

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 629.78

DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-28-40

<https://elibrary.ru/fruubi>



Исследование плоского углового движения наноспутника стандарта CubeSat с помощью фазовых портретов-

Елена Витальевна Барина¹, Иван Александрович Тимбай², Евгений Миронов³

^{1,2,3}Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия

¹L5545@yandex.ru

²timbai@mail.ru

³mironovevgeniy01@gmail.com

Аннотация. В работе рассматривается плоское движение относительно центра масс наноспутника стандарта CubeSat под действием аэродинамического и гравитационного моментов на низких околоземных орбитах. Для качественной оценки параметров движения используется метод фазовой плоскости. Получены условия, при которых происходит смена типа фазового портрета. Найдены аналитические выражения для определения положений равновесия наноспутника относительно центра масс при смещении центра давления относительно центра масс по двум координатам. Проводится сравнение двух моделей движения: исходной модели, которая учитывает форму наноспутника и его положение относительно набегающего потока, и упрощенной, в которой зависимость аэродинамического момента от угла атаки аппроксимируется синусоидой.

Ключевые слова: наноспутник; CubeSat; положения равновесия; фазовые портреты; аэродинамический момент; гравитационный момент

Для цитирования: Барина Е.В., Тимбай И.А., Миронов Е. Исследование плоского углового движения наноспутника стандарта Cubesat с помощью фазовых портретов // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. 2025. Вып. 1(68). С. 28–40. DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-28-40. <https://elibrary.ru/fruubi>.

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-67-10007, <https://rscf.ru/project/23-67-10007/>.

Статья поступила в редакцию 30.01.2025; одобрена после рецензирования 17.02.2025; принята к публикации 15.03.2025.

MECHANICS

Research article

Study of Plane Angular Motion of a CubeSat Nanosatellite Using Phase Portraits

Elena V. Barinova¹, Ivan A. Timbai², Evgeniy Mironov³

^{1,2,3}Samara National Research University, Samara, Russia



Эта работа © 2025 Барина Е.В., Тимбай И.А., Миронов Е. распространяется под лицензией CC BY 4.0. Чтобы посмотреть копию этой лицензии, посетите <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

¹L5545@yandex.ru

²timbai@mail.ru

³mironovevgeniy01@gmail.com

Abstract. This paper considers the plane motion relative to the center of mass of CubeSat nanosatellites under the action of aerodynamic and gravitational moments in low Earth orbits. The phase plane method is used for qualitative assessment of motion parameters. Conditions under which the type of phase portrait changes have been obtained. Analytical expressions have been found to determine the equilibrium positions of a nanosatellite relative to the center of mass in the orbital coordinate system with a displacement of the center of pressure relative to the center of mass along two coordinates. Two models of angular motion are compared: the original model, which takes into account the shape of the nanosatellite and its position relative to the oncoming flow, and a simplified one, in which the dependence of the aerodynamic moment on the angle of attack is approximated by a sinusoid.

Keywords: *nanosatellite; CubeSat; equilibrium positions; phase portraits; aerodynamic moment; gravitational moment*

For citation: Barinova, E. V., Timbai, I. A. and Mironov, E. (2025), "Study of Plane Angular Motion of a CubeSat Nanosatellite Using Phase Portraits", *Bulletin of Perm University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, no. 1(68), pp. 28-40. (In Russ.). DOI: 10.17072/1993-0550-2025-1-28-40. <https://elibrary.ru/fruubi>.

Acknowledgments: the research is supported by the Russian Science Foundation (No. 23-67-10007, <https://rscf.ru/project/23-67-10007/>).

The article was submitted 30.01.2025; approved after reviewing 17.02.2025; accepted for publication 15.03.2025.

Введение

Наноспутники (НС) стандарта CubeSat [1] в настоящее время широко используются не только для учебных миссий, но и для исследования Земли и околоземного космического пространства. Успех подобных миссий во многом зависит от соблюдения заданной ориентации НС в пространстве. Для приведения и поддержания НС в требуемом угловом положении часто используют системы пассивной или комбинированной стабилизации. При этом важным этапом при их проектировании является определение положений углового равновесия наноспутника и исследование его динамики в их окрестности. Исследовать движение относительно центра масс НС можно по полной системе дифференциальных уравнений, для которой возможно определить только численное решение. При численном интегрировании довольно сложно определить причины, обуславливающие тот или иной характер движения НС. Поэтому целесообразен поиск приближенных аналитических решений, позволяющих увидеть связь между условиями полета, параметрами НС и его динамикой.

Одним из эффективных методов изучения характера углового движения является метод фазовой плоскости. В работе [2] рассматривается космический аппарат с синусоидальной зависимостью аэродинамического момента от угла атаки, что характерно для аппаратов, имеющих форму сферы или тонкого конуса. С использованием фазовых портретов проводится анализ углового движения аппарата под действием аэродинамического и гравитационного моментов.

Одной из важных особенностей НС стандарта CubeSat является то, что они имеют форму прямоугольного параллелепипеда, поэтому аэродинамический момент имеет более сложную зависимость, чем у аппаратов сферической формы. Целью данной работы является исследование движения относительно центра масс наноспутника стандарта CubeSat под действием аэродинамического и гравитационного моментов в плоскости круговой орбиты.

