

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 532.685

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-79-90

<https://elibrary.ru/alqwze>**Применение метода многих масштабов к задаче
о возникновении концентрационной конвекции
в прямоугольной области пористой среды****Михаил Романович Хабин¹, Борис Сергеевич Марышев²**^{1,2}Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия^{1,2}Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия¹khabin.m@icmm.ru²bmaryshev@icmm.ru

Аннотация. Концентрационная конвекция оказывает значительное влияние на транспорт примеси в пористых средах. Такие транспортные процессы могут возникать в различных геофизических системах. Концентрационная конвекция часто рассматривается по аналогии с термогравитационной конвекцией в пористых средах. Обычно не учитывается тот факт, что примесь может адсорбироваться на скелете пористой среды. Одним из подходов позволяющим учесть этот факт, является МИМ (mobile-immobile media) подход. В статье исследуется возникновение концентрационной конвекции в вытянутой прямоугольной области заполненной пористой средой, в поле силы тяжести при постоянном перепаде давления и концентрации. В качестве модели фильтрации используется закон Дарси–Буссинеска. Задача решается аналитически методом многих масштабов в приближении слабой силы плавучести. Получены аналитические выражения полей концентрации и давления для основного состояния (случай отсутствия тяжести) и первого порядка малости. Проведено сравнение результатов численного счета с аналитическим решением. Показано, что бесконвективный случай является неустойчивым при сколь угодно малом перепаде концентрации, а возникающее течение представляет собой уединенную конвективную ячейку. Положение область наибольшей неоднородности концентрации зависит от соотношения чисел Пекле и Релея–Дарси.

Ключевые слова: пористая среда; концентрационная конвекция; метод многих масштабов; МИМ-подход

Для цитирования: Хабин М. Р., Марышев Б. С. Применение метода многих масштабов к задаче о возникновении концентрационной конвекции в прямоугольной области пористой среды // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. Вып. 1(68). С. 79–90. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-79-90. <https://elibrary.ru/alqwze>.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания, регистрационный номер темы 124021600038-9.

Статья поступила в редакцию 20.10.2024; одобрена после рецензирования 13.01.2025; принята к публикации 20.03.2024.



Эта работа 2025 © Хабин М.Р., Марышев Б.С. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы просмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

MECHANICS

Research article

Application of the Method of Multiple Scales to the Problem of Occurrence of Solute Convection in Rectangular Region of Porous Medium

Mikhail R. Khabin¹, Boris S. Maryshev²^{1,2}Institute of Continuous Media Mechanic, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Perm, Russia^{1,2}Perm State University, Perm, Russia¹khabin.m@icmm.ru²bmaryshev@icmm.ru

Abstract. Concentration convection has a significant effect on the transport of impurity in porous media. Such transport processes can occur in a variety of geophysical systems. Concentration convection is often considered by analogy with thermogravitational convection in porous media without taking into account the fact that the impurity can be adsorbed on the skeleton of the porous medium. One of the approaches allowing to take this fact into account is the MIM (mobile-immobile media) approach. The paper studies the occurrence of concentration convection in an elongated rectangular region filled with porous medium in the field of gravity at a constant pressure and concentration drop. The Darcy-Boussinesq law is used as a filtration model. The problem is solved analytically by the method of many scales in the approximation of weak buoyancy force. Analytical expressions of concentration and pressure fields for the ground state (the case of no gravity) and the first order of smallness are obtained. The results of numerical calculation are compared with the analytical solution. It is shown that the convective-free case is unstable at any small concentration drop, and the resulting flow is a solitary convective cell. The position of the region of the largest concentration inhomogeneity depends on the ratio of the Peclet and Rayleigh-Darcy numbers.

Keywords: *porous medium; solutal convection; method of multiple scales; MIM approach*

For citation: Khabin, M. R. and Maryshev, B. S. (2025), "Application of the Method of Multiple Scales to the Problem of Occurrence of Solute Convection in Rectangular Region of Porous Medium", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(68), pp. 79-90. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-79-90. <https://elibrary.ru/alqwze>.

Acknowledgments: the work was performed within the framework of the state assignment; the registration number of the topic is 124021600038-9.

The article was submitted 20.10.2024; approved after reviewing 13.01.2025; accepted for publication 20.03.2024

Введение

Использование природных геологических систем в производственной и промышленной деятельности человека сопряжено с рядом осложняющих факторов. Эти системы состоят из различных пород, грунтов и почв, которые являются пористыми средами. При фильтрации жидкости через эти среды могут происходить процессы, в результате которых частицы твердых веществ и примесей переносятся жидкостью, а также частично растворяются в ней. Эти процессы могут привести к техногенным катастрофам. Учет этих процессов при добыче и обработке полезных ископаемых на рудниках помогает предотвратить опасные последствия, для этого, например, может быть рассчитана прочность конструкции при добыче сырья из пластов.

