\left\langle \frac{1}{2}\sin^2(2\omega_0 t + 2\beta_q) \right\rangle_t = 0.$$

Исходя из этого первый и второй сигналы являются статистически независимыми, дельта-коррелированными, имеют половинную интенсивность по сравнению с  $\xi_1(t)$  и, в силу линейности по  $\xi_1(t)$ , остаются гауссовыми случайными величинами. Альтернативный строгий вывод того, как на масштабе времени большом по сравнению с периодом  $2\pi/\omega_0$  сигнал  $e^{-i\omega_0 t}\xi_1(t)$  порождает два эффективных статистически независимых дельта-коррелированных сигнала, может быть проведен на основании уравнения Фоккера–Планка с применением метода усреднения Крылова–Боголюбова [5, 6] и дает эквивалентные результаты (раздел 3.1 в работе [14]).

Для амплитуды эффективного шума в случае связанных конвективных ячеек [7] можно получить:

$$\sigma = \frac{k^2}{\sqrt{2}\omega_0} \left| 1 + \frac{b(S - \frac{i\omega_0}{k^2})}{b - S(b-1)} \right| \left| \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \int_0^1 dz \sigma_{\vartheta}(x, z) \cos kx \right|,$$

где  $\omega_0$  – частота колебаний на границе устойчивости,  $k$  – волновое число,  $S$  – обратное число Льюиса.

Для жидкостей ( $S \ll 1$ ) имеем

$$\sigma \approx \frac{1}{\sqrt{2N}} \left| \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \int_0^1 dz \sigma_{\vartheta}(x, z) \cos kx \right|.$$

Для газов ( $1 \ll S < b$ ):

$$\sigma \approx \frac{1}{\sqrt{2S}} \left| \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \int_0^1 dz \sigma_{\vartheta}(x, z) \cos kx \right|.$$

#### 4. Пространственно случайный приток тепла

Пространственно случайный приток тепла  $q_{9i}(x, z, t)$  следует характеризовать пространственно-временной автокорреляционной функцией

$$\langle q_{9i}(x, z, t)q_{9i}(x+r_x, z+r_z, t') \rangle = 2C_q(r)\delta(t-t'), \quad (4.1)$$

здесь рассмотрение ограничивается случаем пространственно однородного и изотропного шума,  $r = \sqrt{r_x^2 + r_z^2}$ . Аналогично предыдущему случаю, можно показать, что на «медленном» масштабе времени  $\cos \omega_0 t q_{9i}(x, z, t)$  и  $\sin \omega_0 t q_{9i}(x, z, t)$  представимы парой статистически независимых шумов  $\frac{1}{\sqrt{2}} q_{re,1}(x, z, t)$  и  $\frac{1}{\sqrt{2}} q_{im,1}(x, z, t)$  с теми же автокорреляционными свойствами, как  $q_{9i}$ , но половинной интенсивностью. Шумовое слагаемое  $\sigma(\xi_{re,1}(t) + i\xi_{im,1}(t))$  в амплитудном уравнении (2.1) определяется с помощью автокорреляционной функции

$$\frac{k^4}{\omega_0^2} \left| 1 + \frac{b \left( S - \frac{i\omega_0}{k^2} \right)}{b - S(b-1)} \right|^2 \left\langle \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx \int_0^1 dz q_{re,1}(x, z, t) \cos kx \frac{k}{\pi} \int_0^{\pi/k} dx' \int_0^1 dz' q_{re,1}(x', z', t + \tau) \cos kx' \right\rangle.$$

Подставляя в последнее выражение автокорреляционную функцию (4.1) в пределе малого радиуса корреляций

$$r_{corr} = \frac{\int_0^\infty r |C_q(r)| dr}{\int_0^\infty |C_q(r)| dr} \ll 1,$$

можно вычислить среднее от интегралов, которое оказывается равно  $2\delta(\tau) \int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr \langle \cos^2 kx \rangle_x$ , и окончательно получить:

$$\frac{k^4}{\omega_0^2} \left| 1 + \frac{b \left( S - \frac{i\omega_0}{k^2} \right)}{b - S(b-1)} \right|^2 \delta(\tau) \int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr. \quad (4.2)$$

С другой стороны, автокорреляционная функция сигнала  $\sigma(\xi_{re,1}(t) + i\xi_{im,1}(t))$  равна

$$\sigma^2 \left( \langle \xi_{re,1}(t) \xi_{re,1}(t + \tau) \rangle + \langle \xi_{im,1}(t) \xi_{im,1}(t + \tau) \rangle \right). \quad (4.3)$$

Сопоставляя (4.2) с (4.3), используем  $\langle \xi_{re,1}(t) \xi_{re,1}(t + \tau) \rangle = \langle \xi_{im,1}(t) \xi_{im,1}(t + \tau) \rangle = 2\delta(\tau)$  и находим

$$\sigma = \frac{k^2}{\sqrt{2}\omega_0} \left| 1 + \frac{b \left( S - \frac{i\omega_0}{k^2} \right)}{b - S(b-1)} \right| \sqrt{\int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr}.$$

Для жидкостей  $S \ll 1$  и

$$\sigma \approx \frac{k^2}{2\sqrt{N}} \sqrt{\int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr},$$

для газов  $1 \ll S < b$  и

$$\sigma \approx \frac{1}{2S} \sqrt{\int_0^\infty 2\pi r C_q(r) dr}.$$

### 5. Стохастические уравнения для пары связанных конвективных осцилляторов с шумом

Для пары связанных пористых ячеек, насыщенных бинарной жидкостью (рис. 1) с учетом флуктуации внешних условий уравнения для амплитуд колебательных течений принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= C_R \delta Ra A_1 + C_A a (A_2 - A_1) + C_T |A_1|^2 A_1 + \sigma (\xi_{re,1}(t) + i \xi_{im,1}(t)), \\ \frac{dA_2}{dt} &= C_R \delta Ra A_2 + C_A a (A_1 - A_2) + C_T |A_2|^2 A_2 + \sigma (\xi_{re,2}(t) + i \xi_{im,2}(t)), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $\lambda_r = \text{Re } C_R \delta Ra$ ,  $\delta\omega_0 = \text{Im } C_R \delta Ra$ , комплексный параметр  $K = |K| e^{i\beta} = C_A a$  – комплексный коэффициент связи.

Строгая фазовая редукция для шума с коротким временем корреляций, когда время корреляций сопоставимо или меньше характерного времени затухания амплитудных степеней свободы  $1/\lambda_r$ , должна учитывать конечность  $1/\lambda_r$  [15] и была проведена в [16].

Для уравнений (5.1) эта процедура дает стохастическую версию уравнений динамики фазы:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= \Omega_{01} + |K| (\sin(\varphi_2 - \varphi_1 + \beta) - \sin \beta) + \sigma_\varphi \xi_{\varphi 1}(t), \\ \dot{\varphi}_2 &= \Omega_{02} + |K| (\sin(\varphi_1 - \varphi_2 + \beta) - \sin \beta) + \sigma_\varphi \xi_{\varphi 2}(t). \end{aligned} \quad (5.2)$$

здесь допускается малая неидентичность параметров осцилляторов  $\Omega_{01} \neq \Omega_{02}$ , а интенсивность эффективных независимых дельта-коррелированных шумов может быть вычислена как

$$\sigma_\varphi^2 = \frac{\sigma^2 (-\text{Re } C_T)}{\lambda_r} \left[ 1 + \left( \frac{\text{Im } C_T}{\text{Re } C_T} \right)^2 \right],$$

где второе слагаемое в скобках связано с шумом в амплитудной степени свободы. Разность уравнений системы дает замкнутое уравнение для разности фаз  $\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ :

$$\frac{d}{dt} \delta\varphi = \Omega_{01} - \Omega_{02} - |K| \cos \beta \sin \delta\varphi + \sigma_{\delta\varphi} \xi_{\delta\varphi}(t), \quad (5.3)$$

где нормированный шум  $\xi_{\delta\varphi}(t) = \frac{\xi_{\varphi 1}(t) - \xi_{\varphi 2}(t)}{\sqrt{2}}$ ,

$$\sigma_{\delta\varphi}^2 = \frac{2\sigma^2 (-\text{Re } C_T)}{\lambda_r} \left[ 1 + \left( \frac{\text{Im } C_T}{\text{Re } C_T} \right)^2 \right].$$



### 6. Использование формализма круговых кумулянтов для изучения синхронизации в пористых ячейках

При наличии шума задача о поведении распределения плотности вероятности состояний в такой системе имеет физический смысл не только для большого ансамбля, но и для единственного элемента или небольшого их количества. Комплексные Фурье-коэффициенты распределения  $w(\delta\varphi, t)$  имеют следующий смысл:  $a_j = \langle e^{ij\delta\varphi} \rangle$ .

В работе [13] для динамики системы получено двухкумулянтное приближение

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= (i\Omega_0 - \gamma)Z + h - h^* Z^2 - h^* \kappa, \\ \dot{\kappa} &= 2(i\Omega_0 - \gamma)\kappa - 4h^* Z\kappa - \sigma^2(4\kappa + 2Z^2), \end{aligned} \quad (6.1)$$

для нашего случая  $\gamma = 0$  (отсутствие расстройки частот),  $Z = a_1$ ,  $\kappa = a_2 - a_1$ .

Синхронность осцилляторов можно количественно характеризовать величиной  $\langle \cos \delta\varphi \rangle = \text{Re } Z$ , таким образом задача математически сводится к проблеме вычисления  $Z$ . Для стационарного распределения  $\dot{Z} = \dot{\kappa} = 0$  и из второго уравнения системы (6.1) можно выразить

$$\kappa = \frac{\sigma_{\delta\varphi}^2 Z}{i(\Omega_{01} - \Omega_{02}) - 2\sigma_{\delta\varphi}^2 - 2|K|\cos\beta Z}, \quad (6.2)$$

после чего первое уравнение системы становится кубическим относительно  $Z$ :

$$\begin{aligned} Z^3 + \frac{3}{2}D_1 Z^2 - (1 - D_1 D_2)Z - D_2 &= 0, \\ D_1 \equiv \frac{\sigma_{\delta\varphi}^2 - i(\Omega_{01} - \Omega_{02})}{|K|\cos\beta}, \quad D_2 \equiv \frac{\sigma_{\delta\varphi}^2 - i(\Omega_{01} - \Omega_{02})/2}{|K|\cos\beta}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

У данного кубического уравнения следует выбирать ту ветку решений, которая при  $\Omega_{01} - \Omega_{02} = \sigma_{\delta\varphi} = 0$  дает  $Z = 1$ ; выражения не приводятся в силу их чрезвычайной громоздкости.

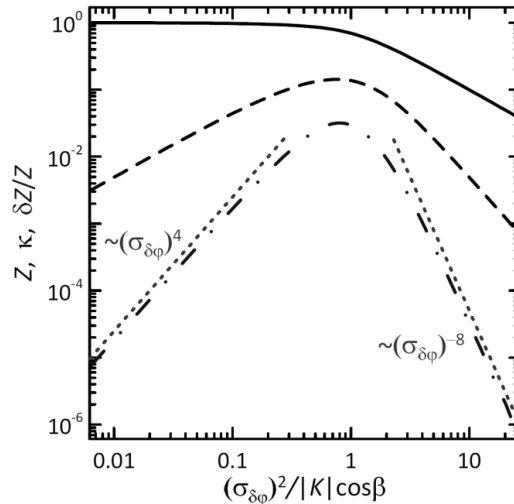
Для идентичных конвективных осцилляторов  $\Omega_{01} = \Omega_{02}$ , стационарное распределение  $\delta\varphi$  в стохастической системе (5.3) может быть найдено точно – это распределение фон Мисеса (von Mises) [13,16,18]

$$w(\delta\varphi) = \frac{\exp\left(\frac{2|K|\cos\beta}{\sigma_{\delta\varphi}^2} \cos\delta\varphi\right)}{2\pi I_0\left(\frac{2|K|\cos\beta}{\sigma_{\delta\varphi}^2}\right)},$$

для которого можно вычислить

$$Z_{\Omega_{01}=\Omega_{02}} = \frac{I_1\left(2|K|\cos\beta/\sigma_{\delta\varphi}^2\right)}{I_0\left(2|K|\cos\beta/\sigma_{\delta\varphi}^2\right)}, \quad (6.4)$$

здесь  $I_n(\cdot)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка от мнимого аргумента.



**Рис. 2.** Степень синхронизации двух идентичных конвективных осцилляторов, подверженных воздействию шума,  $Z$  (сплошная кривая) в зависимости от интенсивности шума  $\sigma_{\delta\varphi}^2$  (6.4). Штриховая кривая: второй кумулянт (6.2); синяя штрихпунктирная: относительная погрешность двухкумулянтного приближения (6.3); красный пунктир показывает наклон степенных законов

На рис. 2. двухкумулянтное приближение (6.3) сопоставляется с точным решением (6.4) (двухкумулянтное приближение не ограничено условием  $\Omega_{01} = \Omega_{02}$ , для которого возможно точное решение). Можно видеть, что при малой интенсивности шума двухкумулянтное приближение имеет точность  $O(\sigma_{\delta\varphi}^4)$  (красный пунктир:  $\sigma_{\delta\varphi}^4 / (4|K|^2 \cos^2 \beta)$ ). При большой интенсивности шума малым параметром задачи становится  $1/\sigma_{\delta\varphi}^2$  и двухкумулянтное приближение дает очень высокий порядок точности (красный пунктир:  $0.5[\sigma_{\delta\varphi}^2 / (|K| \cos \beta)]^{-4}$ ).

Таким образом, можно явно видеть, что построенное на основе формализма круговых кумулянтов обобщение теории Отта–Антонсена [17] имеет смысл и позволяет решать физические задачи не только для больших ансамблей, как это было с оригинальной теорией [17], но и для пары связанных осцилляторов, рассмотренной в настоящей работе, или даже единственного осциллятора, для которого может быть сформулирована задача о когерентности отклика на периодическое внешнее воздействие в присутствии шума [2].

### Заключение

Для задачи о термоконцентрационной конвекции в пористой среде получены уравнения стохастической динамики фазы колебаний течения при случайной флуктуации внешних температурных условий. В рамках этих фазовых уравнений исследована проблема о степени синхронности колебаний в связанных ячейках. С использованием круговых кумулянтов – фактически, обобщения теории Отта–Антонсена – получены количественные характеристики степени синхронности и установлена их зависимость от параметров задачи. Следует отметить, что оригинальная теория Отта–Антонсена имеет смысл только для больших ансамблей осцилляторов, поскольку в своей основе опирается

на распределение плотности вероятности состояний, но не позволяет рассматривать задачи с индивидуальным шумом в осцилляторах. В присутствии же шума, распределение плотности вероятности состояний имеет смысл не только для большого ансамбля, но и для пары связанных осцилляторов или даже одного осциллятора (например, задача о когерентности отклика осциллятора с шумом на периодическое внешнее воздействие).

### Список источников

1. Acebrón J. A., Bonilla L. L., C. J. P. Vicente, et al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena // *Reviews of Modern Physics*. 2005. Vol. 77, № 1. P. 137. URL: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.137> (дата обращения: 05.10.2024).
2. Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление / Пиковский А.С., Розенблюм М.Г., Куртс Ю.М.: Техносфера, 2003. 493 с.
3. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* / Kuramoto, Y. Dover, New York, 2003. 156 p.
4. Nakao H. Phase reduction approach to synchronization of nonlinear oscillators // *Contemporary Physics*. 2016. Vol. 57. P. 188–214. URL: <https://doi.org/10.1080/00107514.2015.1094987> (дата обращения: 05.10.2024).
5. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. М.: Наука, 1974. 503 с
6. Теория колебаний / Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. М.: Наука, 1981. 918 с.
7. Тюлькина И.В., Голдобин Д.С. Синхронизация конвективных течений двухкомпонентной жидкости в смежных ячейках пористой среды // *Вестник Пермского университета. Физика*. 2023. № 2. С. 59–68. URL: <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2023-2-59-68> (дата обращения: 05.10.2024).
8. Голдобин Д.С., Любимов Д.В. Термоконцентрационная конвекция бинарной смеси в горизонтальном слое пористой среды при наличии источника тепла или примеси // *Журн. Экспериментальной и Теоретической Физики*. 2007. Т. 131, № 5. С. 949–956.
9. Hart J. E. A note on the stability of low-Prandtl-number Hadley circulations // *Journal of Fluid Mechanics*. 1983. Vol. 132. P. 271–281. URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112083001603> (дата обращения: 05.10.2024).
10. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. М.: Наука, 1972. 392 с.
11. Устойчивость конвективных течений / Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. М.: Наука, 1989. 320 с.
12. *Convection in Porous Media* / Nield D. A., Bejan A. New-York: Springer Verlag, 1998. 546 p. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3033-3> (дата обращения: 05.10.2024).
13. Goldobin D. S., Tyulkina, I. V., Klimenko L. S., Pikovsky A. Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators // *Chaos*. 2018. Vol. 28. P. 101101. URL: <https://doi.org/10.1063/1.5053576> (дата обращения: 05.10.2024).
14. Голдобин Д.С., Долматова А.В., Розенблюм М., Пиковский А. Синхронизация в ансамблях Курамото–Сакагучи при конкурирующем влиянии общего шума и глобальной связи // *Известия вузов. ПНД*. 2017. Т. 25, № 6. С. 5–37. URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37> (дата обращения: 05.10.2024).
15. Goldobin D. S., Teramae J.-N., Nakao H., Ermentrout G. B. Dynamics of Limit-Cycle Oscillators Subject to General Noise // *Physical Review Letters*. 2010. Vol. 105. P. 154101. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.154101> (дата обращения: 05.10.2024).
16. Tyulkina I. V., Goldobin D. S., Klimenko L. S., Poperechny I. S., Raikhe Y. L. Collective in-plane magnetization in a two-dimensional XY macrospin system within the framework

of generalized Ott–Antonsen theory // *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences (Series A)*. 2020. Vol. 378, № 2171. P. 20190259. URL: <https://doi.org/10.1098/rsta.2019.0259> (дата обращения: 05.10.2024).

17. Ott E., Antonsen T. M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators // *Chaos*. 2008. Vol. 18. P. 037113. URL: <https://doi.org/10.1063/1.2930766> (дата обращения: 05.10.2024).

18. Bertini L., Giacomini G., Pakdaman K. Dynamical aspects of mean field plane rotators and the Kuramoto model // *Journal of Statistical Physics*. 2010. Vol. 138. P. 270–290. URL: <https://doi.org/10.1007/s10955-009-9908-9> (дата обращения: 05.10.2024).

## References

1. Acebrón, J. A., Bonilla, L. L., Vicente, C. J. P., et al. (2005), "The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena", *Reviews of Modern Physics*, vol. 77, no. 1, pp. 137. URL: <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.77.137>.

2. Pikovsky, A., Rosenblum, M. and Kurths J. (2001), *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, UK.

3. Kuramoto, Y. (2003), *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, Dover, New York, USA.

4. Nakao, H. (2016), "Phase reduction approach to synchronization of nonlinear oscillators", *Contemporary Physics*, vol. 57, pp. 188–214.

URL: <https://doi.org/10.1080/00107514.2015.1094987>.

5. Bogolyubov, N. N. and Mitropol'skiy, Yu. A. (1974), *Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations], Nauka, Moscow, Russia.

6. Andronov, A. A., Vitt, A. A. and Khaykin, S. E. (1981), *Teoriya kolebaniy* [Oscillation theory], Nauka, Moscow, Russia.

7. Tyulkina, I. V., Goldobin, D. S. (2023), "Synchronization of convective currents of a two-component fluid in adjacent porous cells", *Bulletin of Perm University. Physics*, no. 2, pp. 59–68. URL: <https://doi.org/10.17072/1994-3598-2023-2-59-68>.

8. Goldobin D.S., Lyubimov, D.V. (2007), "Soret-Driven Convection of Binary Mixture in a Horizontal Porous Layer in the Presence of a Heat or Concentration Source", *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 104, no. 5, pp. 830-836.

9. Hart, J. E. (1983), "A note on the stability of low-Prandtl-number Hadley circulations", *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 132, pp. 271–281.

URL: <https://doi.org/10.1017/S0022112083001603>.

10. Gershuni, G. Z. and Zhukhovitskii, E. M. (1976), *Convective stability of incompressible fluids*, Jerusalem, Israel: Keter Publishing House.

11. Gershuni, G.Z., Zhukhovitsky, E.M. and Nepomnyashchy, A.A. (1989), *Stability of convective flows* [Ustoychivost' konvektivnykh techeniy], Nauka, Moscow, Russia.

12. Nield, D. A. and Bejan, A. (1998), *Convection in Porous Media*, New-York: Springer Verlag, USA. URL: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3033-3>.

13. Goldobin, D. S., Tyulkina, I. V., Klimenko, L. S. and Pikovsky, A. (2018), "Collective mode reductions for populations of coupled noisy oscillators", *Chaos*, vol. 28, pp. 101101. URL: <https://doi.org/10.1063/1.5053576>.

14. Goldobin, D.S., Dolmatova, A.V., Rosenblum, M. and Pikovsky, A. (2017), "Synchronization in Kuramoto–Sakaguchi ensembles with competing influence of common noise and global coupling", *Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics*, vol. 25, no. 6, pp. 5–37. URL: <https://doi.org/10.18500/0869-6632-2017-25-6-5-37>.

15. Goldobin, D. S., Teramae, J.-N., Nakao, H. and Ermentrout, G. B. (2010), "Dynamics of Limit-Cycle Oscillators Subject to General Noise", *Physical Review Letters*, vol. 105. pp. 154101. URL: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.154101>.
16. Tyulkina, I. V., Goldobin, D. S., Klimenko, L. S., Poperechny, I. S. and Raikhe, Y. L. (2020), "Collective in-plane magnetization in a two-dimensional XY macrospin system within the framework of generalized Ott–Antonsen theory", *Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences (Series A)*, vol. 378, no. 2171, pp. 20190259. URL: <https://doi.org/10.1098/rsta.2019.0259>.
17. Ott, E., Antonsen, T. M. (2008), "Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators", *Chaos*, vol. 18. pp. 037113. URL: <https://doi.org/10.1063/1.2930766>.
18. Bertini, L., Giacomini, G. and Pakdaman, K. (2010), "Dynamical aspects of mean field plane rotators and the Kuramoto model", *Journal of Statistical Physics*, vol. 138. pp. 270-290. URL: <https://doi.org/10.1007/s10955-009-9908-9>.

### **Информация об авторах:**

*И. В. Тюлькина* – кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), Author ID: 57202792441;

*Д. С. Голдобин* – кандидат физико-математических наук, заведующий Лаборатории подземной утилизации углерода (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), доцент кафедры теоретической физики Пермского государственного национального исследовательского университета (614990, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), Author ID: 8368187600.

### **Information about the authors:**

*I. V. Tyulkina* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, junior researcher in the Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS (1, Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), Author ID: 57202792441;

*D. S. Goldobin* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of Laboratory of underground sequestration of carbon in the Institute of Continuous Media Mechanics UrB RAS (1, Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), Associated Professor at Theoretical Physics department at the Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614990), Author ID: 8368187600.

## МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 520.2.072; 520.272.22

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-78-94

<https://elibrary.ru/QZXOIZ>



## Моделирование стационарного теплового режима цилиндрического элемента каркаса на орбите

Андрей Рамилович Фагалов<sup>1</sup>, Антон Юрьевич Беляев<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия

<sup>1,2</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия

<sup>1</sup>fagalovar@psu.ru

<sup>2</sup>belyaev@icmm.ru

**Аннотация.** Методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS решена задача нахождения температурных полей цилиндрического элемента разворачиваемой конструкции. Исследуется стационарное тепловое состояние полой цилиндрической конструкции в условиях низкой околоземной орбиты. Проведена оценка влияния учета лучистого теплообмена на внутренней границе цилиндра. Для вариантов медного, алюминиевого покрытия и отсутствия внешней фольги получено распределение температур в равновесном состоянии. Предложен способ пассивного регулирования стационарных температур с помощью частичного покрытия медной фольгой, хорошо поглощающей тепловое излучение Солнца.

**Ключевые слова:** тепловой баланс; лучистый теплообмен; композитный материал; низкая околоземная орбита; численное моделирование

**Для цитирования:** Фагалов А.Р., Беляев А.Ю. Моделирование стационарного теплового режима цилиндрического элемента каркаса на орбите // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 78–94. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-78-94. <https://elibrary.ru/QZXOIZ>.

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Пермского края в рамках научного проекта №С-26/1025 и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект № АААА-А20-120022590044-7.

*Статья поступила в редакцию 28.08.2024; одобрена после рецензирования 30.11.2024; принята к публикации 09.12.2024.*

## MECHANICS

Research article

## Modeling of Stationar Thermal Regime of Cylindrical Frame Element in Orbit

Andrey. R. Fagalov<sup>1</sup>, Anton. Yu. Beliaev<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Perm State University, Perm, Russia

<sup>1,2</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Laboratory of Micromechanics of Structurally Inhomogeneous Media, Perm, Russia

<sup>1</sup>fagalovar@psu.ru; <sup>2</sup>belyaev@icmm.ru



Эта работа © 2024 Фагалов А.Р., Беляев А.Ю. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

**Abstract.** The problem of finding the temperature fields of a cylindrical element of an expandable construction was solved using the finite element method in the ANSYS software package. The steady thermal state of hollow cylindrical body in low earth orbit conditions is studied. Significance of inner boundary radiative heat exchange is evaluated. Steady-state thermal distribution is modeled for cases of copper, aluminum and mixed external coating. Method of passive regulation of stationary temperatures by changing width of solar heat absorbing copper foil coating is proposed.

**Keywords:** *thermal balance; radiative heat transfer; composite material; low earth orbit; numerical modeling*

**For citation:** Fagalov, A. R. and Beliaev, A. Yu. (2024), "Modeling of Stationar Thermal Regime of Cylindrical Frame Element in Orbit", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), pp. 78-94. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-78-94. <https://elibrary.ru/QZXOIZ>.

**Acknowledgments:** The work was supported by the Perm Region Government, scientific project № С-26/1025 and the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project № АААА-А20-120022590044-7.

*The article was submitted 28.08.2024; approved after reviewing 30.11.2024; accepted for publication 09.12.2024*

## **Введение**

Методы радиолокационного исследования Земли активно развиваются вместе с совершенствованием космических аппаратов. Одним из перспективных направлений исследований является разработка космических РЛС с синтезированной апертурой (КРСА). Многие варианты исполнения РЛС приведены в [1], также существует достаточно большой набор работ, посвященный проектированию таких конструкций [2–8]. В зависимости от конструкции, такие аппараты могут работать в различных диапазонах частот (Х-, L-, Р- диапазоны) с различной эффективностью. В частности, для работы КРСА L-диапазона требуются достаточно объемные рефлекторы, которые могут достигать в размерах 20-30 м и иметь общую площадь порядка 100–600 м<sup>2</sup> [9].

В качестве варианта исполнения таких масштабных рефлекторов рассматриваются отверждаемые конструкции на основе полимерных композитных материалов. Их основным преимуществом является возможность компактной упаковки в процессе выведения на орбиту, что вместе с этим исключает возможность механических деформаций в результате динамических нагрузок в ходе полета. После выхода на орбиту происходит пневматическое надувание каркасных элементов, в результате которого каркас с закрепленной между балками металлической сеткой принимает требуемую форму и полученная конструкция отверждается под действием теплового излучения от Солнца и Земли.

Важным вопросом при применении такого материала является температурный режим отверждения. Низкая температура не позволит материалу полностью отвердиться, что приведет к ухудшению механических свойств материала и, как следствие, снижению жесткости конструкции. Чрезмерный нагрев, в свою очередь, приведет к нарушению режима отверждения или даже термической деструкции полимера, что опять же негативно скажется на эксплуатационных свойствах конструкции.

Таким образом, одной из задач при проектировании таких конструкций является нахождение температурных полей в процессе отверждения под действием теплового излучения. Похожие задачи поиска состояния теплового баланса космического аппарата уже рассматривались в других работах. На основе данных, полученных от спутников Земли, известны температурные диапазоны, в которых они находятся, сформулированы

различные методы поддержания требуемых температур. На данный момент существуют работы, описывающие состояние теплового равновесия космических аппаратов, в том числе составных, основываясь на различных математических моделях. Чаще всего рассматриваются модели, в которых температура составной части считается равномерной и описывается только взаимодействием составных частей между собой и с окружающей средой [10-17]. Исследования схожих задач, в том числе в смежной термомеханической постановке, также рассмотрены в литературе, например [7, 18-23].

В представленной работе температура считается неравномерной. Проанализирован выбор оптических констант – коэффициентов поглощения, отражения, излучения – и их связь. Приведен общий вид граничного условия, отвечающего теплообмену за счет теплового излучения в замкнутой области.

В данной работе рассматривается композитная структура, в состав которой входит однокомпонентное связующее, (ВСТ 1208) [24], отличающееся стабильностью при низких температурах, то есть способное долгое время (до 6 месяцев) находиться в мягком, неполимеризованном состоянии. Эта особенность позволяет хранить упакованную конструкцию на космодроме в течение достаточно долгого времени. Выбранная смола также выделяет сравнительно малое количество летучих компонент в процессе реакции отверждения, после чего выделение вещества из смолы практически прекращается. Отсутствие необходимости добавления отвердителя позволяет отбросить ряд сложных задач, связанных с доставкой отвердителя и инфузией на орбите.

В формировании температурного режима играют роль два фактора: тепловые потоки и излучение нагреваемого тела. В связи с тем, что тепловые потоки имеют естественную природу, их значение не поддается изменению. Таким образом, температурный режим может быть изменен регулированием доли поглощаемого потока и излучения самого объекта. Оптические свойства покрытия влияют на значение температуры. В свою очередь, температура определяет поток излучения от нагретого объекта и, как следствие, изменение его температуры вследствие излучения. В итоге, совокупность этих факторов создает нетривиальную задачу нахождения температурного поля исследуемого объекта, решение которой происходит итерационным способом. Иными словами, перед исследователем стоит задача подбора материалов с нужными коэффициентами отражения и излучения для получения температурного поля, удовлетворяющего условиям отверждения препрега. Методы экспериментального определения оптических характеристик твердых тел можно найти в работе [25-26].

Предметом исследований в данной работе является распределение температуры в конструкции при различных геометрических параметрах и материалах исполнения конструкции. В качестве объекта исследования выступает структурный элемент космического аппарата на орбите Земли, выполненный из отверждаемого в условиях космоса композитного материала. Задача исследования состоит в том, чтобы смоделировать процесс отверждения крупногабаритных стержневых конструкций круглого сечения в условиях Земной орбиты, и на основе полученных данных сформулировать рекомендации по строению надуваемых полых цилиндрических конструкций для обеспечения полноценного протекания реакции отверждения.

Дополнительная задача состоит в оценке влияния лучистого теплообмена на внутренней границе цилиндра на итоговое распределение температур.



### 1. Постановка задачи

В работе рассматривается тепловое равновесие составного полого цилиндра. В таблице 1 приведены тепловые и оптические характеристики используемых материалов при комнатной температуре (приблизительно 300 К).

Таблица 1. Свойства материалов

Материал	Алюминиевая фольга	Медная фольга	Препрег	Силикон
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	2700	8900	2200	1230
Теплопроводность, Вт/(м К)	235	390	0.8	0.2
Теплоемкость Дж/(кг К)	920	400	923	0.84
Коэффициент отражения	0.85	0.6	0.3	0.3
Коэффициент излучения	0.04	0.02	0.64	0.85

Подробнее используемые теплопроводность и теплоемкость (с учетом перевода из Дж/(Моль·К) в Дж/(кг·К)) металлических материалов приведены в справочнике Терехова С.В. [27]. Эффективные материальные свойства препрега были определены численным методом в программе Ansys Material Designer (осреднение по представительному объему). Препрег представляет собой ткань сатинового плетения из полимерного материала, армированного стекловолокном.

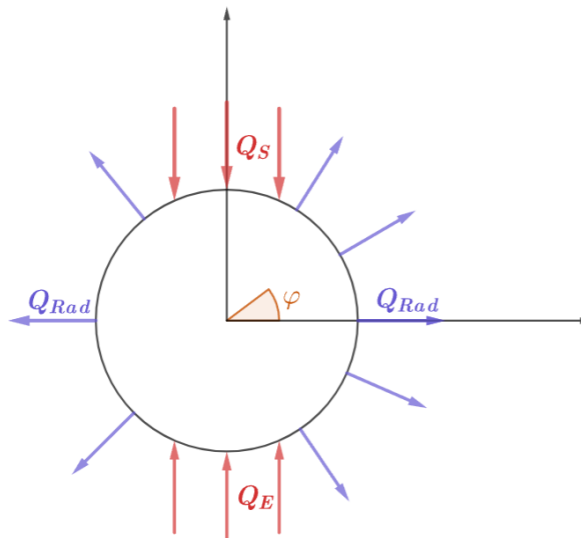


Рис. 1. Схема тепловых потоков на внешней границе

На рис. 1 представлена схема тепловых потоков на внешней границе цилиндра и введены следующие обозначения:  $Q_S$  – вектор падающего теплового потока Солнца,  $Q_S = 1367 \text{ Вт/м}^2$ ;  $Q_E$  – вектор падающего теплового потока Земли,  $Q_E = 250 \text{ Вт/м}^2$ ;  $\varphi$  – угол полярной системы координат, отсчитываемый от оси x в сторону оси y;  $Q_{Rad}$  – вектор теплового потока, испускаемый поверхностью цилиндра за счет излучения в окружающий космос (зависит от локальной температуры в точке). Также определим единичные вектора  $\tau_S$  и  $\tau_E$ , направление которых совпадает с направлением падения солнечного и земного излучения соответственно и единичный вектор  $\mathbf{n}$ , нормальный к внешней поверхности. Таким образом  $Q_S = Q_S \cdot \tau_S$ ,  $Q_E = Q_E \cdot \tau_E$ ,  $Q_{Rad} = Q_{Rad} \cdot \mathbf{n}$ .

Стоит отметить, что моделирование излучения Земли параллельно направленным пучком лучей является достаточно грубым приближением, более точным будет вычисление приходящего в точку цилиндра земного и отраженного солнечного излучения с помощью интегральных коэффициентов облученности, более подробную информацию о постановках таких задач можно найти в работах Ханкова, Лаповок и др. [10,28].