1. Постановка задачи

Для проведения качественного анализа движения наноспутника стандарта CubeSat относительно центра масс, используется модель углового движения в плоскости круговой орбиты под действием гравитационного момента и аэродинамического восстанавливающего момента [3]:

$$\ddot{\alpha} - (a_x \sin(\alpha) + a_z \cos(\alpha))(|\cos(\alpha)| + k_s |\sin(\alpha)|) - c \sin(2\alpha) = 0, \quad (1)$$

где α – угол атаки (угол между вектором скорости и продольной осью НС);

$a_x = \frac{x_d c_0 S q}{J_y}$, $a_z = -\frac{z_d c_0 S q}{J_y}$ – коэффициенты, обусловленные действием аэродинамического момента; $c = \frac{3(J_z - J_x) \omega_{орб}^2}{2J_y}$ – коэффициент, обусловленный действием гравитационного момента; $c_0 = 2,2$ – коэффициент, который может принимать значения от 2 до 3, в зависимости от физических свойств газа и поверхности НС, для проектных проработок принимается равным 2,2; S – характерная площадь НС; J_x , J_y , J_z – главные центральные моменты инерции НС; x_d , z_d – положение центра давления (геометрического центра) НС относительно центра масс; k_s – отношение площади одной из боковых поверхностей к характерной площади; $\omega_{орб} = \sqrt{\mu/(R_3 + H)^3}$ – орбитальная угловая скорость; $q(H) = \rho(H)[V(H)]^2/2$ – скоростной напор; H – высота полета; $V(H) = \sqrt{\mu/(R_3 + H)}$ – скорость полета; $\rho(H)$ – плотность атмосферы; R_3 – радиус Земли; μ – гравитационный параметр Земли.

2. Определение положений равновесия и фазовые портреты

Фазовые портреты позволяют качественно исследовать динамику НС в окрестности положений равновесия. Положением равновесия является такое положение, в котором тело находится все время, при условии, что в начальный момент времени тело находилось в этом положении и скорости всех его точек равнялись нулю [4]. Из уравнения (1) получим уравнение для определения положений равновесия:

$$(a_x \sin(\alpha) + a_z \cos(\alpha))(|\cos(\alpha)| + k_s |\sin(\alpha)|) + c \sin(2\alpha) = 0. \quad (2)$$

Разрешая полученное выражение относительно угла α , получим выражение для определения положений равновесия в плоском случае:

$$\alpha^* = \arccotg \left(\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4a_z \operatorname{sign}(\cos \alpha) k_s a_x \operatorname{sign}(\sin \alpha)}}{2a_z \operatorname{sign}(\cos \alpha)} \right),$$

где $B = c + k_s a_z \operatorname{sign}(\sin \alpha) + a_x \operatorname{sign}(\cos \alpha)$.

С учетом значения функций $\text{sign}(\sin \alpha)$ и $\text{sign}(\cos \alpha)$ для каждой четверти, получены формулы определения положений равновесия по углу α :

$$\begin{aligned}\alpha_{1,2}^* &= \text{arccctg} \left(\frac{-a_x - k_s a_z - 2c \pm \sqrt{(a_x + k_s a_z + 2c)^2 - 4k_s a_x a_z}}{2a_z} \right), \\ \alpha_{3,4}^* &= \text{arccctg} \left(\frac{-a_x + k_s a_z + 2c \mp \sqrt{(-a_x + k_s a_z + 2c)^2 + 4k_s a_x a_z}}{2a_z} \right), \\ \alpha_{5,6}^* &= \text{arccctg} \left(\frac{-a_x - k_s a_z + 2c \mp \sqrt{(-a_x - k_s a_z + 2c)^2 - 4k_s a_x a_z}}{2a_z} \right) - \pi, \\ \alpha_{7,8}^* &= \text{arccctg} \left(\frac{-a_x + k_s a_z - 2c \pm \sqrt{(a_x - k_s a_z + 2c)^2 + 4k_s a_x a_z}}{2a_z} \right) - \pi.\end{aligned}\quad (3)$$

Возможные комбинации этих положений, в зависимости от смещения геометрического центра относительно центра масс (x_d, z_d) и модуля коэффициента $|c|$, обусловленного действием гравитационного момента, представлены в табл. 1.

Таблица 1. Положения углового равновесия в случае движения в плоскости орбиты

	$x_d > 0,$ $z_d > 0$	$x_d < 0,$ $z_d < 0$	$x_d < 0,$ $z_d > 0$	$x_d > 0,$ $z_d < 0$	Кол-во положе- ний рав- новесия
$ c < 0,5a_1$	α_2^*, α_5^*	α_1^*, α_6^*	α_4^*, α_7^*	α_3^*, α_8^*	2
$ c > 0,5a_1$	$\alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_4^*, \alpha_5^*$	$\alpha_1^*, \alpha_6^*, \alpha_7^*, \alpha_8^*$	$\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_4^*, \alpha_7^*$	$\alpha_3^*, \alpha_5^*, \alpha_6^*, \alpha_8^*$	4

где $a_1 = (\sqrt{|a_x|} + \sqrt{k_s |a_z|})^2$.

Из таблицы 1 видно, что вне зависимости от значения $|c|$ существует 2 положения равновесия, а при соблюдении условия $|c| > 0,5a_1$ количество положений увеличивается до 4.