Риск загрязнения почвы возникает при эксплуатации полигонов, на которых собираются бытовые и промышленные отходы. Снег и дождевая вода с высокой концентрацией загрязнений могут проникать в грунт, перенося с собой вредные вещества. Это может привести к загрязнению водных объектов, включая источники питьевой воды.

Проблемы, связанные с переносом примесей в пористой среде, возникают при очистке фильтров и разработке строительных материалов, когда важно поддерживать чистоту материала для сохранения его свойств. В таких системах могут быть значительные различия в плотности жидкости и примесей, что приводит к неустойчивости и возникновению концентрационной конвекции, а также усложняет процесс транспорта веществ. Одной из первых работ, в которой экспериментально наблюдалась концентрационная конвекция в пористых средах, является [1].

Основываясь на вышеперечисленных причинах, можно сказать, что изучение переноса примеси с учетом адсорбционно-десорбционных свойств необходимо для большого числа технологических фильтрационных процессов, а также для предотвращения экологических катастроф. Для изучения сорбции в пористых средах существует стандартный эксперимент, заключающийся в прокачке конечного объема смеси через массив пористой среды при заданном перепаде давления или при фиксированном расходе. В ряде подобных экспериментов [2] обнаруживалось влияние гравитационной неустойчивости на ход экспериментов. Исследование концентрационной конвекции для корректного учета этого влияния необходимо при подготовке и проведении экспериментов по изучению процессов сорбции в пористых средах.

Наиболее популярным подходом к описанию сорбции в пористых средах является МИМ (mobile-immobile media) подход [3], заключающийся в разделении примеси на две фазы: мобильную и иммобильную. Мобильная фаза примеси – частицы, перемещающиеся вместе с потоком несущей жидкости, иммобильная фаза – частицы, осевшие на скелете пористой среды за счет, например, сил Ван дер Ваальса. Обмен примесью между фазами обычно описывается некоторым кинетическим уравнением, выбор уравнения зависит от характера взаимодействия частиц со стенками пористой среды. В литературе представлено множество форм кинетических уравнений в рамках МИМ-подхода, представим наиболее распространенные из них:

Стандартная модель МИМ [4] – скорости адсорбции и десорбции прямо пропорциональны концентрациям в мобильной и иммобильной фазе соответственно. Фрактальная (дробная) модель МИМ [5] – предполагает, что частицы примеси, находящиеся в пористой среде, могут оставаться связанными на непредсказуемо долгие периоды времени. Распределение времени этой связанности не имеет среднего значения, что свидетельствует о субдиффузионном переносе. Следовательно, кинетическое уравнение можно выразить через линейную зависимость потока частиц в неподвижной фазе от дробной производной Капуто от концентрации частиц в подвижной фазе по времени. Данная модель имеет экспериментальное подтверждение, в основном для низких концентраций примеси [6]. Нелинейная МИМ-модель с насыщением [7] – описывает транспорт в пористых средах для высоких концентраций растворенного вещества. В модели задается некоторое предельное значение концентрации иммобилизованной примеси, при котором процесс осаждения частиц (адсорбции) останавливается. В [7] этот эффект описывается кинетической моделью второго порядка, в которой скорость адсорбции прямо пропорциональна разнице между предельной концентрацией насыщения и концентрацией в немобильной фазе.

В настоящей статье решается двумерная задача устойчивости течения смеси через вытянутую прямоугольную область пористой среды. Предполагается, что горизонтальный размер области больше вертикального в 10 раз. Между вертикальными границами задается перепад концентрации и давления, на горизонтальных границах является условие отсутствия потоков несущей жидкости и примеси. Задача решается в приближении Дарси–Буссинеска [8], транспорт примеси описывается в рамках линейной МИМ-модели [4].

Статья состоит из пяти разделов. В первом обсуждается актуальность исследования и приведен обзор литературы. Второй раздел посвящен постановке задачи. Третий подробно раскрывает методику решения. Четвертый раздел представляет полученные результаты. В последнем пятом разделе приведены основные выводы.

Постановка задачи

Рассматривается двумерная задача транспорта примеси через прямоугольный массив пористой среды с отношением сторон $H/L = 0.1$. Фильтрация примеси происходит за счет заданного на вертикальных границах постоянного перепада давления $P_+ - P_-$, на которых так же задается и постоянный перепад концентрации $C_+ - C_-$. На горизонтальных границах – условие непротекания несущей жидкости и непроницаемости для растворенного в ней вещества (рис. 1).