Введем обозначения геометрических параметров. Для определенности и постановки в КЭ анализе введем высоту цилиндра  $H = 1\text{ м}$ .  $r$  – внутренний радиус цилиндра (наименьший радиус);  $R$  – внешний радиус конструкции (наибольший);  $R_i$ ,  $i = \{1, 2, \dots\}$  – радиус концентрической окружности, по которой проходит граница материалов (фольги, силикона либо препрега). Количество  $R_i$  зависит от схемы конструкции, а нумерация производится в порядке возрастания (из центра круга).

Уточним связь между оптическими материальными константами  $\varepsilon$  – коэффициент излучения (степень черноты),  $A_a$  – эффективный коэффициент поглощения материала внешней стенки цилиндра,  $A_r$  – эффективный коэффициент отражения стенки цилиндра. Так как стенки цилиндра абсолютно непрозрачны, коэффициенты отражения и поглощения по определению связаны равенством  $A_a + A_r = 1$ . Исходя из закона Кирхгофа, в случае поглощения монохромного света степень серости  $\varepsilon$  соответствует коэффициенту поглощения  $A_a$ . В нашем же случае  $A_a$  и  $\varepsilon$  различаются, так как излучение и поглощение происходит в различающихся диапазонах длин волн и тело не приближается серым телом. Главным источником тепла на орбите является Солнце, излучение которого имеет значительную видимую и коротковолновую составляющую, а излучение тела происходит, (при интересующих нас температурах) преимущественно в виде инфракрасных волн. Поэтому наиболее интересными для нас являются материалы, имеющие низкий коэффициент поглощения длинных волн и более высокий коэффициент поглощения видимого и коротковолнового излучения. Медь является одним из таких материалов, другими также являются хром, золото и платина. Для обеспечения долгосрочного требуемого режима работы космических аппаратов также применяются специальные покрытия, обладающие, как правило, низкими коэффициентами  $A_a$  и  $\varepsilon$ .

Излучение в окружающий космос происходит согласно закону Стефана–Больцмана:

$$Q_{Rad} = \sigma \varepsilon T^4,$$

где  $\sigma = 5.67 * 10^{-8}, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$  – постоянная Стефана–Больцмана,  $\varepsilon$  – степень черноты материала внешней оболочки цилиндра,  $T$  – локальная температура стенки цилиндра, неравномерна.

Считая, что только нормальная часть теплового потока Солнца и Земли поглощается материалом цилиндра после отражения, запишем выражения для этих проекций. После преобразований получим:

$$Q_{Sa} = \begin{cases} A_a Q_S (-\boldsymbol{\tau}_S \cdot \mathbf{n}), & \boldsymbol{\tau}_S \cdot \mathbf{n} < 0 \\ 0, & \boldsymbol{\tau}_S \cdot \mathbf{n} \geq 0 \end{cases},$$

$$Q_{Ea} = \begin{cases} A_a Q_E (-\boldsymbol{\tau}_E \cdot \mathbf{n}), & \boldsymbol{\tau}_E \cdot \mathbf{n} < 0 \\ 0, & \boldsymbol{\tau}_E \cdot \mathbf{n} \geq 0 \end{cases}.$$

Заметим, что нулевое значение этих функций по области совпадает с отрицательным значением тепловых потоков (область тени). Перепишем  $Q_{Sa}$ ,  $Q_{Ea}$  с использованием операторов максимума:

$$Q_{Sa} = A_a Q_S \cdot \max(-\boldsymbol{\tau}_S \cdot \mathbf{n}, 0)$$

$$Q_{Ea} = A_a Q_E \cdot \max(-\boldsymbol{\tau}_E \cdot \mathbf{n}, 0)$$

Суммируя полученное и отданное элементарной поверхностью тепло, получим тепловой поток на элементарной площадке внешней границы:

$$Q = Q_{Sa} + Q_{Ea} - Q_{Rad}. \quad (1)$$

Для внутренней области каждого из составных цилиндров, ставится классическая задача теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T = f = 0,$$

где  $k$  – коэффициент теплопроводности материала,  $f$  – функция тепловых источников,  $\Delta$  – оператор Лапласа. По условиям задачи  $f = 0$ , весь теплообмен происходит на границах тел. Сформулируем ГУ 2 рода на границах через величину нормального поглощаемого теплового потока  $Q$ , для этого выделим нормальную часть вектора теплового потока:

$$-k \text{grad } T \cdot \mathbf{n} = \mathbf{Q}_n \cdot \mathbf{n} = Q, \quad (2)$$

где  $\text{grad } T$  – градиент температуры,  $\mathbf{n}$  – единичная нормаль к внешней поверхности  $S_0$ ,  $\mathbf{Q}_n$  – вектор полного теплового потока,  $Q$  – величина нормально поглощаемого теплового потока, отличная от модуля вектора  $\mathbf{Q}_n$  (не учитывается перенос тепла вдоль границы). Для внешней стенки  $S_0$  величина  $Q$  определяется формулой (1), для внутренней поверхности  $S$  – формулами (3),(4), приведенными ниже.

Для соприкасающихся тел (полые соосные цилиндры) вдоль границ  $S_i$ , находящихся на удалении  $R_i$  от начала координат, задается идеальный тепловой контакт:

$$\begin{cases} T_1|_{S_i} = T_2|_{S_i} \\ \mathbf{Q}_{n1} \cdot \mathbf{n}_1|_{S_i} = -\mathbf{Q}_{n2} \cdot \mathbf{n}_2|_{S_i} \end{cases}$$

где  $S_i$  – поверхность контакта,  $T_1$  и  $\mathbf{Q}_{n1}$  – температура и полный вектор теплового потока на границе первого тела,  $T_2$  и  $\mathbf{Q}_{n2}$  – аналогичные величины второго тела. На внутренней границе  $S$ , находящейся на удалении  $r$  от оси цилиндра, происходит лучистый теплообмен за счет теплового излучения внутренних стенок цилиндра. Так как сила тяжести практически скомпенсирована центробежной силой при движении по орбите, что приводит к невозможности характерного конвективного перемешивания газов, считаем, что даже при наличии воздуха или другого газа внутри полости цилиндра он оказывает незначительное влияние на процессы теплообмена, а также является абсолютно прозрачным. Таким образом, в уравнение баланса потоков тепла на внутренней границе добавляется только слагаемое  $Q_w$ , отвечающее за лучистый теплообмен:

$$Q = Q_w = (Q_{\text{погл}} - Q_{\text{соб}}).$$

Вводятся обозначения тепловых потоков:  $Q_w$  – итоговый тепловой поток, полученный элементарной площадкой за единичный промежуток времени,  $Q_{\text{погл}}$  – суммарный поток тепловой радиации, поглощенный элементарной площадкой;  $Q_{\text{соб}}$  – собственный поток тепловой радиации, испускаемый элементарной площадкой,  $Q_{\text{отраж}}$  – отраженный поток,  $Q_{\text{эфф}}$  – полный испускаемый с элементарной площадки поток излучения (сумма собственного и отраженного),  $Q_{\text{пад}}$  – нормальный поток внешнего (от других точек поверхности  $S$ ) излучения, падающего на элементарную площадку:

$$Q_{\text{эфф}} = Q_{\text{соб}} + Q_{\text{отраж}} = \varepsilon\sigma T^4 + A_r Q_{\text{пад}} = \varepsilon\sigma T^4 + (1 - \varepsilon)Q_{\text{пад}}. \quad (3)$$

Так как излучение и поглощение происходит в одинаковом диапазоне длин волн, в уравнении выше справедлива замена:  $A_r = 1 - A_a = 1 - \varepsilon$ .

Принимается, что как отражение, так и излучение на внутренней поверхности цилиндра носит диффузный характер. С учетом этого можно записать интегральное выражение для суммарного теплового потока  $Q_{\text{пад } 2}$ , который исходит с поверхности  $S$  и падает нормально на элементарную площадку с радиус-вектором  $\mathbf{x}_2$ , причем первая точка с радиус-вектором  $\mathbf{x}_1$  определяет положение площадки  $dS$  при интегрировании по поверхности  $S$ :

$$Q_{\text{пад } 2} = \int_S (\varepsilon \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon) Q_{\text{пад } 1}) \frac{(\mathbf{l}_{1,2} \cdot \mathbf{n}_1)(-\mathbf{l}_{1,2} \cdot \mathbf{n}_2)}{\pi |\mathbf{l}_{1,2}|^4} dS, \quad (4)$$

где величины с индексом 1 принадлежат к первой точке, а величины с индексом 2 принадлежат к фиксированной точке поверхности  $S$ .  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  – единичные внешние нормали к поверхности  $S$  в соответствующих точках,  $\mathbf{l}_{1,2}$  – вектор, соединяющий точки 1 и 2.

Строго говоря, требуется выполнение условия  $(\mathbf{l}_{1,2} \cdot \mathbf{n}_1) \geq 0$ ,  $(-\mathbf{l}_{1,2} \cdot \mathbf{n}_2) \geq 0$ , иначе поток равен нулю, что соответствует отсутствию лучистого теплообмена, если поверхности не видят друг друга напрямую. Это условие реализуется в вычислительном пакете. В общем случае возможна зависимость  $\varepsilon$  от координат, но в данной задаче коэффициент излучения принимается постоянным.

Таким образом, уравнение (4) определяет падающий на элементарную площадку поток излучения  $Q_{\text{пад } 2}$  интегральным образом через поток  $Q_{\text{пад } 1}$ , падающий на каждую из других участвующих в лучистом теплообмене элементарных площадок, а также через другие величины, которые определяются геометрией, и  $T_1$ , которое в общем случае распределено неравномерно. После численного определения значения падающих потоков, они используются в уравнении баланса (2).

Технически возможна подстановка полученных значений напрямую в уравнение баланса тепловых потоков, протекающих через элементарную площадку  $dS$  которая приводит его к следующему виду:

$$Q = \varepsilon \left[ \int_S (\varepsilon \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon) Q_{\text{пад } 1}) \frac{(\mathbf{l}_{1,2} \cdot \mathbf{n}_1)(-\mathbf{l}_{1,2} \cdot \mathbf{n}_2)}{\pi |\mathbf{l}_{1,2}|^4} dS - \sigma T_2^4 \right].$$

ГУ в таком виде на практике не применяется, для решения его преобразуют к численному аналогу. Все параметры, отвечающие за геометрию, в литературе и КЭ пакетах очень часто учитывают в виде форм-фактора, который определяется однозначно для пары поверхностей:

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{(\mathbf{l}_{1,2} \cdot \mathbf{n}_1)(-\mathbf{l}_{1,2} \cdot \mathbf{n}_2)}{\pi |\mathbf{l}_{1,2}|^4} dS_2 dS_1.$$

Вследствие определения  $S_1 F_{1 \rightarrow 2} = S_2 F_{2 \rightarrow 1}$ .

Во всей расчетной области задается начальное приближение  $T = 50^\circ\text{C}$ .

## 2. Реализация в пакете Ansys и результаты вычислений

Поставленная задача решалась численно с помощью вычислительного пакета Ansys. Методы численного исследования, в том числе метод конечных элементов, очень часто используются для оценки состояния космических аппаратов, а также решения связанных с ними задач. Это связано главным образом с большими затратами на проведение экспериментов – запуск спутников на орбиту.

Исследуемая слоистая цилиндрическая структура состоит из нескольких элементов, которые перечислены в порядке от внутренних к внешним. Это внутренняя цилиндрическая полость радиусом 84 мм, слой силикона толщиной 1 мм, слой препрега толщиной 2 мм, слой силикона 1 мм, слой фольги снаружи 0,03 мм ( $r = 84, R_1 = 85, R_2 = 87, R_3 = 86, R = 86.03$  мм). Воздухом (газом) внутри, который теоретически может там находиться после пневматического надувания, можно пренебречь, так как в условиях орбиты невозможен конвективный теплообмен в силу отсутствия силы тяжести, и теплопроводность воздуха также пренебрежимо мала. Слои силикона введены для предотвращения слипания структуры из препрега и уменьшения возможных испарений активных составляющих. Возможность расслоения не рассматривалась.

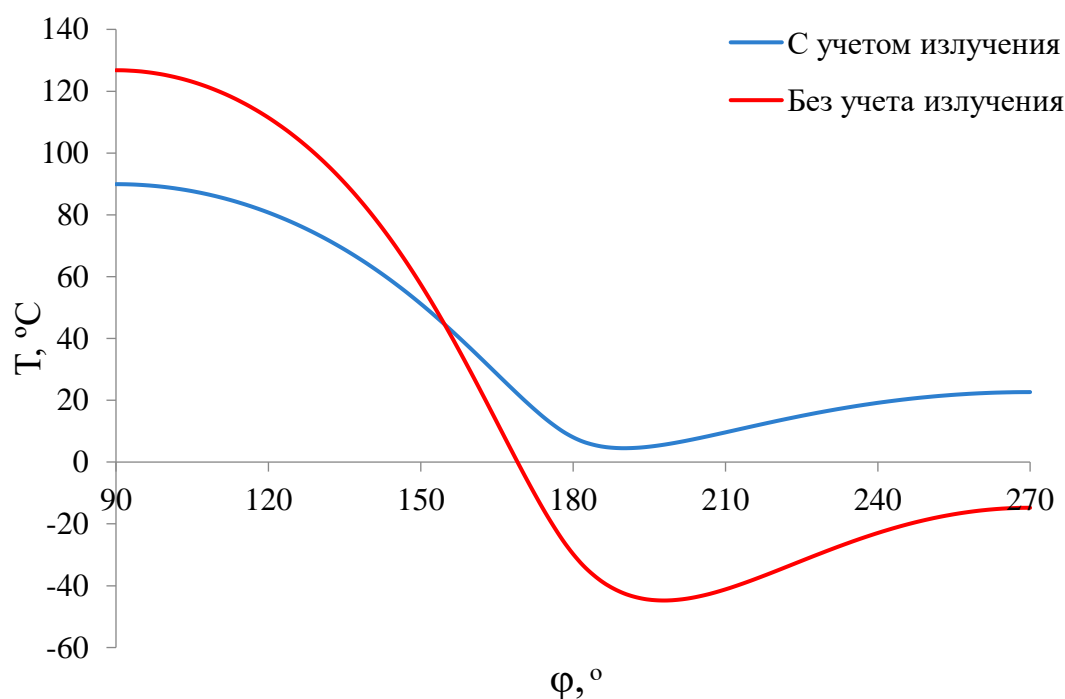


Рис. 2. Распределение температур в цилиндре без фольги и силикона, °C

Для оценки влияния внутреннего лучистого теплообмена на распределение и разброс равновесных температур было проведено несколько численных расчетов. Структуры, участвующие в них, отличаются от описанных ранее отсутствием некоторых цилиндрических слоев.

Сходимость проверялась методом сравнения решений для разных реализаций КЭ сетки. Для решения находились значения температур в нескольких выбранных точках, далее размер элемента уменьшался, находилось значение температур для текущей сетки и сравнивалось с предыдущей. Изменение размера элемента проводилось, пока значение  $\Delta = |(T_1 - T_2) / T_1| \cdot 100\%$  не стабилизировалось в районе 5% ( $T_1, T_2$  – значения температур, полученные для разных размеров элемента).

На рис. 2 приведено стационарное распределение температур в цилиндре только из препрега (без силикона и фольги), на рис. 3 – в цилиндре из препрега, обернутого в слой силикона (без фольги), на рис. 4 – в цилиндре из препрега, обернутого в слой силикона и в слой алюминиевой фольги снаружи.

На рис. 2–4 показана разница в распределении температур с учетом и без учета лучистого теплообмена на границе внутренней полости, значения приведены для угла 90–270° ввиду симметричности распределения.

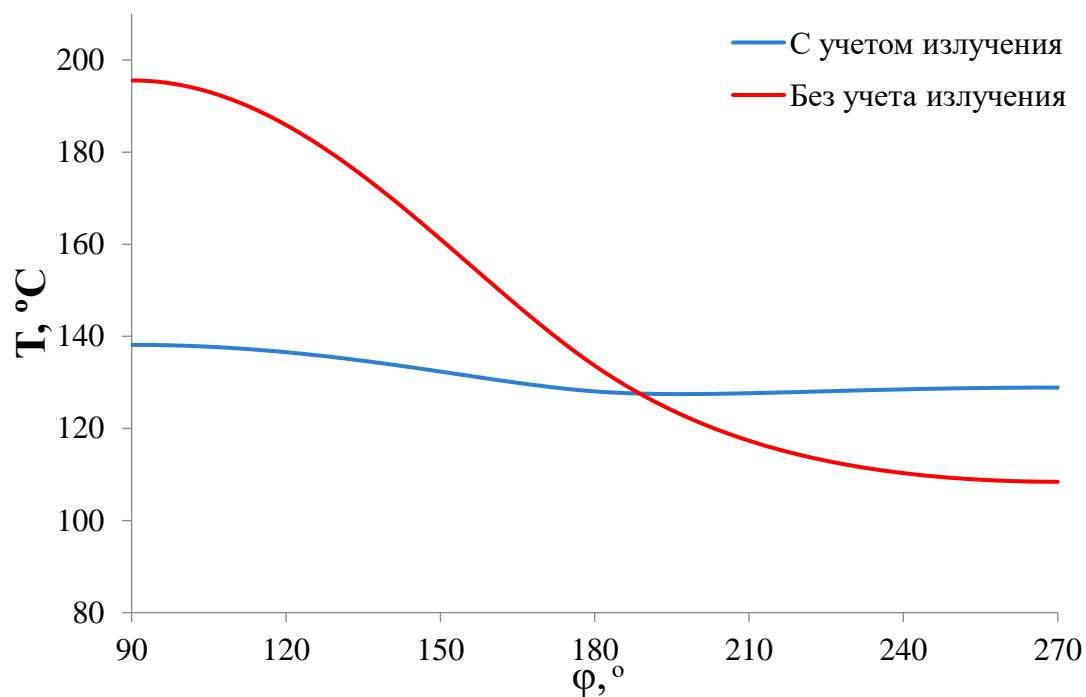


Рис. 3. Распределение температур в цилиндре без фольги, °C

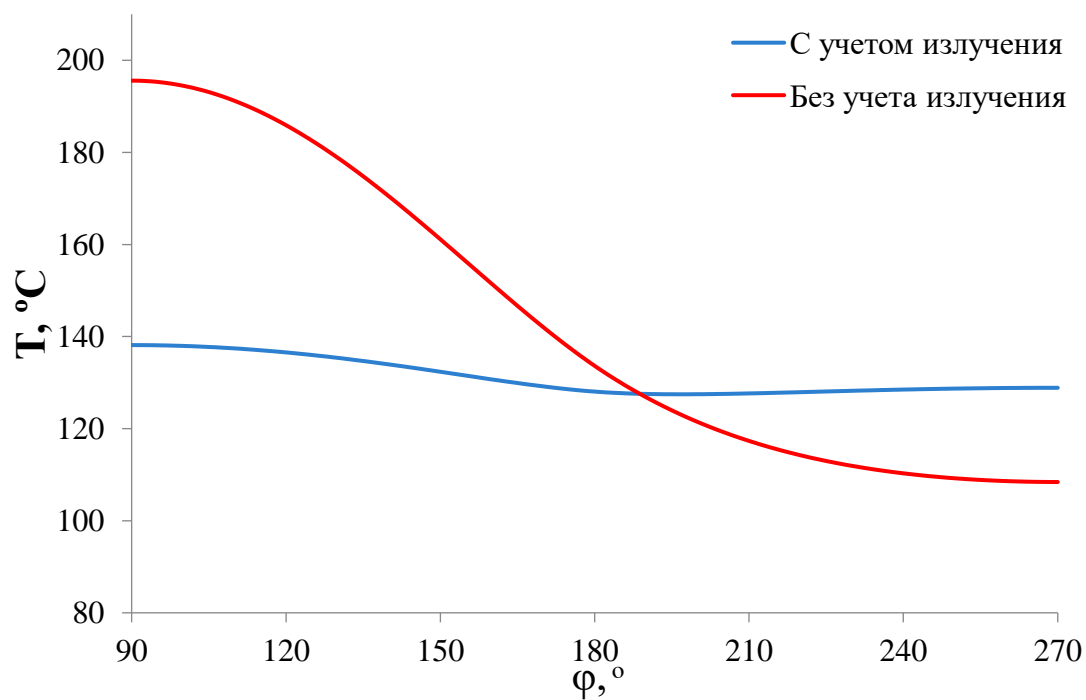


Рис. 4. Распределение температур в цилиндре, обернутом алюминиевой фольгой, °C

Таким образом, анализируя результаты, полученные на рис. 2–4, можно сделать вывод о необходимости учета теплового излучения. Лучистый теплообмен на внутренней границе вносит значительный вклад в тепловые потоки, особенно в случае отсутствия внешнего слоя изолирующей фольги. Это проявляется в сильном уменьшении разброса равновесных температур при учете лучистого теплообмена. Также наличие фольги обуславливает более равномерное распределение температур вдоль внешней поверхности цилиндра. Во всех трех случаях учет лучистого теплообмена приводил к изменениям одинакового характера, то есть к увеличению минимальных, уменьшению максимальных температур.

Второй исследуемый фактор, главным образом определяющий температурное состояние – материал внешнего слоя, в частности его оптические характеристики (коэффициент излучения и отражения). В качестве материала внешнего слоя (фольги) рассматривались алюминий и медь, главным образом из-за их доступности. Материальные свойства были приведены в табл. 1.

На рис. 4 показаны результаты моделирования цилиндра, обернутого в алюминиевую фольгу, температуры такого цилиндра приходят к значениям в пределах 120–130°C, что по предварительным результатам исследования выбранной смолы недостаточно для её полноценного отверждения.

На рис. 5 приведены равновесные температуры цилиндра, обернутого в силикон и слой медной фольги снаружи.

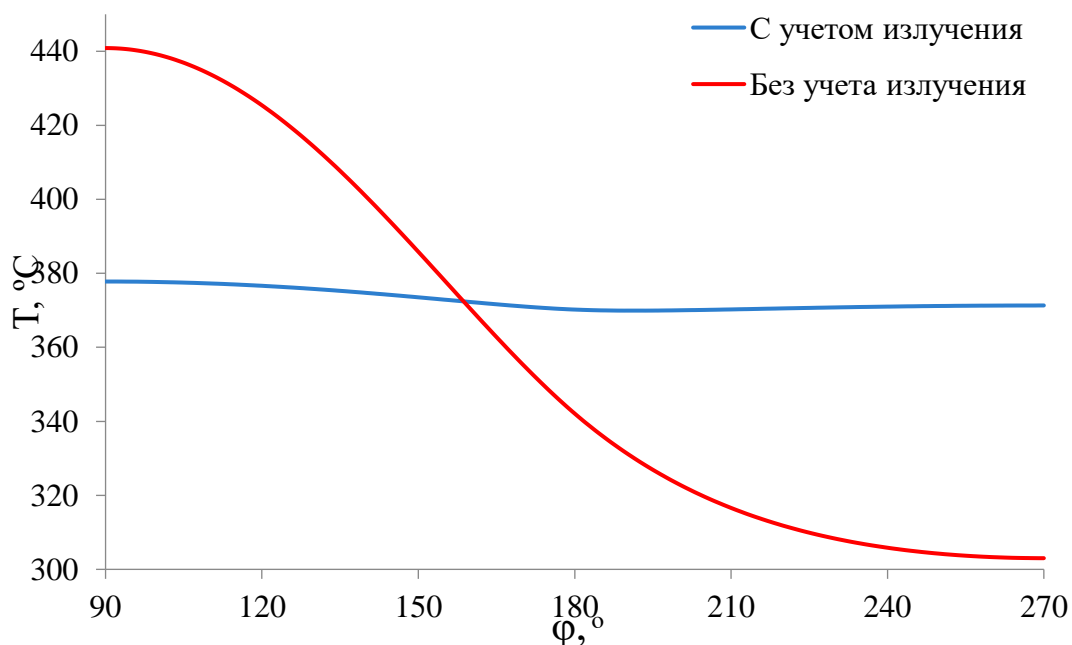
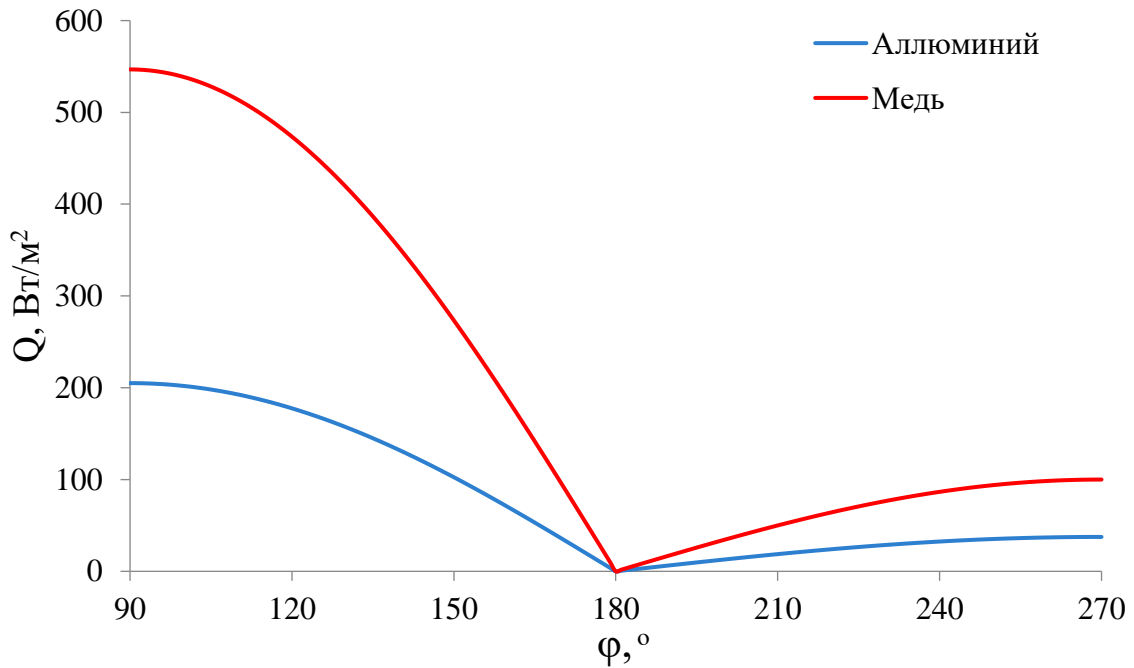
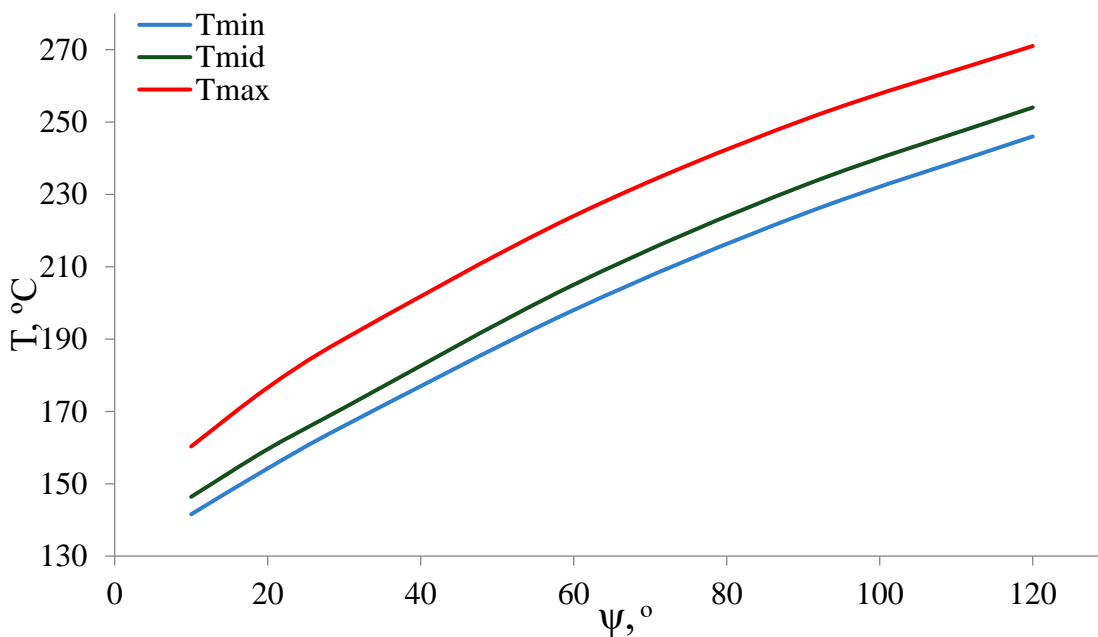


Рис. 5. Распределение температур в цилиндре, обернутом медной фольгой, °C

При использовании только медной фольги итоговая температура превышает 300°C, что уже может вызывать разрушение как препрега, так и силикона. Использование такого варианта внешнего покрытия не актуально: цилиндр перегревается.



**Рис. 6.** Поглощаемые внешней поверхностью тепловые потоки при частичном покрытии медной фольгой, Вт/м<sup>2</sup>

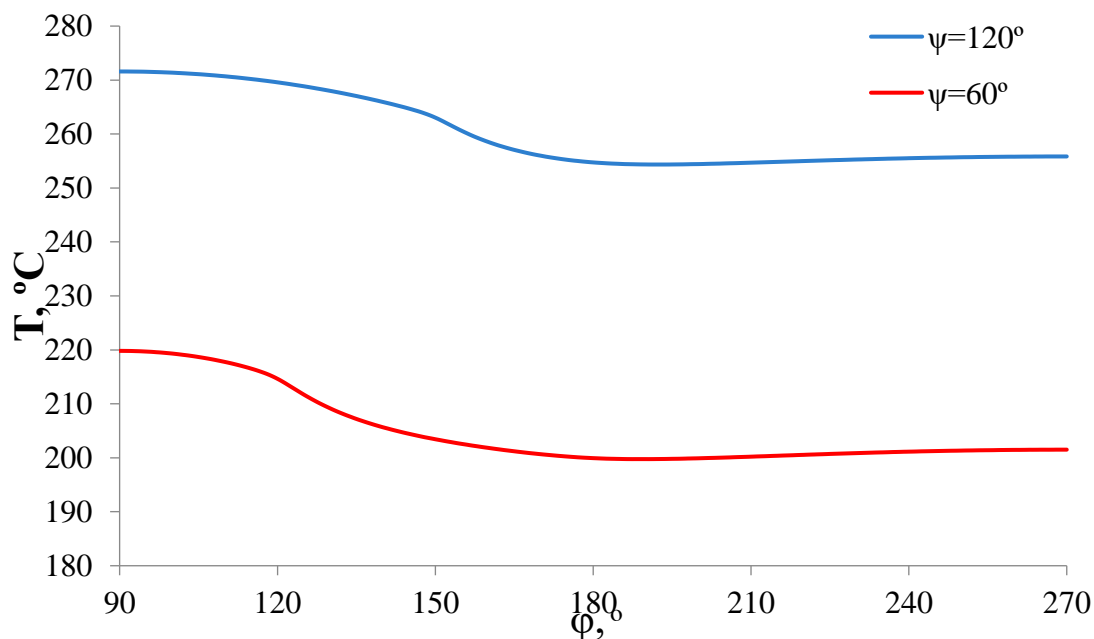


**Рис. 7.** Значения минимальных, средних и максимальных температур в цилиндре, обернутом частично алюминиевой и медной фольгой, в зависимости от центрального угла  $\psi$ , занимаемого медной полосой

Исходя из полученных результатов, было предложено использовать частичное медное покрытие (полоска фольги), которое позволит поглощать достаточный для достижения требуемой температуры поток солнечного излучения. Также наличие такой полоски предположительно позволит укрепить шов алюминиевой фольги, если она будет наложена поверх него. На рис. 6 приведена зависимость поглощаемых тепловых потоков от полярной координаты  $\phi$  при покрытии медной и алюминиевой фольгой.



При частичном покрытии в поглощаемых тепловых потоках наблюдается вертикальный скачок, связанный с изменением материала покрытия.



**Рис. 8.** Распределение температур в цилиндре, обернутом частично алюминиевой и медной фольгой, где медная фольга занимает центральный угол  $\psi$ , °C

Использование такого частичного медного покрытия позволяет получать структуры, стационарные температуры которых находятся приблизительно в интересующем нас диапазоне. Были получены аналогичные распределения температур для цилиндров при различной величине центрального угла  $\psi$ , занимаемого полоской медной фольги. Максимальная, средняя и минимальная температуры всей конструкции представлены в виде графика на рис. 7, также на рис. 8 для примера приведено несколько графиков полученного стационарного распределения температур.

Можно отметить возможность уменьшения стационарных температур в случае изменения угла падения солнечных лучей и перемещения поглощающей медной полосы в "тень". Таким образом, если структура из таких цилиндров ориентирована определенным образом, она может нагреваться, а после отверждения будет перевернута и начнет охлаждаться.

### Заключение

Была поставлена и решена задача о температурном равновесии цилиндрической трубы на орбите. Анализ результатов показал, что лучистый теплообмен на внутренней границе в значительной степени влияет на температурное поле, и его учет необходим для более качественной постановки задачи. Рассмотрено два материала внешнего покрытия – алюминиевая и медная фольга, а также их комбинации. Цилиндр, обернутый в алюминиевую фольгу, не способен поглощать достаточное количество солнечного излучения и обеспечить температуры для полноценного протекания реакции полимеризации.

Оборачивание в медную фольгу приводит к слишком большим температурам и перегреву конструкции. Комбинация двух покрытий, то есть частичное покрытие медной фольгой, позволяет получить итоговые температуры в промежуточном диапазоне, который нас интересует.

Таким образом, возможно создание разворачиваемых в условиях космоса конструкций, которые длительное время могут храниться в свернутом состоянии, будучи выведенными в космос развернуться под действием внутреннего давления и пройти отверждение под действием солнечного и земного излучения при необходимом температурном режиме, обеспеченном за счет комбинации разных покрытий.