Для случая $x_d \neq 0, z_d = 0$ данными результатами воспользоваться нельзя, так как тогда $a_z = 0$. Запишем уравнение (2) для этого случая:

$$(a_x(H)|\cos \alpha| + k_s a_x(H)|\sin \alpha| + 2c(H) \cos \alpha) \sin \alpha = 0.$$

Тогда при любом соотношении коэффициентов, обусловленных действием аэродинамического и гравитационного моментов, реализуются положения равновесия $\alpha_1^* = 0$ и $\alpha_2^* = \pi$. При соблюдении условия $|c| > 0,5|a_x|$ имеют место дополнительные положения равновесия:

$$\alpha_{3,4}^* = \text{arccctg} \left(\frac{-k_s a_x}{2c \pm a_x} \right), \quad \alpha_{5,6}^* = \text{arccctg} \left(\frac{k_s a_x}{2c \mp a_x} \right) - \pi.$$

Если знаки величин a_x и c совпадают, то положения равновесия следует вычислять по формулам для α_4^* и α_5^* . Если знаки a_x и c противоположны, то положения равновесия следует вычислять по формулам для α_3^* и α_6^* .

Для случая $x_d = 0, z_d \neq 0$ уравнение (2) примет вид

$$(a_z(H)|\cos \alpha| + k_s a_z(H)|\sin \alpha| + 2c(H) \sin \alpha) \cos \alpha = 0.$$

Тогда при любом соотношении аэродинамического и гравитационного моментов реализуются положения равновесия $\alpha_1^* = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha_2^* = -\frac{\pi}{2}$. И имеют место дополнительные положения равновесия при выполнении условия $|c| > 0,5|k_s a_z|$.

Если знаки величин a_z и c совпадают, то положения равновесия следует вычислять по формулам

$$\alpha_{3,4}^* = \text{arccctg} \left(\frac{2c - k_s a_z}{\pm a_z} \right).$$

Если знаки величин a_z и c противоположны, то положения равновесия следует вычислять по формулам

$$\alpha_{5,6}^* = \text{arccctg} \left(\frac{2c + k_s a_z}{\mp a_z} \right) - \pi.$$

Для выяснения общих свойств уравнения (1) воспользуемся методом фазовой плоскости. Изменение высоты круговой орбиты вследствие сопротивления атмосферы происходит очень медленно, и при рассмотрении углового движения НС на одном или нескольких витках можно принять $H = \text{const}$. Интеграл энергии при этом имеет вид:

$$a_x u - a_z v + c \cos^2 \alpha + \frac{\dot{\alpha}^2}{2} = E_0.$$

Здесь u и v – функции от α :

$$u = \frac{1}{2} \text{sign}(\cos(\alpha)) \cos^2 \alpha + \frac{k_s}{2} \text{sign}(\sin(\alpha)) \left(\frac{\sin 2\alpha}{2} - \alpha + 2\pi \cdot \left\lfloor \frac{\alpha + \pi}{2\pi} \right\rfloor \right),$$

$$v = \frac{1}{2} \text{sign}(\cos(\alpha)) \left(\frac{\sin 2\alpha_0}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot \left\lfloor \frac{\alpha + \frac{\pi}{2}}{2\pi} \right\rfloor \right) + \frac{k_s}{2} \text{sign}(\sin(\alpha)) \sin^2 \alpha,$$

где $\lfloor x \rfloor$ – антье x (наибольшее целое число, не превосходящее x), $E_0 = a_x u(\alpha_0) - a_z v(\alpha_0) + c_1 \cos^2 \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{2}$ – определяется через начальные условия углового движения, α_0 – начальное значение угла α для соответствующей фазовой траектории. Характер движения НС определяется соотношением величин a_1 , c и E_0 . Имеют место три типа фазовых портретов.

На рисунках 1–3 приведены фазовые портреты системы (1) для случая $x_d \neq 0$, $z_d = 0$.

$|c| \leq 0,5|a_x|$. В данном случае преобладающим является аэродинамический момент. Фазовый портрет аналогичен колебательной системе маятникового типа (для случая $a_x > 0$ изображен на рис. 1). В этом случае НС имеет два положения равновесия по углу атаки – устойчивое при $\alpha = 0 + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$) и неустойчивое при $\alpha = \pi + 2n\pi$ ($n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$).

Существуют две области движения НС: вращательная и колебательная, которые разделены сепаратрисой.

Для случая $a_x < 0$ картина сдвинется на π .

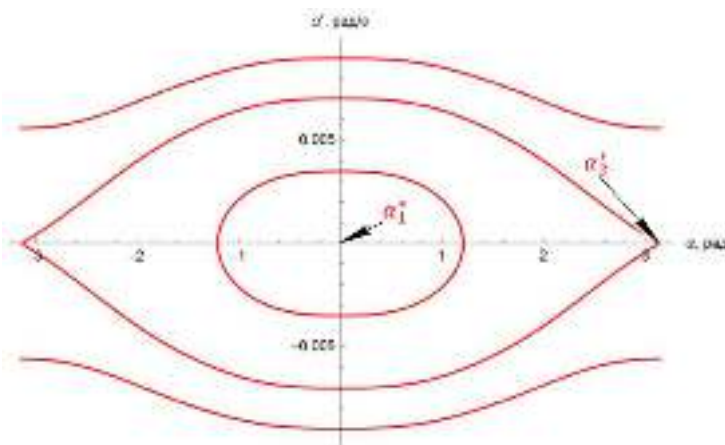


Рис. 1. Фазовый портрет: $|a| \geq 2|c|$

2. $c > 0,5|a_x|$, $c > 0$. В данном случае преобладающим является гравитационный момент. Фазовый портрет изображен на рис. 2. При таком соотношении имеют место четыре области движения НС: вращательная область и три колебательные области. В этом случае НС имеет четыре положения равновесия по углу атаки.