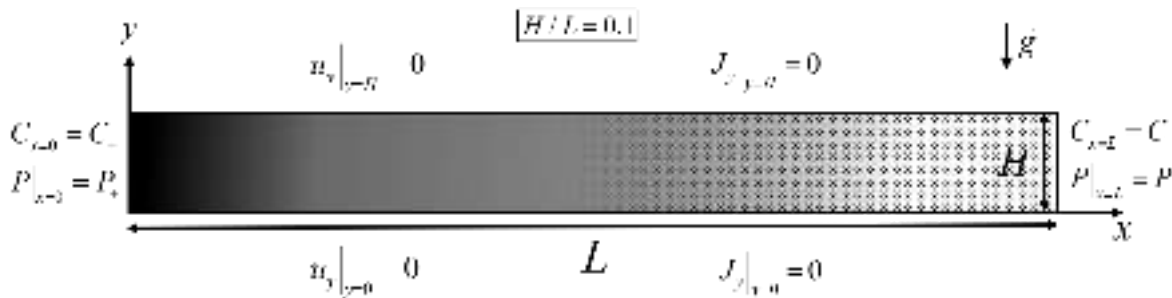


Рис. 1. Принципиальная схема решаемой задачи

Транспорт примеси моделируется в рамках МИМ-подхода [3]. Концентрация примеси разделяется на две фазы мобильности: мобильную и иммобильную. Примесь в мобильной фазе может переноситься потоком несущей жидкости. Иммобильная фаза формируется частицами, осевшими (адсорбировавшимися) на стенки пор, такие частицы не могут переноситься потоком несущей жидкости. Уравнение переноса для МИМ подхода (1) имеет следующий вид:

$$\frac{\partial(\phi C + Q)}{\partial t} = \text{div}(\phi \mathbf{J}), \quad \mathbf{J} = -D \nabla C + \mathbf{u} C, \quad (1)$$

где C, Q – объемные концентрации мобильной и иммобильной примеси, $\mathbf{u}$ – скорость фильтрации, ϕ – пористость среды, D – эффективный коэффициент диффузии.

Фильтрация описывается законом Дарси–Буссинеска [8], учитывающим изменение плотности раствора за счет изменения концентрации примеси. Неоднородность плотности в поле силы тяжести позволяет описать возникновение концентрационной конвекции.

Жидкость считаем несжимаемой. Математически это выражается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\frac{\kappa}{\eta}(\nabla P' + \rho_0 g \beta_C C \mathbf{k}), \quad P' = P + \rho_0 g y, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{u}$ – скорость фильтрации, κ – коэффициент проницаемости, η – динамическая вязкость, ρ_0 – плотность несущей жидкости, β_C – коэффициент концентрационного расширения, C – концентрация мобильной фазы, g – ускорение свободного падения, $\mathbf{k}$ – орт вектор оси y , P – давление жидкости, P' – полное давление жидкости (с добавком гидростатического распределения). При дальнейшем употреблении формулы (2) штрих у давления под знаком градиента будет опущен.

Уравнение (1) должно быть дополнено так называемым кинетическим уравнением, описывающим фазовый переход между фазами мобильности.

В данной работе мы используем наиболее простую линейную МІМ-модель [4]:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \alpha(C - K_d Q), \quad (3)$$

где α – коэффициент переноса примеси, K_d – коэффициент распределения примеси.

Итоговая система уравнений, описывающая транспорт примеси в пористой среде с учетом процессов сорбции и конвекции, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi C + Q)}{\partial t} &= \phi D \Delta C - \mathbf{u} \cdot \nabla C, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} &= \alpha(C - K_d Q), \\ \mathbf{u} &= -\frac{\kappa}{\eta}(\nabla P + \rho_0 g \beta_C C \mathbf{k}), \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

В качестве граничных условий для задачи имеем постоянный перепад давления и концентрации, заданные между вертикальными границами и непроницаемые для вещества и несущей жидкости горизонтальные границы:

$$\begin{aligned} P(x=0, y, t) &= P_+, \quad P(x=L, y, t) = P_-, \\ C(x=0, y, t) &= C_+, \quad C(x=L, y, t) = C_-, \\ (\mathbf{J} \cdot \mathbf{k})|_{y=0, H} &= 0, \quad (\mathbf{u} \cdot \mathbf{k})|_{y=0, H} = 0; \end{aligned} \quad (5)$$

Постановка задачи для двумерного случая

Для удобства перепишем уравнения (4) в безразмерной форме. Для этого выберем следующие масштабы: концентрация мобильной компоненты $[C] = C_+ - C_-$, концентрация немобильной компоненты $[Q] = \phi(C_+ - C_-)$, время $[t] = L^2 / D$, длина $[l] = L$, скорость фильтрации $[\mathbf{u}] = \phi D / L$, давление $[P] = P_+ - P_-$.