### Список источников

1. *Лопатин А.В., Рутковская М.А.* Обзор конструкций современных трансформируемых космических антенн (часть 2) // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. 2007. № 3(16). С. 78–81.
2. *Design and fabrication of large polymer constructions in space / Alexey Kondyurin:* Elsevier. 2023. ISBN: 978-0-12-816803-5.
3. *Зарубин В.С., Зимин В.Н., Кувыркин Г.Н.* Распределение температуры сферической оболочки космического калибровочно-юстировочного аппарата // Прикладная механика и теоретическая физика. 2017. Т. 58, № 6(346). С. 149–157. DOI: 10.15372/PMTF20170614.
4. *Городецкий М.А., Климакова Л.А., Михайловский К.В., Резник С.В.* Новые подходы к созданию термостабильных космических платформ для дистанционного зондирования Земли // Ключевые тренды в композитах: наука и технологии: сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф. 2019. С. 142–149. EDN CCXDRR.
5. *Филина Е.К., Михайловский К.В., Архипов М.Ю., Голубев Е.С.* Разработка схемы подкрепления отражающей обшивки рефлектора методами параметрической и топологической оптимизации // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2019. Т. 20, № 4. С. 276–284. DOI: 10.22363/2312-8143-2019-20-4-276-284.
6. *Елисеева А.Ю., Комар Л.А., Кондюрин А.В.* Вычислительное моделирование отверждения каркаса надувной антенны спутника на околоземной орбите // Вычислительная механика сплошных сред. 2020. Т. 13, № 4. С. 414–423. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.4.32. EDN PDFKAL.
7. *Беляев А.Ю., Свистков А.Л.* Моделирование отверждаемых цилиндрических элементов надувной антенны наноспутника // Вестник Пермского университета. Физика. 2017. № 4(38). С. 5–10. DOI: 10.17072/1994-3598-2017-4-5-10. EDN ZXNXMN.
8. *Тулин Д.В., Финченко В.С.* Теоретико-экспериментальные методы проектирования систем обеспечения теплового режима космических аппаратов // Проектирование автоматических космических аппаратов для фундаментальных научных исследований. 2014. Т. 3. С. 1320–1437. EDN VNSMWX.
9. *Демин Д.С., Кононенко П.И., Лебедево В.И.* Концепция бортового радиолокатора на основе АФАР с использованием рефлектора с отверждаемым пневмокаркасом // Тр. МАИ. 2021. № 119. DOI:10.34759/trd-2021-119-12.
10. *Баева Ю.В., Лаповок Е.В., Ханков С.И.* Аналитическая методика расчета тепловых потоков в околоземном пространстве, формирующих тепловой режим космических телескопов // Оптический журнал. 2013. Т. 80, № 5. С. 30–37. EDN TQNXNZ.

11. *Elweteedy, Ahmed & Elmaihy, Ali & Elhefnawy, Ahmed*. Small Satellite Operational Phase Thermal Analysis and Design: A Comparative Study // INCAS BULLETIN 2021. Vol. 13. P. 59–74. 10.13111/2066-8201.2021.13.4.6.
12. *Баева Ю.В., Лаповок Е.В., Ханков С.И.* Методика расчета нестационарных температур космического объекта, движущегося по эллиптической орбите // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 6(88). С. 67–72. EDN RKOLXJ.
13. *Qiao Tan, Fengfeng Li, Liwu Liu, Yanju Liu, Jinsong Leng*. Effects of vacuum thermal cycling, ultraviolet radiation and atomic oxygen on the mechanical properties of carbon fiber/epoxy shape memory polymer composite // Polymer Testing. 2023. Vol. 118. 107915. URL: <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2022.107915> (дата обращения: 28.08.2024)..
14. *Marjan Moghanipour, Maryam Kiani, Seid H. Pourtakdoust* Radiation based satellite attitude and thermal parameters estimation considering conduction effect // Advances in Space Research. 2023. Vol. 72. I. 10. P. 4517–4530. DOI: 10.1016/j.asr.2023.08.042.
15. *Kaihua Zhang, Yitong Lv, Biyuan Wu, Kun Yu, Yufang Liu, Xiaohu Wu*. A theoretical study on the effect of protective layer on the solar absorption and infrared emittance of spacecraft smart thermal control devices // Optics & Laser Technology. 2024. Vol. 169. 110087. URL: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2023.110087> (дата обращения: 28.08.2024).
16. *Евламбиева С.Е., Беляев А.Ю., Мальцев М.С., Свистков А.Л.* Анализ температурного режима отверждаемых надувных элементов антенн наноспутников // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. Т. 23. С. 459–469. DOI: 10.25590/mkkm.ras.2017.23.04.459\_469.01.
17. *Garishin O.K., Svistkov A.L., Belyaev A.Yu., Gilev V.G.* On the possibility of using epoxy prepregs for carcass-inflatable nanosatellite antennas // Mater. Sci. Forum. 2018. Vol. 938. P. 156–163. DOI: 10.4028/www.scientific.net/msf.938.156.
18. *Дементьев И.И., Устинов А.Н., Атамасов В.Д. и др.* Трехмерная математическая модель напряженно-деформированного состояния крупногабаритного композитного выносного элемента конструкции космического аппарата // Альманах современной науки и образования. 2015. № 1(91). С. 39–48. EDN ТВУНСВ.
19. *Денисова Л.В., Калинин Д.Ю., Резник С.В.* Теоретические и экспериментальные исследования тепловых режимов сетчатых рефлекторов космических антенн // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение. 2011. № 1(82). С. 92–105. EDN NDXJKV.
20. *Пономарев В.С., Пономарев С.В., Халиманович В.И.* Термомеханический анализ крупногабаритного сетчатого рефлектора космического назначения // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. 2016. Т. 17, № 2. С. 343–358. EDN ХАУУZX.
21. *Тестоедов Н.А., Двирный Г.В., Пермяков М.Ю.* Определение величины температурной деформации размеростабильных рефлекторов // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета им. академика М.Ф. Решетнева. 2011. № 2(35). С. 67–71. EDN NXUZIP.
22. *Lingyi Wang, Hao Zhu, Wei Xu, Nanyu Meng*. Thermal-structural analysis of a large space hoop-column antenna under unidirectional solar radiations // Thin-Walled Structures. 2024. Vol. 198. 111695. URL: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.111695> (дата обращения: 28.08.2024).

23. Zhiqi Shi, Qinghua Zhou, Hao Zhu, Wanyou Yang, Nanyu Meng. Thermal-dynamic coupling analysis of space truss antennas in actual space thermal environment // *Engineering Structures*. 2024. Vol. 298. 117020. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.117020.
24. Железняк В.Г., Чурсова Л.В. Модификация связующих и матриц на их основе с целью повышения вязкости разрушения // *Авиационные материалы и технологии*. 2014. № 1. С. 47–50. DOI: 10.18577/2071-9140-2014-0-1-47-50.
25. Казаковцев В.П., Корянов В.В., Просунцов П.В., Топорков А.Г. Расчет условий освещенности в процессе выведения космического аппарата на геостационарную орбиту // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2016. № 12(60). С. 4. DOI: 10.18698/2308-6033-2016-12-1568. EDN XEQDWL.
26. Асланян Р.О., Анисимов Д.И., Марченко И.А., Пантелеев В.И. Имитаторы солнечного излучения для термовакуумных испытаний космического аппарата // *Сибирский журнал науки и технологий*. 2017. Т. 18, № 2. С. 323–327. EDN YMACUS.
27. Терехов С.В. Тепловые свойства металлов / Справочник. Донецк: ГБУ "Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина", 2023. 184 С.
28. Теплообмен излучением: пер. с англ. / Зигель Р., Хауэлл Дж. М.: Мир, 1975. С. 934.

## References

- Lopatin, A. V., Rutkovskaya, M. A. (2007) "*Obzor konstruksiy sovremennykh transformiruyemykh kosmicheskikh antenn (chast' 2)*", *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika M.F. Reshetneva*, № 3(16), pp. 78-81.
- Kondyurin, Alexey (2023) "*Design and fabrication of large polymer constructions in space*", Elsevier. ISBN: 978-0-12-816803-5.
- Zarubin, V. S., Zimin, V. N. and Kuvyrkin, G. N. (2017) "Распределение температуры сферической оболочки космического калибровочно-устойчивого аппарата", *Прикладная механика и теоретическая физика*, vol. 58, № 6(346), pp.149-157. DOI: 10.15372/PMTF20170614.
- Gorodetskiy, M. A., Klimakova, L. A., Mikhaylovskiy, K. V. and Reznik, S. V. (2019) "*Novyye podkhody k sozdaniyu termostabil'nykh kosmicheskikh platform dlya distantsionnogo zondirovaniya Zemli*", *Klyuchevyye trendy v kompozitakh: nauka i tekhnologii: sbornik materialov Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*, pp. 142-149. EDN CCXDRR.
- Filina, Ye. K., Mikhaylovskiy, K. V., Arkhipov, M. Yu. and Golubev, Ye. S. (2019) "*Razrabotka skhemy podkrepleniya otrazhayushchey obshivki reflektora metodami parametricheskoy i topologicheskoy optimizatsii*", *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Seriya: Inzhenernyye issledovaniya*, vol. 20, № 4, pp. 276-284. DOI: 10.22363/2312-8143-2019-20-4-276-284.
- Yeliseyeva, A. Yu., Komar, L. A. and Kondyurin, A. V. (2020) "*Vychislitel'noye modelirovaniye otverzhdeniya karkasa naduvnoy anteny sputnika na okolozemnoy orbite*", *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, vol. 13, № 4, pp. 414-423. DOI: 10.7242/1999-6691/2020.13.4.32. EDN PDFKAL
- Beliaev, A. Yu., Svistkov, A. L. (2017) "*Modelirovaniye otverzhdayemykh tsilindricheskikh elementov naduvnoy anteny nanosputnika*", *Vestnik Permskogo universiteta. Fizika*, № 4(38), pp. 5-10. DOI 10.17072/1994-3598-2017-4-5-10. EDN ZXNXMN.
- Tulin, D. V., Finchenko, V. S. (2014) "*Teoretiko-eksperimental'nyye metody proyektirovaniya sistem obespecheniya teplovogo rezhima kosmicheskikh apparatov*", *Proyektirovaniye avtomaticheskikh kosmicheskikh apparatov dlya fundamental'nykh nauchnykh issledovaniy*, vol. 3, pp. 1320-1437. EDN VNSMWX.

9. Demin, D.S., Kononenko, P.I. and Lebedenko, V.I. (2021) "*Kontsepsiya bortovogo radiolokatora na osnove AFAR s ispol'zovaniyem reflektora s otverzhdayemym pnevmokarkasom*", Trudy MAI, № 119. DOI:10.34759/trd-2021-119-12.
10. Bayeva, Yu. V., Lapovok, Ye. V. and Khankov, S. I. (2013) "*Analiticheskaya metodika rascheta teplovykh potokov v okolozemnom prostranstve, formiruyushchikh teplovoyy rezhim kosmicheskikh teleskopov*", Opticheskiy zhurnal, vol. 80, № 5, pp. 30-37. EDN TQNXNZ.
11. Elweteedy, Ahmed & Elmaihy, Ali & Elhefnawy, Ahmed. Small (2021) "*Satellite Operational Phase Thermal Analysis and Design: A Comparative Study*", INCAS BULLETIN, vol. 13, pp. 59-74. 10.13111/2066-8201.2021.13.4.6.
12. Bayeva, Yu. V., Lapovok, Ye. V. and Khankov, S. I. (2013) "*Metodika rascheta nestatsionarnykh temperatur kosmicheskogo ob'yekta, dvizhushchegosya po ellipticheskoy orbite*", Nauchno-tehnicheskiiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki. № 6(88), pp. 67-72. EDN RKOLXJ.
13. Qiao Tan, Fengfeng Li, Liwu Liu, Yanju Liu, Jinsong Leng (2023) "*Effects of vacuum thermal cycling, ultraviolet radiation and atomic oxygen on the mechanical properties of carbon fiber/epoxy shape memory polymer composite*", Polymer Testing, vol. 118. 107915. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2022.107915>.
14. Marjan Moghanipour, Maryam Kiani, Seid H. Pourtakdoust (2023) "*Radiation based satellite attitude and thermal parameters estimation considering conduction effect*", Advances in Space Research, vol. 72. i. 10. pp. 4517-4530. DOI: 10.1016/j.asr.2023.08.042.
15. Kaihua Zhang, Yitong Lv, Biyuan Wu, Kun Yu, Yufang Liu, Xiaohu Wu (2024) "*A theoretical study on the effect of protective layer on the solar absorption and infrared emittance of spacecraft smart thermal control devices*", Optics & Laser Technology, vol. 169. 110087. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2023.110087>.
16. Yevlampiyeva, S. Ye., Beliaev, A. Yu., Mal'tsev, M. S. and Svistkov, A. L. (2017) "*Analiz temperaturnogo rezhima otverzhdayemykh naduvnykh elementov antenn nanosputnikov*", Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy, vol. 23, pp. 459-469. DOI: 10.25590/mkmk.ras.2017.23.04.459\_469.01.
17. Garishin, O. K., Svistkov, A. L., Beliaev, A. Yu. and Gilev, V. G. (2018) "*On the possibility of using epoxy prepregs for carcass-inflatable nanosatellite antennas*", Material Science Forum, vol. 938, pp. 156-163. DOI: 10.4028/www.scientific.net/msf.938.156.
18. Dement'yev, I. I., Ustinov, A. N., Atamasov, V. D. et al. (2015) "*Trekhmernaya matematicheskaya model' napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya krupnogabaritnogo kompozitnogo vynosnogo elementa konstruktsii kosmicheskogo apparata*", Al'manakh sovremennoy nauki i obrazovaniya, № 1(91), pp. 39-48. EDN TBYHCV.
19. Denisova, L. V., Kalinin, D. Yu. and Reznik, S. V. (2011) "*Teoreticheskiye i eksperimental'nyye issledovaniya teplovykh rezhimov setchatykh reflektorov kosmicheskikh anten*", Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Seriya Mashinostroyeniye, № 1(82), pp. 92-105. EDN NDXJKV.
20. Ponomarev, V. S., Ponomarev, S. V. and Khalimanovich, V. I. (2016) "*Termomekhanicheskiy analiz krupnogabaritnogo setchatogo reflektora kosmicheskogo naznacheniya*", Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika M.F. Reshetneva, vol. 17, № 2, pp. 343-358. EDN XAYYZX.
21. Testoyedov, N. A., Dvirnyy, G. V. and Permyakov, M. Yu. (2011) "*Opredeleniye velichiny temperaturnoy deformatsii razmerostabil'nykh reflektorov*", Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo aerokosmicheskogo universiteta im. akademika M.F. Reshetneva. № 2(35), pp. 67-71. EDN NXUZIP.

22. Lingyi Wang, Hao Zhu, Wei Xu, Nanyu Meng (2024) "Thermal-structural analysis of a large space hoop-column antenna under unidirectional solar radiations", Thin-Walled Structures. vol. 198. 111695. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.111695>.
23. Zhiqi Shi, Qinghua Zhou, Hao Zhu, Wanyou Yang, Nanyu Meng (2024) "Thermal-dynamic coupling analysis of space truss antennas in actual space thermal environment", Engineering Structures. vol. 298. 117020. DOI: 10.1016/j.engstruct.2023.117020.
24. Zheleznyak, V.G., Chursova, L.V. (2014) "Modifikatsiya svyazuyushchikh i matrits na ikh osnove s tsel'yu povysheniya vyazkosti razrusheniya", Aviatsionnyye materialy i tekhnologii. № 1, pp. 47-50. DOI: 10.18577/2071-9140-2014-0-1-47-50.
25. Kazakovtsev, V. P., Koryanov, V. V., Prosuntsov, P. V. and Toporkov, A. G. (2016) "Raschet usloviy osveshchennosti v protsesse vyvedeniya kosmicheskogo apparata na geostatsionarnuyu orbitu", Inzhenernyy zhurnal: nauka i innovatsii. № 12(60), pp. 4. DOI: 10.18698/2308-6033-2016-12-1568. EDN XEQDWL.
26. Aslanyan, R. O., Anisimov, D. I., Marchenko, I. A. and Panteleyev, V. I. (2017) "Imitatory solnechnogo izlucheniya dlya termovakuumnykh ispytaniy kosmicheskogo apparata", Sibirskiy zhurnal nauki i tekhnologii, vol. 18, № 2, pp. 323-327. EDN YMACUC.
27. Terekhov, S.V. (2023) "Teplovyye svoystva metallov", Spravochnik. Donetsk: GBU "Donetskiy fiziko-tekhnicheskiy institut im. A.A. Galkina". 184 p.
28. Zigel' R., Khauell Dzh. (1975) *Teploobmen izlucheniye: Per. s angl.* / М.: Mir, p. 934.

#### **Информация об авторах:**

А. Р. Фагалов – магистр 2 года обучения по направлению "Механика и математическое моделирование" физико-математического института Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), Scopus ID: 58312938900;

А. Ю. Беляев – младший научный сотрудник лаборатории Микромеханики структурно-неоднородных сред, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), WoS ID: F-6708-2017, Scopus ID: 57190124627, ID РИНЦ: 584106.

#### **Information about the authors:**

A. R. Fagalov – Second year Master of Mechanics and Mathematical Modeling at the Physics and Mathematics Institute of Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), Scopus ID: 58312938900;

A. Yu. Beliaev – Junior Researcher, Laboratory of Micromechanics of Structurally Inhomogeneous Media, Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of RAS (1, Akademika Koroleva St., Perm, Russia, 614013), WoS ID: F-6708-2017, Scopus ID: 57190124627.

## МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 53.087.44

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-95-103

<https://elibrary.ru/LWRKKP>

## Независимость равновесного состояния размягченного эластомерного нанокompозита при одноосном нагружении от способа размягчения материала

Владимир Васильевич Шадрин<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия<sup>2</sup>Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия  
shadrin@icmm.ru

**Аннотация.** Для создания математической модели эластомерного материала требуется описать его равновесную кривую. Такую кривую можно получить путем очень медленно-го растяжения или по точкам релаксации напряжений при заданной деформации. Проведены экспериментальные исследования эластомеров, влияния их релаксации напряжений при 100 % деформации от скорости растяжения. Целью исследования явилось определить, может ли скорость растяжения материала отразиться на равновесном состоянии нанокompозита. Испытывались бутадиен-нитрильный каучук, наполненный 40 массовыми частями технического углерода и бутадиен-стирольный каучук, наполненный 50 массовыми частями техуглерода. Образцы растягивались до 100 % деформации со скоростями 10, 100, 1200 %/мин и проводилась выдержка в течение 120 мин. Проведено растяжение-сжатие образца до 100 % в количестве 200 циклов с последующей выдержкой при максимальной деформации 120 мин. Установлено, что скорость растяжения влияет на релаксацию только в начальном этапе выдержки по времени – до 15 мин – потом кривые релаксации напряжений совпадают. При циклическом испытании падение напряжений в максимальной точке деформации происходит очень медленно и до конца не совпадает с кривой релаксации. При дальнейшей временной выдержке кривая падения напряжения совпадает с кривой релаксации. Такое поведение эластомеров связано с их вязкоупругостью и с накоплением повреждений при релаксации напряжений при максимальной деформации и при циклических испытаниях.

**Ключевые слова:** напряжение; деформация; циклическая деформация; релаксация напряжений; выдержка по времени; скорость растяжения, эффект размягчения Маллинза

**Для цитирования:** Шадрин В.В. Независимость равновесного состояния размягченного эластомерного нанокompозита при одноосном нагружении от способа размягчения материала // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып.4(67). С. 95–103. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-95-103. <https://elibrary.ru/LWRKKP>.

**Благодарности:** работа выполнена в рамках Государственного задания ПФИЦ УрО РАН. Регистрационный номер: АААА-А20-120022590044-7.

Статья поступила в редакцию 11.10.2024; одобрена после рецензирования 30.11.2024; принята к публикации 09.12.2024.



Эта работа © 2024 Шадрин В.В. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

## MECHANICS

Research article

## The Equilibrium State of the Softened Elastomeric Nanocomposite under Uniaxial Loading and its Independence From the Method of Material Softening

Vladimir. V. Shadrin<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS, Perm, Russia<sup>2</sup>Perm State University, Perm, Russia

shadrin@icmm.ru

**Abstract.** For a mathematical model of an elastomeric material, the researcher must describe its equilibrium curve. This curve can be obtained by very slow stretching or by stress relaxation points at a given deformation. Experimental studies of filled elastomers and the effect of stress relaxation at 100% deformation from the stretching rate were conducted. The aim of the study was to determine how the stretching rate of the material affects the equilibrium state of the nanocomposite. Tests were performed for the specimens of butadiene-nitrile rubber containing 40 parts by weight of black carbon and butadiene-styrene rubber containing 50 parts by weight of black carbon. The specimens were stretched to the strain of 100 % at the rates of 10, 100, 1200 %/min and then aged for 2 hours. The specimens were subjected to tensile-compressive loads up to the strain of 100 % during 200-cycle test, and then were aged at maximum strain for 2 hours. It was found that the tensile rate affects the stress relaxation only at the early stage of aging – up to 15 minutes – after which the stress relaxation curves coincide. In cyclic testing, a decrease in the stress magnitude at the point of maximum strain is very slow and does not coincide with the relaxation curves, but with increasing time of holding one can observe a complete coincidence of the stress and relaxation curves. Such behavior of elastomers is due to their viscoelasticity and the accumulation of damage during stress relaxation at maximum deformation and cyclic testing.

**Keywords:** *stress; strain; cyclic strain; stress relaxation; aging, tensile strain rate, Mullins softening effect*

**For citation:** V. V., Shadrin (2024), "The Equilibrium State of the Softened Elastomeric Nanocomposite under Uniaxial Loading and its Independence From the Method of Material Softening", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), pp. 95-103. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-95-103. <https://elibrary.ru/LWRKKP>.

**Acknowledgments:** the work was performed within the framework of the state order of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (subject no. AAAA-A20-120022590044-7).

*The article was submitted 11.10.2024; approved after reviewing 30.11.2024; accepted for publication 09.12.2024*

### Введение

В математических моделях эластомеров, как правило, присутствуют механизмы вязкоупругого поведения. Предложены различные математические модели, и продолжают появляться новые определяющие уравнения по описанию поведения эластомерных композитных материалов [1–8]. Для феноменологических моделей важно выделить и описать упругую составляющую свойств материала. В работе [9] предложен метод нахождения точек равновесной кривой из экспериментальных данных, используя циклическое растяжение с разными скоростями и вложенными циклами. Здесь, после первого цикла растяжения-разгрузки, когда материал максимально размягчился, проводятся циклические испытания, когда последующие циклы нагружаются до меньших деформаций от максимальной и производится выдержка по времени в точках заданной деформации.



В результате временной выдержки в материале падают напряжения до постоянной величины. При разгрузке разгрузочные деформации образца с каждым последующим циклом делают нарастающими с определенным шагом, и также делается временная выдержка. В этих точках разгрузки структура материала частично возвращается в исходное состояние и напряжения возрастают. Так определяются равновесные точки материала после релаксации напряжений в результате временных выдержках при растяжениях и разгрузках.

Известно, что в вязкоупругих материалах напряжения при растяжении зависят от скорости: чем скорость выше, тем выше кривая растяжения [10–14]. Такое поведение связано с перестройкой структуры материала, которая при больших скоростях растяжения не успевает осуществиться при больших скоростях. Размягчение материала связано с накоплением повреждений и с перестройкой структуры материала, которая не полностью осуществилась в результате разгрузки – эффект Маллинза [15, 16].

Для определения других характеристик, таких, как размягчение материала, гистерезисные потери, остаточная деформация, используются различные виды циклического нагружения – многократное циклическое нагружение [17], циклическое растяжение с нарастающей амплитудой [18] или сложное циклическое с уменьшающейся амплитудой деформации, по сравнению с предыдущим нагружением и с увеличивающейся амплитудой разгрузки [19]. В работе исследовано многократное циклическое деформирование до заданной величины для нахождения точки равновесной кривой на последнем цикле растяжения.

Целью работы является показать, что при некоторой временной выдержке кривые релаксации напряжений совпадают и не зависят от скоростей растяжения.

### **Программы механических испытаний**

В процессе испытания использовались резины на основе бутадиен-нитрильного каучука СКН-18СНТ, наполненного 40 массовыми частями (м.ч.) технического углерода и бутадиен-стирольного каучука СКМС-30АРК, наполненного 50 м.ч. техуглерода.

Образцы изготавливались в виде колец, чтобы исключить выползание из захватов. Испытания проводились на уникальном четырехвекторном испытательном стенде фирмы Zwick/Roell. Деформация отслеживалась по перемещению меток с помощью видеодатчика VideoXtens.

Образцы растягивались с разными скоростями – 10, 100 и 1200 %/мин – до 100 % деформации. При этой деформации проводилась выдержка по времени 120 мин, и фиксировалось падение напряжений.

Проведено исследование графика падения напряжений при циклическом испытании бутадиен-стирольного образца до деформации 100 % при 200 циклах испытания. При растяжении последним циклом образец фиксировался при 100 % деформации тоже на 120 мин для получения кривой релаксации напряжений.

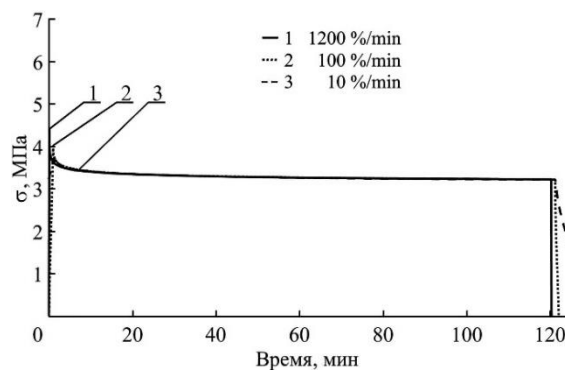
### **Эксперименты и обсуждение результатов**

На рис. 1 и 2 представлены графики релаксации напряжений при разных скоростях растяжения резин из бутадиен-нитрильного каучука СКН-18СНТ + технического углерода (ТУ) 40 массовых частей (м. ч.) и бутадиен-стирольного каучука СКМС-30АРК + ТУ 50 м. ч. Здесь по оси Y – истинное напряжение  $\sigma$  – усилие, деленное на истинную площадь поперечного сечения:

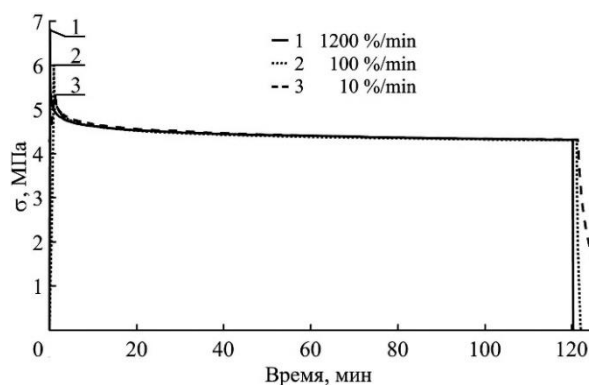
$$\sigma = \sigma_0 \cdot (1 + \varepsilon / 100),$$

где  $\sigma_0 = F/S_0$  – относительное напряжение ( $F$  – сила,  $S_0$  – начальная площадь поперечного сечения),  $\varepsilon$  – деформация в %.

Для более удобного сравнения кривых графики со скоростью растяжения 10 %/мин сдвинут влево на 9.5 мин (рис. 1, 2).



**Рис. 1.** Графики релаксации напряжений резины из бутадиен-нитрильного каучука + ТУ 40 м. ч. при деформации 100 %; 1 – скорость растяжения 1200 %/мин, 2 – скорость 100 %/мин, 3 – скорость 10 %/мин



**Рис. 2.** Графики релаксации напряжений резины из бутадиен-стирольного каучука + ТУ 50 м. ч. при деформации 100 %; 1 – скорость растяжения 1200 %/мин, 2 – скорость 100 %/мин, 3 – скорость 10 %/мин

Эксперимент показал, что при больших скоростях вязкоупругая составляющая эластомеров не успевает сработать до конца, и графики растяжения проходят выше, чем при медленных скоростях. В результате, при достижении 100 %-ной деформации, напряжение заметно выше при скорости нагружения 1200 %/мин, чем при скоростях 100 %/мин или 10 %/мин. Однако кривые релаксации материала, при растяжении с разными скоростями, быстро совпадают и уже при 10 мин выдержки сливаются. При 120 мин выдержки кривые релаксации становятся почти горизонтальными, падение напряжений очень медленно продолжается в связи с накоплением в материале микрповреждений. Можно считать, что напряжение при 120 мин выдержки – это точка равновесной кривой материала, т. е. точка, в которой завершилась диссипативная составляющая, вязкоупругость полностью реализовалась.

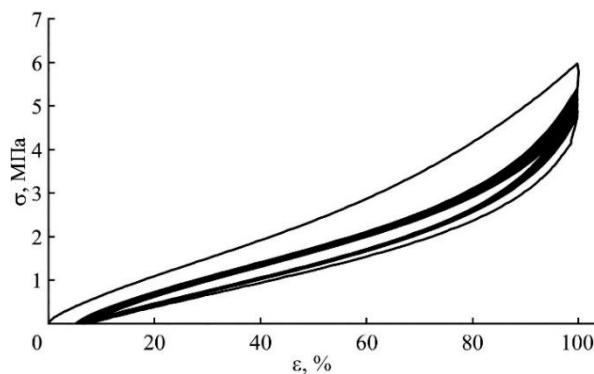
Можно объяснить появление вязкоупругой составляющей в наполненных эластомерах при растяжении скольжением растягивающихся полимерных волокон вдоль частиц наполнителя. В ненаполненных эластомерах вязкоупругость отсутствует.

При растяжении вязкоупругая составляющая имеет некую скорость, зависящую от скорости растяжения – вынужденная вязкоупругость. При разгрузке образца происходит процесс обратного скольжения полимерных волокон, возвращение их в начальное состояние. Но этот процесс мало зависит от скорости разгрузки – естественная вязкоупругость, скорость которой отличается от скорости во время растяжения [20]. При обычных температурах окружающей среды подвижность молекул недостаточно высокая и они не до конца возвращаются в исходное состояние. В механике это называют остаточной деформацией. Однако при нагреве материала, например, до +70 °С подвижность полимерных молекул увеличивается, и материал может полностью восстановить свою первоначальную структуру и свои свойства [21]. Более полное восстановление свойств может происходить при и комнатной температуре, но при очень длительном времени отдыха [21]. При появлении микрповреждений полного восстановления структуры и механических свойств в материале не происходит.

В наших экспериментах напряжение при выдержке 120 мин отличается от выдержки 15 мин на 6.0 %, в случае выдержки 20 мин. отличие на 4.9 % и не зависит от скорости деформации. Такие погрешности определения точки равновесной кривой весьма небольшие и соответствуют погрешности эксперимента. Это показывает, что выдержка по времени в течение 15–20 мин является эффективным способом исключить влияние вязкоупругости в точках остановки деформации при любой скорости растяжения.

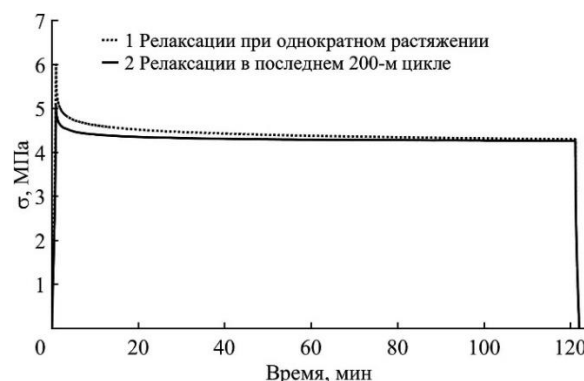
На рис. 3 приведен график циклической деформации до 200 раз со скоростью 100 %/мин бутадиен-стирольной резины, наполненной техническим углеродом 50 массовых частей. Это типичный график циклического нагружения, когда после первого цикла происходит размягчение материала, потом графики циклического растяжения стабилизируются, но с каждым новым циклом кривые немного опускаются вниз, процесс размягчения продолжается. Здесь скорость вязкоупругой составляющей материала при его растяжении стабилизируется, как и стабилизируется скорость восстановления структуры при разгрузке. Одновременно происходит накопление повреждений. Но, при многократном нагружении до заданной деформации, вязкоупругая составляющая постепенно реализуется и стремится к нулю.

Нижняя кривая разгрузки на рис. 3 соответствует разгрузке материала после релаксации напряжений при выдержке 120 мин в последнем растяжении.



**Рис. 3.** График 200-кратного растяжения до деформации 100 % бутадиен-стирольного каучука + ТУ 50 м.ч.

На рис. 4 представлены два графика релаксации напряжений – один после разового растяжения, другой – после циклического деформирования 200 раз. В обоих случаях деформация составляла 100 %, скорость растяжения – 100 %/мин.



**Рис. 4.** Кривые релаксации напряжений резины из бутадиен-стирольного каучука + ТУ 50 м.ч.; 1 – после 200 циклов деформации последнее растяжение до 100 %, 2 – после однократного растяжения до 100 %

Из графиков видно, что через 120 мин релаксации обе кривые совпадают. Однако 200 циклов деформации недостаточно, чтобы вязкоупругая компонента полностью реализовалась, и материал пришел в равновесное состояние. Такое состояние наступает через 10 мин временной выдержки при заданной деформации.

Циклический эксперимент показывает, что для достижения равновесной точки напряжения количество циклов должно быть существенно больше 200. Менее трудоемко находить эту точку при однократной деформации с последующей выдержкой по времени с достаточной точностью 15–20 мин.

### Заключение

Данное исследование по определению равновесной точки напряжения при заданной деформации показало, что скорость испытания мало влияет на кривую релаксации напряжений и через 10 мин кривые релаксации при разных скоростях растяжения практически совпадают. Погрешность напряжений при выдержке 15 мин составляет 6.0 % по сравнению с напряжениями при 120 мин выдержки, при выдержке 20 мин погрешность – 4.9 %.

При испытании по программе растяжение-сжатие с количеством 200 циклов максимальное напряжение при последнем растяжении приближается к равновесной точке, но так и не достигает ее. Для ее достижения требуется еще большее количество циклов. Определение равновесных точек таким способом трудоемко и нецелесообразно.

Для определения точки равновесной кривой для заданной деформации вполне достаточно производить выдержку по времени в количестве 15–20 мин. За это время вязкоупругая составляющая практически реализуется с допустимой погрешностью.

### Список источников

1. Chaimoon K., Chindaprasirt P. An anisotropic hyperelastic model with an application to soft tissues // European Journal of Mechanics / A Solids. 2019. Vol. 78. P. 103845. URL: doi:10.1016/j.euromechsol.2019.103845 (дата обращения: 10.10.2024).