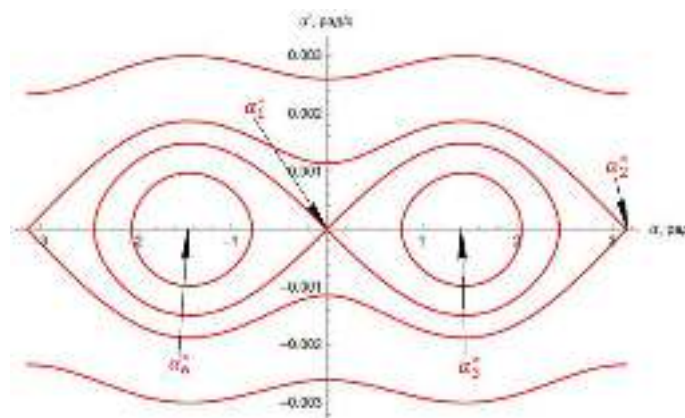


Рис. 2. Фазовый портрет: $c > 0,5|a|$, $c > 0$

3. $|c| > 0,5|a_x|$, $c < 0$. В данном случае преобладающим является гравитационный момент. При таком соотношении имеют место три области движения НС: вращательная область и две колебательные области (рис. 3). В этом случае НС имеет четыре положения равновесия по углу атаки.

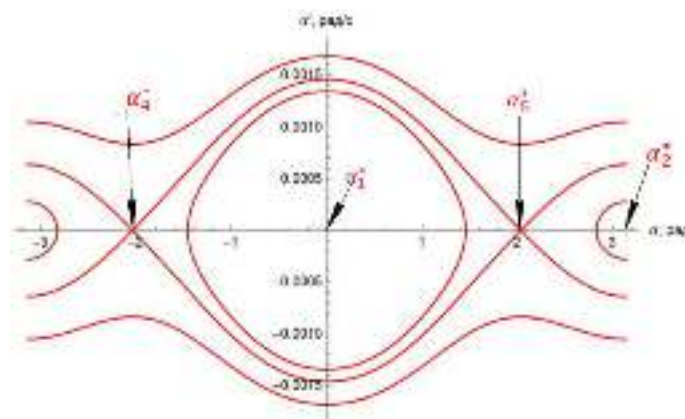


Рис. 3. Фазовый портрет: $|c| > 0,5|a|$, $c < 0$

Таким образом, в зависимости от знака коэффициента c , обусловленного действием гравитационного момента, и соотношения модулей коэффициентов возможны различные типы фазовых портретов. Для случая $x_d = 0$, $z_d \neq 0$ фазовый портрет первого типа (где преобладающим является аэродинамический момент) сдвинется на величину $\pm \frac{\pi}{2}$ в зависимости от знака z_d , а фазовые портреты второго и третьего типа кроме сдвига на $\pm \frac{\pi}{2}$ также меняются между собой местами. В более общем случае $x_d \neq 0$, $z_d \neq 0$ происходит сдвиг и деформация формы фазовых траекторий.

3. Упрощенная модель движения

В некоторых случаях качественная оценка движения НС возможна с использованием упрощенной модели плоского движения.

Рассмотрим случай, когда центр давления НС смещен только по продольной оси ($x_d \neq 0$, $z_d = 0$), в таком случае уравнение (1) примет вид:

$$\ddot{\alpha} - a_x(|\cos(\alpha)| + k_s|\sin(\alpha)|)\sin(\alpha) - c \sin(2\alpha) = 0.$$

Для упрощения вычислений разложим выражение $(|\cos(\alpha)| + k_s|\sin(\alpha)|)\sin(\alpha)$ в ряд Фурье по синусам, тогда нулевой член разложения a_0 будет иметь вид:

$$a_0 = \frac{4 + 8k_s}{3\pi} \sin(\alpha).$$

С учетом полученной аппроксимации синусом, исходное уравнение можно записать в виде:

$$\ddot{\alpha} - a \cdot \sin(\alpha) - c \cdot \sin(2\alpha) = 0, \quad (4)$$

где a – коэффициент, обусловленный аэродинамическим моментом, вычисляется по формуле:

$$a = \frac{(4 + 8k_s)c_0 S q}{3\pi J_y} x_d = \frac{(4 + 8k_s)}{3\pi} a_x.$$

Модель (4) используется в работах Белецкого [2] для анализа углового движения космического аппарата с синусоидальной зависимостью аэродинамического момента от угла атаки под действием аэродинамического и гравитационного моментов. Также эта модель использовалась в работах [3, 5] для предварительного анализа плоского движения НС CubeSat относительно центра масс.

На рис. 4 показан график сравнения величины $(|\cos(\alpha)| + k_s|\sin(\alpha)|)\sin(\alpha)$ с ее аппроксимированным значением $\frac{4+8k_s}{3\pi} \sin(\alpha)$.

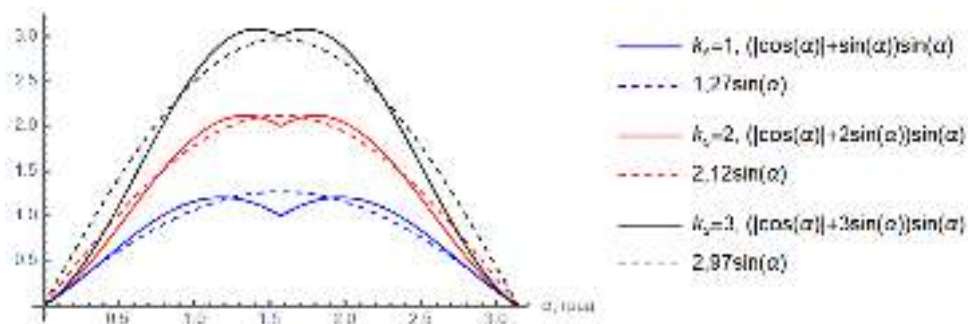


Рис. 4. Сравнение величины $(|\cos(\alpha)| + k_s \sin(\alpha)) \sin(\alpha)$ (сплошная линия) и ее аппроксимации синусоидальной зависимостью $m_{nk} \sin(\alpha)$ (пунктирная линия)

Из графика видно, что по мере увеличения значения k_s точность снижается.