Тогда система (4) перепишется в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(c+q)}{\partial t} &= \Delta c - \mathbf{u} \cdot \nabla c, \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= ac - bq, \\ \mathbf{u} &= -(\text{Pe} \nabla p + \text{Rp} \mathbf{c}), \\ \text{div } \mathbf{u} &= 0;\end{aligned}\tag{6}$$

где $\text{Pe} = \kappa(P_+ - P_-) / \phi \eta D$ – диффузионное число Пекле, $\text{Rp} = \kappa \rho_0 g \beta_c (C_+ - C_-) / \phi \eta D$ – число Рэлея–Дарси, $a = \alpha L^2 / \phi D$ – коэффициент адсорбции, $b = \alpha K_d L^2 / D$ – коэффициент десорбции. Число Пекле Pe характеризует отношение сил давления к вязким силам, а число Рэлея–Дарси Rp отношение сил плавучести к силам вязкости. За интенсивность перехода между фазами мобильности отвечают коэффициенты сорбции (a, b).

Перепишем систему (6) для двухмерного случая, исключив скорость фильтрации:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(c+q)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \text{Pe} \left(\frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \text{Rp} c \frac{\partial c}{\partial y} \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= ac - bq \\ \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} &= -\frac{\text{Rp}}{\text{Pe}} \frac{\partial c}{\partial y}\end{aligned}\tag{7}$$

Граничные условия (5) в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}c(x=0, y, t) &= 1, \quad c(x=1, y, t) = 0, \\ p(x=0, y, t) &= 1, \quad p(x=1, y, t) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=0, h} &= -\frac{\text{Rp}}{\text{Pe}} c \Big|_{y=0, h}, \quad \frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{y=0, h} = 0;\end{aligned}\tag{8}$$

в случае отсутствия сил плавучести ($\text{Rp} = 0$) задача имеет решение:

$$c_0(x) = \frac{e^{\text{Pe} \cdot x} - e^{\text{Pe}}}{1 - e^{\text{Pe}}}, \quad q_0(x) = \frac{a}{b} c_0(x), \quad p_0(x) = 1 - x.\tag{9}$$

Метод решения задачи

При малых значениях числа Рэлея–Дарси к системе уравнений (6) может быть применен метод разложения по малому параметру.

Система уравнений (6) после введения малого безразмерного параметра ε :

$$\begin{aligned}\frac{\partial(c+q)}{\partial t} &= \Delta c + \text{Pe} \left((\nabla p \cdot \nabla c) + \varepsilon \xi c \frac{\partial c}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial q}{\partial t} &= ac - bq, \\ \Delta p &= -\varepsilon \xi \frac{\partial c}{\partial y};\end{aligned}\tag{10}$$

где $\text{Rp}/\text{Pe} = \xi \varepsilon$, ε – безразмерный малый параметр, Rp число Рэлея–Дарси, Pe число Пекле.

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{y=0,h} &= -\varepsilon \xi c|_{y=0,h}, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0,h} = 0, \\ p(x=0, y, t) &= 1, \quad p(x=1, y, t) = 0, \\ c(x=0, y, t) &= 1, \quad c(x=1, y, t) = 0.\end{aligned}\tag{11}$$

Согласно методу многих масштабов [9], искомые функции раскладываются в ряд по малому параметру:

$$\begin{aligned}c(x, y, t) &= c_0(x) + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \dots \\ q(x, y, t) &= q_0(x) + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \dots \\ p(x, y, t) &= p_0(x) + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots \\ \partial / \partial t &= \partial / \partial t_0 + \varepsilon \partial / \partial t_1 + \varepsilon^2 \partial / \partial t_2 + \dots\end{aligned}\tag{12}$$

В нулевом порядке распределение концентрации и давления определяются стационарным решением системы (10):

$$c_0(x) = \frac{e^{\text{Pe} \cdot x} - e^{\text{Pe}}}{1 - e^{\text{Pe}}}, \quad q_0(x) = \frac{a}{b} c_0(x), \quad p_0(x) = 1 - x.\tag{13}$$

Система уравнений (10) в первом в порядке малости ε^1 имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(c_1 + q_1)}{\partial t_0} &= \Delta c_1 + \text{Pe} (\nabla p_0 \cdot \nabla c_1 + \nabla p_1 \cdot \nabla c_0), \\ \frac{\partial q_1}{\partial t_0} &= ac_1 - bq_1, \\ \Delta p_1 &= 0;\end{aligned}\tag{14}$$

граничные условия в этом же порядке запишутся следующим образом для давления:

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial p_1}{\partial y} \right|_{y=0} &= -\xi c_0(x), \quad \left. \frac{\partial p_1}{\partial y} \right|_{y=h} = -\xi c_0(x), \\ p_1(0, y, t) &= -\xi y, \quad p_1(1, y, t) = 0;\end{aligned}\tag{15}$$

и концентрации:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial c_1}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial c_1}{\partial y} \right|_{y=h} = 0, \\ c_1(0, y, t) &= 0, \quad c_1(1, y, t) = 0; \end{aligned} \quad (16)$$

Для сведения задачи к однородному виду, можно ввести замену для переменной давления:

$$p_1(x, y, t) = \tilde{p}_1(x, y, t) - \xi c_0(x) y. \quad (17)$$

В результате замены (17) граничные условия (15) становятся аналогичны условиям (16):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial y} \right|_{y=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial y} \right|_{y=h} = 0, \\ \tilde{p}_1(0, y, t) &= 0, \quad \tilde{p}_1(1, y, t) = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

при таких граничных условиях задача имеет аналитическое решение в виде ряда Фурье.