2. *Külcü I.D.* A hyperelastic constitutive model for rubber-like materials // *Archive of Applied Mechanics*. 2020. Vol. 90. P. 615–622. URL: doi:10.1007/s00419-019-01629-7 (дата обращения: 10.10.2024).
3. *Zhan L., Wang S., Qu S., Steinmann P., Xiao R.* A general continuum damage model for soft composites // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2023. Vol. 175, Is. 3. P. 105290. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2023.105290> (дата обращения: 10.10.2024).
4. *Xiang Y., Zhong D., Rudykh S., Zhou H., Qu, S., & Yang, W.* A Review of Physically Based and Thermodynamically Based Constitutive Models for Soft Materials // *Journal of Applied Mechanics*. 2020. Vol. 87, no. 11. P. 110801. URL: <https://doi.org/10.1115/1.4047776> (дата обращения: 10.10.2024).
5. *Akbari R., Morovati V., Dargazany R.* Reverse physically motivated frameworks for investigation of strain energy function in rubber-like elasticity // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2022. Vol. 221. P. 107110. URL: doi:10.1016/j.ijmecsci.2022.107110 (дата обращения: 10.10.2024).
6. *Zhu P., Zhong Z.* Constitutive modelling for the Mullins effect with permanent set and induced anisotropy in particle-filled rubbers // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 97. P. 19–35. URL: doi: 10.1016/j.apm.2021.03.031 (дата обращения: 10.10.2024).
7. *Zhong D., Xiang Y., Yin T., Yu H., Qu S., Yang W.* A physically-based damage model for soft elastomeric materials with anisotropic Mullins effect // *International Journal of Solids and Structure*. 2019. Vol. 176–177. P. 121–134. URL: doi: 10.1016/j.ijsolstr.2019.05.018 (дата обращения: 10.10.2024).
8. *Fazekas B., Goda T.J.* Constitutive modelling of rubbers: Mullins effect, residual strain, time-temperature dependence // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2021. Vol. 210. P. 106735. URL: <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2021.106735> (дата обращения: 10.10.2024).
9. *Shadrin V.V., Svistkov A.L., Mokhireva K.A., Garishin O.K.* Peculiarities of using dumbbell specimens made of elastomeric materials subject to finite deformation in complex loading tests // *J. Letters on Materials*. 2023 Vol. 13, no. 1. P. 56–61. URL: [https://lettersonmaterials.com/Upload/Journals/42127/56-61\\_u.pdf](https://lettersonmaterials.com/Upload/Journals/42127/56-61_u.pdf) (дата обращения: 10.10.2024).
10. *Zhou J, Jiang L, Khayat R.E.* A micro-macro constitutive model for finite-deformation viscoelasticity of elastomers with nonlinear viscosity // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2018. Vol. 110. P. 137–154. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.09.016> (дата обращения: 10.10.2024).
11. *Wei W., Yuan Y., Igarashi A., Zhu H., Luo K.* Generalized hyper-viscoelastic modeling and experimental characterization of unfilled and carbon black filled natural rubber for civil structural applications // *Construction and Building Materials*. 2020. Vol. 253. P. 119211. URL: doi: 10.1016/j.conbuildmat.2020.119211.
12. *Ricker A., Gierig M., Wriggers P.* Multiplicative, Non-Newtonian Viscoelasticity Models for Rubber Materials and Brain Tissues: Numerical Treatment and Comparative Studies // *Archives of Computational Methods in Engineering*. 2023. Vol. 30. P. 2889–2927. URL: <https://doi.org/10.1007/s11831-023-09889-x> (дата обращения: 10.10.2024).
13. *Annarasa V., Popov A.A., De Focatiis D.S.A.* A phenomenological constitutive model for the viscoelastic deformation of elastomers // *Mechanics of Time-Dependent Materials*. 2020. Vol. 24. P. 463–479. URL: <https://doi.org/10.1007/s11043-020-09452-2> (дата обращения: 10.10.2024).
14. *Anssari-Benam A., Hossain M.* A pseudo-hyperelastic model incorporating the rate effects for isotropic rubber-like materials // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2023. p. 105347. URL: doi: <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2023.105347> (дата обращения: 10.10.2024).
15. *Mullins L., Tobin N.R.* Stress softening in rubber vulcanizates. Part I. Use of a strain amplification factor to describe the elastic behavior of filler reinforced vulcanized rubber // *J. Appl.*

- Polym. Sci. 1965. Vol. 9, no. 9. P. 2993–3009. URL: <https://doi.org/10.1002/app.1965.070090906> (дата обращения: 10.10.2024).
16. Harwood J.A.C., Mullins L., Payne A.R. Stress softening in natural rubber vulcanizates. Part II. Stress softening effects in pure gum and filler loaded rubbers // *J. Appl. Polym. Sci.* 1965. Vol. 9, no. 9. P. 3011–3021. URL: <https://doi.org/10.1002/app.1965.070090907> (дата обращения: 10.10.2024).
17. Rickaby S.R., Scott N.H. A cyclic stress softening model for the Mullins effect // *International Journal of Solids and Structures*. Elsevier. 2013. Vol. 50. P. 111–120. URL: [www.elsevier.com/locate/ijsolstr](http://www.elsevier.com/locate/ijsolstr) (дата обращения: 10.10.2024).
18. Diani J., Brieu M., Gilormini P. Observation and modeling of the anisotropic visco-hyperelastick behavior of a rubberlike material // *International Journal of Solids and Structures*. Elsevier. 2006. V. 43. P. 3044–3056. URL: [www.elsevier.com/locate/ijsolstr](http://www.elsevier.com/locate/ijsolstr) (дата обращения: 10.10.2024).
19. Netzker C. Husnu D., Kaliske M. An anochronic plasticity formulation for filled rubber // *International Journal of Solids and Structures*. Elsevier. 2010. Vol. 47. P. 2371–2379. URL: [www.elsevier.com/locate/ijsolstr](http://www.elsevier.com/locate/ijsolstr) (дата обращения: 10.10.2024).
20. Kislitsyn V.D., Svistkov A.L., Mokhireva K.A., Shadrin V.V. Determination of the inelastic behavior of viscoelastic materials using the new thermodynamic model // *AIP Conference Proceedings* 2627, Is. 1, 030002 (2023) URL: <https://doi.org/10.1063/5.0119254> (дата обращения: 10.10.2024).
21. Shadrin V.V. Recovery of the mechanical properties of rubber under thermal treatment // *Polymer Science*. 2005. Ser. B. Vol. 47, no. 7–8. P. 220–222. URL: [https://www.researchgate.net/publication/280315559\\_Recovery\\_of\\_the\\_mechanical\\_properties\\_of\\_rubber\\_under\\_thermal\\_treatment\\_Polymer\\_Science\\_Ser\\_B\\_2005\\_-\\_V\\_47\\_No\\_7-8\\_-\\_P\\_220-222](https://www.researchgate.net/publication/280315559_Recovery_of_the_mechanical_properties_of_rubber_under_thermal_treatment_Polymer_Science_Ser_B_2005_-_V_47_No_7-8_-_P_220-222) (дата обращения: 10.10.2024).

## References

1. Chaimoon, K., Chindaprasirt, P. (2019), "An anisotropic hyperelastic model with an application to soft tissues", *European Journal of Mechanics / A Solids*, vol. 78, p. 103845.
2. Külçü, I.D. (2020), "A hyperelastic constitutive model for rubber-like materials", *Archive of Applied Mechanics*, vol. 90, pp. 615–622.
3. Zhan, L., Wang, S., Qu, S., Steinmann, P. and Xiao, R. (2023), "A general continuum damage model for soft composites", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 175, is. 3, p. 105290.
4. Xiang, Y., Zhong, D., Rudykh, S., Zhou, H., Qu, S., & Yang, W. (2020) "A Review of Physically Based and Thermodynamically Based Constitutive Models for Soft Materials", *Journal of Applied Mechanics*, vol. 87, no. 11. p. 110801.
5. Akbari, R., Morovati, V. and Dargazany, R. (2022), "Reverse physically motivated frameworks for investigation of strain energy function in rubber-like elasticity", *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 221, p. 107110.
6. Zhu, P., Zhong, Z. (2021), "Constitutive modelling for the mullins effect with permanent set and induced anisotropy in particle-filled rubbers", *Applied Mathematical Modelling*, vol. 97, pp. 19–35.
7. Zhong, D., Xiang, Y., Yin, T., Yu, H., Qu, S. and Yang, W. (2019) "A physically-based damage model for soft elastomeric materials with anisotropic Mullins effect", *International Journal of Solids and Structure*, vol. 176–177, pp. 121–134.
8. Fazekas, B., Goda, T.J. (2021), "Constitutive modelling of rubbers: Mullins effect, residual strain, time-temperature dependence", *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 210, p. 106735.
9. Shadrin, V.V., Svistkov, A.L., Mokhireva, K.A. and Garishin, O.K. (2023), "Peculiarities of using dumbbell specimens made of elastomeric materials subject to finite deformation in complex loading tests", *J. Letters on Materials*, vol. 13, no. 1, pp. 56–61.

10. Zhou, J, Jiang, L. and Khayat, R.E. (2018), "A micro-macro constitutive model for finite-deformation viscoelasticity of elastomers with nonlinear viscosity", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 110, pp. 137–154.
11. Wei, W., Yuan, Y., Igarashi, A., Zhu, H. and Luo, K. (2020), "Generalized hyper-viscoelastic modeling and experimental characterization of unfilled and carbon black filled natural rubber for civil structural applications", *Construction and Building Materials*, vol. 253, p. 119211.
12. Ricker, A., Gierig, M. and Wriggers, P. (2023), "Multiplicative, Non-Newtonian Viscoelasticity Models for Rubber Materials and Brain Tissues: Numerical Treatment and Comparative Studies", *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 30, pp. 2889–2927.
13. Annarasa, V., Popov, A.A., and De Focatiis, D.S.A. (2020), "A phenomenological constitutive model for the viscoelastic deformation of elastomers", *Mechanics of Time-Dependent Materials*, vol. 24, pp. 463–479.
14. Anssari-Benam, A., Hossain, M. (2023), "A pseudo-hyperelastic model incorporating the rate effects for isotropic rubber-like materials", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, p. 105347.
15. Mullins, L., Tobin, N.R. (1965) "Stress softening in rubber vulcanizates. Part I. Use of a strain amplification factor to describe the elastic behavior of filler reinforced vulcanized rubber", *J. Appl. Polym. Sci.* vol. 9, no. 9, pp. 2993–3009.
16. Harwood, J.A.C., Mullins, L. and Payne, A.R. (1965), "Stress softening in natural rubber vulcanizates", Part II. Stress softening effects in pure gum and filler loaded rubbers", *J. Appl. Polym. Sci.*, vol. 9, no. 9, pp. 3011–3021.
17. Rickaby, S.R., Scott, N.H. (2013), "A cyclic stress softening model for the Mullins effect", *International Journal of Solids and Structures. Elsevier*, vol. 50, pp. 111–120.
18. Diani, J., Brieu, M. and Gilormini, P. (2006), "Observation and modeling of the anisotropic visco-hyperelastic behavior of a rubberlike material", *International Journal of Solids and Structures. Elsevier*, vol. 43, pp. 3044–3056.
19. Netzker, C., Husnu, D. and Kaliske, M. (2010) "An anochronic plasticity formulation for filled rubber", *International Journal of Solids and Structures. Elsevier*, vol. 47, pp. 2371–2379.
20. Kislitsyn, V.D., Svistkov, A.L., Mokhireva, K.A. and Shadrin, V.V. (2023) "Determination of the inelastic behavior of viscoelastic materials using the new thermodynamic model", AIP Conference Proceedings 2627, Issue 1, 030002.
21. Shadrin, V.V. (2005) "Recovery of the mechanical properties of rubber under thermal treatment", *Polymer Science Ser. B*, vol. 47, no. 7–8, pp. 220–222.

#### **Информация об авторе:**

*В. В. Шадрин* – ведущий инженер, Институт механики сплошных сред УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), инженер, Пермский государственный национальный исследовательский университет (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID 10927.

#### **Information about the author:**

*V. V. Shadrin* – Leading Engineer, Institute of Continuous Media Mechanics UB RAS (1, Ac. Koroleva St., Perm, Russia, 614013), Engineer, Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID: 10927.

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Научная статья

УДК 04.934.2

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-104-116

<https://elibrary.ru/ENFGRE>**Применение математических методов  
в искусственной нейронной сети для распознавания  
в голосе "фальшивых" эмоций****Иван Владимирович Быков<sup>1</sup>, Наталья Юрьевна Ротанева<sup>2</sup>,  
Александр Петрович Шкарапута<sup>3</sup>**<sup>1,3</sup> Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия<sup>2</sup> Мариупольский государственный университет имени А.И. Куинджи, г. Мариуполь, Россия<sup>1</sup>[vanka.perm@mail.ru](mailto:vanka.perm@mail.ru)<sup>2</sup>[n.rotaneva@mgumariupol.ru](mailto:n.rotaneva@mgumariupol.ru)<sup>3</sup>[shkaraputa@psu.ru](mailto:shkaraputa@psu.ru)

**Аннотация.** В данной статье предложена методика сравнения эмоциональной составляющей голосов спикеров, реально испытывающих эмоции, и тех, которые пытаются их воспроизвести. Методика предполагает использование в качестве классификаторов отношение частот локальных максимумов спектра звуковой волны. В данной работе исследовались 4 категории базовых эмоций: гнев, грусть, страх, радость. Для получения сравнительных характеристик в каждой категории исследовалось по 30 записей с "фальшивой" и "истинной" эмоцией – всего 240 записей. Был проведен статистический сравнительный анализ классификаторов и обнаружены существенные различия в данных для искренних эмоций и их имитации. Также, была спроектирована модель искусственной нейронной сети, на основе которой создана программа для распознавания эмоционального посыла, содержащегося в записях голоса человека. На обученной искусственной нейронной сети проведен эксперимент по определению эмоционального состояния спикера и истинности или фальшивости его эмоционального посыла. Тестирование звуковых файлов с различными эмоциями показало хорошие результаты как для распознавания самого эмоционального состояния говорящего, так и истинности его эмоционального посыла.

**Ключевые слова:** распознавание эмоций; фальшивые эмоции; базовые эмоции; музыкальный интервал; классификаторы эмоционального состояния; просодия

**Для цитирования:** Быков И.В., Ротанева Н.Ю., Шкарапута А.П. Применение математических методов в искусственной нейронной сети для распознавания в голосе "фальшивых" эмоций // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 104–116. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-104-116. <https://elibrary.ru/ENFGRE>.

Статья поступила в редакцию 25.10.2024; одобрена после рецензирования 15.11.2024; принята к публикации 01.12.2024.



Эта работа © 2024 Быков И.В., Ротанева Н.Ю., Шкарапута А.П. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



## COMPUTER SCIENCE

Research article

# Mathematical Methods Application in an Artificial Neural Network to Recognize "Fake" Emotions in the Voice

Ivan. V. Bykov<sup>1</sup>, Natalya. N. Rotaneva<sup>2</sup>, Alexander. P. Shkaraputa<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup> Perm State University, Perm, Russia

<sup>2</sup> Mariupol State University named after A.I. Kuindzhi, Mariupol, Russia

<sup>1</sup>vanka.perm@mail.ru

<sup>2</sup>n.rotaneva@mgumariupol.ru

<sup>3</sup>shkaraputa@psu.ru

**Abstract.** This paper proposes a methodology for comparing the emotional component of the voices of speakers actually experiencing emotions and those trying to reproduce them. The technique assumes the use of as classifiers the ratio of frequencies of local maxima of the spectrum of the of a sound wave. In this work we studied 4 categories of basic emotions: anger, sadness, fear, joy. To obtain comparative characteristics in each category 30 records with "fake" and "true" emotion were investigated – 240 records in total. A statistical comparative analysis of the classifiers was performed and found a significant differences in the data for the genuine emotion and its imitation. Also, a model of an artificial neural network, based on which a program was created to recognize the emotional message contained in human voice recordings. On the trained artificial neural network, an experiment was conducted to determine the emotional state of the speaker and the truth or falsity of his emotional message. Testing of sound files with different emotions showed good results for recognizing both the emotional state of the speaker and the truthfulness or falsity of the speaker's emotional message.

**Keywords:** *emotion recognition; fake emotions; basic emotions; musical interval; emotional state classifiers; prosody*

**For citation:** Bykov, I.V., Rotaneva, N.Yu. and Shkaraputa, A.P. (2024), "Mathematical Methods Application in an Artificial Neural Network to Recognize "Fake" Emotions in the Voice", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), 104-116. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-104-116. <https://elibrary.ru/ENFGRE>.

*The article was submitted 25.10.2024; approved after reviewing 15.11.2024; accepted for publication 01.12.2024*

## Введение

Системы распознавания человеческих эмоций – одни из самых востребованных и быстро развивающихся программно-аппаратных комплексов. Они востребованы во многих сферах человеческой деятельности, от игровой индустрии до выявления криминала. При этом определение искренности эмоции может играть большую роль в работе спецслужб, при прослушивании телефонных разговоров, а также допросах, при оформлении кредита или собеседования при приеме на работу.

В настоящее время для выявления лжи используются различные инструменты. Наиболее известным инструментом является полиграф – устройство, позволяющее осуществлять инструментальные психофизиологические исследования на основе записи показателей дыхания, электрического сопротивления кожи, кровообращения и других физиологических параметров.

Голосовой детектор лжи "RiskControl" использует другой принцип работы.

Это уже алгоритм, определяющий требуемое человеку время для ответа на вопрос.

Он также оценивает продолжительность ответа, громкость и спектр голоса, сопоставляя их с эталонными значениями. Например, при длительной паузе повышается вероятность того, что собеседник говорит неправду, так как ему требуется время для придумывания ответа. Громкий разговор может говорить о нервозности человека. [1]

Существует детектор лжи, который основан на определении миографического тремора мышц. Он анализирует звукозаписи речевых высказываний и выявляет не воспринимаемые на слух акустические особенности голоса, вызванные стрессом. [2]

В данной работе предлагается определять искренность человека по его эмоциональному послы, что позволяет не только определять ложность его высказываний, но также определять наигранность эмоций. Это, в свою очередь, может расширить круг решаемых задач.

Американский психолог Полу Экман выделил семь базовых эмоций [3]: радость; грусть; гнев; отвращение; презрение; страх; удивление. В данной работе будут исследоваться четыре базовые эмоции: гнев, грусть, страх, радость. Выбор этих эмоций обусловлен тем, что для них легче всего найти соответствующие звуковые записи и их проще разделить на экспертном уровне. Записи, содержащие "истинные" и "фальшивые" эмоции брались из разных источников: видеороликов, фильмов с актерами, записями аудиокниг... Иногда в записях не было даже слов, а например был только смех или крик.

В работе [4] показано, что метод отношения частот локальных максимумов спектра звуковой волны может быть применен для распознавания эмоционального состояния человека, а сами отношения хорошо соотносятся с музыкальными интервалами, такими как терция, квинта... В отличие от других подходов [5], например, метода мел-частотных кепстральных коэффициентов (MFCC) [6], данный метод не зависит от многих таких факторов, как паузы, высота тона, и, даже, языка говорящего [7, 8]. Суть метода заключается в том, что в спектре звуковой волны выделяют несколько локальных максимумов амплитуд. Затем частоты, которые им соответствуют, делятся попарно одна на другую, таким образом получают классификаторы. Например, в записях с радостной эмоцией, часто встречается отношение 0,84, а оно, в свою очередь соответствует музыкальному интервалу – большая терция. Большая терция в теории музыки – это светлый, веселый, мягкий консонанс. В записях с грустной эмоцией часто встречается отношение 0,79 – мягкий, нежный, грустный консонанс.

На рис. 1 показан спектр звуковой волны, полученный на основе дискретного преобразования Фурье, с выделенными локальными максимумами.

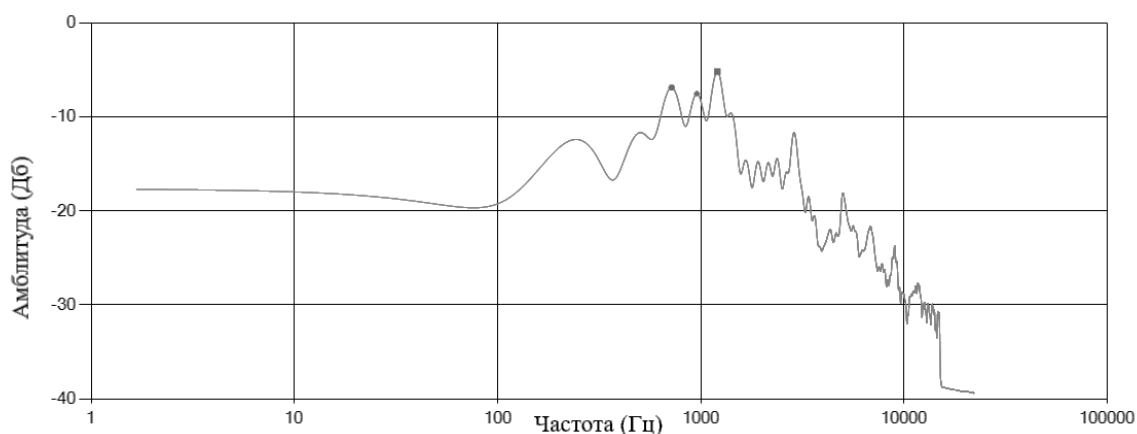


Рис. 1. Пример нахождения 3-х локальных максимумов амплитуд

Ниже в таблице 1 приведены отношения частот, соответствующие этим амплитудам.

Таблица 1. Полученные отношения частот

Частота (Гц)	1203	718	955
1203	1	1,69	1,27
718	0,59	1	<b>0,75</b>
955	<b>0,79</b>	1,33	1

Здесь полужирным выделены отношения, соответствующие музыкальным интервалам: малая терция и чистая квинта.

### Постановка задачи

Задача заключается в том, чтобы на основании построенных классификаторов научиться различать как эмоциональное состояние говорящего человека, так и искренность его эмоционального посыла. Для решения данной задачи потребовалось пройти несколько этапов, на каждом из которых требовалось решить свою подзадачу. Так, на начальном этапе нужно собрать необходимую библиотеку звуковых файлов с соответствующими эмоциями. Сами записи на экспертном уровне (решением не менее трех человек) необходимо определить в соответствующую категорию по типу эмоции и искренности эмоционального посыла. В дальнейшем необходимо создать программу, на основе которой, с помощью дискретного преобразования Фурье, можно построить спектр звуковой волны и определить локальные максимумы амплитуд. После этого этапа необходимо получить набор классификаторов (отношений частот) для каждой записи. Когда классификаторы получены, то можно переходить к их сравнению на основе статистического анализа и нахождению отличий. Так как методы искусственных нейронных сетей являются, в свою очередь, частным случаем статистических методов, причем имеющих ряд некоторых преимуществ, то последним этапом предполагается проектирование, создание, обучение программного модуля на основе искусственной нейронной сети и проведение на его основе эксперимента по идентификации эмоций и их искренности.

### 1. Нахождение отличий в классификаторах для записей разных категорий

С помощью разработанной программы (рис. 2) на основе дискретного преобразования Фурье и автоматизации нахождения локальных максимумов амплитуд вычисляются соответствующие отношения частот.

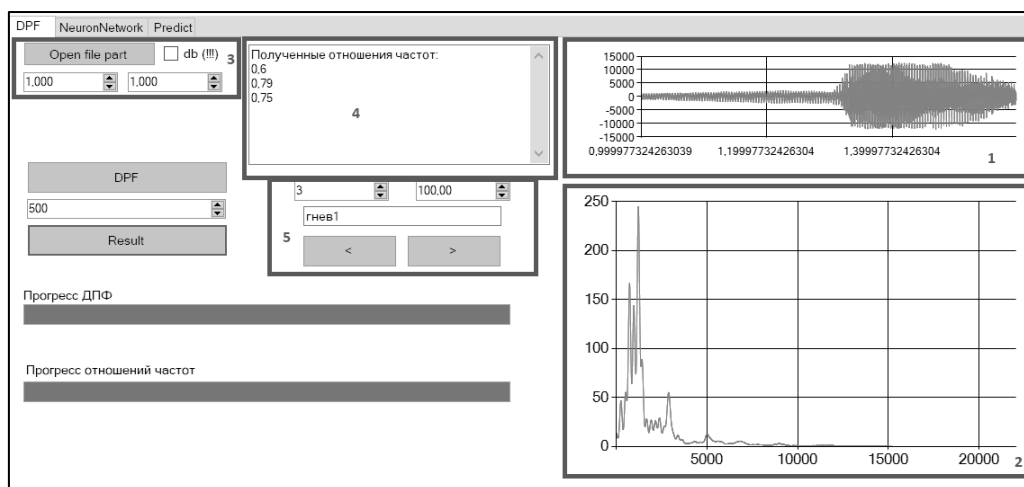


Рис. 2. Интерфейс программы для нахождения отношений частот для локальных максимумов амплитуд

Каждая запись была разделена на  $n_i$  отрезков в зависимости от длины записи,  $i=1,2,..5$ . Длина каждого отрезка составляла 1 сек, так как в работе [9] показано, что отношения, соответствующие музыкальным интервалам, лучше всего находятся при длительности интервала 1 сек.

В каждом отрезке определялись 7 частот  $v_{ij}$  ( $i \leq n, 1 \leq j \leq 7$ ) с амплитудами локальных максимумов. В результате для каждой записи получались  $n_i * 7$  измерений.

Для понимания различий между классификаторами, для записей различных категорий были построены диаграммы с наиболее часто встречающимися отношениями частот локальных максимумов. Полученные соотношения были сопоставлены с известными музыкальными интервалами. Абсолютная погрешность попадания в музыкальный интервал составляет не более 0,005, что является следствием математического округления вещественного числа до 2 знаков после запятой. В расчетах учитывались отношения меньше единицы и больше 0,5 (в рамках одной октавы).

Так, на рис. 3 можно увидеть диаграмму с наиболее часто встречаемыми отношениями частот локальных максимумов.

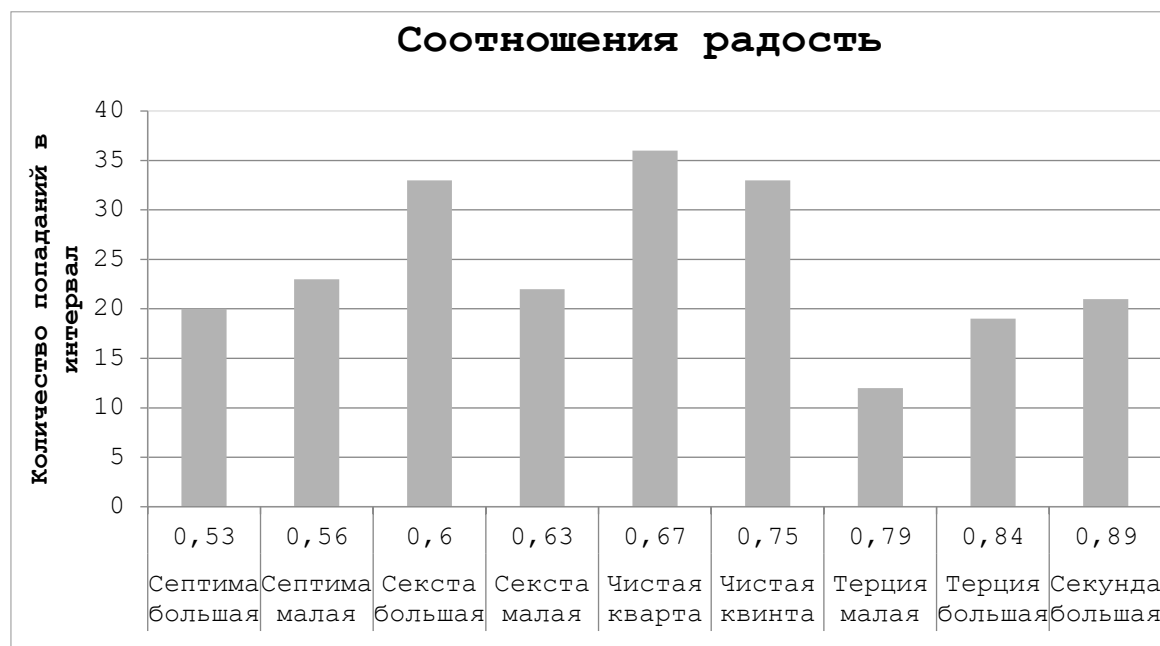


Рис. 3. Отношения частот для "истинной" радости

При выборе трех локальных максимумов наиболее часто встречаемым отношением [4] было 0,84 – большая терция, однако при выборе семи отношений, больше стали проявлять себя второстепенные отношения, но как раз именно они хорошо показывают различия между "истинными" и "фальшивыми эмоциями". Видно, что при таком подходе для искренней радости характерны: секста большая, чистая кварта, чистая квинта.

При сравнении с диаграммой ложной радости (рис. 4) можно заметить, что вместо большой сексты, проявляется малая секста, остальные музыкальные интервалы идентичны истинной эмоции.

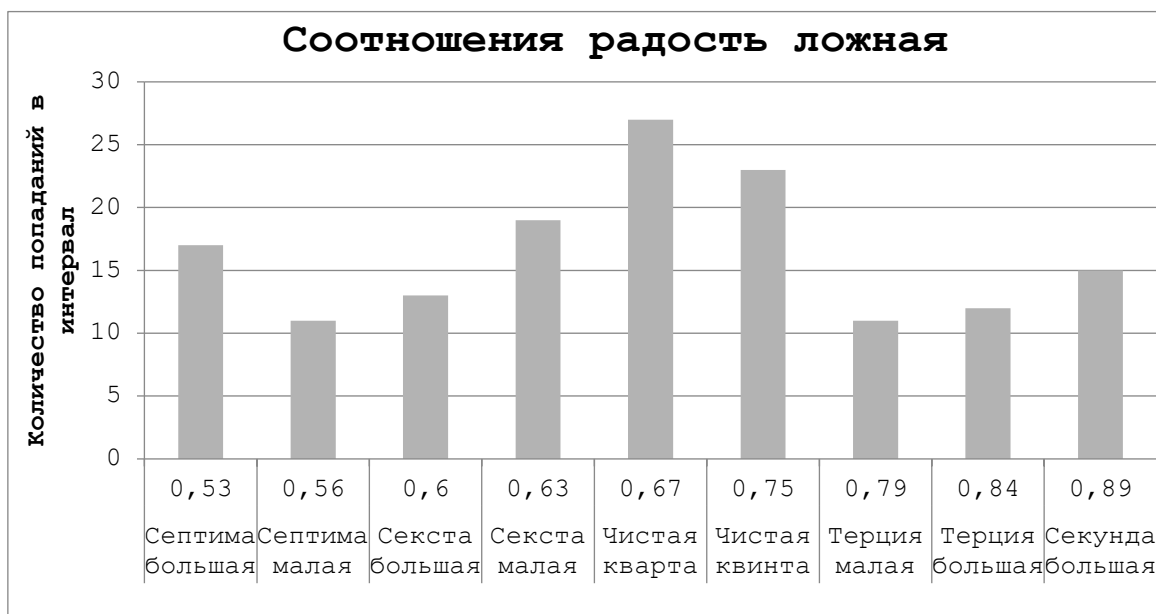


Рис. 4. Отношения частот для "фальшивой" радости

Если проанализировать изменения, с учетом того, что:

- большая секста – светлый, веселый, мягкий консонанс,
- малая секста – мягкий, нежный, грустный консонанс,

то здесь очевидны изменения в сторону грустного и мягкого звучания.

На рис. 5. представлены отношения частот локальных максимумов, характерных для записей с грустным звучанием.