В зависимости от величин a и c возможны следующие комбинации положений равновесия:

1. При $|c| \leq 0,5|a|$ возможно 2 положения равновесия:

$$\begin{aligned}\alpha_1^s &= 0 + 2n\pi \quad (n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \alpha_2^s &= \pi + 2n\pi \quad (n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots).\end{aligned}\quad (5)$$

2. При $|c| > 0,5|a|$ возможно 4 положения равновесия:

$$\begin{aligned}\alpha_1^s &= 0 + 2n\pi \quad (n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \alpha_2^s &= \pi + 2n\pi \quad (n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \alpha_3^s &= \arccos\left(-\frac{0,5a}{c}\right) + 2n\pi \quad (n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \alpha_4^s &= -\arccos\left(-\frac{0,5a}{c}\right) + 2n\pi \quad (n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots).\end{aligned}\quad (6)$$

Для упрощенной модели интеграл энергии имеет вид:

$$E_0 = a \cos \alpha_0 + c \cos^2 \alpha_0 + \frac{\dot{\alpha}_0^2}{2}.$$

Соответствующие фазовые портреты приведены в [2, с.128].

4. Сравнение моделей плоского движения

Проведем сравнение результатов расчета с использованием упрощенной модели, аппроксимированной синусом, и исходной модели углового движения.

Для примера рассмотрим НС формата CubeSat 3U с параметрами:

$$k_s = 3,4, S_{\text{хар}} = 0,01 \text{ м}^2, x_d = -0,012 \text{ м}, y_d = 0 \text{ м},$$

$$J_x = 0,08 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, J_z = 0,037 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, J_y = 0,038 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Рассмотрим высоту $H = 300$ км, тогда $c = 1,6 \cdot 10^{-6} \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$, $|a_1| = 2,8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$, $|a| = 1,3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$. На этой высоте большее воздействие на угловое движение оказывает аэродинамический момент. Фазовый портрет имеет одну колебательную область (фазовый портрет первого типа, как показано на рис. 1) для исходной и для аппроксимированной моделей ($|c| < 0,5|a_1|$ и $|c| < 0,5|a|$). Плотность атмосферы рассчитывается по ГОСТ 4401-83 [6].

На рисунках 5–6 приведено сравнение фазовых портретов движения упрощенной модели (синяя пунктирная линия) и исходной модели (красная сплошная линия) для различных смещений z_d .

В таблицы 2 приведены значения положений равновесия, рассчитанные по исходной модели движения и по упрощенной, в зависимости от значения смещения z_d .