Результаты

Уравнение для концентрации мобильной компоненты:

$$\begin{aligned} c_1(x, y, t) &= \sum_{n,m} \left(A_{nm} e^{\gamma_1 t} + B_{nm} e^{\gamma_2 t} \right) e^{\frac{Pe}{2} x} \sin(\pi m x) \cos\left(\frac{\pi n y}{h}\right) + \\ &+ \sum_{n,m} \left(\frac{F_{nm}}{\lambda_{nm}^2} \right) e^{\frac{Pe}{2} x} \sin(\pi m x) \cos\left(\frac{\pi n y}{h}\right), \end{aligned} \quad (19)$$

уравнение для концентрации иммобильной фазы:

$$\begin{aligned} q_1(x, y, t) &= \sum_{n,m} \left(\frac{a e^{\gamma_1 t} A_{nm}}{(b + \gamma_1)} + \frac{a e^{\gamma_2 t} B_{nm}}{(b + \gamma_2)} \right) e^{\frac{Pe}{2} x} \sin(\pi m x) \cos\left(\frac{\pi n y}{h}\right) + \\ &+ \frac{a}{b} \sum_{n,m} \left(\frac{F_{nm}}{\lambda_{nm}^2} \right) e^{\frac{Pe}{2} x} \sin(\pi m x) \cos\left(\frac{\pi n y}{h}\right). \end{aligned} \quad (20)$$

Уравнение для давления:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\xi}{(\pi^2 k^2 + Pe^2)} f_k(Pe) P_k(y) \sin \pi k x, \\ f_k(Pe) &= \frac{((-1)^k - 1)}{\pi^2 n^2} \frac{Pe^2 e^{Pe}}{(1 - e^{Pe})} - \operatorname{cth}\left(\frac{Pe}{2}\right), \\ P_k(y) &= \frac{(1 - \operatorname{ch} \pi k h)}{\operatorname{sh} \pi k h} \operatorname{ch} \pi k y + \operatorname{sh} \pi k y; \end{aligned} \quad (21)$$

где показатели $\gamma_{1,2}$ временной экспоненты всегда меньше нуля и определяются выражением:

$$\gamma_{1,2} = \frac{-(a+b+\lambda_{nm}^2) \pm \sqrt{(a+b+\lambda_{nm}^2)^2 - 4\lambda_{nm}^2 b}}{2}. \quad (22)$$

На больших временах зависящая от времени часть решения (19) и (20) обращается в ноль и распределение концентрации определяется коэффициентами (23) и (24):

$$\lambda_{nm} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{h}\right)^2 + \pi^2 m^2 + \frac{\text{Pe}^2}{4}} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} F_{nm} = & -\frac{4\xi}{h} \frac{\text{Pe}^3}{(1-e^{\text{Pe}})^2} \frac{h^2((-1)^n - 1)}{\pi^2 n^2} \frac{4\pi m \left(e^{\frac{3}{2}\text{Pe}} (-1)^m - 1 \right)}{4\pi^2 m^2 + 9\text{Pe}^2} + \\ & + \frac{4}{h} \frac{\text{Pe}^2}{(1-e^{\text{Pe}})} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{-2\xi}{(\pi^2 k^2 + \text{Pe}^2)} \left(\frac{((-1)^k - 1)}{\pi^2 k^2} \frac{\text{Pe}^2 e^{\text{Pe}}}{(1-e^{\text{Pe}})} - \text{cth}\left(\frac{\text{Pe}}{2}\right) \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{h^2 k^2((-1)^n - 1)}{(h^2 k^2 + n^2)} \right) \frac{4\pi m \left(1 + (-1)^{1+k+m} e^{\frac{\text{Pe}}{2}} \right) (4\pi^2(m^2 - k^2) + \text{Pe}^2)}{(4\pi^2(k+m)^2 + \text{Pe}^2)(4\pi^2(k-m)^2 + \text{Pe}^2)} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя тот факт, что в момент времени $t=0$ возмущения в области отсутствуют $c_1(x, y, t=0)=0$ и $q_1(x, y, t=0)=0$ можно определить коэффициенты A_{nm} и B_{nm} :