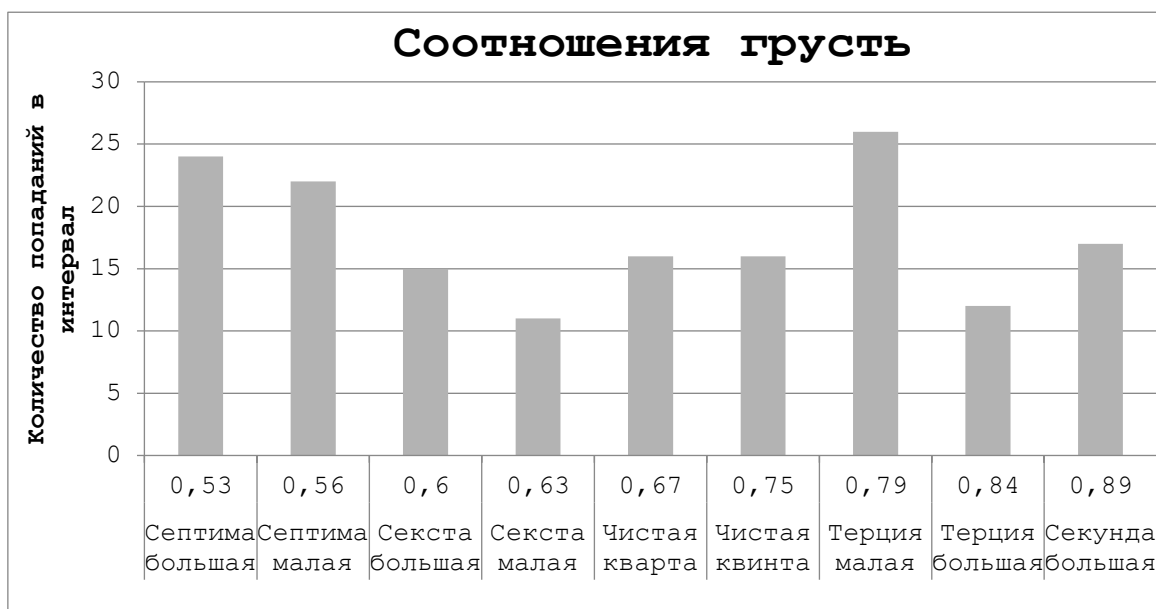
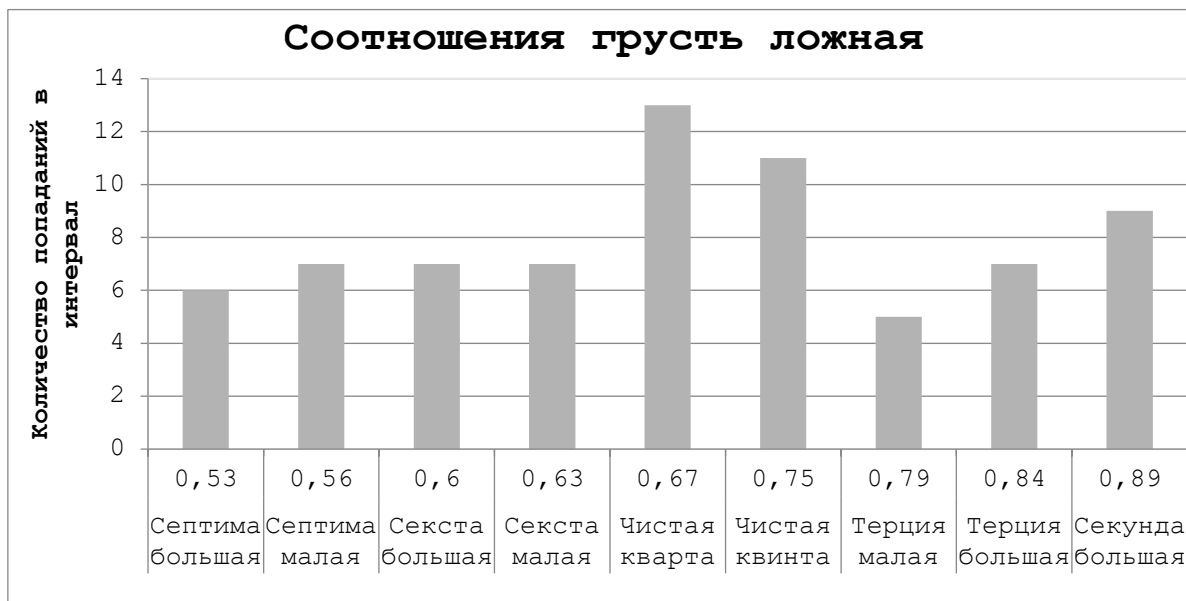


Рис. 5. Отношения частот для "истинной" грусти

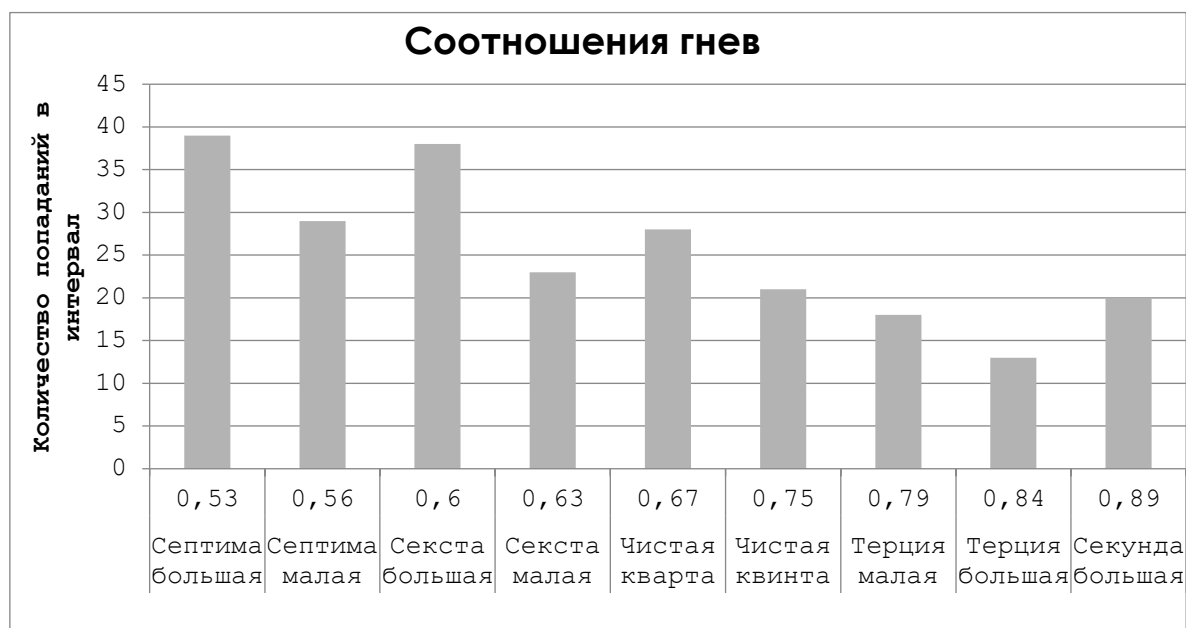
А на рис. 6 можно увидеть существенные отличия.



**Рис. 6.** Отношения частот для "фальшивой" грусти

Здесь видно, что отношение 0,79 – малая терция, характерное для грусти, перестает быть не только самым встречаемым, но и вообще становится самым наименее встречаемым из представленных. Для ложной грусти наиболее встречаемым оказалось отношение 0,67 – гордый, уверенный, твердый, яркий консонанс.

Продолжим анализировать и сравнивать рис. 7 для искреннего и рис. 8 для ложного гнева.



**Рис. 7.** Отношения частот для "истинного" гнева



Рис. 8. Отношения частот для "фальшивого" гнева

Можно заметить существенные отличия. В искреннем гневе преобладают большая септима и большая секста – резкий, острый диссонанс и светлый, веселый, мягкий консонанс. В ложном гневе уже преобладает чистая кварта – гордый, уверенный, твердый, яркий консонанс. Очевидно, что при ложном гневе человек себя лучше контролирует.

И последняя категория эмоций – страх. На рис. 9 представлены данные для искренней эмоции страха.

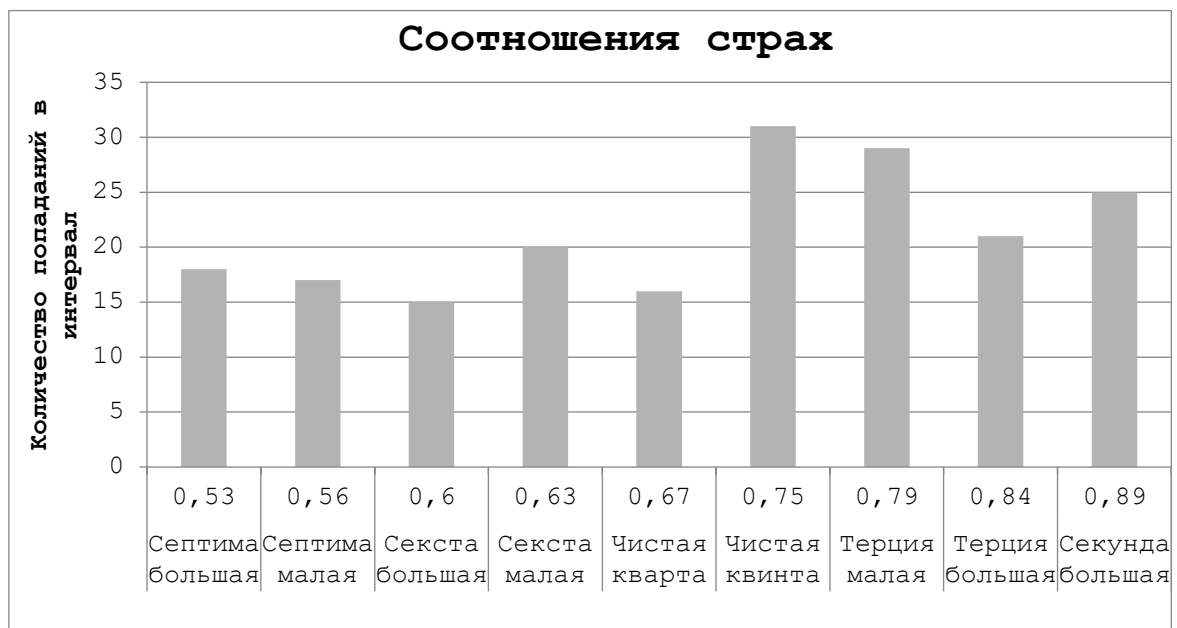
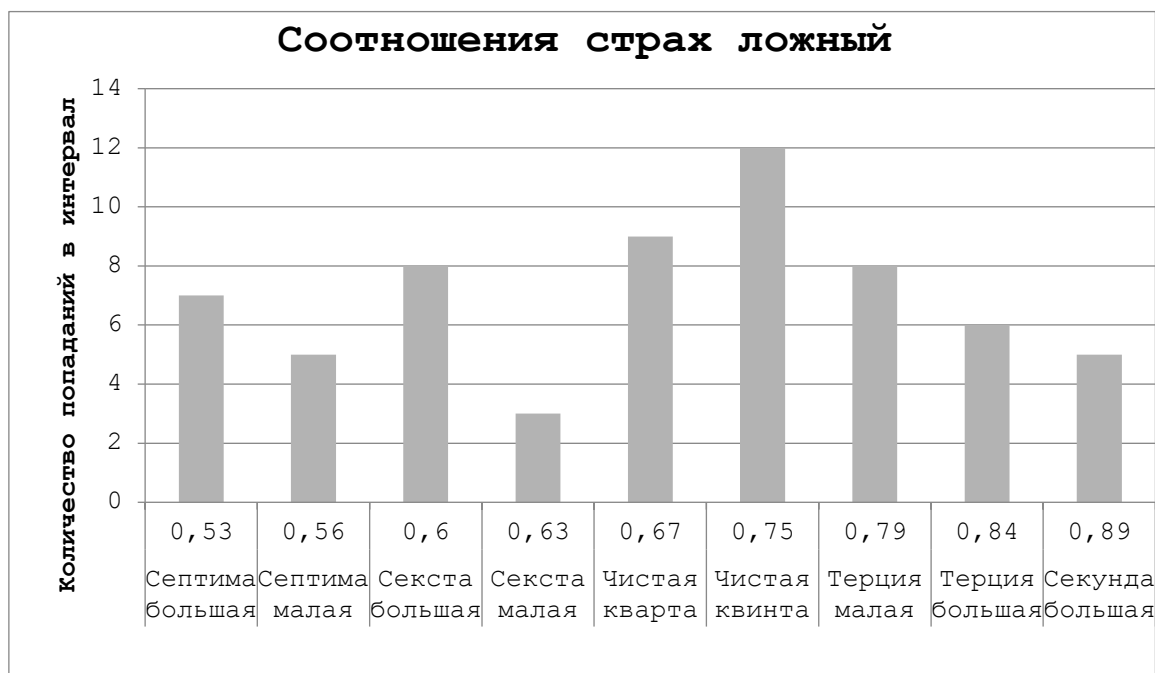


Рис. 9. Отношения частот для "истинного" страха

На рис. 10 так же, как и в предыдущих случаях, видны существенные отличия.



**Рис. 10.** Отношения частот для "истинного" страха

Сравнения диаграмм показывают, что во втором случае, как и во всех предыдущих случаях, существенное значение приобретает отношение 0,67 – чистая кварта – гордый, уверенный, твердый, яркий консонанс.

## 2. Создание и обучение искусственной нейронной сети

Как показано в предыдущем пункте, с помощью "ручного" сравнения статистических данных для отношений частот амплитуд локальных максимумов можно увидеть существенные отличия, как для различных категорий эмоций, так и для степени их искренности. Для автоматизации процесса идентификации эмоционального посыла говорящего был применен метод искусственной нейронной сети.

На основе предыдущего анализа был выбран набор из 10 входных параметров, который представляет собой "One-Hot Encoding" вектор, где каждый параметр может принимать значение либо 1, либо 0, в зависимости от наличия частоты определенного музыкального интервала:

- X1 – септима большая (0,53),
- X2 – септима малая (0,56),
- X3 – секста большая (0,6),
- X4 – секста малая (0,63),
- X5 – чистая кварта (0,67),
- X6 – чистая квинта (0,75),
- X7 – терция малая (0,79),
- X8 – терция большая (0,84),
- X9 – секунда большая (0,89),
- X10 – октава (0,5).



Выходные параметры также задаются вектором, в котором 8 элементов, по элементу на каждую эмоцию. Вектор содержит одну единицу у элемента, который определяет эмоцию записи, остальные значения равны нулю:

- D1 – Гнев,
- D2 – Страх,
- D3 – Грусть,
- D4 – Гнев (ложь),
- D5 – Грусть (ложь),
- D6 – Радость (ложь),
- D7 – Страх (ложь),
- D8 – Радость.

Исходя из результата предыдущего этапа, количество входных нейронов персептрона  $N_x = 10$ , количество нейронов выходного слоя  $N_y = 8$ .

Для определения объема обучающего множества существует эмпирическая формула  $Q = 7 N_x + 15 = 85$ , однако на практике обычно бывает достаточно и меньшего количества примеров. В нашем же случае примеров для обучения больше, чем значение, высчитанное по формуле  $Q = 240$ . Множество примеров следует разбить на обучающее  $L$  и тестирующее  $T$ , где в тестирующем множестве должно содержаться около 10–15 % от общего количества примеров. В данном случае это составит  $L = 240$  и  $T = 36$  соответственно.

По теореме Арнольда–Колмогорова–Хехт-Нильсена в качестве универсальной нейронной сети принято считать двухслойный персептрон с одним скрытым слоем, активационные функции у которого являются сигмоидными. Поэтому нейронная сеть будет иметь один скрытый слой. Необходимое количество синаптических связей можно высчитать по формуле

$$\frac{N_y \cdot Q}{1 + \log_2(Q)} \leq N_w \leq N_y \left( \frac{Q}{N_x} + 1 \right) (N_x + N_y + 1) + N_y$$

Таким образом  $215,56 \leq N_w \leq 3808$ .

Исходя из полученных выше данных, можно сосчитать количество нейронов в скрытом слое по формуле

$$N = \frac{N_w}{N_x + N_y}$$

В результате  $N$  варьируется от 11 до 211, поэтому будет выбрано то количество, где ошибка тестирования будет минимальна.

В результате оптимизации спроектированная нейронная сеть представляет собой персептрон, который имеет 10 входных нейронов, 11 нейронов на скрытом слое и 8 выходных нейронов (рис. 11).

В качестве алгоритма обучения использовался алгоритм упругого распространения.

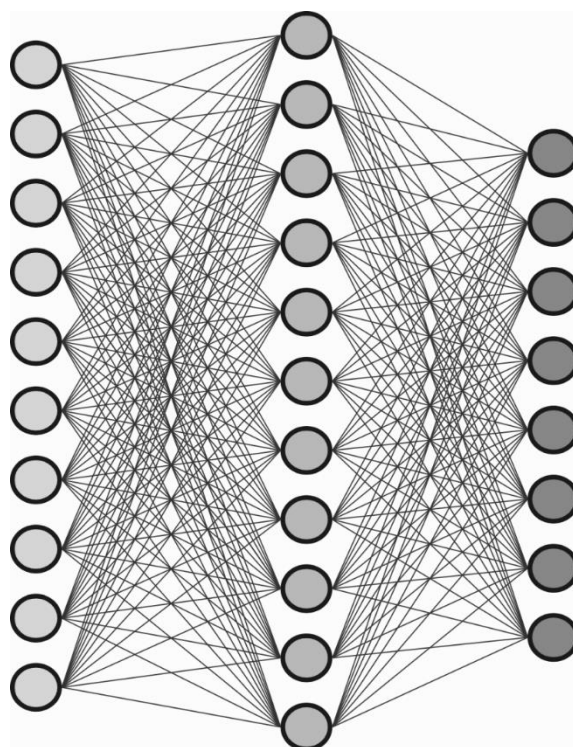


Рис. 11. Модель искусственной нейронной сети

Обучение искусственной нейронной сети производилось на основе 240 записей, по 30 записей на каждую категорию эмоции с учетом ее искренности.

После обучения был проведен эксперимент с целью определения возможности или невозможности использования метода отношения частот локальных максимумов для распознавания искренности эмоции. Для этого были выбраны по 5 дополнительных звуковых файлов на каждую группу эмоций, которые не присутствовали в обучающей и тестирующей выборке.

Результат тестирования представлен в табл. 2.

Таблица 2. Оценка количества корректно определенных эмоций

Эмоция	Эмоция определена верно	Эмоция определена не верно
Страх	4	1
Страх (ложная)	4	1
Радость	5	0
Радость(ложная)	3	2
Гнев	5	0
Гнев(ложная)	4	1
Грусть	5	0
Грусть(ложная)	4	1

Случаи, когда эмоция определялась верно или не верно, оценивались только с учетом ее истинности или ложности.

В итоге с использованием искусственной нейронной сети удалось разделить все 40 записей на соответствующие группы, при этом корректность распознавания эмоции и ее истинности составила 85 %.

## Заключение

В результате исследований удалось показать, что метод, в котором в качестве классификаторов используются отношения частот локальных максимумов спектра звуковой волны, может быть хорошо применим к распознаванию искренности эмоции. Было показано, что в рассматриваемых категориях эмоций (радость, грусть, гнев, страх) в каждом случае между статистическими данными "истинной" и "фальшивой" эмоциями имеются существенные отличия. Общим же для всех категорий оказалось то, что в случае ложных эмоций существенную роль играет параметр отношения частот 0,67, соответствующий чистой кварте (гордый, уверенный, твердый, яркий консонанс). Данный консонанс показывает контроль говорящего человека над эмоцией.

Применение метода отношения частот локальных максимумов в искусственной нейронной сети показало хорошие результаты. Эмоции тестового множества (с учетом их истинности) были идентифицированы в 85 % случаев.

## Список источников

1. *Российские ученые создали RiskControl, который распознает ложь по голосу.* <https://www.computerra.ru> – журнал "Компьютерра". 2021. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.computerra.ru/275450/rossijskie-uchenye-sozdali-riskcontrol-kotoryj-raspoznat-lozh-po-golosu/> (дата обращения: 19.11.2024).
2. *Пеленицын А.Б., Степанов А.А.* Что надо знать о так называемых "детекторах лжи по голосу". [Электронный ресурс] / А.Б. Пеленицын, А.А. Степанов. Электрон. текстовые дан. Режим доступа: [http://poligraf.sp.ru/stati/abpelenicyn\\_aastepanov-detektoru\\_lzhi\\_po\\_golosu.html](http://poligraf.sp.ru/stati/abpelenicyn_aastepanov-detektoru_lzhi_po_golosu.html), свободный (дата обращения: 19.11.2024).
3. *Изард К.Э.* Психология эмоций / пер. с англ. СПб: Изд-во "Питер", 1999. 464 с.
4. *Shkaraputa, A., Kolcherina, A., Mishlanova, M.* (2022). Determining of the Emotional State of a Person Using Computer Analysis of Sound Wave Parameters. In: Rocha, A., Isaeva, E. (eds) Science and Global Challenges of the 21st Century - Science and Technology. Perm Forum 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, Vol. 342. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-89477-1\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-89477-1_6).
5. *Алимуратов А.К., Чураков П.П.* Обзор и классификация методов обработки речевых сигналов в системах распознавания речи. Измерения. Мониторинг. Контроль. 2(12) 27-35 (2015).
6. *Xuedong H.* Spoken Language Processing: A Guide to Theory, Algorithm and System Development. Huang Xuedong. New Jersey. Prentice Hall PTR (2001).
7. *Mehmet Cenk Sezgin, Bilge Günsel & Gunes Karabulut Kurt.* Perceptual audio features for emotion detection. EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music Processing volume 2012, Article number: 16 (2012) <https://doi.org/10.1186/1687-4722-2012-16>.
8. *Рахманенко И.А., Мецераков Р.В.* Анализ идентификационных признаков в речевых данных с помощью GMM-UBM верификации диктора. С-Пб.: Тр. СПИИРАН, 2017, С. 32–50.
9. *Близнюк О.А., Шкарапута А.П.* Исследование применения метода определения базовых эмоций на основе отношения частот спектра звуковой волны // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2017. Вып. 4(39). С. 86–91.

## References

1. <https://www.computerra.ru> - Computerra Magazine. 2021. [Electronic resource]. Mode of access: <https://www.computerra.ru/275450/rossijskie-uchenye-sozdali-riskcontrol-kotoryj-raspoznat-lozh-po-golosu/> (date of address: 19.11.2024).

2. Pelenitsyn, A.B., Stepanov, A.A. WHAT TO KNOW ABOUT THE SO-called "VOICE LIE DETECTORS" [Electronic resource] / ePelenitsyn A.B., A.A.Stepanov - Electronic text data [Electronic resource] / Pelenitsyn A.B. Pelenitsyn, A.A.Stepanov - Electronic text dan. Mode of access: [http://poligraf.sp.ru/stati/abpelenicyn\\_aastepanov\\_detektory\\_lzhi\\_po\\_golosu.html](http://poligraf.sp.ru/stati/abpelenicyn_aastepanov_detektory_lzhi_po_golosu.html), free (date of reference: 19.11.2024).
3. Izard, K.E. The Psychology of Emotions. St. Petersburg. Peter Publishers (2008).
4. Shkaraputa, A., Kolcherina, A., Mishlanova, M. (2022). Determining of the Emotional State of a Person Using Computer Analysis of Sound Wave Parameters. In: Rocha, A., Isaeva, E. (eds) Science and Global Challenges of the 21st Century - Science and Technology. Perm Forum 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 342. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-89477-1\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-89477-1_6).
5. Alimuradov, A. K., Churakov, P. P. (2015). Review and classification of speech signal processing methods in speech recognition systems. Measurement. Monitoring. Control. 2(12) 27-35.
6. Xuedong, H. Spoken Language Processing: A Guide to Theory, Algorithm and System Development. Huang Xuedong. New Jersey. Prentice Hall PTR (2001).
7. Mehmet Cenk Sezgin, Bilge Günsel & Gunes Karabulut Kurt. Perceptual audio features for emotion detection. EURASIP Journal on Audio, Speech, and Music Processing volume 2012, Article number: 16 (2012). <https://doi.org/10.1186/1687-4722-2012-16>.
8. Rakhmanenko, I.A., Meshcheryakov, R.V. (2017). Analysis of identification features in speech data using GMM-UBM speaker verification. Proceedings of SPIIRAS, pp. 32-50. St. Petersburg.
9. Bliznyuk, O. A., Shkaraputa, A. P. (2027). The study of the application of the method of determining the basic emotions based on the ratio of frequencies of the sound wave spectrum. Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Informatics. 4(39), pp. 86-91.

#### **Информация об авторах:**

*И. В. Быков* – бакалавр по направлению "Прикладная математика и информатика" механико-математического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15);

*Н. Ю. Ротанева* – кандидат педагогических наук, доцент, заведующий кафедрой системного анализа и информационных технологий ФГБОУ ВО "Мариупольский государственный университет имени А.И. Куинджи", AuthorID: 1191430;

*А. П. Шкарапута* – кандидат физико-математических наук, доцент института компьютерных наук и технологий Пермского государственного национального исследовательского университета (614068, Россия, г. Пермь, ул. Букирева, 15), AuthorID: 69440.

#### **Information about the authors:**

*I. V. Bykov* – Bachelor's degree in Applied Mathematics and Informatics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068);

*N. Yu. Rotaneva* – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of System Analysis and Information Technologies of the Mariupol State University named after A.I. Kuindzhi, AuthorID: 1191430;

*A. P. Shkaraputa* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Institute of Computer Science and Technology of Perm State University (15, Bukireva St., Perm, Russia, 614068), AuthorID: 69440.

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Научная статья

УДК 519.71

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-117-131

<https://elibrary.ru/tuqhho>**Недетерминированные квантовые OBDD  
большой ширины****Аида Фаритовна Гайнутдинова**

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия

[aida.ksu@gmail.com](mailto:aida.ksu@gmail.com)

**Аннотация.** В статье исследуются упорядоченные ветвящиеся диаграммы решений (OBDD – Ordered Binary Decision Diagrams) – модель для вычисления булевых функций. Целью работы является сравнительный сложностной анализ квантовых и классических недетерминированных OBDD большой ширины. Исследуется сложность вычисления булевой функции "Равенство" в недетерминированных квантовых OBDD для различных порядков считывания переменных в сравнении с классической сложностью. Показывается, что при использовании порядка чтения переменных, при котором ширина классической недетерминированной OBDD константна, ширина квантовой модели линейна, и что доказанная нижняя оценка точна. Определяется булева функция, для которой ширина квантовой недетерминированной OBDD экспоненциальна для любого порядка считывания. Предлагается квантовый алгоритм вычисления этой функции с нулевой ошибкой. Представляется результат о соотношении сложностных классов для квантовых и классических недетерминированных OBDD большой ширины.

**Ключевые слова:** ветвящаяся программа; упорядоченная ветвящаяся диаграмма решений; недетерминизм; квантовый алгоритм; сложность; класс сложности; вычислительная модель; иерархия сложностных классов; нижняя оценка; верхняя оценка

**Для цитирования:** Гайнутдинова А.Ф. Недетерминированные квантовые OBDD большой ширины // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 117–131. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-117-131. <https://elibrary.ru/tuqhho>.

**Благодарности:** Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета ("ПРИОРИТЕТ-2030").

Статья поступила в редакцию 11.10.2024; одобрена после рецензирования 28.10.2024; принята к публикации 01.12.2024.

## COMPUTER SCIENCE

Research article

**Large Width Nondeterministic Quantum OBDDs****Aida. F. Gainutdinova**

Kazan Federal University, Kazan, Russia

[aida.ksu@gmail.com](mailto:aida.ksu@gmail.com)

Эта работа © 2024 Гайнутдинова А.Ф. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

**Abstract.** In this paper we investigate ordered binary decision diagrams (OBDD) – a model for computing Boolean functions. The aim of this work is a comparative complexity analysis of quantum and classical nondeterministic OBDDs of large width. We study the complexity of computing the Boolean function "Equality" in nondeterministic quantum OBDDs for different order of reading variables in comparison with the classical complexity. We show that when using the order of reading for which the width of the classical nondeterministic OBDD is constant, the width of the quantum model is linear and the proved lower bound is tight. We define a Boolean function for which the width of nondeterministic quantum OBDD is exponential for any order of reading variables. We construct a quantum algorithm for computing this function with zero error. We present a result on the relationship between complexity classes for quantum and classical nondeterministic OBDDs of large width.

**Keywords:** *branching program; ordered binary decision diagram; nondeterminism; quantum algorithm; complexity; complexity class; computational model; hierarchy of complexity classes; lower bound; upper bound*

**For citation:** Gainutdinova, Aida (2024), "Large Width Nondeterministic Quantum OBDDs", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), pp. 117-131. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-117-131. <https://elibrary.ru/tuqhho>.

**Acknowledgments:** The research has been supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program ("PRIORITY-2030").

*The article was submitted 11.10.2024; approved after reviewing 28.10.2024; accepted for publication 01.12.2024*

## Введение

Квантовая информатика зародилась в конце прошлого столетия. В 1980-х годах была высказана идея о возможном построении вычислительных моделей с использованием законов квантовой механики [1, 2]. С тех пор эта область стремительно развивается: были определены и активно исследуются квантовые аналоги классических вычислительных моделей: автоматов, схем, ветвящихся программ и т. д., найдены задачи, для которых квантовые алгоритмы оказались значительно эффективнее, чем известные классические. Недетерминированные модели не являются реалистичными, однако позволяют лучше понять возможности моделей реалистичных (детерминированных, вероятностных и т.д.). Недетерминизм играет важную роль в теории компьютерных наук. В частности, вопрос, являются ли недетерминированные модели более эффективными, чем детерминированные, сформулирован как проблема о соотношении классов P и NP, являющихся одной из важнейших на сегодняшний день. Сравнительный анализ квантовых и классических недетерминированных вычислительных моделей, и построение эффективных квантовых алгоритмов для моделей с различными ограничениями является актуальным направлением исследований.

Ветвящиеся программы (BP – Branching Programs) – известная модель для вычисления булевых функций, основанная на применении операций "if", "then", "else" и "goto" и имеющая приложения в различных областях: в области верификации моделей и программ, в базах данных и т.д. [3, с. 5–11]. Известно, что логарифм сложности BP соответствует объему памяти машины Тьюринга, а максимальная длина вычислительного пути – времени вычисления [4, 5]. Модель квантовых BP, как последовательность унитарных эволюций квантовой системы с заключительным измерением для извлечения результата вычислений, была определена в работе [6].

В работах [7, 8] определены несколько иные модели ВР, эквивалентные модели работы [6]. Упорядоченные ветвящиеся диаграммы решений (OBDD – Ordered Binary Decision Diagrams) – это модель ВР, в которой на каждом вычислительном пути переменные считываются в одном и том же порядке не более одного раза. Естественной мерой сложности для этой модели является ширина. Различные варианты OBDD: детерминированные, недетерминированные, вероятностные, квантовые исследовались разными авторами [9, 7, 10, 8, 11, 12]. В частности, было показано, что вероятностные OBDD могут быть экспоненциально эффективнее детерминированных и недетерминированных [9], а квантовые OBDD – эффективнее детерминированных и стабильных вероятностных [10].

В работе [11] было продемонстрировано превосходство квантового недетерминизма над классическим: была представлена функция, вычисляемая недетерминированными квантовыми OBDD (NQOBDD) константной ширины, в то время как ширина классических недетерминированных OBDD (NOBDD) для этой функции неконстантна.

В работе [12] исследовались NQOBDD линейной и сублинейной ширины, для которых, в частности, было показано, что квантовые и классические недетерминированные модели не сравнимы между собой.

Одной из особенностей модели OBDD является возможность выбора порядка считывания переменных. Во всех упомянутых выше работах результаты основывались на симметрических булевых функциях, для которых порядок считывания не важен, поскольку значение функции на конкретном наборе зависит от числа единиц в наборе, а не от их расположения. При этом ширина OBDD для таких функций не более чем линейна. Для получения высоких нижних оценок необходимо исследование несимметрических булевых функций. Для таких функций сложность OBDD может существенным образом зависеть от того, в каком порядке программа считывает переменные. Известны примеры функций, для которых разница в сложности в зависимости от используемого порядка считывания экспоненциальна. При этом задача нахождения наилучшего порядка считывания для заданной функции является NP-полной [13, с. 135].

Целью данной работы является сравнительное исследование NOBDD и NQOBDD линейной и сверхлинейной ширины. Мы исследуем известную булеву функцию "Равенство" и сложность ее вычисления в квантовых недетерминированных OBDD при использовании различных порядков считывания переменных в сравнении с классической недетерминированной сложностью. С использованием метода доказательства нижней оценки сложности NQOBDD, впервые представленного в материалах конференции [12], мы доказываем экспоненциальную нижнюю оценку сложности вычисления функции "Равенство" при "наихудшем" порядке считывания. Мы доказываем линейную нижнюю оценку сложности функции "Равенство" при вычислении в NQOBDD с использованием "наилучшего" порядка, при котором классическая сложность равна 3. Мы показываем, что полученные нижние оценки точны. Мы конструируем функцию, для которой доказываем экспоненциальную нижнюю оценку сложности вычисления в квантовых NOBDD для любого порядка считывания и предлагаем квантовый алгоритм ее вычисления.

На основе полученных результатов мы представляем результат об иерархии классов сложности, основанных на модели недетерминированных OBDD сверхлинейной ширины.

## 1. Предварительные сведения

### 1.1. Определения моделей

В работе мы используем верхний индекс для нумерации векторов и наборов, нижний индекс – для нумерации элементов векторов и наборов.

Детерминированная ветвящаяся программа (BP – Branching Program) над множеством переменных  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  – это ориентированный ациклический граф с финальными вершинами, помеченными 0 и 1 (будем называть их отвергающими и принимающими вершинами, соответственно). Каждая внутренняя вершина помечена булевой переменной  $x \in X$ , и имеет два исходящих ребра, помеченных 0 и 1, соответственно. BP обрабатывает входной набор  $\sigma \in \{0,1\}^n$ , стартуя из выделенной начальной вершины. Для каждой внутренней вершины, помеченной переменной  $x_j$ , BP осуществляет переход из этой вершины либо по 0-ребру, либо по 1-ребру, в соответствии со значением  $\sigma_j$ , которое принимает переменная  $x_j$  во входном наборе. BP представляет булеву функцию  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ , если для любого  $\sigma \in \{0,1\}^n$  она завершает работу в финальной вершине, помеченной  $f(\sigma)$ .

*Сложность*  $Size(P)$  BP  $P$  – это количество ее внутренних вершин. *Длина*  $Length(P)$  BP  $P$  – это максимальная длина пути из начальной вершины в конечную. Длина BP оценивает время, требуемое для вычисления функции  $f$  в худшем случае, сложность BP оценивает память, затрачиваемую в процессе вычисления.

BP называется *один раз читающей*, если на любом вычислительном пути каждая переменная считывается не более одного раза. BP называется *уровневой*, если ее вершины могут быть разбиты на уровни  $0, 1, \dots$  таким образом, что для каждого  $i$  ребра, исходящие из вершин уровня  $i$ , ведут только в вершины уровня  $i + 1$ .

*Ширина*  $Width(P)$  уровневой BP  $P$  – это максимальное число вершин на уровне.

Очевидно, что  $Size(P) \leq Length(P) \cdot Width(P)$ .

Уровневая BP  $P$  называется *забывающей*, если во всех вершинах одного уровня  $P$  тестируется одна и та же переменная.

OBDD (Ordered Binary Decision Diagram) – это уровневая забывающая один раз читающая ветвящаяся программа.

Поскольку длина OBDD не превосходит  $n$ , естественной мерой сложности является ее ширина. Модель OBDD константной ширины с естественным порядком считывания и одинаковыми преобразованиями на всех уровнях эквивалентна модели конечных автоматов [14].

Недетерминированная OBDD (NOBDD) допускает переходы из вершины текущего уровня в более чем одну вершину последующего уровня при считывании одной и той же переменной. В этом случае для входного набора  $\sigma$  могут существовать несколько вычислительных путей. NOBDD  $P$  принимает входной набор  $\sigma$ , если существует вычислительный путь, соответствующий данному набору, завершающийся в принимающей вершине. В противном случае  $P$  отвергает набор  $\sigma$ .

Для определения квантовой OBDD нам понадобятся некоторые сведения из теории квантовых вычислений. Для большей информации см., например [15]. Квантовая система (QS) с  $d$  базисными состояниями (использующая  $\log d$  квантовых битов) может быть описана при помощи  $d$ -мерного комплекснозначного Гильбертова пространства  $\mathcal{H}^d$ .



Чистое состояние  $QS$  – это элемент пространства  $\mathcal{H}^d$ , вектор-столбец  $|\psi\rangle = (z_0, \dots, z_{d-1})$  с единичной нормой (унитарный вектор):  $\| |\psi\rangle \| = \sqrt{\langle \psi | \psi \rangle} = 1$  ( $\langle \psi |$  – сопряженный к  $|\psi\rangle$  вектор-строка). Комплексное число  $z_i$  ( $i = 0, \dots, d-1$ ) называется амплитудой базисного состояния  $|i\rangle$ , где  $|i\rangle$  обозначает унитарный вектор со значением 1 в позиции  $i$  (нумерация элементов вектора осуществляется с 0).