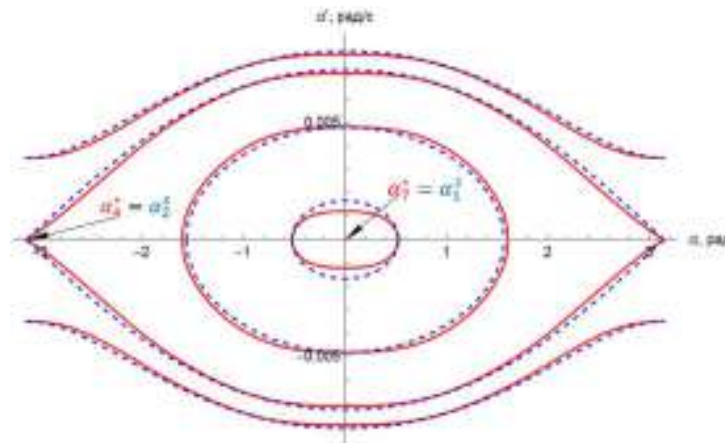


Рис. 5. Сравнение фазовых портретов при $z_d = 0$ м

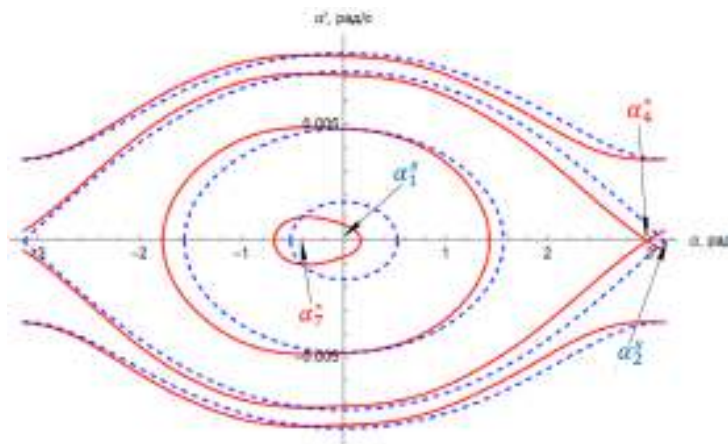


Рис. 6. Сравнение фазовых портретов при $z_d = 0,003$ м

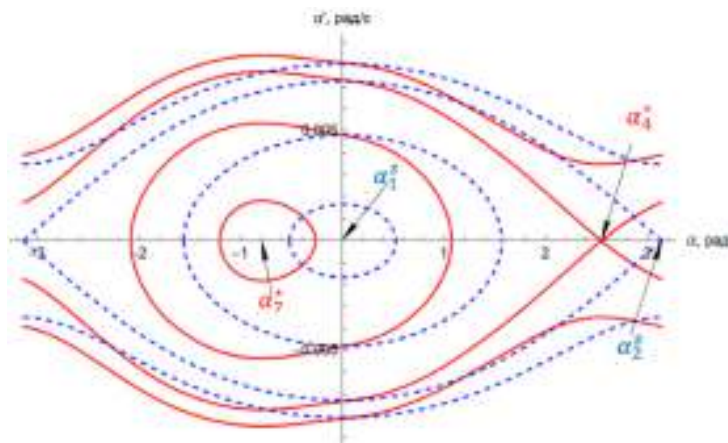


Рис. 7. Сравнение фазовых портретов при $z_d = 0,01$ м

Таблица 2. Положения равновесия для высоты $H=300$ км

z_d	0 м	0,001 м	0,003 м	0,005 м	0,008 м	0,01 м
α_1^s	0°	0°	0°	0°	0°	0°
α_7^s	0°	$-9,8^\circ$	$-21,3^\circ$	$-30,3^\circ$	$-40,7^\circ$	$-46,1^\circ$
$\Delta_1 = \alpha_1^s - \alpha_7^s $	0°	$9,8^\circ$	$21,3^\circ$	$30,3^\circ$	$40,7^\circ$	$46,1^\circ$
α_2^s	180°	180°	180°	180°	180°	180°
α_4^s	180°	$177,10^\circ$	$170,3^\circ$	$162,8^\circ$	$151,8^\circ$	$145,2^\circ$
$\Delta_2 = \alpha_2^s - \alpha_4^s $	0°	$2,9^\circ$	$9,7^\circ$	$17,2^\circ$	$28,2^\circ$	$34,8^\circ$

Можно сделать вывод, что при значении смещения $z_d = 0$, форма фазовых траекторий мало отличается (рис. 5), и положения равновесия совпадают (табл. 2). При этом при использовании упрощенной модели необходимо учитывать количественную ошибку оценки амплитуд. По мере увеличения величины z_d фазовые траектории начинают все больше расходиться, устойчивое положение равновесия α_7^* сдвигается влево (рис. 6, 7) и погрешность определения положений равновесия с использованием упрощенной модели углового движения возрастает (табл. 2).

На рисунках 8–9 приведено сравнение фазовых портретов движения упрощенной модели (синяя пунктирная линия) и исходной модели (красная сплошная линия) на высоте $H = 500$ км, для НС с приведенными выше параметрами ($c = 1,4 \cdot 10^{-6} \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$, $|a_1| = 8,8 \cdot 10^{-8} \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$, $|a| = 2,9 \cdot 10^{-7} \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$). Поскольку $|c| > 0,5|a_1|$, $|c| > 0,5|a|$, соблюдены оба условия существования дополнительных положений равновесия, при этом $c > 0$ и фазовый портрет имеет три колебательные области (фазовый портрет второго типа, как показано на рис. 2). В таблице 3 приведены значения положений равновесия, рассчитанные по исходной модели движения и по упрощенной, в зависимости от значения смещения z_d .