$$\begin{aligned} A_{nm} &= -\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{b + \gamma_1}{b} \frac{F_{nm}}{\lambda_{nm}^2}, \\ B_{nm} &= \frac{\gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \frac{b + \gamma_2}{b} \frac{F_{nm}}{\lambda_{nm}^2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Представлены результаты расчетов при суммировании следующего количества членов рядов (19), (21) и (24): $n=0..40, m=1..40, k=1..100$. Согласно постановке задачи, рассматривается вытянутая вдоль оси x область, поэтому отношение сторон h принимается равным 0.1. Параметр h не влияет на количество образующихся конвективных ячеек, но может влиять на интенсивность. Таким образом, чем длиннее рассматриваемая область, тем более вытянута будет одна из конвективных ячеек и тем меньше будет ее интенсивность. Величина ε – это порядок отношения числа $\text{Rp}/\text{Pe} = \varepsilon\xi$. Для малости ε требуется, чтобы $\text{Rp} < \text{Pe}$, с физической точки зрения этого можно добиться увеличением перепада давления (ростом числа Пекле – Pe) или уменьшением перепада концентрации (уменьшение числа Рэлея–Дарси – Rp). В связи с тем, что решение получено для $\varepsilon \ll 1$ при суммировании поправки с основным решением наблюдается незначительное искривление полей (рис. 2–3).

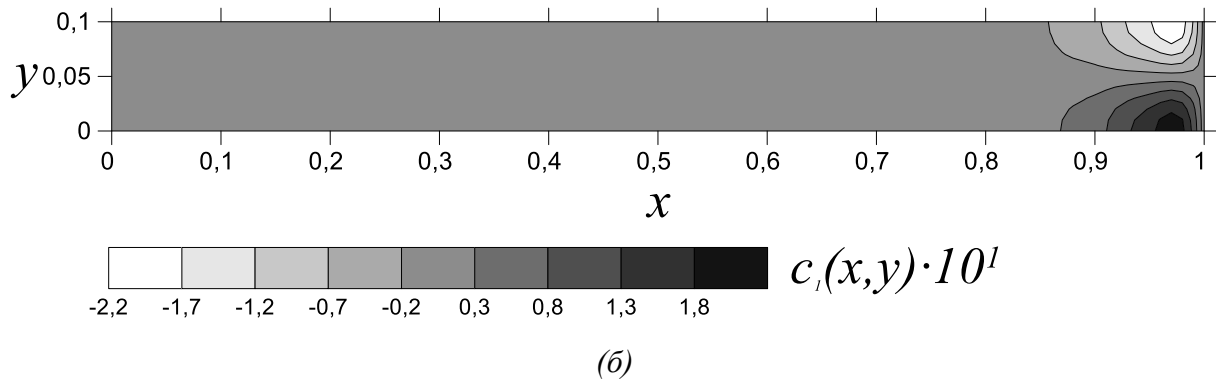
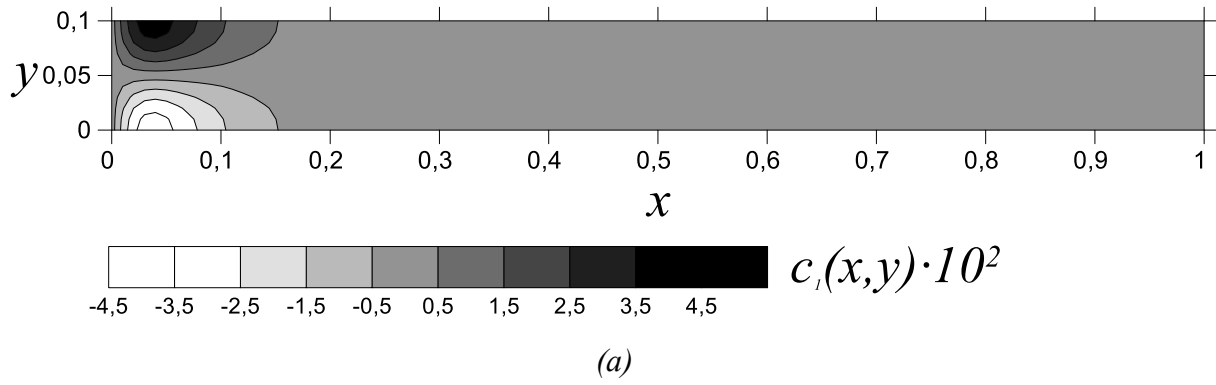


Рис. 2. Поле возмущения мобильной концентрации $c_1(x, y)$ для параметров
а) $\xi=1$, $Pe=1$, б) $\xi=1$, $Pe=10$