Таким образом, чистое состояние – это суперпозиция базисных состояний  $QS$  с комплекснозначными амплитудами. Унитарная эволюция – это изменение состояния квантовой системы за определенный период времени, описывается  $d$ -мерной унитарной матрицей  $U$ . Матрица  $U$  называется унитарной, если выполняется  $UU^\dagger = I$ , где  $U^\dagger$  – транспонированная комплексносопряженная к  $U$  матрица,  $I$  – единичная матрица.

Квантовое измерение – это процедура извлечения классической информации из квантового состояния. Ортогональное измерение  $QS$  описывается системой операторов  $O = \{P_1, \dots, P_t\}$ , действующих в  $\mathcal{H}^d$  таких, что  $P_i = P_i^\dagger$ ,  $P_i^2 = P_i$ ,  $P_i P_j = \mathbf{0}$ ,  $\sum_{i=1}^t P_i = I$  ( $i, j = 1, \dots, t$ ,  $i \neq j$ ,  $t \leq d$ ). Если  $|\psi\rangle$  – состояние  $QS$  до измерения, то результатом измерения является одно из значений из множества  $\{1, \dots, t\}$ . При этом:

1.  $p_k = \|P_k |\psi\rangle\|^2$  – вероятность того, что исход измерения – значение  $k$ ;
2.  $|\psi'\rangle = P_k |\psi\rangle / \|P_k |\psi\rangle\|$  – состояние квантовой системы после измерения, результатом которого является значение  $k$ .

Квантовая OBDD  $Q$  ширины  $d$  и длины  $l$  ( $(d, l)$ -QOBDD) определяется как

$$Q = ( |\psi^0\rangle, R, O_{final} ),$$

где  $|\psi^0\rangle$  – начальная суперпозиция;  $R$  – последовательность (длины  $l$ ) инструкций, содержащих  $d$ -мерные унитарные преобразования квантовой системы  $QS$  с  $d$  базисными состояниями, определенная следующим образом:

$$R = \{ \{ j_i, U_i(0), U_i(1) \} \}_{i=1}^l,$$

где  $U_i(0)$  и  $U_i(1)$  – унитарные ( $d \times d$ )-матрицы, описывающие преобразования, применяемые на  $i$ -ом шаге,  $O_{final} = \{P_{accept}, P_{reject}\}$  – система операторов, задающих финальное измерение с исходами *accept* и *reject*, соответственно.

QOBDD  $Q$  обрабатывает вход  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n \in \{0,1\}^n$ , начиная работу в суперпозиции  $|\psi^0\rangle$ . Если после текущего шага  $Q$  находится в состоянии  $|\psi\rangle$ , то на следующем  $i$ -ом шаге ( $i = 1, \dots, n$ )  $Q$  считывает очередной символ  $\sigma_{j_i}$  входного слова  $\sigma \in \Sigma^n$ , определяемый последовательностью  $R$  инструкций программы, и преобразует текущую суперпозицию  $|\psi\rangle$  в суперпозицию  $|\psi'\rangle = U_i(\sigma_{j_i})|\psi\rangle$ . После считывания входного набора производится измерение финальной суперпозиции  $|\psi_{final}\rangle = U_n(\sigma_{i_n}) \dots U_1(\sigma_{i_1})|\psi^0\rangle$ . Если исход измерения *accept*, вход принимается, в противном случае – отвергается. Вероятность принятия слова  $\sigma$  определяется как

$$Pr_{accept}^Q(\sigma) = \|P_{accept} |\psi_{final}\rangle\|^2 .$$

$Q$  недетерминированно вычисляет функцию  $f$ , если  $Q$  принимает вход  $\sigma$  с вероятностью  $> 0$  тогда и только тогда, когда  $f(\sigma) = 1$ . Такую OBDD будем называть недетерминированной квантовой OBDD (NQOBDD).  $Q$  вычисляет функцию  $f$  без ошибки, если  $Q$  принимает с вероятностью 1 входы  $\sigma$ , для которых  $f(\sigma) = 1$  и принимает с вероятностью 0 входы  $\sigma$ , для которых  $f(\sigma) = 0$ .

## 1.2. Сведения из линейной алгебры

Приведем некоторые сведения из линейной алгебры, которые понадобятся нам в дальнейшем (см. напр. [16]).

Пусть  $V$  – векторное пространство над полем комплексных чисел с нормой  $\|\cdot\|_2$ . Система векторов  $\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^d \in V$  является линейно зависимой, если существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ , одновременно не равные нулю такие, что  $\alpha_1 \psi^1 + \dots + \alpha_d \psi^d = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{0}$  обозначает нулевой элемент пространства  $V$ ). Если это равенство выполняется только при  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_d = 0$ , то система векторов является линейно независимой.

**Лемма 1.** Пусть  $\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^d \in V$  – линейно независимая система векторов,  $U$  – унитарное преобразование в пространстве  $V$ . Тогда вектора  $U\psi^1, U\psi^2, \dots, U\psi^d$  линейно независимы.

*Доказательство.* Унитарное преобразование является взаимно-однозначным преобразованием, которое можно рассматривать как переход к другому базису. Взаимно-однозначное линейное преобразование сохраняет свойство линейной независимости преобразуемых векторов.

**Лемма 2.** Пусть вектора  $\psi^1, \dots, \psi^m, \psi \in V$ ,  $\psi^1, \dots, \psi^m$ , – линейно независимы,  $U$  – линейное преобразование пространства  $V$  такое, что  $\|U\psi^i\| = 0, i = 1, \dots, m, \|U\psi\| \neq 0$ . Тогда система векторов  $\{\psi^1, \dots, \psi^m, \psi\}$  линейно независима.

*Доказательство.* Докажем от противного. Предположим, вектор  $\psi$  линейно зависим с системой  $\psi^1, \dots, \psi^m$ . Тогда существуют  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ , одновременно не равные нулю такие, что  $\psi = \alpha_1 \psi^1 + \dots + \alpha_m \psi^m$ .

В силу линейности имеем  $U\psi = U(\alpha_1 \psi^1 + \dots + \alpha_m \psi^m) = \alpha_1 U\psi^1 + \dots + \alpha_m U\psi^m$ .

По свойству нормы имеем

$$\|U\psi\| \leq |\alpha_1| \cdot \|U\psi^1\| + \dots + |\alpha_m| \cdot \|U\psi^m\|.$$

По условию леммы  $\|U\psi^1\| = \dots = \|U\psi^m\| = 0$ . Значит  $\|U\psi\| = 0$ . Получили противоречие.

## 1.3. Нижняя оценка ширины NQOBDD

Пусть  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  – произвольная булева функция,  $\pi = (i_1, \dots, i_n)$  – произвольная перестановка индексов  $\{1, \dots, n\}$ . Для  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ , целого  $k$  ( $0 < k < n$ ) обозначим  $X_k^\pi = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ . Набор значений  $\sigma \in \{0,1\}^k$ , сопоставленный переменным из множества  $X_k^\pi$  определяет подфункцию  $f_{\pi,k}^\sigma: \{0,1\}^{n-k} \rightarrow \{0,1\}$ .

Множество пар  $S_k^\pi = \{(\sigma, \gamma): \sigma \in \{0,1\}^k, \gamma \in \{0,1\}^{n-k}\}$  назовем строгим 1-полным множеством (*strong 1-fooling set*) для функции  $f$ , если выполняются следующие условия:

1.  $f_{\pi,k}^\sigma(\gamma) = 1$  для любой пары  $(\sigma, \gamma) \in S_k^\pi$ ,
2. для любых двух пар  $(\sigma, \gamma), (\sigma', \gamma') \in S_k^\pi$  выполняется  $f_{\pi,k}^\sigma(\gamma') = 0$  и  $f_{\pi,k}^{\sigma'}(\gamma) = 0$ .

Для двух наборов  $\sigma, \sigma' \in \{0,1\}^k$  будем говорить, что набор  $\gamma \in \{0,1\}^{n-k}$  отличает набор  $\sigma$  от набора  $\sigma'$ , если выполняется  $f_{\pi,k}^\sigma(\gamma) > 0$  и  $f_{\pi,k}^{\sigma'}(\gamma) = 0$ . Отметим, что данное свойство не является симметричным.

**Теорема 1.** [12] Для любой QOBDD  $Q$ , недетерминированно вычисляющей функцию  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  и использующей порядок  $\pi = (i_1, \dots, i_n)$  считывания переменных, выполняется

$$\text{Width}(Q) \geq \max_k |S_k^\pi|.$$

## 2. Основные результаты

### 2.1. Квантовая сложность вычисления функции "Равенство"

Функция "Равенство"  $EQ_{2n}: \{0,1\}^{2n} \rightarrow \{0,1\}$  определяется следующим образом:

$$EQ_{2n}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma_1 \dots \sigma_n = \sigma_{n+1} \dots \sigma_{2n}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Известно, что сложность вычисления данной функции критическим образом зависит от порядка считывания переменных. Так, ширина классической OBDD (детерминированной и недетерминированной), вычисляющей  $EQ_{2n}$ , равна 3, если переменные считываются в порядке  $x_1, x_{n+1}, x_2, x_{n+2}, \dots, x_n, x_{2n}$  (назовем этот порядок "наилучшим") и равна  $\Omega(2^n)$ , если сначала считываются переменные первой половины набора и только потом – переменные второй половины набора (назовем такой порядок "наихудшим").

Покажем, что сложность недетерминированной QOBDD для этой функции при использовании "наилучшего" порядка считывания линейна.

**Теорема 2.** Любая QOBDD, недетерминированно вычисляющая функцию  $EQ_{2n}$  и использующая порядок считывания переменных  $\pi = (1, n+1, 2, n+2, \dots, n, 2n)$ , имеет ширину не менее  $n+1$ .

*Доказательство.* Пусть  $Q$  – NQOBDD, вычисляющая  $EQ_{2n}$  и считывающая переменные в порядке  $\pi = (1, n+1, 2, n+2, \dots, n, 2n)$ .

Вычисление на входе  $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_{2n}$  начинается из начальной суперпозиции  $|\psi^0\rangle$ . На шаге  $l$  программа считывает переменную  $x_{i_l} = \sigma_{i_l}$  и преобразует суперпозицию  $|\psi(\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_{l-1}})\rangle$  в суперпозицию  $|\psi(\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_l})\rangle$ . После считывания входного слова  $Q$  производит финальное измерение финальной суперпозиции  $|\psi(\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_{2n}})\rangle$  и принимает входной набор с вероятностью  $Pr_{accept}^Q(\sigma) = \|P_{accept} |\psi(\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_{2n}})\rangle\|^2$ .

На каждом уровне  $l$  программы  $Q$  будем рассматривать множество  $\Psi_l$  квантовых состояний, достижимых программой на этом уровне, а также подмножество  $\Phi_l \subseteq \Psi_l$  состояний, которые являются линейно независимыми векторами.

**Лемма 4.** Пусть  $|\psi^1\rangle, \dots, |\psi^m\rangle, |\psi\rangle \in \Psi_l$  ( $m \geq 1$ ) и  $|\psi^1\rangle, \dots, |\psi^m\rangle$  – линейно независимы, где  $|\psi^i\rangle = |\psi(\sigma^i)\rangle$  для  $i = 1, \dots, m$  и  $|\psi\rangle = |\psi(\sigma)\rangle$ . Если существует строка  $\gamma \in \{0,1\}^{n-l}$ , отличающая строку  $\sigma$  от каждой из строк  $\sigma^1, \dots, \sigma^m$ , то множество  $\{|\psi^1\rangle, \dots, |\psi^m\rangle, |\psi\rangle\}$  линейно независимо.

*Доказательство.* Пусть  $U = U_n(\gamma_{n-l}) \dots U_{l+1}(\gamma_1)$ . Тогда выполняется  $\|P_{accept} U |\psi^i\rangle\| = 0$  для всех  $i = 1, \dots, m$ , и  $\|P_{accept} U |\psi\rangle\| > 0$ . Согласно Лемме 2, множество  $\{|\psi^1\rangle, \dots, |\psi^m\rangle, |\psi\rangle\}$  является линейно независимым.

Индукцией по  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) покажем, что после считывания  $i$ -й пары: значений переменных  $x_i$  и  $x_{n+i}$  (на уровне  $l = 2i$ ) выполняется  $|\Phi_{2i}| \geq i+1$ .

База индукции.  $\Phi_0 = \{|\psi^0\rangle\}$ . На первом шаге после считывания  $x_1 = \sigma_1$  ( $\sigma_1 \in \{0,1\}$ ), согласно Лемме 4, множество  $\Phi_1 = \{|\psi(0)\rangle, |\psi(1)\rangle\}$  является линейно независимым множеством, так как строка  $1^{2n-1}$  отличает строку 1 от строки 0. После считывания  $x_{n+1} = \sigma_{n+1}$  ( $\sigma_{n+1} \in \{0,1\}$ ), множество состояний  $\Phi_2 = \{|00\rangle, |10\rangle\}$  является линейно независимым по Лемме 1. Следовательно,  $|\Phi_2| \geq 2$ .

Индукционный шаг (для  $i = 2, \dots, n$ ). По предположению индукции  $\Psi_{2(i-1)}$  содержит не менее  $i$  векторов. Обозначим их  $|\psi^{j_0}\rangle, \dots, |\psi^{j_{i-1}}\rangle$ , а соответствующие им частичные входы  $\sigma^{j_0}, \dots, \sigma^{j_{i-1}}$ . После считывания  $x_i = \sigma_i$ , по Лемме 1 множество  $\Phi_{2(i-1)}^0 = \{U(0)|\psi^{j_0}\rangle, \dots, U(0)|\psi^{j_{i-1}}\rangle\}$  является линейно независимым, вектор  $|\psi(1^{2i-1})\rangle =$

$U_{2i-1}(1) \cdots U_1(1)|\psi^0\rangle$  не входит в  $\Phi_{2(i-1)}^0$ , при этом строка  $1^{2n-2i+1}$  отличает строку  $1^{2i-1}$  от любой из строк  $\sigma^{j_0}0, \dots, \sigma^{j_{i-1}}0$ . Значит, множество  $\Phi_{2i-1} = \Phi_{2(i-1)}^0 \cup \{|\psi(1^{2i-1})\rangle\}$  является линейно независимым. После считывания  $x_{n+i} = \sigma_{n+i}$ , по Лемме 1 множество  $\Psi_{2i} = \Phi_{2i-1}^0 = \{U(0)|\psi\rangle : |\psi\rangle \in \Phi_{2i-1}\}$  является линейно независимым. Следовательно,  $|\Phi_{2i}| \geq i + 1$ .

После считывания  $n$ -ой пары  $x_n, x_{2n}$  на уровне  $l = 2n$  получаем  $|\Phi_{2n}| \geq n + 1$ . Таким образом, размерность пространства состояний программы  $Q$  не менее  $n + 1$ , что завершает доказательство теоремы.

Покажем, что доказанная нижняя оценка точна.

**Теорема 3.** Существует QOBDD  $Q$  ширины  $n + 1$ , вычисляющая функцию  $EQ_{2n}$  без ошибки и использующая порядок считывания переменных  $\pi = (1, n + 1, 2, n + 2, \dots, n, 2n)$ .

*Доказательство.* Программа  $Q$  использует регистр из  $n + 1$  состояния  $s_0, s_1, \dots, s_n$ , где  $s_0$  – начальное и принимающее состояние. При считывании пары значений переменных  $x_i, x_{n+i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) программа применяет преобразования:

- $|s_0\rangle \rightarrow |s_i\rangle, |s_i\rangle \rightarrow |s_0\rangle$ , если считанное значение 1;
- $|s_0\rangle \rightarrow |s_0\rangle, |s_i\rangle \rightarrow |s_i\rangle$ , если считанное значение 0;
- $|s_j\rangle \rightarrow |s_j\rangle$ , для всех  $j = 1, \dots, n, j \neq i$ .

Докажем корректность работы программы.

Пусть вход  $\sigma$  такой, что  $EQ_{2n}(\sigma) = 1$ . Это означает, что  $\sigma_i = \sigma_{n+i} \forall i = 1, \dots, n$ . В этом случае программа будет завершать обработку каждой пары в состоянии  $|s_0\rangle$  и примет такой вход с вероятностью 1.

Пусть вход  $\sigma$  такой, что  $EQ_{2n}(\sigma) = 0$ . Это означает, что  $\exists i \in \{1, \dots, n\}$ , для которого  $\sigma_i \neq \sigma_{n+i}$ . После обработки этой пары программа останется в состоянии  $s_i$  и, таким образом, амплитуда состояния  $s_0$  до конца обработки будет равна 0. Вероятность принятия такого набора равна 0.

Рассмотрим сложность NQOBDD для "наихудшего" порядка считывания.

**Теорема 4.** Любая QOBDD, недетерминированно вычисляющая функцию  $EQ_{2n}$  и считывающая переменные одной из половин набора после считывания всех переменных второй половины набора, имеет ширину не менее  $2^n$ .

*Доказательство.* Пусть  $Q$  – QOBDD, недетерминированно вычисляющая  $EQ_{2n}$ , использующая порядок считывания  $\pi = (i_1, \dots, i_{2n})$ , при котором любая переменная одной из половин набора считывается после того, как считаны все переменные другой половины набора. Множество  $S_n^\pi = \{(\sigma, \sigma) : \sigma \in \{0,1\}^n\}$  является строгим 1-полным множеством для функции  $EQ_{2n}$ . Согласно Теореме 1,  $Width(Q) \geq |S_n^\pi|$ . Заметим, что  $|S_n^\pi| = 2^n$ , что завершает доказательство теоремы.

Покажем, что оценка теоремы 4 точна.

**Теорема 5.** Пусть  $\pi = (i_1, \dots, i_{2n})$  – произвольная перестановка индексов  $\{1, \dots, 2n\}$  такая, что выполняется одно из двух условий: либо  $\pi(i) \leq n \forall i \leq n$  и  $\pi(i) > n \forall i > n$ , либо  $\pi(i) > n \forall i \leq n$  и  $\pi(i) \leq n \forall i > n$ . Существует QOBDD ширины  $2^n$ , недетерминированно вычисляющая функцию  $EQ_{2n}$  и считывающая переменные в порядке  $\pi$ .

*Доказательство.* Пусть  $Q$  – NQOBDD, вычисляющая  $EQ_{2n}$ , использующая порядок  $\pi = (i_1, \dots, i_{2n})$  считывания переменных, удовлетворяющий условию теоремы. Для определенности считаем, что  $Q$  сначала считывает переменные первой половины набора, потом – переменные второй половины набора (противоположный случай доказывается аналогично).  $Q$  имеет  $2^n$  состояний  $s_0, \dots, s_{2^n-1}$ , где  $s_0$  – начальное и принимающее состояние. При считывании переменной  $x_i = \sigma_i$  ( $i = 1, \dots, 2n, \sigma_i \in \{0,1\}$ )  $Q$  применяет преобразования:

- $|s_j\rangle \rightarrow |s_{(j+2^{i-1}\sigma_i) \bmod 2^n}\rangle$ ,  $j = 0, \dots, 2^n - 1$ , если  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,
- $|s_j\rangle \rightarrow |s_{(j-2^{i-n-1}\sigma_i+2^n) \bmod 2^n}\rangle$ ,  $j = 0, \dots, 2^n - 1$ , если  $i \in \{n+1, \dots, 2n\}$ .

После считывания первой половины входа состояние программы будет равно  $|s_{m(\sigma_1 \dots \sigma_n)}\rangle$ , где  $m(\sigma_1 \dots \sigma_n)$  – целое число, двоичное представление которого равно  $\sigma_1 \dots \sigma_n$ . После считывания второй половины набора состояние программы равно  $|s_{(m(\sigma_1 \dots \sigma_n) + 2^n - m(\sigma_{n+1} \dots \sigma_{2n})) \bmod 2^n}\rangle$ .

Если  $\sigma_1 \dots \sigma_n = \sigma_{n+1} \dots \sigma_{2n}$ , финальное состояние программы будет  $|s_0\rangle$  и программа примет такой набор с вероятностью 1.

В противном случае программа завершит обработку входа в состоянии, отличном от  $|s_0\rangle$  и примет такой набор с вероятностью 0.

## 2.2. Функция "XOR-перемешанное равенство"

Как было показано в предыдущем разделе, сложность вычисления функции  $EQ_n$  зависит от того, в каком порядке считываются переменные. Для устранения зависимости сложности вычисления от используемого порядка считывания, используют различные приемы для определения функций, при которых порядок следования битов входа определяются самим входным набором (или его частью). Для таких функций не удается подобрать оптимальный порядок считывания битов входа. В частности, в работе [17] рассматривалась функция "Перемешанное равенство", определенная на основе функции "Равенство" и сложность ее вычисления в классических детерминированных и недетерминированных OBDD.

В данной работе мы определим и исследуем функцию  $EQXS_{2n}$  (Equality-Xor-Shuffled), которая задается на основе функции  $EQ_{2n}$  с использованием приема, аналогичного описанному в работе [18]. Формально, функция  $EQXS_{2n}$  определяется следующим образом.

Пусть  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$  – последовательность переменных, от которых зависит функция ( $n$  кратно 2). Назовем переменные  $x_1, \dots, x_n$  – "переменными принадлежности", переменные  $y_1, \dots, y_n$  – "переменными значения". Переменную значения  $y_i$  назовем соответствующей переменной принадлежности  $x_i$ .

По входной последовательности  $\sigma \gamma \in \{0,1\}^n \times \{0,1\}^n$  формируются новые битовые последовательности  $\tau, \alpha, \beta$ :

- последовательность  $\tau$  имеет длину  $n$  и формируется по значениям  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  переменных принадлежности  $x_1, \dots, x_n$  следующим образом:  $\tau_1 = \sigma_1, \tau_i = \tau_{i-1} \oplus \sigma_i$  ( $i = 2, \dots, n$ );
- последовательности  $\alpha, \beta$  формируются по переменным значения, начиная с пустых последовательностей: для  $i = 1, \dots, n$  бит значения  $\gamma_i$  дописывается к последовательности  $\alpha$ , если  $\tau_i = 0$ , в противном случае  $\gamma_i$  дописывается к последовательности  $\beta$ ;

Например, для набора  $\sigma = 1011001101$  получим последовательности  $\tau = 10011$ ,  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 011$ .

Функция  $EQXS_{2n} = 1$  тогда и только тогда, когда  $\alpha = \beta$ .

**Теорема 6.** Существует квантовая OBDD, вычисляющая функцию  $EQXS_{2n}$  с нулевой ошибкой, и имеющая ширину  $2^{n/2}(2n+4)$ .

*Доказательство.* Программа  $Q$  считывает переменные в порядке  $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n$ . Состояние программы хранится в регистрах:  $|num_\alpha\rangle, |num_\beta\rangle, |\phi\rangle, |b\rangle$ :

- однокубитный "регистр активности"  $|b\rangle$  хранит значение бита  $\tau_i$ , соответствующего последнему считанному биту принадлежности;
- регистр  $|num\rangle$  является ортогональной суммой двух регистров  $|num_\alpha\rangle$  и  $|num_\beta\rangle$ , которые устроены одинаково и хранят номер последнего считанного бита последовательности  $\alpha$  и  $\beta$ , соответственно;
- регистр  $|\phi\rangle$  хранит информацию о значении  $(m(\alpha) - m(\beta)) \bmod 2^{n/2}$ , где  $m(\alpha)$  и  $m(\beta)$  – целые числа, двоичными представлениями которых являются последовательности  $\alpha$  и  $\beta$ , соответственно.

Опишем подробнее каждый из регистров.

Регистр  $|b\rangle$  имеет два состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , изменяет свое состояние при считывании бита принадлежности  $\sigma \in \{0,1\}$  и не меняется при считывании бита значения. Преобразования:

$$U(\sigma) = \begin{cases} NOT, & \text{если } \sigma = 1, \\ I & , \text{если } \sigma = 0. \end{cases}$$

где  $NOT$  – однокубитное преобразование инвертирования квантового бита,  $I$  – тождественное преобразование.

Состояние данного регистра хранит значение текущего бита последовательности  $\tau$  и управляет преобразованиями на следующем шаге. Зона активности регистра  $|num\rangle$  ( $|num_\alpha\rangle$  или  $|num_\beta\rangle$ ) меняется, если считанный бит принадлежности равен 1, и сохраняется, если считанный бит принадлежности равен 0. Таким образом, на следующем шаге при считывании бита значения преобразования будут производиться в регистре  $|num_\alpha\rangle$ , если очередной бит значения принадлежит последовательности  $\alpha$  и в регистре  $|num_\beta\rangle$ , если бит значения принадлежит  $\beta$ .

Каждый из регистров  $|num_\alpha\rangle$  и  $|num_\beta\rangle$  имеет  $n/2 + 1$  состояние

$$s_0, s_1, \dots, s_{n/2}$$

(состоит из  $\log(n/2 + 1)$  кубитов). Начальное состояние  $|s_0\rangle$ . При считывании очередного бита принадлежности происходит преобразование  $|s_i\rangle \rightarrow |s_{(i+1) \bmod (\frac{n}{2}+1)}\rangle$  в регистре  $|num_\alpha\rangle$ , если значение регистра активности  $|b\rangle = |0\rangle$ , и в регистре  $|num_\beta\rangle$ , если  $|b\rangle = |1\rangle$ .

$2^{n/2}$ -кубитный регистр  $|\phi\rangle$  хранит неотрицательное значение  $c = (m(\alpha) - m(\beta)) \bmod 2^{n/2}$ . Базисные состояния регистра соответствуют значениям  $0, 1, \dots, 2^{\frac{n}{2}} - 1$ . При считывании бита из последовательности  $\alpha$  ( $\beta$ ) выполняется преобразование  $|c\rangle \rightarrow |(c + \alpha_j 2^{j-1}) \bmod 2^{\frac{n}{2}}\rangle$  (соответственно,  $|c\rangle \rightarrow |(c - \beta_j 2^{j-1} + 2^{\frac{n}{2}}) \bmod 2^{\frac{n}{2}}\rangle$ ), если последний считанный бит значения является  $j$ -ым битом последовательности  $\alpha$  ( $\beta$ ). Управляют изменением регистра  $|\phi\rangle$  регистры  $|num\rangle$  и  $|b\rangle$ .

Состояние программы  $Q$  описывается в виде

$$|\psi\rangle = |b\rangle \otimes 1/\sqrt{2} (|num_\alpha\rangle \oplus |num_\beta\rangle) \otimes |\phi\rangle.$$

Начальное состояние

$$|\psi^0\rangle = |0\rangle \otimes 1/\sqrt{2} (|s_0\rangle \oplus |s_0\rangle) \otimes |0\rangle.$$

Подпространство принимающих состояний – это подпространство, в котором состояние регистров  $|num\rangle \otimes |\phi\rangle = 1/\sqrt{2} (|s_{\frac{n}{2}}\rangle \oplus |s_{\frac{n}{2}}\rangle) \otimes |0\rangle$ .

Опишем работу программы.  $Q$  попеременно считывает биты принадлежности и соответствующие им биты значения. На очередном шаге при считывании бита принадлежности  $\sigma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) программа применяет преобразование  $U(\sigma_i)$  к регистру  $|b\rangle$ . К регистрам  $|num\rangle$  и  $|\phi\rangle$  применяется тождественное преобразование.

При считывании бита значения  $\gamma_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) программа применяет преобразование  $U_\phi$ , управляемое регистрами  $|\mathbf{num}\rangle$  и  $|\mathbf{b}\rangle$  и воздействующее на регистр  $|\phi\rangle$ . Затем применяет преобразование  $U_{num}$ , управляемое регистром  $|\mathbf{b}\rangle$  и воздействующее на регистр  $|\mathbf{num}\rangle$ . При этом к регистру  $|\phi\rangle$  применяется тождественное преобразование. Матрицы данных преобразований описываются следующим образом:

$$U_\phi(0) = I, \quad U_\phi(1) = \begin{pmatrix} U_\phi^\alpha & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & U_\phi^\beta \end{pmatrix},$$

где

$$U_\phi^\alpha = \begin{pmatrix} M_0^\alpha & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_1^\alpha & & \mathbf{0} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & M_{\frac{n}{2}-1}^\alpha \end{pmatrix},$$

$$U_\phi^\beta = \begin{pmatrix} M_0^\beta & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_1^\beta & & \mathbf{0} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & M_{\frac{n}{2}-1}^\beta \end{pmatrix}.$$

Здесь  $M_j^\alpha$  ( $j = 0, \dots, n/2 - 1$ ) – унитарные (перестановочные) матрицы, реализующие преобразования:

$$|c\rangle \rightarrow |(c + 2^j) \bmod 2^{\frac{n}{2}}\rangle.$$

Соответственно,  $M_j^\beta$  ( $j = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$ ) – унитарные матрицы, реализующие преобразования:

$$|c\rangle \rightarrow |(c - 2^j + 2^{\frac{n}{2}}) \bmod 2^{\frac{n}{2}}\rangle, \quad c \in \{0, \dots, 2^{\frac{n}{2}} - 1\}.$$

$$U_{num} = \begin{pmatrix} S & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & S \end{pmatrix} \otimes I,$$

где  $S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$  – матрица циклического сдвига, применяемая к регистру  $|\mathbf{num}_\alpha\rangle$  и регистру  $|\mathbf{num}_\beta\rangle$ .

Докажем корректность работы программы. После обработки входа финальные состояния регистров  $|\mathbf{num}\rangle$  и  $|\phi\rangle$  следующие:

$$|\mathbf{num}_{final}\rangle = 1/\sqrt{2}(|l_\alpha \bmod (\frac{n}{2} + 1)\rangle \oplus |l_\beta \bmod (\frac{n}{2} + 1)\rangle), \quad \text{где } l_\alpha = |\alpha|, \quad l_\beta = |\beta|,$$

$$|\phi_{final}\rangle = |c\rangle, \quad \text{где } c = (m(\alpha) - m(\beta) + 2^{n/2}) \bmod 2^{n/2}.$$

Пусть вход  $\sigma\gamma$  такой, что  $EQXS_n(\sigma\gamma) = 1$ . Это означает одновременное выполнение двух условий:

- 1)  $|\alpha| = |\beta|$ ,
- 2)  $\forall i: \alpha_i = \beta_i$ .

Выполнение условия 1) означает, что  $|\alpha| = |\beta| = n/2$  и после обработки входа состояние регистров  $|num_\alpha\rangle$  и  $|num_\beta\rangle$  равно  $|s_{n/2}\rangle$ . Выполнение условия 2) означает, что числа, двоичными представлениями которых являются последовательности  $\alpha$  и  $\beta$ , равны, откуда следует, что финальное состояние регистра  $|\phi\rangle$  равно  $|0\rangle$ . Поэтому после обработки входа финальное состояние программы является одним из двух:

$$\begin{aligned} |\psi_{final}\rangle &= |0\rangle \otimes 1/\sqrt{2}(|s_{\frac{n}{2}}\rangle \oplus |s_{\frac{n}{2}}\rangle) \otimes |0\rangle, \\ |\psi_{final}\rangle &= |1\rangle \otimes 1/\sqrt{2}(|s_{\frac{n}{2}}\rangle \oplus |s_{\frac{n}{2}}\rangle) \otimes |0\rangle. \end{aligned}$$

Вероятность принятия такого набора равна 1.

Пусть вход  $\sigma\gamma$  такой, что  $EQXS_n(\sigma\gamma) = 0$ . В этом случае выполняется по крайней мере одно из двух условий:

- 3)  $|\alpha| \neq |\beta|$ ,
- 4)  $\exists i: \alpha_i \neq \beta_i$ .

Если произошел случай 3), то  $|\alpha| \neq n/2$  и  $|\beta| \neq n/2$ , следовательно, после завершения работы и в регистре  $|num_\alpha\rangle$  и в регистре  $|num_\beta\rangle$  амплитуда состояния  $|s_{\frac{n}{2}}\rangle$  равна 0. Следовательно, вероятность принятия таких наборов равна 0.

Если  $|\alpha| = |\beta|$ , это означает, что произошел случай 4) и  $\alpha \neq \beta$ . Покажем, что в этом случае состояние регистра  $|\phi\rangle$  не равно  $|0\rangle$ .

Действительно, предположим, это не так, и  $c = m(\alpha) - m(\beta) + 2^{\frac{n}{2}} = 0 \pmod{2^{n/2}}$ . Это означает, что  $m(\alpha) = m(\beta) \pmod{2^{n/2}}$ , но так как  $m(\alpha) < 2^{n/2}$  и  $m(\beta) < 2^{n/2}$ , последнее равенство возможно только если  $\alpha = \beta$ . Следовательно, вероятность принятия в данном случае также равна 0.

Ширина итоговой программы равна  $2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \cdot 2^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}}(2n + 4)$ .

**Следствие.** Функция  $EQXS_{2n}$  вычислима NQOBDD ширины  $2^{n/2}(2n + 4)$ .

*Доказательство.* Квантовая OBDD, построенная в доказательстве Теоремы 6, вычисляет функцию  $EQXS_{2n}$  с нулевой ошибкой, а следовательно недетерминированно.

**Теорема 7.** Для любого порядка считывания переменных QOBDD, недетерминированно вычисляющая функцию  $EQXS_{2n}$ , имеет ширину  $\Omega(2^{n/2})$ .

*Доказательство.* Пусть  $Q$  – произвольная NQOBDD, вычисляющая функцию  $EQXS_{2n}$  и использующая порядок  $\pi$  считывания переменных. Зафиксируем значения переменных принадлежности таким образом, чтобы в соответствии с порядком  $\pi$  ровно  $n/2$  первых считанных переменных значения принадлежали последовательности  $\alpha$ ,  $n/2$  последних считанных переменных значения принадлежали последовательности  $\beta$ . Работу программы  $Q$  на получившихся наборах можно рассматривать как вычисление функции  $EQ_n$ , при использовании порядка, когда одна половина набора считывается строго после другой половины. Согласно Теореме 4, ширина программы в этом случае  $\Omega(2^{n/2})$ .

### 2.3. Иерархия для NQOBDD

Обозначим через  $NOBDD_n^d$ , и  $NQOBDD_n^d$  классы булевых функций, зависящих от  $n$  переменных, вычисляемых недетерминированными и квантовыми недетерминированными OBDD шириной не более  $d$ , соответственно.

В работе [12] представлена иерархия классов сложности для квантовых и классических недетерминированных OBDD линейной и сублинейной ширины.