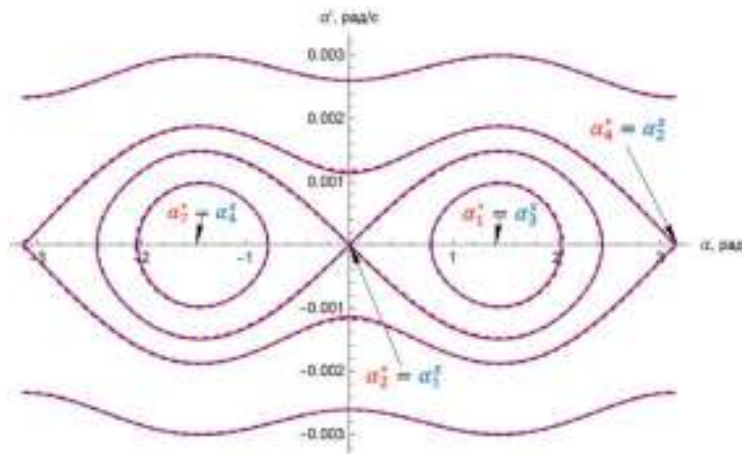


Рис. 8. Сравнение фазовых портретов при $z_d = 0$ м

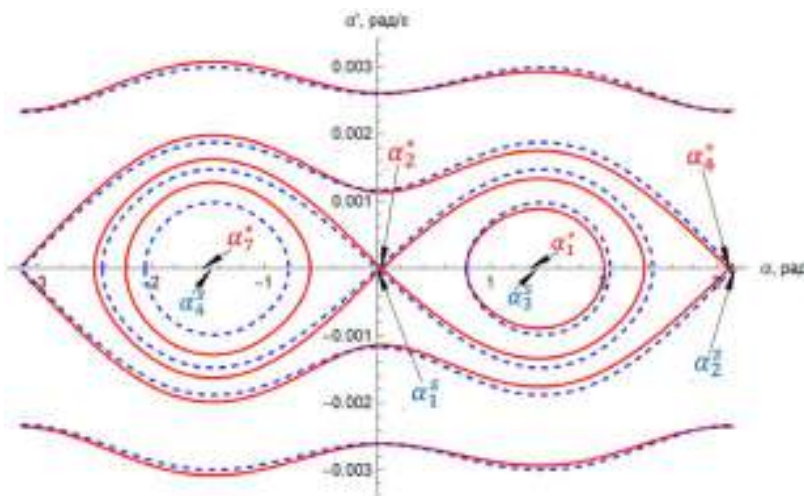


Рис. 9. Сравнение фазовых портретов при $z_d = 0,01$ м

Таблица 3. Положения равновесия для высоты $H=500$ км

z_d	0 м	0,001 м	0,003 м	0,005 м	0,008 м	0,01 м
α_1^s	0°	0°	0°	0°	0°	0°
α_2^*	0°	0,19°	0,6°	1°	1,6°	2,1°
$\Delta_1 = \alpha_1^s - \alpha_2^* $	0°	0,19°	0,6°	1°	1,6°	2,1°
α_2^s	180°	180°	180°	180°	180°	180°
α_4^*	180°	179,8°	179,5°	179,1°	178,5°	178,1°
$\Delta_2 = \alpha_2^s - \alpha_4^* $	0°	0,17°	0,5°	0,9°	1,5°	1,9°
α_3^s	83,1°	83,1°	83,1°	83,1°	83,1°	83,1°
α_1^*	82,7°	82,6°	82,5°	82,3°	82°	81,8°
$\Delta_3 = \alpha_3^s - \alpha_1^* $	0,4°	0,5°	0,7°	0,8°	1,1°	1,3°
α_4^s	-83,1°	-83,1°	-83,1°	-83,1°	-83,1°	-83,1°
α_7^*	-82,7°	-82,8°	-83,0°	-83,1°	-83,3°	-83,4°
$\Delta_4 = \alpha_4^s - \alpha_7^* $	0,4°	0,3°	0,16°	0,01°	0,2°	0,3°

Из рисунка 9 видно, что при увеличении величины z_d в исходной модели движения увеличивается левая колебательная область, а правая уменьшается, при этом устойчивые положения равновесия α_7^* и α_1^* также сдвигаются влево (рис. 9). В этом случае погрешность определения положений равновесия с использованием упрощенной модели углового движения возрастает с увеличением величины z_d (табл. 3).

Из данных, приведенных в таблицах 2 и 3, можно сделать вывод, что тип фазового портрета может влиять на величину погрешности определения положений равновесия при использовании упрощенной модели.

Сравним границу смены типа фазового портрета для упрощенной модели ($|c| > 0,5|a|$) и для исходной модели ($|c| > 0,5a_1$) на примере НС формата CubeSat 3U в зависимости от величин x_d, z_d, H (рис. 10). Пунктирной красной линией показана граница смены типа фазового портрета для упрощенной модели, сплошными линиями – для исходной при различных смещениях z_d .

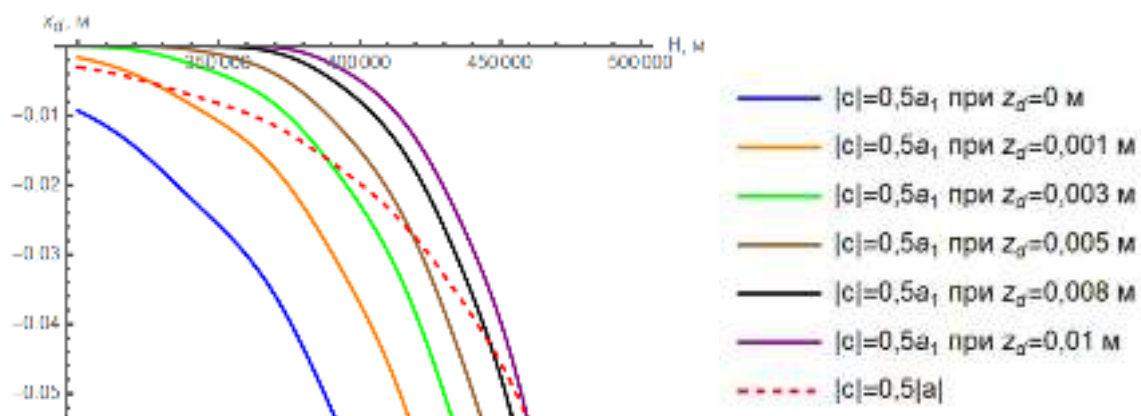


Рис. 10. Границы смены фазовых портретов

Из рисунка 10 можно найти область между пунктирной линией и соответствующей сплошной линией, где нельзя использовать упрощенную модель углового движения для анализа, поскольку в этой области качественно отличаются типы фазовых портретов.

Для иллюстрации рассмотрим точку (400 км, -0,014 м) для величины $z_d = 0,01$ м на параметрическом графике (рис. 10) для НС CubeSat формата 3U и построим фазовые портреты упрощенной (синяя пунктирная линия) и исходной (красная сплошная линия) моделей с данными параметрами (рис. 11).