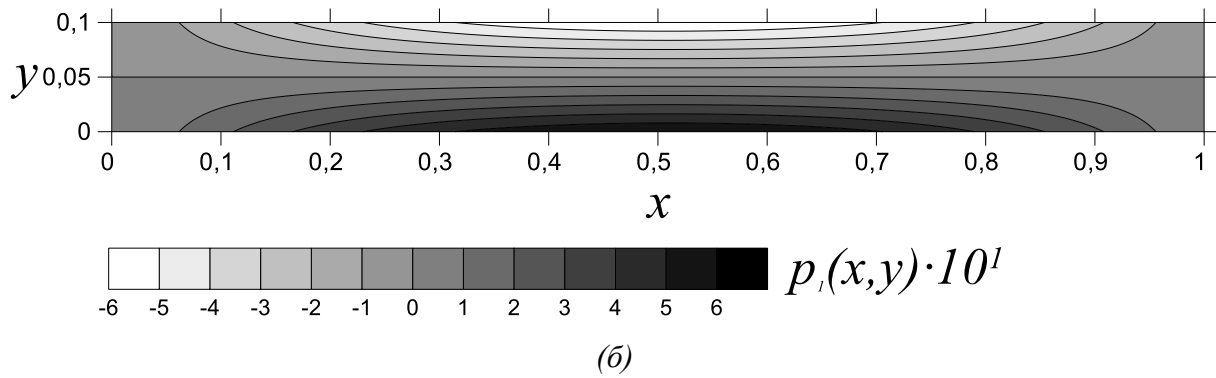
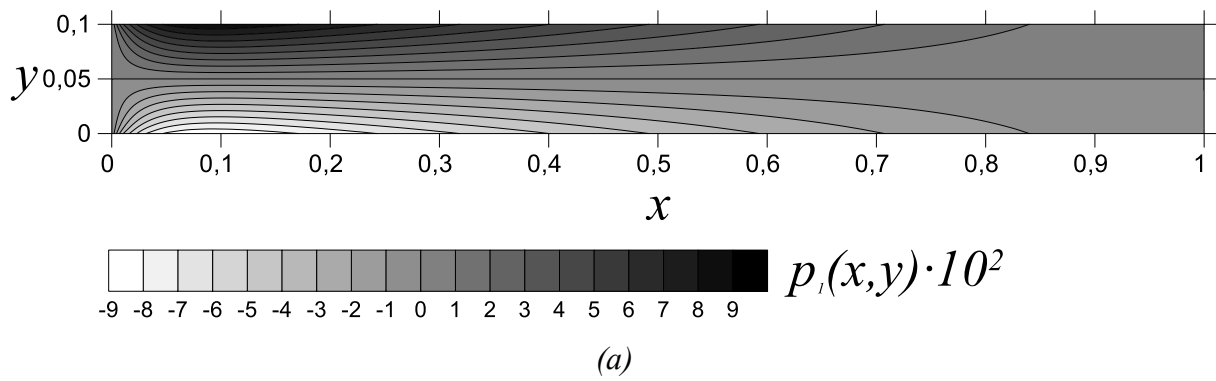


Рис. 3. Поле возмущения давления $\tilde{p}_1(x, y)$ для параметров а) $\xi=1$, $Pe=1$,
б) $\xi=1$, $Pe=10$

Показано, что поле концентрации в первом порядке малости представляет собой конвективную ячейку, таким образом возникают области с повышенной и пониженной концентрацией примеси. Также видно, что с увеличением числа Пекле течение стабилизируется, снижается интенсивность конвекции. Наблюдаемое смещение ячейки с ростом числа Пекле связано с тем, что в области организуются две ячейки (см. [10] рис. 2а) одна из которых сильно вытянута, и, как следствие, интенсивность возмущения такой ячейки значительно ниже. Увеличение числа Пекле приводит к тому, что левая ячейка вытягивается, а правая сжимается у выхода из области. Смена интенсивности ячеек приводит к тому, что области пониженной и повышенной концентрации на входе с ростом числа Пекле меняются местами на выходе из рабочей области. Качественно результаты аналитического расчета полученная структура возмущений и их локализация совпадают с результатами численного счета, описанного в работе [10]. Разница же в количественном описании связана с тем, что для построения аналитических результатов зависимость от времени не учитывается, так как полученное решение рассматривается в пределе больших времен, при которых распределение давления и концентрации являются стационарными.

Заключение

Решена задача об устойчивости одномерного течения в прямоугольной области пористой среды в присутствии горизонтального перепада давления и концентрации. При малых значениях числа Рэлея–Дарси получены аналитические выражения для полей возмущений давления и концентрации. Показано, что результат численного и аналитического расчета качественно совпадают. Результаты численного и аналитического расчетов показывают, что в случае непроницаемых горизонтальных границ установившееся течение для бесконвективного случая является неустойчивым даже при малых числах Рэлея–Дарси.