В частности, было показано следующее:



Для любых  $n > 1$  и  $1 < d \leq n$  выполняется:

- $NQOBDD_n^{d-1} \subsetneq NQOBDD_n^d$ .
- $NQOBDD_n^{d_1}$  и  $NOBDD_n^{d_2}$  несравнимы для любых пар  $(d_1, d_2)$ , удовлетворяющих условию  $1 < d_1, d_2 \leq n/2$ .

В данной работе мы представляем иерархию для квантовых недетерминированных OBDD сверхлинейной ширины.

**Теорема 8.** Для любых  $n > 3$ ,  $2 \leq d \leq 2^{n/4}$  выполняется

$$NQOBDD_n^{d-1} \subsetneq NQOBDD_n^{4d(\log d + 1)}.$$

*Доказательство.* Включение  $NQOBDD_n^{d-1} \subseteq NQOBDD_n^{4d(\log d + 1)}$  очевидно. Покажем, что эти классы не совпадают. На основе функции  $EQXS_n$  определим функцию  $EQXS_n^k$ , где  $k \leq n$ ,  $k$  кратно 4, при этом  $EQXS_n^k$  существенным образом зависит от первых  $k$  переменных и  $EQXS_n^k \equiv EQXS_k$ . Согласно Теореме 6,  $EQXS_n^{4 \log d} \in NQOBDD_n^{4d(\log d + 1)}$ . Согласно Теореме 7,  $EQXS_n^{4 \log d} \notin NQOBDD_n^{d-1}$ .

## Заключение

В статье исследуется модель недетерминированных квантовых упорядоченных диаграмм решений (NQOBDD) большой ширины. Рассматривается функция "Равенство", для которой сложность вычисления в классических OBDD существенно зависит от порядка считывания переменных: ширина программы равна 3 для наилучшего порядка и экспоненциальна для наихудшего порядка. В работе доказываются нижние оценки сложности вычисления этой функции в модели NQOBDD: линейная нижняя оценка для наилучшего порядка считывания и экспоненциальная нижняя оценка для наихудшего порядка. Показывается, что полученные нижние оценки точны. Конструируется функция, для которой доказывается экспоненциальная нижняя оценка для квантовой модели для любого порядка считывания переменных. Строится квантовый алгоритм для вычисления данной функции в модели NQOBDD. Доказывается результат о соотношении классов сложности, основанных на квантовых и классических недетерминированных OBDD большой ширины.

## Список источников

1. Манин Ю.И. Вычислимое и невычислимое. М.: Сов. Радио. 1980. 128 с.
2. Feynman R. Simulating physics with computers // International Journal of Theoretical Physics. 1982. Vol. 21, № 6, 7. С. 467–488.
3. Wegener I. Branching programs and binary decision diagrams: theory and applications. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2000. 408 p.
4. Cobham A. The recognition problem for the set of perfect squares // Proc. of the 7th Symposium on Switching and Automata Theory (SWAT). 1996. P. 78–87.
5. Pudlak P., Zak S. Space complexity of computations. Technical report, Univ. Prague. 1983.
6. Ablayev F., Gainutdinova A., Karpinski M. On Computational Power of Quantum Branching Programs // Proc. of the 13th Intern. Symposium, Fundamentals of Computation Theory, FCT2001. 2001. Vol. 2138. P. 59–70.
7. Nakanishi M., Hamaguchi K., Kashiwabara T. Ordered quantum branching programs are more powerful than ordered probabilistic branching programs under a bounded-width restriction // Computing and Combinatorics: 6th Annual Intern. Conference, COCOON 2000, Proc. 2000. Vol. 2138. P. 467–476.

8. Sauerhoff M., Sieling D. Quantum branching programs and space-bounded nonuniform quantum complexity // *Theoretical Computer Science*. 2005. Vol. 334. № 1–3. P. 177–225.
9. Ablayev F., Karpinski M. On the power of randomized branching programs // *Proc. ICALP96*. 1996. Vol. 1099. P. 348–356.
10. Ablayev F., Gainutdinova A., Karpinski M., Moore C., Pollette C. On the computational power of probabilistic and quantum branching program // *Information and Computation*. 2005. Vol. 203, № 2. P. 145–162.
11. Ablayev F., Gainutdinova A., Khadiev K., Yakaryilmaz A. Very narrow quantum OBDDs and width hierarchies for classical OBDDs // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2016. Vol. 37. P. 670–682.
12. Gainutdinova A., Yakaryilmaz A. Nondeterministic unitary OBDDs // *Computer Science – Theory and Applications: 12th Intern. Computer Science Symposium in Russia, CSR2017, Proceedings*. 2017. P. 126–140.
13. Meinel C., Theobald T. Algorithms and Data Structures in VLSI Design: OBDD-foundations and applications. Springer Science & Business Media, 1998. 279 p.
14. Ablayev F., Gainutdinova A. Complexity of quantum uniform and nonuniform automata // *Developments in Language Theory: 9th Intern. Conference, DLT2005, Proceedings*. 2005. P. 78–87.
15. Nielsen M. A., Chuang I. L. Quantum computation and quantum information. Cambridge university press, 2010. 710 p.
16. Кострикин А.И. Введение в алгебру: учебник: в 3 частях. Часть II: Линейная алгебра. М.: МЦНМО, 2020. 367 с.
17. Ablayev F., Gainutdinova A., Khadiev K., Yakaryilmaz A. Very narrow quantum OBDDs and width hierarchies for classical OBDDs // *Descriptive Complexity of Formal Systems: 16th Intern. Workshop DCFS2014, Proceedings*. 2014. P. 53–64.
18. Khadiev K., Khadieva A. Reordering method and hierarchies for quantum and classical ordered binary decision diagrams // *International computer science symposium in Russia, Springer International Publishing*, 2017. P. 162–175.

## References

1. Manin, Yu. I. (1980), *Computable and non-computable*, Sov. Radio, Moscow, Russia.
2. Feynman, R. (1982), "Simulating physics with computers", *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 21, no. 6–7, pp. 467-488.
3. Wegener, I. (2000), *Branching programs and binary decision diagrams: theory and applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics. USA.
4. Cobham, A. (1996), "The recognition problem for the set of perfect squares", *Proc. of the 7th Symposium on Switching an Automata Theory (SWAT)*, pp. 78-87.
5. Pudlak, P., Zak, S. (1983), *Space complexity of computations*, Technical report, Univ. Prague, Prague, Czech Republic.
6. Ablayev, F., Gainutdinova, A. and Karpinski, M. (2001), "On Computational Power of Quantum Branching Programs", *Proc. of the 13th Intern. Symposium, Fundamentals of Computation Theory FCT 2001*, vol. 2138, pp. 59-70.
7. Nakanishi, M., Hamaguchi, K. and Kashiwabara, T. (2000), "Ordered quantum branching programs are more powerful than ordered probabilistic branching programs under a bounded-width restriction", *Computing and Combinatorics: 6th Annual Intern. Conference, COCOON 2000, Proc.*, vol. 2138, pp. 467-476.

8. Sauerhoff, M., Sieling, D. (2005), "Quantum branching programs and space-bounded nonuniform quantum complexity", *Theoretical Computer Science*, vol. 334, no.1-3, pp. 177-225.
9. Ablayev, F., Karpinski, M. (1996), "On the power of randomized branching programs", *Proceeding of the conference. ICALP*, vol. 1099, pp. 348-356.
10. Ablayev, F., Gainutdinova, A., Karpinski, M., Moore, C. and Pollette, C. (2005), "On the computational power of probabilistic and quantum branching program", *Information and Computation*, vol. 203, no. 2, pp. 145-162.
11. Ablayev, F., Gainutdinova, A., Khadiev, K. and Yakaryılmaz, A. (2016), "Very narrow quantum OBDDs and width hierarchies for classical OBDDs", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, no. 37, pp. 670-682.
12. Gainutdinova, A., Yakaryılmaz, A. (2017), "Nondeterministic unitary OBDDs", *Computer Science – Theory and Applications: 12th Intern. Computer Science Symposium in Russia, Proc.*, vol. 10304, pp. 126-140.
13. Meinel, T., Theobald, T. (1998), *Algorithms and Data Structures in VLSI Design: OBDD – foundations and applications*, Springer Science & Business Media, Berlin/Heidelberg, Germany.
14. Ablayev, F., Gainutdinova, A. (2005), "Complexity of quantum uniform and nonuniform automata", *Developments in Language Theory*, vol. 3572, pp. 78-87.
15. Nielsen, M., Chuang, I. (2000), *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
16. Kostrikin, A. I. (2020), *Introduction to Algebra: textbook: in 3 parts. Part II: Linear Algebra*, MCNO, Moscow, Russia.
17. Ablayev, F., Gainutdinova, A., Khadiev, K. and Yakaryılmaz, A. (2014), "Very narrow quantum OBDDs and width hierarchies for classical OBDDs", *Proc. of the Intern. conference DCFS 2014*, vol. 8614, pp. 53-64.
18. Khadiev, K., Khadieva, A. (2017), "Reordering method and hierarchies for quantum and classical ordered binary decision diagrams", *Computer Science – Theory and Applications: 12th Intern. Computer Science Symposium in Russia*, vol. 10304, pp. 162-175.

#### **Информация об авторе:**

*А. Ф. Гайнутдинова* – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры теоретической кибернетики института вычислительной математики и информационных технологий Казанского (Приволжского) федерального университета (420008, Россия, г. Казань, ул. Кремлевская, 18), AuthorID: 122490.

#### **Information about the author:**

*A. F. Gainutdinova* – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Theoretical Cybernetics of the Institute of Computational Mathematics and Information Technology of the Kazan (Volga Region) Federal University (18, Kremlevskaya St., Kazan, Russia, 420008), AuthorID: 122490.

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Обзорная статья

УДК 004.42

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-132-143

<https://elibrary.ru/wpqjnv>**Использование интернет-ресурсов для приобретения  
навыков программирования****Оксана Геннадиевна Старцева<sup>1</sup>, Алиса Расиховна Айдагулова<sup>2</sup>,  
Илья Валерьевич Морозов<sup>3</sup>**<sup>1,3</sup>Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, г. Уфа, Россия<sup>2</sup>Уфимский юридический институт МВД России, г. Уфа, Россия<sup>1</sup>starcevaog@mail.ru<sup>2</sup>alisaras@ya.ru<sup>3</sup>morozzoff09@gmail.com

**Аннотация.** В настоящее время роль цифровых образовательных ресурсов очевидна. Наряду с обсуждением преимуществ использования онлайн-платформ для обучения программированию, поднимаются важные вопросы, касающиеся качества образовательного контента, необходимости критического мышления при выборе источников информации и важности практического применения полученных знаний. Отмечается необходимость комплексного подхода, сочетающего самостоятельное онлайн-обучение с традиционными образовательными методами. Целью исследования является анализ интернет-ресурсов для обучения программированию с учетом различных типов онлайн-платформ и их влияния на эффективность образовательного процесса. В статье рассмотрено пять типов интернет-ресурсов для приобретения навыков программирования: онлайн-курсы и образовательные платформы, интерактивные среды разработки, форумы и сообщества программистов, открытые репозитории кода, платформы для решения алгоритмических задач. Осуществлен сравнительный анализ этих ресурсов по критериям: интерактивность, содержательность, практическая направленность, доступность, сопровождение. Проведено исследование влияния различных типов интернет-ресурсов на студентов ИТ-направлений с учетом их образовательных потребностей и выявлены сценарии их использования для различных целевых групп. Результаты исследования показывают, что использование комбинации различных интернет-ресурсов позволяет учащимся значительно ускорить процесс обучения, получить доступ к актуальной информации и практиковаться в реальных проектах.

**Ключевые слова:** программирование; интернет-ресурсы; онлайн-курсы; интерактивные среды разработки; самообразование; эффективность обучения; качество контента; практическое применение, сценарии использования

**Для цитирования:** Старцева О.Г., Айдагулова А.Р., Морозов И.В. Использование интернет-ресурсов для приобретения навыков программирования // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2024. Вып. 4(67). С. 132-143. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-132-143. <https://elibrary.ru/wpqjnv>.



Эта работа © 2024 Старцева О.Г., Айдагулова А.Р., Морозов И.В. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

**Благодарности:** Авторы выражают благодарность руководству Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы за поддержку в проведении исследования. Работа выполнена в рамках научно-исследовательской, опытно-конструкторской и технологической работы гражданского характера по теме "Разработка образовательных ресурсов на основе интерактивных технологий для повышения цифровой компетентности студентов педвузов и населения» № 124062400038-4.

*Статья поступила в редакцию 20.07.2024; одобрена после рецензирования 11.11.2024; принята к публикации 01.12.2024.*

## COMPUTER SCIENCE

Review article

### Using Internet Resources to Acquire Programming Skills

Oksana. G. Startseva<sup>1</sup>, Alisa. R. Aidagulova<sup>2</sup>, Ilya. V. Morozov<sup>3</sup>

<sup>1,3</sup>Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla, Ufa, Russia

<sup>2</sup>Ufa Law Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Ufa, Russia

<sup>1</sup>starcevaog@mail.ru

<sup>2</sup>alissaras@ya.ru

<sup>3</sup>morozzoff09@gmail.com

**Abstract.** Nowadays the role of digital educational resources is obvious. Along with the discussion of the advantages of using online platforms for learning programming, important issues are raised concerning the quality of educational content, the need for critical thinking when selecting information sources and the importance of practical application of the acquired knowledge. The need for an integrated approach that combines independent online learning with traditional educational methods is emphasized. The aim of the study is to analyze online resources for teaching programming, taking into account different types of online platforms and their impact on the effectiveness of the educational process. The article considers five types of online resources for acquiring programming skills: online courses and educational platforms, interactive development environments, forums and communities of programmers, open code repositories, platforms for solving algorithmic problems. A comparative analysis of these resources by the criteria of interactivity, content, practical orientation, accessibility, and support was carried out. The study of the influence of different types of Internet resources on IT students with regard to their educational needs was carried out and the scenarios of their use for different target groups were identified. The results of the study show that using a combination of different online resources allows students to significantly accelerate their learning, access up-to-date information, and practice real-world projects.

**Keywords:** *programming; Internet resources; online courses; interactive development environments; self-education; learning effectiveness; content quality; practical application; use-case scenarios*

**For citation:** Startseva, O.G., Aidagulova, A.R. and Morozov, I.V. (2024), "Using Internet Resources to Acquire Programming Skills", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), pp. 132-143. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-132-143. <https://elibrary.ru/wpqjnv>.

**Acknowledgments:** The authors express their gratitude to the leadership of the Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla for their support in conducting the research.

*The article was submitted 20.07.2024; approved after reviewing 11.11.2024; accepted for publication 01.12.2024*

## Введение

С развитием информационных технологий и расширением доступа к сети Интернет, процесс обучения программированию претерпел значительные изменения. Традиционные методы обучения дополняются, а иногда и заменяются онлайн-ресурсами, предоставляющими широкие возможности для самообразования и практики. На данный момент индустрия онлайн-образования в сфере программирования активно развивается. Крупные платформы предлагают широкий спектр курсов от базового уровня до специализированных программ обучения по различным языкам и технологиям. Использование этих ресурсов существенно меняет подход к обучению программированию, делая его более доступным, гибким и эффективным. Начальные навыки программирования помогут приобрести такие популярные интернет-ресурсы, как Яндекс.Практикум, Codecademy, Skillbox, GeekBrains, HTML Academy и др.

Различные аспекты использования цифровых образовательных ресурсов, интернет-ресурсов рассматриваются в работах И.В. Абрамовой [1], А.Д. Зубкова [2], Т.В. Рихтер [1], О.В. Калимуллиной [3], И.В. Троценко [3], Т.Н. Филимоненковой [4] и др.

Проблема использования интернет-сервисов в формировании у обучающихся компетенций в области программирования исследуется в работе Ф.Э. Садыковой [5]. Автор отмечает, что интернет-сервисы "имеют значительный дидактический потенциал" [5, с. 21], который выражается в наглядности и доступности учебного материала, возможности выбора способа и темпа его освоения, "в возможности участия в сетевых сообществах, блогах, социальных сетях" [5, с. 21]. Т.В. Рихтер, И.В. Абрамова отмечают, что для формирования компетенций при изучении программирования необходимо "активное обновление и расширение цифровой образовательной среды, внедрение цифровых образовательных платформ, Web-приложений и мессенджеров" [1, с. 24].

Онлайн-платформы для обучения программированию активно используются как начинающими, так и опытными разработчиками для повышения квалификации и освоения новых технологий. Основными преимуществами использования интернет-ресурсов для обучения программированию являются доступность информации, возможность самостоятельного планирования обучения, а также возможность практики в реальных проектах через платформы с открытым исходным кодом. Интерактивные среды разработки позволяют начинающим программистам практиковаться в написании кода непосредственно в браузере, получая мгновенную обратную связь.

Несмотря на преимущества, использование интернет-ресурсов в обучении программированию сопряжено с рядом проблем:

1. Качество и достоверность информации. Отсутствие контроля над качеством учебного материала может привести к распространению устаревших или некорректных сведений. Решением может быть создание системы рейтингов и отзывов, а также сотрудничество образовательных платформ с ведущими специалистами отрасли.

2. Мотивация и самодисциплина. Онлайн-формат обучения требует от студентов высокой самоорганизации. Как показывает практика, значительное число учащихся не

завершают начатые онлайн-курсы из-за недостатка структурированного подхода и отсутствия непосредственного взаимодействия с преподавателем. Внедрение систем геймификации и социального взаимодействия может повысить вовлеченность студентов.

3. Практическое применение. Для формирования навыков программирования недостаточно только теоретического материала. Платформы, предлагающие реальные проекты и сотрудничество с компаниями, показывают наилучшие результаты в подготовке специалистов.

В условиях цифровизации образования целесообразно комбинировать традиционные очные занятия и компьютерные технологии" [6, с. 10]. Исследования показывают, что студенты, активно использующие онлайн-ресурсы в дополнение к традиционному обучению, демонстрируют более высокие результаты в освоении практических навыков программирования. Интеграция онлайн-курсов и интерактивных платформ в образовательный процесс способствует более глубокому пониманию концепций и принципов программирования. Форумы и сообщества программистов играют важную роль в обмене знаниями и решении практических задач. Эти платформы обеспечивают доступ к коллективному опыту профессионального сообщества, что особенно ценно для начинающих разработчиков. Интеграция может происходить следующим образом:

- 1) использование онлайн-курсов для предварительной подготовки перед углубленным изучением тем в университете;
- 2) применение интерактивных платформ для практики и закрепления материала;
- 3) участие в онлайн-проектах и хакатонах для развития практических навыков и работы в команде.

Однако вопросы эффективности, качества контента и методологии онлайн-обучения требуют более глубокого рассмотрения. К тому же существующие исследования часто ограничиваются обзором популярных платформ, не углубляясь в анализ конкретных методик и их влияния на формирование практических навыков программирования.

Данная статья направлена на исследование различных типов интернет-ресурсов и их роли в процессе обучения программированию.

### **Постановка задачи**

Целью исследования является анализ интернет-ресурсов для обучения программированию с учетом различных типов онлайн-платформ и их влияния на эффективность образовательного процесса. Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

- 1) рассмотреть основные типы интернет-ресурсов для обучения программированию и провести анализ их эффективности;
- 2) провести исследование влияния различных типов интернет-ресурсов на студентов ИТ-направлений с учетом их образовательных потребностей, а также сформулировать рекомендации по эффективному использованию данных ресурсов для различных целевых групп.

## **Методы исследования**

В ходе исследования был проведен анализ научно-исследовательской литературы, специализированных публикаций и статей, а также данных популярных образовательных платформ, что позволило определить ключевые тенденции и методики в области онлайн-обучения программированию. Осуществлено сопоставление различных подходов к использованию интернет-ресурсов, выделение общих черт и особенностей, а также оценка эффективности таких решений.

## **Результаты**

### **Основные типы интернет-ресурсов для обучения программированию и их эффективность**

В рамках поставленных задач исследования рассмотрим основные типы интернет-ресурсов для обучения программированию. Анализ информационных ресурсов сети Интернет позволил выделить следующие категории интернет-ресурсов для обучения программированию:

- 1) онлайн-курсы и образовательные платформы;
- 2) интерактивные среды разработки;
- 3) форумы и сообщества программистов;
- 4) открытые репозитории кода;
- 5) платформы для решения алгоритмических задач.

Каждая из этих категорий играет свою роль в процессе приобретения и совершенствования навыков программирования. Рассмотрим каждую категорию подробнее.

Наиболее популярны среди различных категорий пользователей образовательные платформы и онлайн-курсы по программированию. Мы провели их сравнительный анализ (табл. 1), выделив следующие критерии эффективности:

- 1) интерактивность (обучение с использованием интерактивных форм и методов взаимодействия, например, игровых технологий, форм совместной разработки программ, возможность обмена знаниями и результатами работы, поддержка и обратная связь);
- 2) содержательность (широкий выбор курсов по различным языкам программирования);
- 3) практическая направленность (сочетание теоретического материала с практическими заданиями, практико-ориентированный подход к изучению программирования, проектное обучение);
- 4) доступность (возможность бесплатного прохождения, дешевизна курсов, дистанционный формат обучения, русскоязычное содержание);
- 5) сопровождение (менторская поддержка, подготовка к собеседованию, сертификация).

Следует добавить, что доступность предполагает, что онлайн курсы "используют доступные технологии, содержат эквивалентные альтернативы слуховому и зрительному содержанию; дизайн курсов выполнен таким образом, что читать материалы удобно, и отвлекающие факторы сведены к минимуму" [7, с. 70].



**Таблица 1.** Сравнительный анализ онлайн-курсов и образовательных платформ по формированию навыков программирования

№ п/п	Образовательные платформы	Интерактивность	Содержательность	Практическая направленность	Доступность	Сопровождение обучения
1.	Code Academy	+	+	+	+	+/-
2.	Harvard CS50	+	+	+	+	+/-
3.	Coursera	+	+	+	+	+/-
4.	Udemy	+/-	+	+/-	+	+/-
5.	edX	+	+/-	+	+	+/-
6.	HackerRank	+	+/-	+/-	+/-	+/-
7.	aGupieWare	-	+	-	+	-
8.	Code.org	+	+	+	+	-
9.	BitDegree	+	+	+	+	+/-
10.	Udacity	+	+	+	+/-	+/-
11.	FreeCodeCamp	+	+	+	+	+/-
12.	GitHub	+	+/-	+	+/-	-
13.	Code School	+	+/-	+	+/-	+/-
14.	Khan Academy	+	+	+	+	-
15.	w3schools	+	+/-	+	+	+/-
16.	GeeksforGeeks	+	+	+	+/-	+/-
17.	MIT Open Courseware	-	+	+	+	-
18.	Dash	+	+	+	+	-
19.	Codewars	+	+	-	+/-	+/-
20.	Codementor	+	+	-	+/-	+/-

В табл. 1 приняты следующие обозначения: "+" – критерий реализован полностью, "+/-" – критерий выполняется частично или с ограничениями, "-" критерий не выполняется.

Несмотря на небольшие различия между структурной организацией и интерфейсами платформ, в основном, формат популярных онлайн платформ (Coursera, edX, Udacity) "предполагает использование видео-лекций и тестовых вопросов с вариантом выбора, открытые и закрытые вопросы" [3, с. 67]. Можно отметить значимые преимущества для отдельных интернет-ресурсов. Так, Coursera имеет лучшее соотношение цена/качество для сертифицированного обучения. CS50 является признанным в интернет-сообществе [8, 9] вводным курсом по программированию, FreeCodeCamp известна как лучшая бесплатная платформа для веб-разработки, GitHub применяется для практической работы с кодом, а HackerRank выступает лидером в подготовке к техническим собеседованиям.

Обобщая вышесказанное, отметим важное для нашего исследования: онлайн курсы различаются по организации расписания обучения (курсы с фиксированными сроками обучения, без установленных сроков обучения), по доступности обучения, по формату обучения, по целевой аудитории.

По доступности обучения:

- полностью бесплатные платформы (FreeCodeCamp, MIT OCW, Code.org, Khan Academy);
- частично бесплатные (Coursera, edX, CodeAcademy);
- платные платформы (Udacity, Udemy, Pluralsight).

По целевой аудитории:

- для начинающих (Code.org, Khan Academy, w3schools);
- для среднего уровня (Coursera, Udemy, CodeAcademy);
- для продвинутых (HackerRank, GeeksforGeeks, Udacity).

По формату обучения:

- структурированные курсы (Coursera, edX, Udacity);
- проектное обучение (FreeCodeCamp, GitHub);
- практико-ориентированное обучение (HackerRank, Codewars);
- индивидуальное обучение (Codementor).

Таким образом, большинство платформ предлагают интерактивные задания и проектное обучение; русскоязычный контент доступен преимущественно на крупных платформах; менторская поддержка редко включена в базовые планы; мобильные приложения становятся стандартом для большинства платформ. Практика показывает, что использование комбинации из двух или более онлайн-курсов позволяет студентам достичь более высоких результатов в решении практических задач по программированию. Однако эффективность сильно зависит от мотивации учащихся и их способности к самоорганизации.

Следующая категория – интерактивные среды разработки (например, Repl.it, CodePen, JSFiddle) позволяют писать и выполнять код непосредственно в браузере. Следует отметить критерии эффективности интерактивных сред разработки: поддержка различных языков программирования, удобство интерфейса, возможности отладки программ, интеграция с другими инструментами.

Третья категория интернет-ресурсов для обучения программированию – форумы и сообщества программистов предоставляют платформу для обмена знаниями и решения конкретных проблем. Известны такие форумы, как Stack Overflow, GitHub Discussions, Reddit (r/programming, r/learnprogramming). Эффективность форумов и сообществ во многом зависит от активности данного сообщества, качества и скорости ответов, разнообразия обсуждаемых тем.

Четвертая категория – открытые репозитории кода (GitHub, GitLab, Bitbucket и др.) предоставляют доступ к исходному коду реальных проектов. Критериями эффективности для данной формы интернет-ресурса являются: разнообразие проектов, качество документации, возможность личного вклада в проекты, наличие инструментов для совместной работы.

Пятая категория – платформы для решения алгоритмических задач предлагают задачи по программированию различной сложности. Из числа наиболее известных платформ следует отметить LeetCode, HackerRank и CodeWars. При выборе платформы следует обратить внимание на следующие критерии их эффективности: разнообразие и качество задач, система оценки решений, возможность сравнения и обсуждения решений.

Таким образом, приведенная классификация и анализ эффективности различных типов интернет-ресурсов для обучения программированию позволяют более структурированно подойти к выбору и использованию онлайн-инструментов в образовательном процессе.

### **Исследование влияния различных типов интернет-ресурсов на студентов ИТ-направлений**

В исследовании приняли участие студенты Башкирского государственного педагогического университета им. М. Акмуллы, обучающиеся по направлениям 09.03.02 "Информационные системы и технологии (профиль Проектирование и разработка программных решений)", 09.03.03 "Прикладная информатика (профили Прикладная информатика в цифровой экономике, Прикладная информатика в здравоохранении)". Исследование проводилось в течение одного учебного семестра (5 месяцев).

Студенты были случайным образом распределены на 5 групп, каждая из которых преимущественно использовала один из типов интернет-ресурсов в дополнение к традиционному обучению. На начальном этапе в начале семестра все обучающиеся прошли стандартизированный тест на оценку навыков программирования. В течение семестра отслеживалось время, проведенное студентами на различных образовательных платформах. Каждые две недели студенты выполняли стандартизированные практические задания по программированию. В конце семестра был проведен итоговый тест на оценку навыков программирования и опрос удовлетворенности обучением.

Дидактический потенциал дисциплин был усилен внедренными в учебный процесс экспериментальных групп интернет-ресурсами. В контрольной группе учебный процесс характеризовался традиционным подходом к организации учебной деятельности студентов. Для проверки у студентов сформированности навыков программирования были разработаны практические задания, выявляющие умения и навыки программирования. Для проверки уровня удовлетворенности обучающихся форматом образовательного процесса в анкету были включены вопросы, позволяющие определить отношение к типам образовательных интернет-ресурсов в области программирования.

Таким образом, по результатам эксперимента выяснилось, что онлайн-курсы и образовательные платформы улучшили результаты сформированности навыков программирования в среднем на 22 %, скорость выполнения практических заданий повысилась на 18 %, уровень удовлетворенности студентов составил 4.2 балл из 5. По результатам анкетирования студенты отметили, что структурированный подход и интерактивные элементы онлайн-курсов способствовали лучшему пониманию материала. Однако некоторые жаловались на недостаток персонализированной обратной связи.

Использование интерактивных сред разработки улучшили результаты тестирования в среднем на 25%, скорость выполнения практических заданий повысилась на 30%, уровень удовлетворенности студентов составил 4.5 балл из 5. Следует подчеркнуть, что возможность немедленно применить полученные знания на практике значительно повысила эффективность обучения. Студенты особенно оценили возможность экспериментировать с кодом в реальном времени.

Использование форумов и сообществ программистов улучшили результаты тестирования в среднем на 15 %, скорость выполнения практических заданий повысилась на 20 %, уровень удовлетворенности студентов составил 3.8 балл из 5. По завершению работы обучающиеся отметили, что участие в обсуждениях помогло студентам лучше понять практические аспекты программирования. Однако некоторые отметили, что поиск релевантной информации на форумах может быть трудоемким.

Открытые репозитории кода улучшили результаты тестирования в среднем на 28%, скорость выполнения практических заданий повысилась на 35 %, уровень удовлетворенности студентов составил 4 балла из 5. Изучение реальных проектов значительно улучшило понимание студентами практик разработки. Однако некоторые новички отметили сложность в понимании крупных проектов без дополнительного руководства. Регулярная практика в решении алгоритмических задач значительно улучшила навыки программирования студентов. Геймификация процесса обучения повысила мотивацию, хотя некоторые отметили, что не все задачи имеют прямое применение в реальных проектах.

Таким образом, исследование показало, что все типы рассмотренных интернет-ресурсов положительно влияют на процесс обучения программированию. Наибольшую эффективность продемонстрировали платформы для решения алгоритмических задач и интерактивные среды разработки. Однако важно отметить, что наилучшие результаты были достигнуты студентами, которые использовали комбинацию различных типов ресурсов. Это подчеркивает важность комплексного подхода к обучению программированию, сочетающего теоретическую подготовку, практику написания кода, решение алгоритмических задач и изучение реальных проектов.

#### **Разработка сценариев обучения программированию с использованием интернет-ресурсов**

На основе проведенного исследования и анализа эффективности различных типов интернет-ресурсов, мы предлагаем сценарии обучения программированию, учитывающие потребности обучающихся разного уровня подготовки: для новичков (1–2-й курс), студентов старших курсов и тех, кто углубленно изучает программирование.

Рекомендуемая комбинация интернет-ресурсов для различных целевых групп отражена в табл. 2.

**Таблица 2.** Комбинация использования интернет-ресурсов для приобретения навыков программирования различными целевыми группами

Целевая группа Вид интернет-ресурса	Углублен- ное изуче- ние про- граммиро- вания	Студенты старших курсов вузов	Начинающие изучение программи- рование
Онлайн-курсы и образовательные платформы	20%	25%	40%
Интерактивные среды разработки	0%	15%	30%
Форумы и сообщества программистов	25%	5%	10%
Открытые репозитории кода	35%	25%	0%
Платформы для решения алгоритмических задач	20%	30%	20%

Сценарий для начинающих программистов имеет цель заложить прочный фундамент базовых знаний и навыков программирования. Исследование показало, что начинающие программисты лучше усваивают материал при структурированном подходе с большим количеством практики.

Онлайн-курсы предоставляют необходимую теоретическую базу, в то время как интерактивные среды позволяют немедленно применять полученные знания. Простые алгоритмические задачи помогают развить логическое мышление, а форумы предоставляют поддержку и ответы на возникающие вопросы.

Сценарий для студентов старших курсов вузов позволит углубить теоретические знания и развить практические навыки решения сложных задач. Студенты вузов нуждаются в балансе между теорией и практикой. Продвинутое онлайн-курсы дополняют университетскую программу, в то время как алгоритмические задачи развивают навыки решения сложных проблем. Изучение открытых репозиториях позволяет познакомиться с реальными проектами, а интерактивные среды обеспечивают возможность экспериментировать с различными технологиями.

Сценарий для тех, кто углубленно изучает программирование, нацелен поддерживать актуальность навыков и осваивать новые технологии. Профессионалам важно быть в курсе последних тенденций, что обеспечивается специализированными курсами. Изучение открытых репозиториях позволяет ознакомиться с лучшими практиками в индустрии. Активное участие в профессиональных сообществах способствует обмену опытом, а решение сложных алгоритмических задач помогает поддерживать навыки на высоком уровне.

### **Заключение**

В заключение следует отметить, использование онлайн-платформ делает процесс обучения более доступным и гибким. Эффективность обучения повышается благодаря разнообразию интернет-ресурсов и возможности отработки практических навыков в реальных проектах, но также возникают вопросы о качестве контента и необходимости структурированного подхода.

Обобщая результаты исследования, сформулируем основные выводы.

1. Рассмотрены основные типы интернет-ресурсов для обучения программированию и проведен анализ их эффективности. Выделены критерии эффективности онлайн-курсов и образовательных платформ: интерактивность, содержательность, практическая направленность, доступность, сопровождение обучения. Большинство ресурсов предлагают бесплатный доступ к учебным материалам, интерактивное содержание и возможность получить сертификат. Доказано, что использование интернет-ресурсов на практике поддерживает процесс освоения материала, повышает мотивацию учащихся и развивает навыки самостоятельного обучения. Кроме того, такие ресурсы способствуют закреплению знаний, благодаря практическим заданиям и обратной связи, что делает обучение более результативным и доступным для широкого круга пользователей.

2. Проведено исследование влияния различных типов интернет-ресурсов на студентов ИТ-направлений и сформулированы сценарии обучения программированию, учитывающие потребности обучающихся разного уровня подготовки: для новичков (1–2-й курс), студентов старших курсов и тех, кто углубленно изучает программирование.

Внимание к этим аспектам и разработка комплексных стратегий обучения являются ключевыми факторами для успешного использования интернет-ресурсов для приобретения навыков программирования. Для будущих исследований важно сосредоточиться на долгосрочной эффективности онлайн-обучения и разработке методологий, оптимально сочетающих онлайн и офлайн образовательные ресурсы.