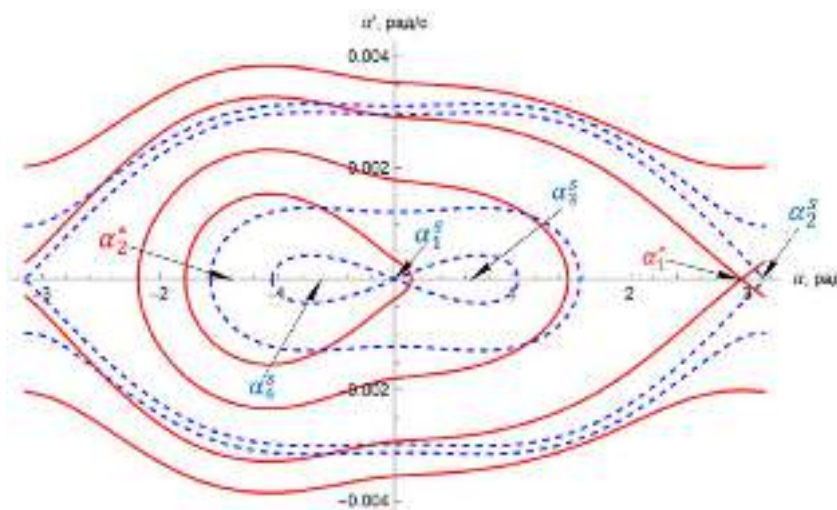


Рис. 11. Сравнение фазовых портретов при $z_d = 0,01$ м, $x_d = -0,014$ м, $H = 400$ км

Можно сделать вывод, что в данном случае нельзя использовать упрощенную модель движения для качественного анализа углового движения НС, поскольку типы фазовых портретов отличаются. Также нельзя использовать упрощенную модель углового движения для определения положений равновесия, так как при использовании формул (5) получим два угла, которые не будут являться положениями равновесия для исходной модели движения, у которой четыре положения равновесия.

Таким образом, помимо погрешности определения положений равновесия, при исследовании динамики углового движения НС стандарта CubeSat с использованием упрощенной модели необходимо учитывать ее применимость с учетом границы смены типа фазового портрета.

Заключение

В данной работе с использованием метода фазовой плоскости был проведен анализ плоского движения относительно центра масс наноспутника стандарта CubeSat под действием аэродинамического и гравитационного моментов на низких околоземных орбитах. Получены аналитические выражения для определения положений равновесий наноспутника относительно центра масс, а также условия их существования в зависимости от параметров НС и условий полета. Проведено сравнение исходной модели движения, учитывающей форму наноспутника стандарта CubeSat, и упрощенной, в которой аэродинамический момент аппроксимируется синусоидальной зависимостью от угла атаки. Определена область параметров, в которой использование упрощенной модели углового движения приводит к неверным результатам.

Список источников

1. California Polytechnic State University. Cubesat Design Specification Rev 14.1. 2022.
2. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
3. Белоконов И.В., Тимбай И.А., Барина Е.В. Выбор проектных параметров наноспутника формата CubeSat с пассивной системой стабилизации // Гироскопия и навигация. 2020. Т 28, № 1. С. 81–100. DOI: 10.17285/0869-7035.0025. EDN: UNANOX.
4. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
5. Барина Е.В., Белоконов И.В., Тимбай И.А. Предотвращение возможности возникновения резонансных режимов движения для низковысотных спутников класса CubeSat // Гироскопия и навигация. 2021. Т. 29, № 4. С. 1–19. DOI: 10.17285/0869-7035.0076 EDN: FUKUC.
6. ГОСТ 4401-81 Атмосфера стандартная. Параметры // Введ. 1981-02-27. М.: изд-во стандартов, 1981. 181 с.

References

1. California Polytechnic State University. Cubesat Design Specification Rev 14.1. 2022.
2. Beletskii, V.V. (1965), "Motion of an Artificial Satellite Relative to the Center of Mass" [Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass]. Moscow, Nauka, (in Russ.).
3. Belokonov, I. V., Timbai I.A. and Barinova, E. V. (2020), "Design Parameters Selection for CubeSat Nanosatellite with a Passive Stabilization System". Gyroscopy Navigation, vol. 11, № 2, pp. 149-161.
4. Gantmakher, F.R. (1966), "Lectures on analytical mechanics" (Lektsii po analiticheskoi mekhanike), Moscow: Nauka, (In Russ.).
5. Barinova, E.V., Belokonov, I.V. and Timbai, I.A. (2021), "Preventing Resonant Motion Modes for Low-Altitude CubeSat Nanosatellites". Gyroscopy and Navigation, vol. 12, №4, pp. 350-362.
6. Cavcar, M. (2000), "The international standard atmosphere" (ISA). Anadolu University, Turkey, T. 30, № 9, pp. 1-6.

Информация об авторах:

Е.В. Барина – кандидат технических наук, доцент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (443086, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34), SPIN-код: 1819-6469, Scopus Author ID: 56663083400, Web of Science Researcher ID: N-5595-2016;

И. А. Тимбай – доктор технических наук, профессор, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (443086, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34), SPIN-код: 9745-8650, Scopus Author ID: 6506069802, Web of Science Researcher ID: B-5794-2017;

Е. Миронов – студент, Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева (443086, Самарская область, г. Самара, Московское шоссе, д. 34).

Information about the authors:

E. V. Barinova – candidate of science (engineering), associate professor, Samara National Research University (34, Moskovskoye Shosse, Samara, Russia, 443086), SPIN-code: 1819-6469, Scopus Author ID: 56663083400, Web of Science Researcher ID: N-5595-2016;

I. A. Timbai – doctor of science (engineering), professor, Samara National Research University (34, Moskovskoye Shosse, Samara, Russia, 443086), SPIN-code: 9745-8650, Scopus Author ID: 6506069802, Web of Science Researcher ID: B-5794-2017;

Ye. Mironov – student, Samara National Research University (34, Moskovskoye Shosse, Samara, Russia, 443086).