Список источников

1. *Schincariol R.A., Schwartz F.W.* An experimental investigation of variable density flow and mixing in homogeneous and heterogeneous media // *Water Resources Research*. 1990. Vol. 26, № 10. P. 2317–2329. DOI: 10.1029/WR026i010p02317.
2. *Maryshev B.S., Khabin M.R., Evgrafova A.V.* Identification of transport parameters for the solute filtration through porous media with clogging // *Journal of Porous Media*, 2023. Vol. 26, № 6. P. 31–35. DOI: 10.1615/JPorMedia.2022044645 EDN: RAEQIQ.
3. *Deans H.A.* A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media // *Society of Petroleum Engineers Journal*, 1963. Vol. 3, № 01. P. 49–52. DOI: 10.2118/493-PA.
4. *van Genuchten M.T., Wierenga P.J.* Mass transfer studies in sorbing porous media I. Analytical solutions 1 // *Soil Science Society of America Journal*. 1976. Vol. 40, №4. P. 473–480.
5. *Schumer R., Benson D.A., Meerschaert M.M., Baeumer B.* Fractal mobile/immobile solute transport // *Water Resources Research*, 2003. Vol. 39, № 10. DOI: 10.1029/2003WR002141 EDN: LRUGJB.
6. *Gouze P., Le Borgne T., Leprovost R., Lods G., Poidras T., Pezard P.* Non-Fickian dispersion in porous media: 1. Multiscale measurements using single-well injection withdrawal tracer tests // *Water Resources Research*, 2008. Vol. 44, № 6, W06426. DOI: 10.1029/2007WR006278.
7. *Selim H.M.* Prediction of contaminant retention and transport in soils using kinetic multi-reaction models // *Environmental Health Perspectives*. 1989. Vol. 83. P. 69–75. DOI: 10.2136/essaj2006.0422.

8. Nield D., Bejan A. Convection in Porous Media. Cham, Switzerland: Springer, 2017. 988 p. DOI: 10.1007/978-3-319-49562-0.
9. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Наука, 1984. 535 с.
10. Хабин М.Р., Марышев Б.С. Возникновение концентрационной конвекции в длинной прямоугольной области пористой среды // Вестник Пермского университета. Физика, 2023. № 4. С. 10–21. DOI: 10.17072/1994-3598-2023-4-10-21 EDN: BFWVXA.

References

1. Schincariol, R. A. and Schwartz, F. W. (1990), "An experimental investigation of variable density flow and mixing in homogeneous and heterogeneous media", *Water Resources Research*, vol. 26, no. 10, pp. 2317-2329.
2. Maryshev, B. S., Khabin, M. R. and Evgrafova, A. V. (2023), "Identification of transport parameters for the solute filtration through porous media with clogging", *Journal of Porous Media*, vol. 26, no. 6, pp. 31-35.
3. Deans, H. A. (1963), "A mathematical model for dispersion in the direction of flow in porous media", *Society of Petroleum Engineers Journal*, vol. 3, no. 01, pp. 49-52.
4. van Genuchten, M. T. and Wierenga, P. J. (1976), "Mass transfer studies in sorbing porous media I. Analytical solutions 1", *Soil Science Society of America Journal*, vol. 40, no. 4, pp. 473-480.
5. Schumer, R., Benson D. A., Meerschaert M. M. and Baeumer, B. (2003), "Fractal mobile/immobile solute transport", *Water Resources Research*, vol. 39, no. 10.
6. Gouze P., Le Borgne, T., Leprovost, R., Lods, G., Poidras, T. and Pezard, P. (2008), "Non-Fickian dispersion in porous media: 1. Multiscale measurements using single-well injection withdrawal tracer tests", *Water Resources Research*, vol. 44, no. 6, W06426.
7. Selim, H. M. (1989), "Prediction of contaminant retention and transport in soils using kinetic multireaction models", *Environmental Health Perspectives*, vol. 83, pp. 69-75.
8. Nield, D. and Bejan, A. (2017), "Convection in Porous Media", *Cham, Switzerland: Springer*, 988 p.
9. Naifeh, A. (1984), "Introduction to methods of perturbations", *Moscow: Nauka*, 535 p. (In Russ.).
10. Khabin, M. R. and Maryshev, B. S. (2023), "The onset of concentration convection in a long rectangular domain of a porous medium", *Bulletin of Perm University. Physics*, no.4, pp. 10-23. (In Russ.).

Информация об авторах:

М. Р. Хабин – аспирант, инженер-исследователь лаборатории подземной утилизации углерода, ИМСС УрО РАН (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), AuthorID: 1114312;

Б. С. Марышев – кандидат физико-математических наук, доцент, научный сотрудник лаборатории подземной утилизации углерода, ИМСС УрО РАН, (614013, Россия, г. Пермь, ул. Академика Королева, 1), AuthorID: 148020.

Information about the authors:

M. R. Khabin – Postgraduate, Research Engineer, Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (1, Academician Korolev St., Perm, Russia, 614018), AuthorID: 1114312;

B. S. Maryshev – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Researcher, Institute of Continuous Media Mechanics Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (1, Academician Korolev St., Perm, Russia, 614018), AuthorID: 148020.