### Список источников

1. Рихтер Т.В., Абрамова И.В. Использование цифровых образовательных ресурсов при изучении программирования в вузе // Карельский научный журнал. 2021. Т.10, № 2(35). С. 22–24.
2. Зубков А.Д. Интеграция массовых открытых онлайн-курсов в образовательный процесс вуза: зарубежный опыт // Наука о человеке: гуманитарные исследования. 2018. № 2(32). С. 94–98.
3. Калимуллина О.В., Троценко И.В. Современные цифровые образовательные инструменты и цифровая компетентность: анализ существующих проблем и тенденций // Открытое образование. 2018. Т. 22, № 3. С. 61–73.
4. Филимоненкова Т.Н. Электронные образовательные ресурсы и их роль в smart-образовании // Проблемы современного педагогического образования. 2018. № 61–2. С. 202–205.
5. Садыкова Ф.Э. Формирование компетенций в области программирования у обучающихся профессиональных образовательных организаций средствами интернет-сервисов: специальность 5.8.7 Методология и технология профессионального образования: автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук / Садыкова Фирая Эсхатовна. Чебоксары, 2022. 23 с.
6. Филиппова А.С., Старцева О.Г., Михайлова А.Н. Сценарии использования цифровых технологий в образовании // Образовательные ресурсы и технологии. 2024. № 2(47). С. 7–15.
7. Богданова Д.А. Массовые Открытые Онлайн-курсы – новый виток обсуждений // Образовательные технологии (г. Москва). 2016. № 2. С. 66–72.
8. 30+ онлайн-ресурсов для изучения программирования в 2022 // Хабр: Сообщество ИТ-специалистов. URL: <https://habr.com/ru/articles/331530/> (дата обращения: 15.07.2024).
9. Полезные ресурсы и сообщества для программистов // Skypro. URL: <https://sky.pro/wiki/javascript/poleznye-resursy-i-soobshestva-dlya-programmistov/> (дата обращения: 15.07.2024).

### References

1. Richter, T.V., Abramova, I.V. (2021), "The use of digital educational resources in the study of programming at a university", *Karelian Scientific Journal*, vol. 10, no. 2(35), pp. 22-24.
2. Zubkov, A.D. (2018) "Integration of mass open online courses into the educational process of a university: foreign experience", *Science of man: humanitarian studies*, no. 2(32), pp. 94-98.
3. Kalimullina, O.V., Trotsenko, I.V. (2018), "Modern digital educational tools and digital competence: analysis of existing problems and trends", *Open Education*, vol. 22, no. 3, pp. 61-73.
4. Filimonenkova, T.N. (2018), "Electronic educational resources and their role in smart education", *Problems of modern pedagogical education*, no. 61-2, pp. 202-205.
5. Sadykova, F.E. (2022), "Formation of Programming Competencies in Students of Professional Educational Organizations Through Internet Services: specialty 5.8.7 Methodology and Technology of Professional Education: dissertation abstract for the degree of Candidate of Pedagogical Sciences" / Sadykova Firaya Eskhatovna. Cheboksary, 23 p.

6. Filippova, A.S., Startseva, O.G. and Mikhailova, A.N. (2024), "Scenarios for the Use of Digital Technologies in Education", *Educational Resources and Technologies*, no. 2(47), pp. 7-15.
7. Bogdanova, D.A. (2016), "Massive Open Online Courses - a New Round of Discussions", *Educational Technologies*, no. 2, pp. 66-72.
8. 30+ Online Resources for Learning Programming in 2022, Habr: IT Professionals Community. URL: <https://habr.com/ru/articles/331530/> (accessed on 15.07.2024).
9. Useful Resources and Communities for Programmers, Skypro. URL: <https://sky.pro/wiki/javascript/poleznye-resursy-i-soobshestva-dlya-programmistov/> (accessed on 15.07.2024).

#### **Информация об авторах:**

*О. Г. Старцева* – кандидат педагогических наук, доцент кафедры информационных технологий, Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы (450077, Республика Башкортостан, г.Уфа, ул. Октябрьской революции, 3-а). SPIN-код: 9118-5906, AuthorID: 675876;

*А. Р. Айдагулова* – кандидат педагогических наук, доцент кафедры управления в органах внутренних дел, Уфимский юридический институт МВД России (450091, Россия, г. Уфа, ул. Муксинова, 2);

*И. В. Морозов* – студент направления "Информационные системы и технологии", Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы. (450077, Республика Башкортостан, г.Уфа, ул. Октябрьской революции, 3-а).

#### **Information about the authors:**

*O. G. Startseva* – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Information Technology, Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla (3-a, Oktyabrskaya revolyutsii St., Ufa, Russia, 450077), SPIN-код: 9118-5906, AuthorID: 675876;

*A. R. Aidagulova* – Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of the Department of Management in the Internal Affairs Bodies, Ufa Law Institute of the Ministry of Internal Affairs of Russia (2, Muksinova St., Ufa, Russia, 450091);

*I. V. Morozov* – student of the direction "Information systems and technologies", Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla (3-a, Oktyabrskaya revolyutsii St., Ufa, Russia, 450077).

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ И ИНФОРМАТИКА

Обзорная статья

УДК 04.934.2

DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-144-151

<https://elibrary.ru/LDGXPY>



## Профессор Леонид Нахимович Ясницкий. Двойной юбилей

К 75-летию со дня рождения и 50-летию работы в ПГНИУ доктора технических наук, профессора Пермского государственного национального исследовательского университета Леонида Нахимовича Ясницкого.

**Олег Геннадьевич Пенский**

г. Пермь, Россия  
ogpensky@mail.ru

**Аннотация.** В статье приводится биография профессора Л. Н. Ясницкого, описывается его научная деятельность и деятельность в сфере высшего образования.

**Ключевые слова:** *искусственный интеллект; бизнес, биография; юбилей ученого; история науки; механика сплошных сред*

**Для цитирования:** *Пенский О.Г. Профессор Леонид Нахимович Ясницкий. Двойной юбилей // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. Вып. 4(67). С. 144–151. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-144-151. <https://elibrary.ru/LDGXPY>.*

*Статья поступила в редакцию 25.10.2024; одобрена после рецензирования 02.12.2024; принята к публикации 09.12.2024.*

## COMPUTER SCIENCE

Review article

## Professor Leonid Nakhimovich Yasnitsky. Double Jubilee

**Oleg. G. Pensky**

Perm, Russia  
ogpensky@mail.ru

**Abstract.** The brief biography of Professor L.N. Yasnitsky and the information on his scientific and school-methodical activity are published in this pap.

**Keywords:** *artificial intelligence; business, biography; anniversary of a scientist; history of science; continuum mechanics*

**For citation:** *Pensky O. G. "Professor Leonid Nakhimovich Yasnitsky. Double Jubilee", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 4(67), pp. 144-151. DOI: 10.17072/1993-0550-2024-4-144-151. <https://elibrary.ru/LDGXPY>.*

*The article was submitted 25.10.2024; approved after reviewing 02.12.2024; accepted for publication 09.12.2024.*



Эта работа © 2024 Пенский О.Г. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



### **Краткая биографическая справка**

Л.Н. Ясницкий работает в Пермском государственном национальном исследовательском университете ровно 50 лет: с 1974 г. – инженер-математик-программист вычислительного центра Пермского государственного университета им. А.М. Горького (ныне Пермский государственный национальный исследовательский университет, ПГНИУ); с 1983 г. – старший научный сотрудник; с 1990 г. – заведующий межвузовской научно-исследовательской лабораторией прикладной математики при ПГНИУ; с 1998 г. – профессор кафедры прикладной математики и информатики. С 2004 по 2006 гг. был заместителем декана механико-математического факультета ПГНИУ по научной работе.



В 1981 г. Л.Н. Ясницкий заочно окончил аспирантуру Всесоюзного НИИ металлургической теплотехники в Свердловске (Екатеринбург) и в 1983 г. защитил кандидатскую диссертацию в Уральском политехническом институте (Уральский федеральный университет имени Первого президента России Б.Н. Ельцина) на тему "Математическое моделирование тепловых и гидродинамических явлений при кристаллизации стали". В 1988 г. ему было присвоено ученое звание старшего научного сотрудника по специальности "Механика жидкости, газа и плазмы". В 1997 г. защитил докторскую диссертацию в Московском институте электроники и математики (Москва) "Метод фиктивных канонических областей, его развитие и применение", посвященную решению краевых задач математической физики.

В 2002 г. получил ученое звание профессора по кафедре прикладной математики и информатики ПГНИУ.

В годы перестройки (1983–1999) работал заместителем директора Завода горношахтного машиностроения (г. Пермь, Закамск). Одновременно, являясь по совместительству профессором кафедры динамики и прочности машин Пермского государственного технического университета (Ныне Пермский национальный исследовательский политехнический университет), на базе этой кафедры создал Центр наукоемких технологий и конструкций. Являясь его директором, занимался изобретением, расчетом, разработкой, внедрением и производством высокотехнологичных изделий и оборудования на таких промышленных предприятиях Пермского края, как "ПНОС", "Морион", "Протон", "Инкар", "Пермские моторы", Осинский машиностроительный завод, а также на Приборостроительном заводе г. Трехгорный Челябинской области и др.

В 2003 г. создал кафедру прикладной информатики в Пермском государственном гуманитарно-педагогическом университете (ПГГПУ), специализирующуюся на выпуске студентов по специальности "Прикладная информатика в экономике", был ее заведующим (по совместительству) с 2003 по 2013 гг.

В 2005 г. на базе ПГНИУ и ПГГПУ организовал Пермское отделение Научного Совета по методологии искусственного интеллекта и когнитивных исследований (НСМИИ) и по настоящее время является его председателем [1].

Под эгидой НСММИ на базе ПГНИУ под руководством Л.Н. Ясницкого с 2015 г. проводится ежегодная Всероссийская научно-практическая конференция "Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века" [2].

Л.Н. Ясницкий является членом редакционных коллегий журналов: "Нейрокомпьютеры: разработка, применение" (г. Москва, журнал ВАК); "Прикладная математика и вопросы управления" (г. Пермь, журнал ВАК); "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" (г. Пермь, журнал ВАК); "Mathematics and Statistics" (США, журнал Scopus).

Леонид Нахимович Ясницкий успешно занимается научной работой, практически ежегодно руководит и принимает участие в выполнении проектов по грантам РФФИ и РФФИ, периодически руководит и принимает участие в выполнении проектов по заказам промышленных предприятий. Руководимые им коллективы в числе первых применили и показали возможности методов искусственного интеллекта в промышленности, экономике, медицине, политологии, социологии, психологии, криминалистике, спорте и др. областях. Благодаря этому на 263 публикации Л.Н. Ясницкого в системе РИНЦ зафиксировано более трех с половиной тысяч цитирований, а индекс Хирша по РИНЦ равен 28.

В 2016–2017 гг. Л.Н. Ясницкий входит в списки ТОП-100 самых цитируемых и самых продуктивных ученых России в области кибернетики.

Л.Н. Ясницкий имеет 26 патентов на изобретения и свидетельств о государственной регистрации программ для ЭВМ, среди которых "Нейро-экспертная система прогнозирования и диагностики рисков сердечно-сосудистых заболеваний KARDIONET", более 10 лет успешно эксплуатирующаяся в учреждениях здравоохранения Пермского края; "Системы искусственного интеллекта управления качеством отливок "Defect Predictor" и "Deviation Predictor"" до сих пор успешно применяющиеся на АО "ОДК-Пермские моторы" для настройки технологических параметров производства изделий ответственного назначения с целью снижения процента брака и повышения качества изделий.



В 2002 г. Л.Н. Ясницкий награжден Серебряной медалью Всемирного салона инноваций, научных исследований и новых технологий "Брюссель–2002" (Бельгия), медалью Л. Эйлера "За заслуги" механико-математического факультета ПГНИУ (2005), нагрудным знаком "Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации" (2008). С 2002 г. – ветеран труда.

Л.Н. Ясницкий ведет активную учебно-воспитательную работу, читает лекции по проблематике создания систем искусственного интеллекта и их приложениям в экономике, финансах, промышленности, педагогике, социологии, психологии, криминалистике, медицине и др. студентам ПГНИУ, НИУ "Высшая школа экономики" (Москва, Санкт-Петербург, Нижний Новгород, Пермь).

О его заслугах в этой области свидетельствуют дипломы, почетные грамоты, благодарственные письма, среди которых: Диплом лауреата конкурса на лучшую научную книгу 2008 г., выданный Фондом развития отечественного образования; Диплом лучшего ученого механико-математического факультета ПГНИУ за 2011 г; Диплом лауреата конкурса ПГНИУ за лучшую научно-исследовательскую работу среди ведущих ученых в 2021 г. Диплом призера конкурса ПГНИУ "Цифровой мастер в образовании" (2023 г.) и т.д. В 2021 г. Л.Н. Ясницкий стал победителем Всероссийского конкурса "Золотые имена высшей школы", о чем сделана запись в Книге Почета преподавателей вузов Российской Федерации.

Л.Н. Ясницкий осуществляет научное руководство диссертационными работами аспирантов ПГНИУ и Московского финансово-юридического университета. Является членом диссертационного совета Д ПНИПУ.05.01 (2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика; 2.3.4. Управление в организационных системах). Под его научным руководством защищены пять кандидатских и одна докторская диссертации.

По данным РИНЦ [3] учебники и учебные пособия Л.Н. Ясницкого цитируют и используют преподаватели и сотрудники практически всех без исключения вузов России, а также некоторых вузов Беларуси, Украины, ДНР, Казахстана, Кыргызстана и др. На этом основании в 2024 г. его учебник "Интеллектуальные системы" (Москва: Лаборатория знаний, 2016. Гриф УМО по классическому университетскому образованию РФ) Ученым советом ПГНИУ был выдвинут на соискание премии Правительства Российской Федерации.

### **Несколько слов коллеги профессора Л. Н. Ясницкого**

О себе и о людях, с которыми встречался Леонид Нахимович, он написал в документально-художественной повести "Исповедь" [4]. Поэтому многое узнать о нем вы можете из собственных слов юбиляра и его книги. Я лишь остановлюсь на моих личных впечатлениях о профессоре Ясницком и о некоторых фактах, которые не упомянуты в книге. Я знаком с Леонидом Нахимовичем более тридцати лет. И за время нашего знакомства впечатления о нем ни разу не претерпели изменений. При первом разговоре с профессором, а тогда еще кандидатом наук и инженером вычислительного центра ПГУ, Ясницким, меня удивили его дружеское участие и внимательное отношение к собеседнику, доброжелательность и искренность. Он невольно располагает к себе с первых минут общения. Леонид Нахимович в общении всегда весьма корректен и интеллигентен, обладает хорошим чувством юмора, однако при необходимости, когда этого требует дело, может быть жестким и требовательным. В делах – инициативен. И, наверное, его выдержка и юмор помогали и помогают ему в решении многих вопросов. В тяжелые времена переходного периода Леонид Нахимович Ясницкий не ушел из Пермского государственного университета (хотя предложений было много), а, наоборот, защитил докторскую диссертацию и продолжал работать в вузе, сначала в вычислительном центре, а затем – на кафедре прикладной математики и информатики. Даже в самые трудные годы Л.Н. Ясницкий умудрялся заключать и выполнять хозяйственные договоры с еле дышащими промышленными предприятиями Перми, и Пермской области, исследовательскими институтами Свердловска, Москвы, Таллина, тем обеспечивая работу и зарплату многим сотрудникам университета.

Именно в это время Леонид Нахимович начал тесное сотрудничество с ведущими учеными пермских вузов. Он был хорошо знаком с ректором ПНИПУ членом-корреспондентом РАН Анатолием Александровичем Бартоломеем, который высоко ценил Ясницкого за невероятную предприимчивость, научную деловитость и человеческие качества. Именно Леонид Нахимович поддерживал Бартоломея в трудные минуты его жизни, как поддерживал и многих других в критических ситуациях. Леонид Нахимович обожает талантливых, одаренных и трудоспособных молодых людей и буквально носится с ними, "как с писаной торбой", оберегая их от жизненных невзгод, решая за них бытовые проблемы. Бывали случаи, когда иногородние аспиранты, не имея жилья, подолгу жили у него дома, находя в профессоре настоящего друга, который всегда придет на помощь в трудную минуту. Сейчас кандидаты наук, защитившие под его руководством диссертации, успешно работают в вузах Перми, руководят инновационными предприятиями. Леонид Нахимович много лет занимался задачами теории упругости и теплопроводности, теории электрических и магнитных полей, гидродинамики. Решению этих же задач были посвящены его кандидатская и докторская диссертации, он получил большое количество патентов на изобретения, добился их промышленных внедрений. Еще с 1970-х гг. увлекся методами искусственного интеллекта, привлек к исследованию проблем этого передового направления науки молодежь: студентов и аспирантов. Выпустил несколько монографий, в том числе в соавторстве со студентами.

Последним фактом он вызвал усмешки недоброжелателей:

– Какую монографию могут написать студенты?!

На этот вопрос Леонид Нахимович уверенно отвечает:

– Студенты старших курсов мехмата и магистранты при трудолюбии могут выдавать научно значимый продукт. Да и я являюсь фильтром, который не пропустит в печать слабую работу и сам устранит студенческие недоработки. Главное – то, что студенты-соавторы монографии, видя результат своего труда в напечатанной книге, приобретают стремление работать в науке, получая общественное признание построенной ими теории и глубже проникая в прикладные аспекты проблем искусственного интеллекта.

Следует отметить то, что профессор Ясницкий является инициатором и главным организатором ставшей уже традиционной ежегодной Всероссийской научно-практической конференции с международным участием "Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века". В октябре 2024 года работала уже девятая по счету конференция. Ниже приведем выдержки одного из отзывов об этой конференции.

В настоящее время перед человечеством все острее и острее становится задача его совместного существования с искусственным интеллектом. Поэтому актуальность темы конференции несомненна.

Всего в качестве докладчиков конференции подали заявки 106 человек: от студентов и до профессоров.

Все доклады разбиты на 11 разделов, что позволяет провести активную работу по соответствующим секциям. Пленарными докладчиками являлись лица с учеными степенями от технических до философских наук.

Содержание некоторых тем докладов, отражающих взгляды авторов на будущее искусственного интеллекта и человечества, порой, кардинально отличались один от другого. В одних докладах это будущее описывается как светлое, в других докладах – как неизбежная смерть человечества.

Поэтому, на мой взгляд, одной из задач конференции была задача выяснения наиболее благоприятного совместного существования искусственного интеллекта и человечества.

Так как в работе конференции одновременно принимали участие как маститые ученые, так и студенты, то конференция послужила стимулом к росту профессионализма студентов, то есть, конференция несла не только научный, но и образовательный характер.

Работа одиннадцати секций конференции рассматривала вопросы от применения искусственного интеллекта в экономике и техники до искусственного интеллекта в лингвистике, педагогике и социологии. Поэтому одной из актуальных задач конференции являлось, например, обсуждение вопросов адекватного применения искусственного интеллекта в педагогике, так как именно педагогика наиболее тесно связана с формированием личности.

В целом, доклады конференции, несмотря на разный профессиональный уровень докладчиков, вызвали несомненный интерес и требуют обсуждения, прежде всего, для оценки идей адекватного применения методов искусственного интеллекта в социуме.

"Конференция была интересна, прежде всего тем, что носила проблемный характер и может послужить постановке новых задач искусственному интеллекту на пользу людям".

Леонид Нахимович публикует свои статьи не только в значимых научных журналах, но и в изданиях для молодежи, даже для школьников. Немало шума вызвала его статья в научно-популярном пермском печатном журнале для школьников "Живая математика", вышедшая в печать в 2012 г. В печати завязалась дискуссия по поводу опубликованных в молодежном издании материалов, в которой, по мнению многих читателей, победил профессор Ясницкий. Примерно такая же ситуация возникла с его статьей "Интуиция цифры" в Пермской газете "Новый компаньон", которую научная общественность сначала приняла в штыки, а спустя пять лет ее почти без изменений перепечатали в качестве вступительной статьи к сборнику научных трудов своей конференции авторитетные Санкт-Петербургские ученые. Нестандартный, нетрадиционный подход к решению многих задач, полное отсутствие равнодушия к судьбам людей – это, пожалуй, главное, что присуще профессору Пермского государственного национального исследовательского университета, доктору технических наук Леониду Нахимовичу Ясницкому.

Следует отметить очень хороший литературный язык профессора Ясницкого, о чем свидетельствуют его учебники, научно-популярные статьи и авторская художественная книга "Исповедь". Его книги читаются легко, и свои мысли он выражает в очень доступной для читателя форме. Наверное, если бы Леонид Нахимович не стал ученым и преподавателем вуза, он бы мог стать замечательным писателем.

В заключение отметим то, что Леонид Нахимович является представителем потомственной интеллигенции. Его прадед Алексей Алексеевич Ясницкий был православным священником, протоиереем [5]. Его двоюродный дед, Петр Алексеевич Ясницкий, окончил Императорский Юрьевский университет, был профессором медицины, заведовал кафедрой в Пермском медицинском университете, был основателем известного не только на Урале, но и в России, курорта Усть-Качка [6] (на главном корпусе курорта размещена

мемориальная доска, посвященная памяти этого человека), бабушка, Людмила Ивановна Ясницкая, была учителем средней школы № 22 в г. Перми. За заслуги в области народного образования была награждена орденом Трудового Красного Знамени СССР. Его дед, Михаил Андреевич Ясницкий, в молодости офицер царской армии, впоследствии работал учителем математики и завучем Пермской школы № 77. Его мать – Ольга Михайловна Ясницкая, преподавала химию в Пермском фармацевтическом училище.

Продолжателями династии интеллигенции Ясницких являются дети Леонида Нахимовича и его супруги Ирины Афанасьевны, окончившие Пермский госуниверситет. Один из их сыновей – кандидат экономических наук.



*Профессор Л.Н. Ясницкий среди учеников*

В год 75-летнего юбилея профессора Л.Н. Ясницкого и 50-летнего юбилея работы в ПГНИУ, мы хотим пожелать Леониду Нахимовичу неутомимости, новых неожиданных решений в науке и вызывать у оппонентов лишь чувство признания собственных ошибок.

#### **Список источников**

1. *Пермское* отделение Научного совета Российской академии наук по методологии искусственного интеллекта и когнитивных исследований. Электронный ресурс. URL: <https://iphras.ru/page23652613.htm> (дата обращения 19.10.2024).
2. *Ежегодная* Всероссийская научно-практическая конференция "Искусственный интеллект в решении актуальных социальных и экономических проблем XXI века". Электронный ресурс. URL: <https://aintellect-psu.ru/> (дата обращения 18.10.2024).
3. *Ясницкий Л.Н.* Публикации. РИНЦ. Электронный ресурс. URL: [https://elibrary.ru/author\\_items.asp](https://elibrary.ru/author_items.asp) (дата обращения 23.10.2024).
4. *Ясницкий Л.Н.* Исповедь (сокращенный вариант). Пермь: Издательство Пермского государственного технического университета. 1999г. 40 с. Электронный ресурс. URL: <https://cloud.mail.ru/public/bjLg/tpEBGFrcs> (дата обращения 23.10.2024).
5. *Костина В.* За все благодарен Творцу. Пермь: ОАО "ИПК "Звезда"", 2014. 152 с.

6. Ясницкий Петр Алексеевич. Электронный ресурс. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AF%D1%81%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%BA%D0%B8%D0%B9\\_%D0%9F%D1%91%D1%82%D1%80\\_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AF%D1%81%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%9F%D1%91%D1%82%D1%80_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87) (дата обращения 19.10.2024).

### **References**

1. Perm Branch of the Scientific Council of the Russian Academy of Sciences on the methodology of artificial Intelligence and cognitive Research. Electronic resource. URL: <https://iphras.ru/page23652613.htm> (accessed 10/19/2024).
2. Annual All-Russian scientific and practical conference "Artificial intelligence in solving urgent social and economic problems of the XXI century". Electronic resource. URL: <https://aintellect-psu.ru/> (accessed 10/18/2024).
3. Yasnitsky, L.N. Publications. RSCI. Electronic resource. URL: [https://elibrary.ru/author\\_items.asp](https://elibrary.ru/author_items.asp) (accessed 10/23/2024).
4. Yasnitsky, L.N. Confession (abridged version). Perm: Publishing house of Perm State Technical University. 1999. 40 s. Electronic resource. URL: <https://cloud.mail.ru/public/bjLg/tpEBGFrc> (accessed 10/23/2024).
5. Kostina, V. I am grateful to the Creator for everything. JSC IPK Zvezda: Perm. 2014. 152 p.
6. Yasnitsky, Peter Alekseevich. Electronic resource. URL: [https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AF%D1%81%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%BA%D0%B8%D0%B9\\_%D0%9F%D1%91%D1%82%D1%80\\_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AF%D1%81%D0%BD%D0%B8%D1%86%D0%BA%D0%B8%D0%B9_%D0%9F%D1%91%D1%82%D1%80_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87) (accessed 10/19/2024).

### **Информация об авторе:**

*О. Г. Пенский* – доктор технических наук, профессор (614000, г. Пермь, Россия), AuthorID: 122369.

### **Information about the author:**

*O. G. Pensky* – Doctor of Technical Sciences, Professor (Perm, Russia, 614000), AuthorID: 122369.

Научный периодический журнал "Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика" зарегистрирован в 2007 г. как самостоятельное издание, являющееся продолжением серии журнала "Вестник Пермского университета", издаваемого с 1994 г. В каждом номере научного журнала автору разрешается опубликование в любом разделе не более одной статьи, в том числе в соавторстве.

Статьи, оформленные в соответствии с нижеизложенными правилами, должны быть отправлены через **личный кабинет автора на сайте журнала**. Статьи отправляются в двух форматах: текстовый документ и pdf-файл без данных об авторе (для организации слепого рецензирования). Вместе с рукописью отправляются контактные данные авторов в свободной форме в текстовом документе (ФИО, должность, место работы с указанием полного адреса, e-mail, номер телефона) и **экспертное заключение о возможности открытого опубликования**. Для публикации статьи необходимо заполнить и подписать **договор**.

**Аннотация статьи** (на русском и английском языках) должна содержать основные краткие сведения: описание проблемы, включая цели и задачи исследования; методы исследования с указанием новизны, если имеется; полученные результаты и выводы. Объем аннотации примерно 250 слов

**Текст статьи** должен содержать разделы: Введение, Постановка задачи, Методы исследования, Результаты, Обсуждения, Заключение, **Благодарности** для русскоязычной статьи; Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgements для англоязычной статьи. Объем рукописи – не менее 6 страниц машинописного текста.

**Оформление.** Текст статьи необходимо оформить в редакторе **Word**. Формат листа, используемый для написания статьи – А4. Размеры верхнего и нижнего полей – 2.6 см, правого и левого – 2.5 см. Расстояние до верхнего и нижнего колонтитулов 1.25 см. Шрифтом Times New Roman Cyr, размер – 12 пт, межстрочный интервал – множитель 1.1 Подписи к рисункам и таблицам набираются курсивом, в конце заголовков и ячеек таблицы точка не ставится. Формулы набираются в редакторе формул.

#### Структура статьи

**Вид статьи** (научная, обзорная или др.).

**УДК**

**DOI:**

**Название раздела** (математика, механика, компьютерные науки и информатика).

**Название статьи на русском языке** (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

**Ф.И.О. автора (-ов) полностью** (Times New Roman – 12 пт, полужирный).

**Место работы (с указанием подразделения), город и страна** (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

**Аннотация на русском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Ключевые слова на русском языке:** 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

**Информация для цитирования** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Благодарности** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Даты поступления, одобрения и принятия рукописи** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Название статьи на английском языке** (шрифт Times New Roman – 16 пт, полужирный).

**На английском языке Ф.И.О. автора (-ов) полностью** (шрифт Times New Roman – 12 пт, полужирный).

**Место работы (с указанием подразделения), город и страна** на английском языке (шрифт Times New Roman – 11 пт), **e-mail**.

**Аннотация на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Ключевые слова на английском языке:** 5–7 слов или словосочетаний (шрифт Times New Roman – 11 пт, курсив).

**Информация для цитирования на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Благодарности на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Даты поступления, одобрения и принятия рукописи на английском языке** (шрифт Times New Roman – 11 пт).

**Основной текст** статьи набирается в ширину страницы, абзацный отступ основного текста – 1.0 см (задается автоматически, не пробелами). Другие отступы не допускаются. Выравнивание текста по ширине.

**Список источников** оформляется в едином формате, в соответствии с ГОСТ Р 7.0.100–2018, без использования тире. Если в списке литературы используется источник из электронного ресурса, необходимо указать дату обращения. Ссылка на литературный источник указывается в тексте статьи в квадратных скобках после упоминания цитаты. Список использованных литературных источников необходимо представить на русском и английском языках (**References**). **Список литературы на латинице**, называемый References, готовится отдельно от Списка литературы и размещается сразу за указанным списком. Ссылки на зарубежные источники необходимо повторять в Списке литературы и References. В References недопустимо использовать российские ГОСТы. Необходимо следовать требованиям международных стандартов. Инструкция по оформлению списка литературы в латинице – References, стандарт "Harvard" находится по ссылке [http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-hurnal/metodicheskie\\_materialy/standart\\_Harvard.doc](http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-hurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc).

#### ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ И ПУБЛИКАЦИИ СТАТЕЙ

Все рукописи проходят двойное слепое рецензирование двумя специалистами в научной области исследования. При возникновении спорной ситуации назначается третий рецензент. Окончательное решение о публикации рукописи принимает главный редактор журнала.

Датой поступления статьи считается день ее отправки через личный кабинет на сайте журнала или по электронной почте журнала (главного редактора). Рукописи рассматриваются в порядке их поступления в течение одного месяца в зависимости от сложности ситуации и объема работы. Редакция оставляет за собой право без согласования с автором проводить литературную правку текстов статей, не изменяющую их основного смысла. Одобрённые статьи публикуются бесплатно. Полнотекстовая версия каждой рукописи выставляется на сайте журнала и в системе РИНЦ (e-library).



Scientific periodical journal "Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science" is published since 1994 in the series of the journal "Bulletin of Perm University". Then it was registered as an independent publication in 2007.

An author is allowed to publish no more than one article (also as co-author) in any section for each issue of the journal.

Article's structure should be accordant with the rules below and should be sent through the **author's personal account on the journal's website**. Articles should be sent in two formats: a text document and a pdf-file without information about the author(s) (for review). Authors contact data (name, position and place of work with address, e-mail, phone number in a text document) and **an expert letter on the open publication possibility** should be sent with the manuscript. Author(s) must make and sign **an agreement**.

**Abstract** (in Russian and English) should contain main information of research: a problem including the goals and objectives of the study; research methods with novelty indication, if any; significant results and findings. The abstract size is approximately 250 words.

**Text** should contain sections: Introduction, Materials and Methods, Results, Discussion, Conclusion, Acknowledgments. The manuscript size is at least 6 typewritten pages.

An article text must be formatted in the editor Word. The sheet format is A4. The top and bottom margins are 2.6 cm, the right and left margins are 2.5 cm. The distances to the header and footer are 1.25 cm. Times New Roman Cyr font, size – 12 pt, single spacing. Legends for figures and tables are typed in italics style. Formulas are typed in the Equation editor.

### The structure of the article

#### Article's type

##### UDC

**TITLE in Russian** (Times New Roman font – 16 pt, bold).

**Name: author (s) name in full** (Times New Roman font – 12 pt).

**Place of work (with departments), city, country** (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**

**Abstract in Russian** (Times New Roman font – 11 pt).

**Keywords in Russian:** 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**Information for citation in English** (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**Acknowledgments in English** (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**Submitted, approved, accepted dates of receipt in English** (Times New Roman font – 11 pt, italic).

**TITLE in English** (Times New Roman font – 16 pt, bold).

**In English author (s) name in full, place of work (with departments), city, country** (Times New Roman font – 11 pt), **e-mail**.

**Abstract in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**Keywords in English:** 5–7 words or phrases (Times New Roman font – 11 pt).

**Information for citation in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**Acknowledgments in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**Submitted, approved, accepted dates of receipt in English** (Times New Roman font – 11 pt).

**The article text** is typed the paragraph indent is 1.0 cm (set automatically, not spaces). No other indents are allowed. Justify the text in width (Times New Roman font – 16 pt)..

**References** are formed in a single format with using GOST R 7.0.100–2018 without a dash. If a source from an electronic resource is used, the author should indicate the request date. To indicate a source in text author uses square brackets after the quotation mention. References must be submitted **in Russian and English**.

**The References** list in Latin, called References, is prepared separately from the References List in Russian and placed below. Foreign sources references should be repeated in the References Lists in Russian and English. It is inadmissible to use Russian GOSTs in References. It is necessary to follow the requirements of international standards. Instructions on the References in Latin script design – References, Harvard standard can be found at [http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie\\_materialy/standart\\_Harvard.doc](http://www.psu.ru/files/docs/ob-universitete/smi/nauchnyj-zhurnal/metodicheskie_materialy/standart_Harvard.doc)

### REVIEW AND PUBLICATION OF ARTICLES

All manuscripts are double-blind peer-reviewed by two research scientists. If a disputable situation arises, a third reviewer is appointed. The final decision on the manuscript publication is made by the editor-in-chief of the journal.

The receipt date of the article is the day of its submission through the personal account on the journal's website or by e-mail of the journal (or editor-in-chief). Manuscripts are reviewed in the order they are received within one month, review period may be changed depending on a situation complexity and a works amount. The journal editors can to edit the article text without basic meaning change.

Approved articles are published free. The full-text version of each manuscript is posted on the journal's website and in the RSCI system (e-library).

Научное издание

ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
Математика. Механика. Информатика

Выпуск 4 (67)

2024

Адрес учредителя и издателя  
614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ  
Адрес редакции  
614068, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15, ПГНИУ  
Физико-математический институт  
e-mail: vestnik\_mmi@psu.ru

Редактор Е.В. Шумилова  
Корректор В.Е. Пирожкова  
Компьютерная верстка: Г.И. Кушнина

Подписано в печать 17.12.2024. Выход в свет 24.12.2024  
Формат 60 × 84/8. Усл. печ. л. 17,91. Тираж 500 экз. Заказ 152

Пермский государственный национальный исследовательский университет  
Управление издательской деятельности

614068, г. Пермь, ул. Букирева, 15. Тел. (342) 239-66-36

Отпечатано в типографии ПГНИУ. Тел. (342) 239-65-47

Подписной индекс журнала  
«Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика»  
в онлайн-каталоге «Урал-Пресс» – 015010

[https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase\\_id=396133](https://www.ural-press.ru/catalog/97266/8708250/?sphrase_id=396133)

Распространяется бесплатно и по подписке